

# Lezioni di Scienza delle Costruzioni

Claudio Franciosi

1 dicembre 2019



# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>xxi</b>
<b>Introduzione</b>	<b>xxiii</b>
<b>Colophon</b>	<b>xxvii</b>
<b>1 La cinematica del corpo rigido</b>	<b>1</b>
1.1 Configurazioni e vincoli . . . . .	1
1.2 Le coordinate Lagrangiane . . . . .	2
1.3 L'ipotesi di piccoli spostamenti . . . . .	3
1.4 L'ipotesi di rigidità . . . . .	4
1.5 Sistemi di punti con vincoli di rigidità . . . . .	6
1.6 Il corpo rigido . . . . .	6
<b>2 I vincoli</b>	<b>11</b>
2.1 I vincoli piani . . . . .	11
2.1.1 I vincoli semplici e la loro rappresentazione meccanica . . .	11
2.1.2 I vincoli doppi e la loro rappresentazione meccanica . . .	12
2.1.3 I vincoli tripli e la loro rappresentazione meccanica . . . .	13
2.1.4 Sul doppio bispendolo . . . . .	13
2.2 Le reazioni vincolari . . . . .	14
<b>3 La statica del corpo rigido</b>	<b>17</b>
3.1 Il principio dei lavori virtuali . . . . .	17
3.2 Le equazioni cardinali della statica . . . . .	18
3.3 Le reazioni vincolari . . . . .	19
<b>4 I vincoli interni</b>	<b>21</b>
4.1 Il solido monodimensionale, o trave . . . . .	21
4.2 La cinematica dei vincoli interni . . . . .	22
4.2.1 Vincoli semplici (sconnessioni doppie) . . . . .	22
4.2.2 Vincoli doppi (sconnessioni semplici) . . . . .	23
4.3 La statica dei vincoli interni . . . . .	24
<b>5 Analisi cinematica</b>	<b>27</b>
5.1 La classificazione cinematica delle strutture . . . . .	27

5.2	Esempi ad una singola trave . . . . .	28
5.3	Un esempio più complesso . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Analisi statica</b>	<b>33</b>
6.1	La classificazione statica delle strutture . . . . .	33
6.2	La scrittura delle equazioni di equilibrio . . . . .	34
6.3	Un esempio più complesso . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Il concetto di tensione</b>	<b>39</b>
7.1	Il concetto di materia . . . . .	39
7.1.1	I primi tentativi di formalizzazione . . . . .	40
7.1.2	La teoria molecolare di Navier-Cauchy . . . . .	41
7.1.3	La teoria energetica di George Green . . . . .	42
7.2	La nozione di forza . . . . .	42
7.2.1	Esempio . . . . .	44
7.3	L'assioma di separazione di Eulero . . . . .	45
7.4	La definizione del solido di Cauchy . . . . .	45
7.5	Componenti normali e tangenziali di tensione . . . . .	48
7.6	Componenti speciali di tensione . . . . .	49
7.7	Riflessioni critiche sul concetto di tensione . . . . .	50
7.8	Conclusioni . . . . .	52
<b>8</b>	<b>Il teorema di Cauchy–Poisson</b>	<b>53</b>
8.1	Il tetraedro elementare e le forze su esso agenti . . . . .	53
8.2	Le tensioni normali e tangenziali . . . . .	58
<b>9</b>	<b>Le equazioni indefinite di equilibrio</b>	<b>61</b>
9.1	Le forze agenti . . . . .	61
9.2	Le equazioni di equilibrio alla traslazione . . . . .	63
9.3	Le equazioni di equilibrio alla rotazione . . . . .	63
9.4	La notazione matriciale ed indiciale . . . . .	64
9.5	Un approccio alternativo . . . . .	65
<b>10</b>	<b>Tensioni e direzioni principali</b>	<b>67</b>
10.1	Tensioni normali e tangenziali, rivisitate . . . . .	67
10.2	La ricerca della massima e minima tensione normale . . . . .	68
10.3	Le tensioni principali . . . . .	69
10.4	Le direzioni principali di tensione . . . . .	71
<b>11</b>	<b>Le tensioni tangenziali</b>	<b>75</b>
11.1	Il teorema di Cauchy–Poisson rivisitato . . . . .	75
11.2	L'ellissoide delle tensioni . . . . .	76
11.3	La ricerca della massima e minima tensione tangenziale . . . . .	77
11.3.1	L'intensità della tensione tangenziale massima . . . . .	79
11.3.2	La tensione normale associata alla massima tensione tangenziale . . . . .	79

11.3.3	La direzione della tensione tangenziale massima . . . . .	79
<b>12</b>	<b>I cerchi di Mohr</b>	<b>81</b>
12.1	La convenzione sui segni di Otto Mohr . . . . .	82
12.2	Il teorema di Mohr . . . . .	82
12.3	L'utilizzo del cerchio di Mohr . . . . .	84
12.3.1	Esempi . . . . .	87
12.4	Tensioni principali . . . . .	88
<b>13</b>	<b>Il gradiente di deformazione</b>	<b>93</b>
13.1	Gradiente di spostamento . . . . .	93
13.2	Gradiente di deformazione . . . . .	96
13.3	Allungamenti percentuali . . . . .	97
13.4	Variazione di angolo . . . . .	98
<b>14</b>	<b>Il tensore di Green-Lagrange</b>	<b>101</b>
14.1	Il tensore di Green-Lagrange . . . . .	101
14.2	Gli allungamenti percentuali . . . . .	103
14.3	Definizione di deformazione . . . . .	103
14.4	Le componenti normali di deformazione . . . . .	104
14.5	Gli angoli taglienti . . . . .	104
14.6	Le deformazioni principali . . . . .	106
14.7	La ricerca delle direzioni principali . . . . .	107
<b>15</b>	<b>La teoria lineare</b>	<b>109</b>
15.1	L'ipotesi di piccole deformazioni . . . . .	109
15.2	Piccoli gradienti di spostamento . . . . .	110
15.3	La decomposizione dello spostamento . . . . .	111
15.3.1	La rotazione rigida . . . . .	111
15.3.2	La deformazione pura . . . . .	112
15.4	L'interpretazione fisica delle direzioni principali di deformazione .	113
15.5	Le condizioni di compatibilità . . . . .	114
15.6	Le identità di Bianchi . . . . .	116
<b>16</b>	<b>Le relazioni costitutive</b>	<b>119</b>
16.1	Introduzione . . . . .	119
16.2	La legge di Hooke e la risposta elastica . . . . .	120
16.3	L'ipotesi molecolare . . . . .	123
16.4	L'ipotesi di George Green . . . . .	124
16.5	Il materiale linearmente elastico . . . . .	127
16.6	Il potenziale elastico e la linearità elastica . . . . .	128
<b>17</b>	<b>Il solido anisotropo</b>	<b>131</b>
17.1	I materiali monoclina . . . . .	132
17.2	I materiali ortotropi . . . . .	133
17.3	I materiali trasversalmente isotropi . . . . .	135

17.4 I materiali isotropi . . . . .	140
17.5 Le costanti ingegneristiche per i materiali anisotropi . . . . .	141
<b>18 Il solido isotropo</b>	<b>145</b>
18.1 Legge di Hooke per materiale isotropo . . . . .	145
18.2 Modulo di Young e coefficiente di Poisson . . . . .	148
18.3 Relazione tra i moduli di Lamè ed i moduli ingegneristici . . . . .	150
18.4 Limitazioni sulle costanti elastiche . . . . .	151
<b>19 L'equilibrio elastico</b>	<b>153</b>
19.1 I problemi ai limiti dell'elasticità . . . . .	153
19.2 Le equazioni di Navier–Cauchy . . . . .	154
19.2.1 Le equazioni di Navier–Cauchy in notazione matriciale . . . . .	155
19.3 Il principio di sovrapposizione . . . . .	157
19.4 Il principio di unicità . . . . .	157
<b>20 Stati piani di tensione e spostamento</b>	<b>159</b>
20.1 Stati monoassiali di tensione . . . . .	159
20.2 Stati monoassiali di deformazione . . . . .	161
20.3 Stato piano di spostamento . . . . .	162
20.4 Stato piano di tensione . . . . .	164
20.5 Gli stati piani e la funzione di tensione . . . . .	166
20.5.1 Gli stati piani di tensione . . . . .	167
20.5.2 Gli stati piani di spostamento . . . . .	168
20.5.3 La funzione di Airy nel caso di forze di massa nulle . . . . .	169
20.5.4 Il caso della lastra rettangolare . . . . .	170
<b>21 I principi variazionali</b>	<b>175</b>
21.1 Il principio dei lavori virtuali . . . . .	175
21.2 Il principio degli spostamenti virtuali . . . . .	180
21.3 Il principio delle forze virtuali . . . . .	181
21.4 L'energia elastica . . . . .	182
21.5 Energia potenziale totale . . . . .	183
21.6 L'energia complementare . . . . .	183
21.7 Energia complementare totale . . . . .	184
<b>22 La geometria delle aree</b>	<b>187</b>
22.1 La nozione di baricentro . . . . .	187
22.2 Il tensore dei momenti di inerzia . . . . .	189
22.2.1 Le leggi di Huyghens . . . . .	190
22.2.2 I momenti centrali di inerzia . . . . .	191
22.3 La sezione rettangolare . . . . .	192
22.4 La sezione circolare e la corona circolare . . . . .	194
22.5 La sezione triangolare . . . . .	195
22.6 La sezione ellittica . . . . .	197

<b>23 Il problema della trave</b>	<b>199</b>
23.1 La descrizione del solido . . . . .	199
23.2 La posizione del problema . . . . .	200
23.3 Le caratteristiche della sollecitazione esterna . . . . .	200
23.4 Le caratteristiche della sollecitazione interna . . . . .	202
23.5 Le caratteristiche della sollecitazione esterna in termini di tensioni	203
23.6 Il problema debole di De Saint–Venant . . . . .	205
<b>24 Il postulato di De Saint–Venant</b>	<b>207</b>
24.1 L’ipotesi di De Saint–Venant sulle tensioni . . . . .	207
24.1.1 Le condizioni ai limiti . . . . .	209
24.1.2 Le leggi di Hooke . . . . .	209
24.1.3 Le equazioni di Navier–Cauchy . . . . .	210
24.2 Il postulato di De Saint–Venant nella sua forma storica . . . . .	211
24.3 Conseguenze del postulato . . . . .	214
24.4 Le formulazioni energetiche del postulato di De Saint–Venant . . . . .	215
24.4.1 Il teorema di Toupin . . . . .	217
<b>25 Sforzo assiale e flessione</b>	<b>219</b>
25.1 Lo sforzo assiale . . . . .	219
25.1.1 L’energia di deformazione . . . . .	222
25.2 Flessione retta nel piano . . . . .	223
25.2.1 La deduzione degli spostamenti . . . . .	223
25.2.2 La deduzione delle caratteristiche . . . . .	225
25.2.3 Analisi degli spostamenti . . . . .	227
25.2.4 L’energia di deformazione . . . . .	231
25.3 Flessione retta fuori dal piano . . . . .	231
25.3.1 La deduzione degli spostamenti . . . . .	232
25.3.2 La deduzione delle caratteristiche . . . . .	233
25.3.3 Analisi degli spostamenti . . . . .	235
25.3.4 L’energia di deformazione . . . . .	236
25.4 L’ortogonalità energetica . . . . .	236
<b>26 Flessione deviata</b>	<b>237</b>
26.1 Flessione deviata . . . . .	237
26.2 Sforzo normale eccentrico . . . . .	241
26.3 Il profilato ad L . . . . .	242
26.3.1 Il calcolo delle caratteristiche di inerzia . . . . .	242
26.3.2 Il diagramma delle tensioni . . . . .	246
<b>27 Torsione</b>	<b>251</b>
27.1 La deduzione degli spostamenti . . . . .	253
27.2 La deduzione della funzione $\Psi$ . . . . .	255
27.3 La deduzione delle caratteristiche . . . . .	257
27.4 Analisi degli spostamenti . . . . .	259
27.4.1 La sezione retta . . . . .	260

27.4.2	Le fibre . . . . .	261
27.5	Lo studio del vettore di tensione tangenziale . . . . .	262
27.6	L'energia di deformazione . . . . .	263
27.7	Le tensioni principali ed il Cerchio di Mohr . . . . .	264
27.8	Appendice . . . . .	264
<b>28</b>	<b>Sezioni circolari</b>	<b>267</b>
28.1	La torsione nelle travi a sezione circolare . . . . .	267
28.1.1	La sezione a corona circolare . . . . .	269
28.2	La sezione ellittica . . . . .	269
28.2.1	Alcune considerazioni pratiche . . . . .	274
<b>29</b>	<b>Taglio</b>	<b>277</b>
29.1	La deduzione degli spostamenti . . . . .	277
29.2	La deduzione della funzione $\Phi$ . . . . .	280
29.3	La deduzione delle caratteristiche . . . . .	281
29.4	La forma finale di spostamenti e tensioni . . . . .	283
29.5	L'energia di deformazione . . . . .	284
29.6	Lo studio delle tensioni tangenziali . . . . .	285
<b>30</b>	<b>La teoria di Jourawsky</b>	<b>289</b>
30.1	La trattazione di Jourawski . . . . .	289
30.2	Il fattore di taglio . . . . .	296
30.3	La sezione rettangolare . . . . .	296
<b>31</b>	<b>Teoria di Eulero</b>	<b>299</b>
31.1	Le ipotesi geometriche di base . . . . .	300
31.2	Le ipotesi cinematiche di base . . . . .	301
31.3	La linea elastica ed il principio degli spostamenti virtuali . . . . .	304
31.4	Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale . . . . .	308
31.5	L'approccio geometrico . . . . .	309
<b>32</b>	<b>Il problema ai limiti assiale</b>	<b>315</b>
32.1	Carico distribuito . . . . .	315
32.1.1	Asta fissa agli estremi . . . . .	315
32.1.2	Asta fissa a sinistra e libera a destra . . . . .	317
32.2	L'asta soggetta a forza concentrata all'estremo . . . . .	317
<b>33</b>	<b>Le travi ad una campata</b>	<b>321</b>
33.1	La trave incastrata agli estremi . . . . .	322
33.1.1	Una digressione storica : l'errore di Weisbach . . . . .	327
33.2	La trave appoggiata agli estremi . . . . .	328
33.3	La trave a mensola . . . . .	331
33.4	La trave con incastro e bipendolo . . . . .	338
33.5	La trave con appoggio e bipendolo . . . . .	342
<b>34</b>	<b>Ancora sulle travi ad una campata</b>	<b>347</b>

34.1	Introduzione . . . . .	347
34.2	La trave a mensola . . . . .	349
34.3	La trave appoggiata . . . . .	353
34.4	La trave incastrata ed appoggiata . . . . .	355
34.5	La trave con incastro e bipendolo . . . . .	359
<b>35</b>	<b>I vincoli imperfetti</b>	<b>363</b>
35.1	I cedimenti anelastici . . . . .	363
35.1.1	Le travi isostatiche . . . . .	363
35.1.2	Le travi iperstatiche . . . . .	365
35.2	I cedimenti elastici . . . . .	365
35.2.1	L'energia elastica del vincolo cedevole . . . . .	367
35.2.2	Condizioni ai limiti . . . . .	368
<b>36</b>	<b>Le travi a più campate</b>	<b>373</b>
36.1	I vincoli intermedi esterni . . . . .	373
36.1.1	Il caso dell'appoggio . . . . .	374
36.1.2	Il caso del bipendolo . . . . .	375
36.2	Esempi . . . . .	376
36.3	I vincoli interni . . . . .	380
36.3.1	Il caso della cerniera . . . . .	381
36.3.2	Il caso del bipendolo . . . . .	381
36.4	Esempi . . . . .	382
<b>37</b>	<b>Ancora sulle travi a più campate</b>	<b>393</b>
37.1	Le forze concentrate intermedie . . . . .	393
37.2	Alcuni esempi . . . . .	394
<b>38</b>	<b>La teoria di Timoshenko</b>	<b>399</b>
38.1	Le ipotesi di base per la trave di Timoshenko . . . . .	400
38.2	Lo studio della linea elastica . . . . .	403
38.2.1	Le condizioni di vincolo . . . . .	406
38.3	La trave a mensola con forza all'estremo libero . . . . .	406
38.3.1	Discussione dei risultati . . . . .	408
38.3.2	Esempio numerico . . . . .	408
38.4	La trave a mensola con carico distribuito . . . . .	409
38.4.1	Discussione dei risultati . . . . .	410
38.5	La trave appoggiata con carico distribuito . . . . .	411
38.5.1	Discussione dei risultati . . . . .	412
38.6	Il caso della cerniera interna . . . . .	412
<b>39</b>	<b>Le distorsioni</b>	<b>417</b>
39.1	Le distorsioni distribuite . . . . .	417
39.2	Le distorsioni concentrate . . . . .	417
39.3	Il caso dei sistemi monodimensionali piani . . . . .	418
39.4	Le distorsioni concentrate ed il metodo della linea elastica . . . . .	419

39.5	Distorsioni distribuite e variazioni termiche . . . . .	423
39.6	Le distorsioni distribuite ed il metodo della linea elastica . . . . .	425
<b>40</b>	<b>I corollari di Mohr</b> . . . . .	<b>429</b>
40.1	L'analogia di Mohr . . . . .	429
40.1.1	La trave ausiliaria e le condizioni ai limiti . . . . .	431
40.2	La trave appoggiata . . . . .	433
40.2.1	La trave appoggiata soggetta a forza in mezzzeria . . . . .	433
40.2.2	La trave appoggiata soggetta a carico uniformemente distribuito . . . . .	434
40.2.3	La trave appoggiata soggetta a coppia concentrata in un estremo . . . . .	435
40.3	La trave a mensola . . . . .	437
40.3.1	La trave a mensola soggetta a forza nell'estremo libero . . . . .	438
40.3.2	La trave a mensola soggetta a carico uniformemente distribuito . . . . .	439
40.3.3	La trave a mensola soggetta a coppia concentrata in un estremo . . . . .	440
<b>41</b>	<b>Le equazioni di congruenza</b> . . . . .	<b>441</b>
41.1	Un esempio . . . . .	442
41.2	Le equazioni dei tre momenti . . . . .	444
<b>42</b>	<b>Il principio dei lavori virtuali</b> . . . . .	<b>449</b>
42.1	Il principio dei lavori virtuali . . . . .	449
42.1.1	La presenza delle distorsioni distribuite . . . . .	452
42.1.2	La presenza di vincoli cedevoli . . . . .	452
42.2	Strutture isostatiche . . . . .	453
42.2.1	Un esempio per il calcolo di uno spostamento su struttura isostatica . . . . .	454
42.3	Strutture iperstatiche . . . . .	457
42.3.1	Un esempio . . . . .	457
<b>43</b>	<b>Linee di influenza</b> . . . . .	<b>461</b>
43.1	Il principio generale di reciprocità . . . . .	461
43.1.1	Il principio di Betti . . . . .	463
43.1.2	Il principio di Colonnetti . . . . .	464
43.1.3	Il principio di Volterra . . . . .	465
43.2	Gli enti duali . . . . .	465
43.3	Spostamenti per forze viaggianti . . . . .	467
43.4	Caratteristiche per forze viaggianti . . . . .	472
43.5	Spostamenti per distorsioni viaggianti . . . . .	480
43.6	Caratteristiche per distorsioni viaggianti . . . . .	485
<b>44</b>	<b>I carichi assiali sulle travi</b> . . . . .	<b>489</b>
44.1	L'energia potenziale del carico assiale . . . . .	490

44.2	La deduzione della linea elastica . . . . .	491
44.3	L'approccio geometrico . . . . .	493
44.4	La soluzione dell'equazione differenziale . . . . .	494
44.5	Il concetto di carico critico . . . . .	497
44.6	Il calcolo del carico critico per differenti vincoli . . . . .	497

# Elenco delle figure

1.1	Il punto $M$ è vincolato alla circonferenza di raggio $R$ . . . . .	3
1.2	Piccoli spostamenti . . . . .	4
1.3	Il vincolo di rigidità: $RN' = MM'$ e quindi $NR = NN' - MM'$ . . . . .	5
1.4	Spostamento rigido infinitesimo . . . . .	8
1.5	Lo spostamento rigido come rotazione intorno al centro istantaneo di rotazione $C$ . . . . .	9
2.1	I vincoli semplici ed i loro modelli meccanici . . . . .	12
2.2	I vincoli doppi ed i loro modelli meccanici . . . . .	13
2.3	Il vincolo triplo, ed il doppio bipendolo . . . . .	14
2.4	Carrelli a piano di scorrimento verticale, orizzontale o inclinato, e loro equivalente statico . . . . .	14
2.5	Appoggio e bipendolo, e loro equivalente statico . . . . .	15
2.6	Incastro e doppio bipendolo, e loro equivalente statico . . . . .	15
4.1	I tre possibili movimenti relativi in corrispondenza del punto $A$ . . . . .	22
4.2	Il pendolo ad asse orizzontale ed il suo cinematismo . . . . .	23
4.3	Il doppio bipendolo ed il suo cinematismo . . . . .	23
4.4	La cerniera ed il suo cinematismo . . . . .	24
4.5	Il bipendolo ad asse orizzontale ed il suo cinematismo . . . . .	25
4.6	Il pendolo ad asse orizzontale ed il suo equivalente statico . . . . .	25
4.7	Il doppio bipendolo ed il suo equivalente statico . . . . .	26
4.8	La cerniera ed il suo equivalente statico . . . . .	26
4.9	Il doppio pendolo ad asse orizzontale ed il suo equivalente statico . . . . .	26
5.1	Quattro semplici esempi di analisi cinematica . . . . .	29
5.2	Un telaio zoppo di esempio . . . . .	30
5.3	Il meccanismo per il telaio di Figura 5.2 . . . . .	32
6.1	Due esempi di analisi statica . . . . .	34
6.2	Altri due esempi di analisi statica . . . . .	35
6.3	Un telaio zoppo per l'analisi statica . . . . .	37
6.4	Le incognite statiche per il telaio zoppo . . . . .	37
7.1	N.I.Muskhelishvili . . . . .	42

ELENCO DELLE FIGURE

---

7.2	Uno schema di copertura in legno . . . . .	44
7.3	Leonardo Eulero . . . . .	45
7.4	La pagina 42 del “De la pression ou tension dans un corps solide”, Exercices de Mathématiques, <b>2</b> (1827) di Cauchy, contenente la definizione di tensione . . . . .	46
7.5	La definizione di tensione secondo Cauchy . . . . .	47
7.6	Componenti normali e tangenziali di tensione . . . . .	48
7.7	Componenti normali e tangenziali di tensione: una diversa rappresentazione . . . . .	49
7.8	La scomposizione della componente tangenziale di tensione . . . . .	49
7.9	Le nove componenti cartesiane di tensione nel punto $P$ agenti sui tre piani di normale positiva . . . . .	51
7.10	Le nove componenti cartesiane di tensione nel punto $P$ agenti sui tre piani di normale negativa . . . . .	51
8.1	Il tetraedro elementare e le forze interne su di esso agenti . . . . .	54
8.2	Il tetraedro elementare e le componenti delle forze interne su di esso agenti lungo i tre assi coordinati . . . . .	55
8.3	Siméon-Denis Poisson . . . . .	56
8.4	Augustin-Louis Cauchy in un dipinto di J.Roller, circa 1840 . . . . .	59
9.1	Le componenti di tensione positive agenti sulle sei facce del parallelepipedo . . . . .	62
10.1	Le direzioni principali di tensione . . . . .	70
10.2	Le componenti della tensione principale $t_n$ . . . . .	70
10.3	L’elemento rettangolare orientato secondo gli assi principali, e quindi soggetto alle sole tensioni normali . . . . .	72
11.1	Gabriel Lamé . . . . .	76
11.2	Tensioni tangenziali massime e tensioni normali associate . . . . .	80
12.1	Otto Mohr . . . . .	81
12.2	La convenzione di Otto Mohr . . . . .	82
12.3	Componenti cartesiane e componenti locali di tensione . . . . .	83
12.4	La costruzione del cerchio di Mohr . . . . .	85
12.5	L’utilizzo del cerchio di Mohr per il calcolo dello stato tensionale sul generico elemento piano di normale $\mathbf{n}$ . . . . .	86
12.6	Un esempio di cerchio di Mohr . . . . .	87
12.7	Un esempio di cerchio di Mohr . . . . .	88
12.8	Il cerchio principale di Mohr per i fasci che si appoggiano ad un asse principale . . . . .	89
12.9	I tre cerchi principali di Mohr per i fasci che si appoggiano alle tre direzioni principali . . . . .	91
12.10	Lo stato tensionale corrispondente alla massima tensione tangenziale . . . . .	91

13.1	Le componenti di spostamento del punto generico $M$ . . . . .	94
13.2	Il segmento $MN$ ed il suo trasformato $M'N'$ . . . . .	94
13.3	La trasformazione subita da una terna di segmenti paralleli agli assi coordinati . . . . .	99
14.1	Joseph–Louis Lagrange . . . . .	102
14.2	L'angolo tagliante $\gamma_{12}$ . . . . .	106
15.1	G. Stokes . . . . .	112
15.2	Gli spostamenti da deformazione pura e le direzioni principali di deformazione . . . . .	113
15.3	Adhémar–Jean–Claude Barré De Saint–Venant . . . . .	116
15.4	Luigi Bianchi . . . . .	117
16.1	L'apparato sperimentale di Robert Hooke . . . . .	121
16.2	Il risultato di un tipico esperimento in regime monoassiale di tensione . . . . .	123
16.3	Il mulino di famiglia di George Green . . . . .	125
16.4	Carlo Alberto Castigliano . . . . .	129
17.1	La simmetria esibita dai materiali monoclini: nulla varia ribaltando l'asse verticale . . . . .	133
17.2	La simmetria esibita dai materiali ortotropi: nulla varia ribaltando gli assi $X_1$ ed $X_3$ . . . . .	134
17.3	La simmetria nei materiali trasversalmente isotropi: nulla varia a seguito di una rotazione intorno all'asse $X_3$ . . . . .	135
18.1	Thomas Young . . . . .	149
19.1	Claude–Louis Navier . . . . .	156
19.2	Gustav R. Kirchhoff . . . . .	158
20.1	Stato monoassiale di tensione . . . . .	160
20.2	Un cilindro infinitamente lungo in stato piano di spostamento . . . . .	165
20.3	Altri due esempi di stati piani di spostamento: un terrapieno ed una galleria . . . . .	165
20.4	Uno stato piano di tensione . . . . .	165
20.5	Lastra sottile in stato piano di tensione . . . . .	166
20.6	G.B. Airy . . . . .	169
20.7	Un dominio rettangolare in stato piano . . . . .	171
20.8	Le forze esterne corrispondenti ad una funzione di Airy polinomiale di secondo grado . . . . .	172
20.9	Le forze esterne corrispondenti ad una funzione di Airy polinomiale di terzo grado $\Phi(x_1, x_2) = \frac{c_3}{6}x_2^3$ . . . . .	174
20.10	Le forze esterne corrispondenti ad una funzione di Airy polinomiale di terzo grado $\Phi(x_1, x_2) = \frac{c_1}{3}x_1^2x_2$ . . . . .	174

ELENCO DELLE FIGURE

---

21.1	Le forze elementari agenti su una faccia del parallelepipedo, e le corrispondenti deformazioni . . . . .	179
21.2	Gustavo Colonnetti . . . . .	184
22.1	La traslazione rigida del sistema di riferimento . . . . .	188
22.2	Rotazione rigida del sistema di riferimento . . . . .	189
22.3	Christiaan Huygens . . . . .	191
22.4	Una sezione rettangolare di base $b$ ed altezza $h$ . . . . .	193
22.5	Il caso della sezione circolare . . . . .	194
22.6	Il caso della sezione triangolare . . . . .	196
22.7	Il baricentro della sezione triangolare e gli assi baricentrici . . . . .	197
22.8	Una sezione di forma ellittica . . . . .	198
23.1	Il solido del tipo trave . . . . .	199
23.2	Le caratteristiche della sollecitazione interna . . . . .	203
23.3	Le caratteristiche della sollecitazione esterna sulla trave . . . . .	204
24.1	Il comportamento della trave alla luce dell'ipotesi sullo stato tensionale . . . . .	208
24.2	J. Boussinesq . . . . .	213
24.3	La distanza di estinzione . . . . .	214
24.4	Gaetano Fichera . . . . .	216
24.5	Il cilindro identificato dalle sezioni rette a distanza $x_3$ ed $L/2$ dalla base di sinistra . . . . .	217
25.1	La sollecitazione di trazione e compressione (adattato da G. Fichera <i>Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica classica</i> ) . . . . .	222
25.2	Flessione nel piano . . . . .	226
25.3	Momenti flettenti positivi e diagramma di tensioni alla Navier . . . . .	227
25.4	La planeità delle sezioni rette . . . . .	228
25.5	La planeità delle sezioni rette (adattato da G. Fichera <i>Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica classica</i> ) . . . . .	229
25.6	La deformazione di un tronco di trave soggetto a flessione . . . . .	230
25.7	La flessione fuori del piano . . . . .	234
25.8	Momenti flettenti positivi per la flessione fuori dal piano . . . . .	235
26.1	Il regime di flessione deviata . . . . .	238
26.2	La flessione deviata come somma di due flessioni rette . . . . .	239
26.3	Calcolo dell'angolo tra l'asse neutro e l'asse $X_1$ . . . . .	240
26.4	La composizione delle due coppie . . . . .	241
26.5	La composizione in un unico sforzo normale con eccentricità $e$ . . . . .	242
26.6	Il profilato ad L a lati uguali . . . . .	243
26.7	I due rettangoli in cui è scomposta la sezione, e gli assi di primo riferimento . . . . .	244
26.8	Gli assi centrali di inerzia . . . . .	246
26.9	Il diagramma delle tensioni dovute alla coppia $M_1$ . . . . .	247

26.10	Il diagramma delle tensioni dovute alla coppia $M_2$ . . . . .	248
26.11	Il diagramma finale delle tensioni . . . . .	249
27.1	La bilancia torsionale di Coulomb . . . . .	252
27.2	Il frontespizio della memoria di De Saint-Venant sulla torsione	253
27.3	Il calcolo dei coseni direttori . . . . .	256
27.4	Lo spostamento dei punti nel piano della sezione retta . . . . .	260
27.5	La sollecitazione di torsione, adattato da G. Fichera <i>Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica classica</i> . . . . .	262
27.6	Il cerchio di Mohr per stati tensionali da torsione . . . . .	265
27.7	La formula di Green–Riemann . . . . .	266
28.1	La sezione circolare . . . . .	268
28.2	Lo stato tensionale su una sezione circolare soggetta a torsione	269
28.3	La sezione a corona circolare ed il suo stato tensionale . . . . .	270
28.4	L’andamento della tensione tangenziale . . . . .	272
28.5	Similitudine geometrica per dimostrare la (28.30) . . . . .	273
28.6	Lo stato tensionale lungo il generico diametro . . . . .	274
28.7	Gli spostamenti da ingobbimento della sezione ellittica . . . . .	275
29.1	Le caratteristiche della sollecitazione esterna per il quinto caso di De Saint–Venant . . . . .	282
29.2	Le caratteristiche della sollecitazione interna su una generica sezione retta . . . . .	283
29.3	La sollecitazione da taglio, adattata da G.Fichera, <i>Metodi matematici nuovi nella Fisica Matematica classica</i> . . . . .	284
30.1	Dmitrij Ivanovič Jouravskij . . . . .	290
30.2	Il volume $dV'$ , e la corrispondente sezione $\Sigma'$ . . . . .	291
30.3	L’elemento di trave da equilibrare alla Jourawski e le tensioni su di esso agenti . . . . .	292
30.4	Il calcolo della componente $\sigma_{13}$ di tensione . . . . .	294
30.5	Il caso della corda generica . . . . .	295
30.6	Le tensioni tangenziali nel caso della corda non parallela all’asse neutro . . . . .	296
30.7	La sezione rettangolare soggetta a taglio . . . . .	297
30.8	Il diagramma delle tensioni per la sezione rettangolare . . . . .	298
31.1	L. Eulero . . . . .	300
31.2	La trave da studiare . . . . .	301
31.3	Le ipotesi di Eulero-Bernoulli . . . . .	302
31.4	Il concio elementare e le forze su di esso agenti . . . . .	304
31.5	Le condizioni di vincolo previste dalla teoria di Eulero–Bernoulli - a) incastro, b) appoggio, c) bipendolo, d) estremo libero . . . . .	311
32.1	Asta fissa agli estremi soggetta a carico distribuito uniforme: diagramma degli spostamenti e degli sforzi assiali . . . . .	316

## ELENCO DELLE FIGURE

---

32.2	Le reazioni assiali per l'asta soggetta a carico uniformemente distribuita . . . . .	317
32.3	Asta fissa a sinistra e libera a destra : diagramma degli spostamenti e degli sforzi assiali . . . . .	318
32.4	L'asta soggetta a carico concentrato nell'estremo libero . . . . .	319
33.1	La trave doppiamente incastrata soggetta ad un carico uniformemente distribuito . . . . .	322
33.2	Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave doppiamente incastrata . . . . .	324
33.3	Le reazioni per la trave incastrata agli estremi . . . . .	326
33.4	Il diagramma del momento flettente per trave doppiamente incastrata, secondo Weisbach . . . . .	327
33.5	La trave semplicemente appoggiata . . . . .	328
33.6	Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave doppiamente appoggiata . . . . .	329
33.7	Le reazioni per la trave appoggiata agli estremi . . . . .	330
33.8	La trave a mensola . . . . .	331
33.9	La trave a mensola soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli . . . . .	333
33.10	Le reazioni per la trave a mensola . . . . .	334
33.11	La trave incastrata–appoggiata . . . . .	335
33.12	La trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli . . . . .	337
33.13	Le reazioni per la trave incastrata ed appoggiata . . . . .	338
33.14	La trave con incastro e bipendolo . . . . .	339
33.15	La trave con incastro a sinistra e con bipendolo a destra, soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli . . . . .	340
33.16	Le reazioni per la trave con incastro e bipendolo . . . . .	341
33.17	La trave con appoggio e bipendolo . . . . .	343
33.18	Le reazioni per la trave con appoggio e bipendolo . . . . .	343
33.19	La trave con appoggio a sinistra e con bipendolo a destra, soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli . . . . .	345
34.1	La trave ad una campata soggetta a carichi concentrati agli estremi . . . . .	347
34.2	La trave a mensola soggetta a forza nell'estremo libero . . . . .	349
34.3	Lo schema per la scrittura geometrica delle condizioni ai limiti	350
34.4	Il caso della mensola soggetta a forza concentrata nell'estremo libero . . . . .	351
34.5	La trave a mensola soggetta a coppia nell'estremo libero . . . . .	352
34.6	Il caso della mensola soggetta a coppia concentrata nell'estremo libero . . . . .	353
34.7	La trave appoggiata soggetta a coppia nell'estremo di destra . . . . .	354

34.8	Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per trave appoggiata soggetta ad una coppia su un appoggio . . . . .	356
34.9	La trave incastrata-appoggiata soggetta a coppia nell'estremo di destra . . . . .	357
34.10	Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per trave incastrata ed appoggiata, soggetta ad una coppia su un appoggio . . . . .	358
34.11	La trave con incastro a sinistra e bipendolo a destra, soggetta a forza sul bipendolo . . . . .	359
34.12	Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per trave con incastro e bipendolo, soggetta ad una forza sul bipendolo . . . . .	361
35.1	Trave a mensola soggetta ad un cedimento anelastico verticale ed un cedimento anelastico rotazionale . . . . .	364
35.2	Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave doppiamente incastrata soggetta a cedimenti anelastici nell'incastro di destra . . . . .	366
35.3	La trave su vincoli elasticamente cedevoli . . . . .	367
35.4	Lo schema per la deduzione delle condizioni ai limiti per via geometrica . . . . .	370
35.5	Trave con incastro ed appoggio elasticamente cedevole . . . . .	370
36.1	Il caso dell'appoggio intermedio . . . . .	374
36.2	Il caso del bipendolo esterno intermedio . . . . .	376
36.3	La trave incastrata con appoggio ad un terzo della luce, soggetta a carico uniformemente distribuito . . . . .	377
36.4	Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per la trave di Figura 36.3 . . . . .	379
36.5	La sconnessione semplice del tipo cerniera . . . . .	381
36.6	La sconnessione semplice del tipo bipendolo . . . . .	382
36.7	Trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, con una cerniera in mezzzeria, soggetta al carico uniformemente distribuito . . . . .	382
36.8	Trave incastrata ed appoggiata con cerniera in mezzzeria. Diagrammi degli spostamenti, delle rotazioni, dei momenti e dei tagli . . . . .	385
36.9	Le reazioni per una trave incastrata ed appoggiata con cerniera in mezzzeria. . . . .	386
36.10	Lo schema per il calcolo delle reazioni in una trave incastrata ed appoggiata con cerniera intermedia . . . . .	387
36.11	Trave appoggiata ed incastrata con bipendolo interno ad un terzo della luce, soggetta a carico uniformemente distribuito sulla sola luce di sinistra . . . . .	388
36.12	Diagrammi degli spostamenti, delle rotazioni, dei momenti e dei tagli per la trave di Figura 36.11 . . . . .	389
36.13	Lo schema per il calcolo delle reazioni in una trave appoggiata ed incastrata con un bipendolo interno ad un terzo della luce . . . . .	390

ELENCO DELLE FIGURE

---

37.1	La trave in presenza di forza concentrata in una sezione intermedia . . . . .	394
37.2	La trave in presenza di coppia concentrata in una sezione intermedia . . . . .	395
37.3	Trave doppiamente incastrata con forza concentrata ad una ascissa generica . . . . .	395
37.4	La trave doppiamente incastrata in presenza di una forza concentrata in mezzeria: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli . . . . .	398
38.1	S.P. Timoshenko . . . . .	400
38.2	Le ipotesi di Timoshenko: $\phi(x_3) = -u'_2(x_3) + \psi$ . . . . .	401
38.3	Trave a mensola con forza all'estremo . . . . .	407
38.4	Trave a mensola soggetta a carico distribuito . . . . .	409
38.5	Trave appoggiata soggetta a carico distribuito . . . . .	411
38.6	Trave incastrata–appoggiata con cerniera in mezzeria . . . . .	413
39.1	Vito Volterra . . . . .	418
39.2	Distorsioni di traslazione assiale $\lambda$ , di scorrimento relativo $\theta$ , e di rotazione $\mu$ . . . . .	419
39.3	Trave incastrata–appoggiata con distorsione di rotazione relativa . . . . .	420
39.4	Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave incastrata–appoggiata soggetta a distorsione rotazionale ad un quarto della luce . . . . .	422
39.5	Un concio elementare soggetto a variazione termica alla Navier . . . . .	424
40.1	Otto Mohr . . . . .	430
40.2	Trave appoggiata soggetta a forza concentrata in mezzeria . . . . .	434
40.3	Trave appoggiata soggetta a carico distribuito . . . . .	436
40.4	Trave appoggiata soggetta a coppia nell'estremo . . . . .	437
40.5	Trave a mensola soggetta a forza nell'estremo . . . . .	438
40.6	Trave a mensola soggetta a carico distribuito . . . . .	439
41.1	Una struttura doppiamente iperstatica ed una possibile scelta delle incognite iperstatiche . . . . .	442
41.2	Il principio di sovrapposizione degli effetti applicato al calcolo delle iperstatiche . . . . .	444
41.3	Paul Émile Clapeyron . . . . .	445
41.4	Lo schema per la scrittura dell'equazione dei tre momenti . . . . .	446
42.1	Heinrich Müller-Breslau . . . . .	450
42.2	Un esempio per il calcolo di uno spostamento su una struttura isostatica . . . . .	455
42.3	Il sistema 1, staticamente ammissibile, su cui calcolare il momento $M'$ . . . . .	455
42.4	Il momento $M'$ sul sistema 1 . . . . .	455

42.5	Il momento $M$ , calcolato sul sistema 2 . . . . .	456
42.6	Trave doppiamente incastrata . . . . .	459
42.7	Il sistema isostatico soggetto ai carichi esterni . . . . .	459
42.8	Il sistema isostatico soggetto all'incognita iperstatica $X_1$ unitaria	459
42.9	Il sistema isostatico soggetto all'incognita iperstatica $X_2$ unitaria	459
43.1	Enrico Betti . . . . .	464
43.2	Trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante . . . . .	468
43.3	Linea di influenza $\eta_{L/4}^F$ per una trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante . . . . .	468
43.4	Trave a due campate soggetta a coppia viaggiante . . . . .	469
43.5	Linea d'influenza $\eta_{L/4}^M$ per una trave a due campate soggetta a coppia viaggiante . . . . .	470
43.6	Trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra soggetta a forza verticale viaggiante . . . . .	471
43.7	Linea d'influenza $\phi_{L/2}^F$ della rotazione in mezzeria per una trave incastrata-appoggiata soggetta a forza viaggiante . . . . .	471
43.8	Trave appoggiata soggetta a coppia viaggiante: linea di influenza della rotazione a sinistra . . . . .	472
43.9	Linea d'influenza $\phi_0^M$ della rotazione a sinistra per una trave appoggiata soggetta a coppia viaggiante . . . . .	473
43.10	Trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante . . . . .	474
43.11	Linea di influenza $m_{L/4}^F$ per una trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante . . . . .	475
43.12	Un classico esempio di solaio: linea di influenza per una sezione retta nella prima luce . . . . .	475
43.13	La linea di influenza del momento flettente per una sezione retta in mezzeria della prima luce . . . . .	476
43.14	La linea di influenza del momento flettente per una sezione retta in corrispondenza del secondo appoggio . . . . .	477
43.15	Trave incastrata ed appoggiata . . . . .	478
43.16	Linea d'influenza $t_{L/2}^F$ per una trave incastrata-appoggiata . . . . .	479
43.17	Trave a tre appoggi a luci diseguali . . . . .	479
43.18	Linea d'influenza $m_{L/2}^M$ per una trave su tre appoggi . . . . .	480
43.19	Trave doppiamente incastrata soggetta a distorsione rotazionale viaggiante . . . . .	481
43.20	Linea di influenza $\eta_{L/4}^{D\phi}$ dello spostamento per una trave doppiamente incastrata soggetta a distorsione rotazionale . . . . .	482
43.21	Trave incastrata, con cerniera e due appoggi . . . . .	482
43.22	Linea d'influenza $\phi_{2L/3}^{D\phi}$ per la trave di 43.21 . . . . .	483
43.23	Trave a tre campate e sbalzo . . . . .	483
43.24	Linea d'influenza $\eta_S^{D\eta}$ per la trave di Figura 43.23 . . . . .	484
43.25	Linea d'influenza $\phi_L^{D\eta}$ per la trave di Figura 43.23 . . . . .	485

## ELENCO DELLE FIGURE

---

43.26	Trave doppiamente incastrata con appoggio a due terzi della luce	486
43.27	Linea di influenza del momento nell'incastro di sinistra per distorsione rotazionale viaggiante . . . . .	487
43.28	Trave doppiamente incastrata con appoggio a due terzi della luce: linea di influenza $t_S^{D\phi}$ . . . . .	487
43.29	Linea di influenza del taglio nella sezione di mezzeria della prima campata per distorsione rotazionale viaggiante . . . . .	488
44.1	L'accorciamento assiale dovuto alla deformazione flessionale . . .	490
44.2	Il segmento deformato $d\xi_3$ e le sue due componenti . . . . .	491
44.3	L'accorciamento assiale in una trave soggetta a carico di compressione . . . . .	492
44.4	Il concio in configurazione deformata . . . . .	493
44.5	L'equilibrio all'estremo libero sulla configurazione deformata . .	495
44.6	La trave appoggiata soggetta ad un carico assiale di compressione . . . . .	495
44.7	La trave incastrata soggetta ad un carico assiale di compressione	497
44.8	Il grafico dell'equazione secolare, come ottenuto da <i>Mathematica</i>	500
44.9	Uno zoom del grafico dell'equazione secolare . . . . .	500
44.10	La trave a mensola soggetta ad un carico assiale di compressione	501
44.11	La trave incastrata–appoggiata soggetta ad un carico assiale di compressione . . . . .	502



# Prefazione

Nell'ambito delle discipline di Ingegneria, la Scienza delle Costruzioni è una delle poche materie, se non l'unica, a non aver cambiato nome nel corso degli ultimi decenni. La logica dell'insegnamento non è stata stravolta, ma ciò non vuol dire che i suoi contenuti non abbiano subito mutamenti, cancellazioni ed aggiunte, in conseguenza delle due grandi rivoluzioni degli ultimi anni, l'introduzione dei metodi numerici, ed ultimamente l'utilizzo del calcolo simbolico.

Prima dell'avvento dei personal computer, e si parla di non più di trent'anni fa, era obbligatorio soffermarsi su metodologie grafiche, e limitarsi a semplici esempi strutturali, che comportavano ridottissimi oneri computazionali: un sistema di dieci equazioni lineari era già un formidabile ostacolo. In seguito, la diffusione capillare di potenti computer ha permesso di affrontare problemi di complessità computazionali sempre crescenti, consentendo il calcolo di autovalori per matrici di grandi dimensioni, la soluzione di sistemi di equazioni di centinaia di incognite, il disegno automatizzato di deformate e caratteristiche.

L'ovvia conseguenza è stata il ridimensionamento dell'analisi cinematica attraverso la ricerca dei centri di rotazione, e della ricerca delle reazioni vincolari per via grafica, a favore di un approccio analitico che prevede la scrittura (e la soluzione) delle equazioni di vincolo, nel primo caso, o delle equazioni di equilibrio, nel secondo. Intere discipline, come la statica grafica, sono di fatto scomparse, e pur interessanti teorie, come la teoria dell'ellisse di elasticità, sono state abbandonate. Il metodo delle forze ha visto un declino vistoso, dovuto alla difficoltà di automatizzazione della scelta delle incognite iperstatiche, mentre il metodo degli spostamenti ha vissuto — ed in larga parte vive — un periodo d'oro sotto forma di analisi matriciale delle strutture, e di metodo degli elementi finiti.

Più recente, e forse più profonda, è la rivoluzione dovuta all'introduzione dei grandi software di calcolo simbolico, in grado di calcolare limiti, derivate ed integrali di grande complessità, di affrontare sistemi di equazioni lineari restituendo la soluzione in forma simbolica, di risolvere problemi di autovalori e problemi ai limiti di dimensioni inimmaginabili fino ad un decennio fa. Ciò ha implicato la rinascita di metodi di analisi strutturale che sembravano condannati all'oblio, ed ha permesso l'applicazione di altre metodologie a classi strutturali molto ampie. E' classico il caso della metodologia della linea elastica, in cui occorre scrivere e risolvere un gran numero di equazioni di equilibrio e congruenza, e che ora può essere agevolmente applicato anche ai telai di una certa complessità

---

geometrica, e non solo a travi di due o tre campate. E' anche possibile, con poco sforzo, introdurre nel caso le deformabilità assiali, in modo da poter verificare la loro influenza sul comportamento strutturale. Contemporaneamente, tante metodologie *ad hoc*, che trovavano la loro ragion d'essere nella semplificazione dei calcoli, sono condannate ad un sicuro oblio, così come tante formule approssimate.

Se quanto detto ha avuto influenza profonda sui contenuti del corso di Scienza delle Costruzioni, non minore è stato l'impatto, in Italia, delle numerose riforme universitarie, che si sono succedute nel tempo, talvolta ad intervalli molto ravvicinati, talvolta contraddicendosi l'un l'altra. Nella mia esperienza didattica, ho iniziato con un corso annuale, inserito al terzo anno di un curriculum quinquennale, passando poi ad un corso semestrale di pari impegno didattico. La riforma che ha condotto all'abbandono della laurea quinquennale, a vantaggio della laurea di primo e di secondo livello, ha costretto a spostare il corso di Scienza delle Costruzioni al secondo anno di studi, con le immaginabili conseguenze sul piano didattico, in quanto sono venute a mancare parecchie conoscenze di analisi matematica e fisica matematica. Nel corso degli ultimi anni ho potuto (dovuto) sperimentare corsi semestrali da sei crediti e da nove, corsi annuali da otto e nove crediti, ed ultimamente il mio corso si svolge su un percorso di centoventi ore, e dodici crediti. Ad ognuno di questi corsi è dovuto forzatamente corrispondere un cambio, talvolta radicale, dei contenuti e del modo di affrontarli. Solo per citare un esempio, non è certo possibile dimostrare le equazioni indefinite dell'equilibrio utilizzando il teorema della divergenza, ed è quindi necessario far ricorso alla scrittura diretta delle equazioni di equilibrio sul cosiddetto parralelepipedo elementare.

Ho l'impressione che attualmente le acque si stiano calmando, e forse ci aspetta un periodo di stabilità: ciò mi ha indotto a dare forma definitiva al materiale didattico che da oltre dieci anni è disponibile sul mio sito Internet, e che ha subito nel tempo varie trasformazioni. Esso è quindi il risultato finale di svariate revisioni, cancellazioni ed aggiunte, parecchie delle quali suggerite dagli studenti che si sono susseguiti negli anni: ad essi il mio sincero ringraziamento.

Mi sia infine permesso di ringraziare l'ateneo di Basilicata, che mi ha garantito per lunghi anni alcuni privilegi che uno studioso di Scienza delle Costruzioni è ben qualificato ad apprezzare: equilibrio e stabilità.

# Introduzione

Alcuni decenni fa, i testi di Scienza delle Costruzioni erano tanto voluminosi da dover essere suddivisi in più tomi, totalizzando migliaia di pagine: Camillo Guidi scrive cinque volumi, per un totale di 1415 pagine, Odone Belluzzi si limita a quattro volumi, per un totale di ben 2617 pagine, mentre Gustavo Colonnetti sintetizza la materia in due volumi e 1038 pagine. Più recentemente, Riccardo Baldacci opera la stessa scelta, suddividendo il testo in due volumi, di complessive 1151 pagine, mentre i trattati di Alfredo Sollazzo e di Leone Corradi Dell'Acqua sono ambedue divisi in tre volumi, così come il recente testo di Alberto Carpinteri.

La scuola napoletana ha costantemente accresciuto il volume del materiale di studio, dal singolo volume di Carlo Luigi Ricci, di 545 pagine ai tre volumi di Adriano Galli (per complessive 1095 pagine) ed ai cinque volumi in sei tomi della Scienza delle Costruzioni di mio padre Vincenzo Franciosi: 2844 pagine, incorporando la meccanica delle terre, la teoria dei ponti, la plasticità, e la teoria della stabilità dell'equilibrio.

Quel periodo è passato, e quelli che potremmo definire “gli anni ruggenti della Scienza delle Costruzioni” sono definitivamente tramontati, e dal grande corpus della disciplina madre sono nati i corsi di Tecnica delle Costruzioni, Geotecnica, Costruzioni di Ponti, Teoria della Plasticità, e tanti altri.

Cosa è rimasto, quale nocciolo duro del corso di Scienza? Sicuramente lo studio del solido elastico tridimensionale, la teoria della trave secondo i dettami di De Saint-Venant, lo studio delle strutture intelaiate piane, attraverso la teoria di Eulero-Bernoulli, e poco altro. In quest'ambito, però, i moderni sviluppi delle tecnologie hanno imposto una profonda riscrittura dei testi: è, ad esempio, sempre più sentita l'esigenza di uscire dall'ambito lineare, ed affrontare l'analisi della tensione e della deformazione senza confondere la configurazione deformata con quella deformata, così come non sembra più sufficiente limitarsi alla ipotesi di elasticità lineare, per giunta svolta per solidi isotropi ed omogenei.

Sorge quindi la necessità di dare maggiore attenzione ai materiali anisotropi ed ai materiali funzionalmente graduati, mentre l'abbandono della ipotesi di linearità porta ad una maggiore enfasi alla teoria generale delle equazioni costitutive.

Allo stesso modo, sembra ormai imprescindibile dedicare attenzione alle teorie delle travi di ordine superiore, a partire dalla teoria di Timoshenko, che è ormai uno standard per gli approcci numerici agli elementi finiti.

---

Infine, il recente irrompere delle nanotecnologie impone di introdurre almeno i fondamenti della teoria nonlocale dell'elasticità di Eringen, che peraltro mostra interessanti analogie con l'antica teoria delle travi soggette a distorsioni distribuite.

La scelta che mi è sembrata didatticamente più naturale ha comportato un primo volume, di Lezioni propriamente dette, in cui vengono presentati gli argomenti classici, nel modo più piano possibile, ed un secondo volume, di Complementi, in cui saranno inserite le generalizzazioni appena illustrate.

Più in dettaglio, in questo volume sono riportate una quarantina di Lezioni, quante se ne possono ragionevolmente presentare in un corso da 12 crediti, ed a cui vanno a sommarsi le Esercitazioni.

In una prima parte, ossia nei primi sei capitoli, si parla dell'analisi statica e cinematica del corpo rigido, come necessaria premessa allo studio del solido deformabile. Anche se argomenti simili sono di pertinenza della Fisica Matematica, o almeno lo erano per i vecchi corsi di Meccanica Razionale, ho preferito sintetizzare le nozioni utili al resto del corso, sia per esigenze di completezza, sia per uniformare le notazioni. Inoltre, ci si è limitati a particolari tipi di vincolo, si sono forniti solo pochi elementi relativi al solido tridimensionale, si è cercato di scendere in dettaglio solo per i solidi del tipo trave. Altri sei Capitoli sono dedicati all'analisi dello stato tensionale di un solido deformabile, rinunciando a qualsiasi complicazione matematica che non fosse strettamente necessaria: ad esempio, le equazioni indefinite dell'equilibrio sono dedotte imponendo direttamente l'equilibrio del parallelepipedo elementare, e la ricerca delle tensioni principali è introdotta come ricerca della massima tensione normale in un punto.

I tre successivi Capitoli riguardano lo stato deformativo, con ovvia enfasi sulle deformazioni lineari e sulla decomposizione dello spostamento. Si passa poi alle relazioni costitutive, limitatamente alle leggi di Hooke, e passando poi subito al caso isotropo, per poi concludere con le leggi dell'equilibrio elastico in termini di spostamento. L'esame di alcuni stati particolari di tensione e deformazione offrono l'opportunità di una prima applicazione pratica della teoria presentata. Il Capitolo successivo chiude la seconda parte, presentando alcuni principi variazionali ed energetici, in un approccio che segue da vicino il libro di J.Nečas e I.Hlaváček: *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies: An Introduction*, Elsevier, 1981, pp. 60–66.

La terza parte, dedicata alla teoria della trave di De Saint-Venant, si apre con un Capitolo preliminare, destinato ad introdurre alcune nozioni di geometria delle aree, che saranno poi necessarie nel seguito: baricentro, momenti statici e di inerzia, leggi di trasformazione dei momenti. Si prosegue con due Capitoli in cui si definisce il solido trave, e si specializzano i risultati generali per tener conto della geometria del solido, e della sua condizione di carico, introducendo anche le ipotesi di De Saint-Venant sullo stato tensionale, ed illustrando il postulato di De Saint-Venant. Si è scelto di riportare lunghe citazioni, dello stesso De Saint-Venant e di altri autori, in quanto ritengo che esse chiariscano le motivazioni alla base della teoria meglio di molte moderne trattazioni. I successivi sei capitoli sono una dettagliata esposizione dei casi semplici della teoria

della trave, ossia estensione, flessione, torsione e taglio (flessione non uniforme). In ciascuno di questi casi si è partiti da una ipotesi sullo stato tensionale, per poi dedurre le deformazioni e gli spostamenti, e trarre infine le caratteristiche della sollecitazione esterna ed interna. Questo approccio permette di evitare la lunga e complessa procedura di integrazione delle equazioni dell'equilibrio elastico, e contemporaneamente non costringe ad assumere *a priori* le terne di spostamento.

La quarta ed ultima parte è dedicata alla teoria della trave, nella sua classica forma di Eulero–Bernoulli, e nella forma più sofisticata di Timoshenko. In ambedue i casi si deducono le equazioni differenziali che reggono il problema dell'equilibrio attraverso i metodi geometrici ed i metodi variazionali, per poi illustrare in dettaglio le condizioni ai limiti ed i possibili carichi agenti sulle travi stesse. A questo proposito, una certa attenzione è dedicata alle distorsioni, il cui utilizzo permetterà poi di far rientrare la teoria delle linee di influenza nell'ambito della teoria della linea elastica.

Un ultimo Capitolo è classicamente riservato ad alcuni cenni relativi alla teoria di Eulero per la trave caricata di punta.



# Colophon

Il testo è stato originariamente scritto in *Mathematica*, il noto software di Stephen Wolfram, sotto forma di Lezioni per il corso di Scienza delle Costruzioni, tutte le formule sono state generate automaticamente dallo stesso programma, e successivamente — ove il caso — modificate per questioni di estetica. Le figure sono state ottenute, salvo casi sporadici, ancora una volta utilizzando *Mathematica*, e poi esportate in formato .eps.

Le Lezioni poi sono state salvate in formato .tex, e combinate in un unico file  $\LaTeX$ <sup>1</sup> opportunamente editato.

---

<sup>1</sup>Leslie Lamport:  *$\LaTeX$ : A Document Preparation System*, Addison–Wesley, 1986



# Capitolo 1

## La cinematica del corpo rigido

Si ricapitolano alcune nozioni di cinematica dei sistemi di punti materiali, al fine di fornire un collegamento con quanto già noto, uniformando allo stesso tempo le notazioni con quanto seguirà.

### 1.1 Configurazioni e vincoli

Si consideri un sistema di  $N$  punti materiali  $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(N)}$ . In un sistema di riferimento  $(0, X_1, X_2, X_3)$  ciascun punto  $P^{(j)}$  è identificato dalle sue coordinate  $x_1, x_2, x_3$ , e l'insieme delle  $3N$  coordinate si dice una *configurazione* del sistema di punti materiali. In generale, le  $3N$  coordinate possono variare arbitrariamente in una certa regione dello spazio, sicché il sistema possiede  $3N$  *gradi di libertà*, e può assumere  $\infty^{3N}$  possibili configurazioni.

Si consideri ora il caso, più frequente, di un sistema *vincolato*, in cui le coordinate dei punti sono costrette ad obbedire ad alcune relazioni analitiche, dette condizioni di vincolo. Più in particolare, considereremo nel seguito solo vincoli *olonomi* e *bilaterali*, esprimibili attraverso equazioni del tipo:

$$f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}) = 0 \quad (1.1)$$

Non verranno mai considerati vincoli *anolonomi*, esplicitamente dipendenti dal tempo, o vincoli *unilaterali*, traducibili in disequazioni.

Si assuma, in generale, che il sistema considerato sia soggetto ad  $s$  condizioni di vincolo, esprimibili attraverso  $s$  equazioni nelle  $3N$  coordinate del sistema:

$$f_i(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}) = 0 \quad i = 1, \dots, s \quad (1.2)$$

ed inoltre, si assuma che queste  $s$  equazioni siano indipendenti, intendendo con ciò che tra le funzioni  $f_i$  non esista alcuna dipendenza funzionale del tipo:

$$\mathcal{F}(f_1, f_2, \dots, f_s) = 0 \quad (1.3)$$



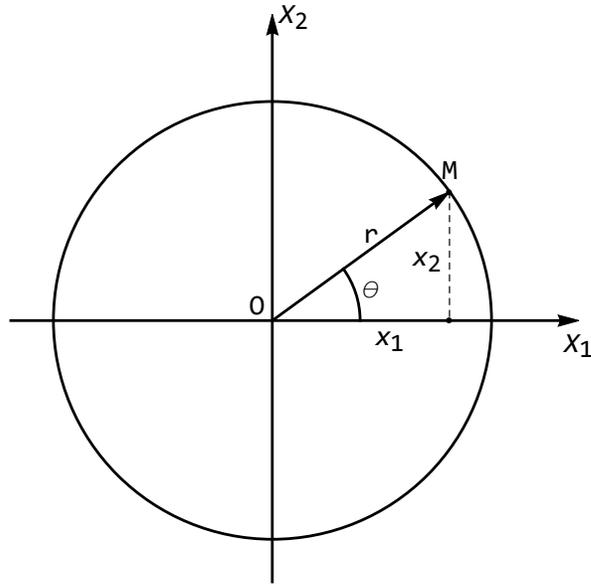


Figura 1.1: Il punto  $M$  giace nel piano, ed è vincolato ad appartenere alla circonferenza di raggio  $r$ . Esso ha perciò un solo grado di libertà

### 1.3 L'ipotesi di piccoli spostamenti

Si consideri ora un punto materiale  $M$ , di coordinate  $x_i$ , e si ipotizzi che a seguito di una qualsiasi causa, esso si porti in  $M'$ , di coordinate  $\xi_i$ . Si definisce *spostamento* di  $M$  il vettore  $\mathbf{u} = \overline{MM'}$ , di componenti  $u_i = \xi_i - x_i$ . Spesso, inoltre, si ipotizzerà che lo spostamento del punto  $M$  possa considerarsi “piccolo”, nel senso che le coordinate di  $M'$  potranno convenientemente esprimersi come:

$$\xi_i = x_i + du_i \quad (1.8)$$

ossia  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + d\mathbf{u}$ , e lo spostamento  $d\mathbf{u}$  andrà considerato infinitesimo.

Nell'ambito dei piccoli spostamenti, le condizioni di vincolo andranno poi adeguatamente semplificate, linearizzando le relative equazioni. Ad esempio, si consideri ancora una volta l'esempio precedente, con l'equazione di vincolo (1.6). Essa deve valere sia per il punto  $M$  sia per il suo corrispondente punto spostato  $M'$ , per cui dovrà anche aversi:

$$(x_1 + du_1)^2 + (x_2 + du_2)^2 = r^2 \quad (1.9)$$

Svolgendo i quadrati si ha:

$$x_1^2 + du_1^2 + 2x_1 du_1 + x_2^2 + du_2^2 + 2x_2 du_2 = r^2 \quad (1.10)$$

Semplificando, le parti finite si cancellano, in base alla (1.6), ed i termini quadratici in  $du_1$  e  $du_2$  possono trascurarsi rispetto alle parti lineari. Si ha

infine:

$$x_1 du_1 + x_2 du_2 = 0 \quad (1.11)$$

Tale relazione può anche scriversi:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \quad (1.12)$$

ed esprime l'ortogonalità tra il raggio vettore  $\overrightarrow{OM}$  ed il vettore spostamento del punto  $M$ . Ciò significa che il punto  $M$ , in una approssimazione lineare, si muove lungo la tangente al cerchio, come riportato in Figura 1.2.

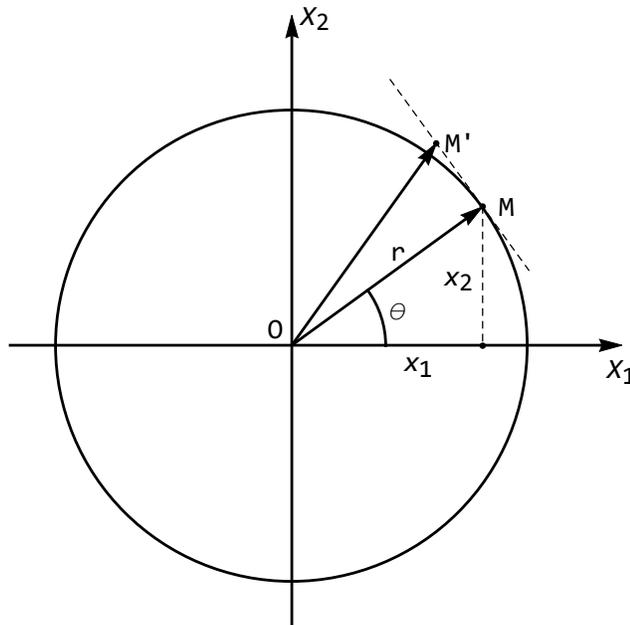


Figura 1.2: Se gli spostamenti sono piccoli, il raggio vettore ed il vettore spostamento devono ritenersi ortogonali

## 1.4 L'ipotesi di rigidità

Un vincolo di particolare importanza è il cosiddetto vincolo di rigidità, che impone che i punti del sistema in esame conservino la distanza che inizialmente li separa.

Siano allora  $M$  ed  $N$  due punti di coordinate  $(m_1, m_2, m_3)$  ed  $(n_1, n_2, n_3)$ , (cfr. Figura 1.3) e sia  $d_{MN}$  la distanza tra di loro, per cui:

$$(n_1 - m_1)^2 + (n_2 - m_2)^2 + (n_3 - m_3)^2 = d_{MN}^2 \quad (1.13)$$

Se ora  $M$  si sposta in  $M'$  ed  $N$  in  $N'$ , e se ipotizziamo che tali spostamenti siano piccoli, le coordinate di  $M'$  saranno  $(m_1 + dm_1, m_2 + dm_2, m_3 + dm_3)$  e le coordinate di  $N'$  saranno  $(n_1 + dn_1, n_2 + dn_2, n_3 + dn_3)$ . La distanza tra  $M'$  ed  $N'$ , per l'ipotesi di rigidità resterà pari a  $d_{MN}$ , e quindi:

$$(n_1 + dn_1 - m_1 - dm_1)^2 + (n_2 + dn_2 - m_2 - dm_2)^2 + (n_3 + dn_3 - m_3 - dm_3)^2 = d_{MN}^2 \quad (1.14)$$

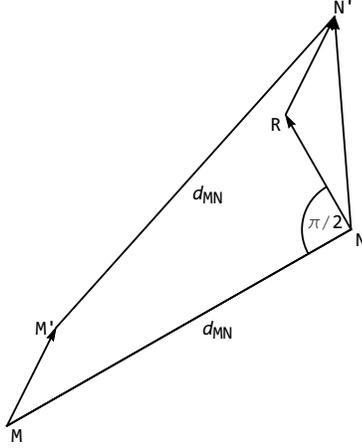


Figura 1.3: Il vincolo di rigidità:  $RN' = MM'$  e quindi  $NR = NN' - MM'$

Svolgendo i quadrati, si ha:

$$\sum_{i=1}^3 (n_i^2 + dn_i^2 + m_i^2 + dm_i^2 + 2n_i dn_i - 2n_i m_i - 2n_i dm_i - 2m_i dn_i - 2dn_i dm_i + 2m_i dm_i) = d_{MN}^2 \quad (1.15)$$

ed eliminando le parti finite, sfruttando la (1.13):

$$\sum_{i=1}^3 (dn_i^2 + dm_i^2 + 2n_i dn_i - 2n_i m_i - 2n_i dm_i - 2m_i dn_i - 2dn_i dm_i + 2m_i dm_i) = 0 \quad (1.16)$$

Trascurando i termini quadratici in  $dm_i$  e  $dn_i$  si giunge a scrivere:

$$\sum_{i=1}^3 (n_i dn_i - n_i m_i - n_i dm_i - m_i dn_i - dn_i dm_i + m_i dm_i) = 0 \quad (1.17)$$

ossia, infine:

$$\sum_{i=1}^3 (n_i - m_i) (dn_i - dm_i) = 0 \quad (1.18)$$

In termini vettoriale, sarà quindi:

$$\left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\right) \cdot \left(\overrightarrow{NN'} - \overrightarrow{MM'}\right) = 0 \quad (1.19)$$

e poichè  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$ , la relazione precedente esprime l'ortogonalità tra il vettore  $\overrightarrow{MN}$  ed il vettore spostamento relativo  $\overrightarrow{NN'} - \overrightarrow{MM'}$ :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \left(\overrightarrow{NN'} - \overrightarrow{MM'}\right) = 0 \quad (1.20)$$

## 1.5 Sistemi di punti con vincoli di rigidità

Si consideri un sistema di  $N$  punti materiali, con  $N \geq 3$ , e si ipotizzi che ciascun punto sia vincolato rigidamente. Si dimostrerà ora che tale sistema ha 6 gradi di libertà, indipendentemente dal numero  $N$  di punti del sistema.

Ed infatti, si parta da un sistema di tre punti materiali, per cui si hanno  $3N = 9$  gradi di libertà, in assenza di vincoli. Poichè poi esistono tre vincoli di rigidità, il sistema con tre punti ha sei gradi di libertà.

Si aggiunga ora un quarto punto, che aggiunge al sistema tre gradi di libertà, ma poi sottrae tre gradi di libertà, corrispondenti ai vincoli di rigidità tra il punto aggiunto ed i tre punti di partenza. Quindi anche per  $N = 4$  il sistema ha sei gradi di libertà.

Aggiungendo un altro punto, si introducono altri tre gradi di libertà, e si possono considerare quattro equazioni di vincolo. Tuttavia, è immediato riconoscere che — a parte casi eccezionali — una di queste equazioni è dipendente, e quindi ancora una volta il sistema avrà sei gradi di libertà. In generale, ogni volta che si introduce un punto nel sistema, si incrementano i gradi di libertà di tre, e si possono scrivere tre equazioni di vincolo indipendenti.

## 1.6 Il corpo rigido

Un corpo rigido può essere riguardato come un insieme di infiniti punti materiali collegati tra loro da vincoli di rigidità, in modo tale da imporre che la mutua distanza tra due qualsiasi punti del corpo rimanga inalterata. Estendendo il precedente ragionamento al caso in cui  $N$  va all'infinito, è immediato dedurre che un corpo rigido ha nello spazio sei gradi di libertà.

E' spesso importante specializzare quanto detto finora al caso bidimensionale, in cui i punti sono obbligati a giacere su un piano. In tal caso il sistema di  $N$  punti materiali avrebbe  $3N - N = 2N$  gradi di libertà, in quanto per ciascun punto si potrebbe scrivere l'equazione che lo vincola ad appartenere al piano. Inoltre, il corpo rigido (o meglio, la superficie rigida) ha nel piano tre gradi di libertà.

Per identificare nel modo più conveniente le sei coordinate lagrangiane relative ad un corpo rigido, si scelga ora arbitrariamente un punto  $P$  (detto *polo*),

e si scriva il vincolo di rigidità che lega il suddetto polo  $P$  al generico punto  $P_i$  del corpo in esame. Riscrivendo la (1.20) si ha:

$$\overrightarrow{PP_i} \cdot (\overrightarrow{P_iP_i'} - \overrightarrow{PP_i'}) = 0 \quad (1.21)$$

che può geometricamente interpretarsi come condizione di ortogonalità tra la congiungente il polo ed il punto  $P_i$  (ossia  $\overrightarrow{PP_i}$ ) e lo spostamento relativo del punto  $P_i$  rispetto al polo. Tale condizione di ortogonalità può anche scriversi:

$$\overrightarrow{P_iP_i'} - \overrightarrow{PP_i'} = \mathbf{d}\phi \times \overrightarrow{PP_i} \quad (1.22)$$

con  $\mathbf{d}\phi$  vettore arbitrario. Lo spostamento del generico punto  $P_i$  può allora scriversi come:

$$\overrightarrow{P_iP_i'} = \overrightarrow{PP_i'} + \mathbf{d}\phi \times \overrightarrow{PP_i} \quad (1.23)$$

Per esprimere scalarmente tale espressione, si consideri che a primo membro avremo le tre componenti dello spostamento (infinitesimo) del punto  $P_i$ :

$$\overrightarrow{P_iP_i'} = \begin{pmatrix} du_1^{(i)} \\ du_2^{(i)} \\ du_3^{(i)} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

che il vettore  $\mathbf{d}\phi$  ha componenti:

$$\mathbf{d}\phi = \begin{pmatrix} d\phi_1 \\ d\phi_2 \\ d\phi_3 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

e che il vettore  $\overrightarrow{PP_i} = \overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP}$  ha componenti:

$$\overrightarrow{PP_i} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} - x_1 \\ x_2^{(i)} - x_2 \\ x_3^{(i)} - x_3 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Ne segue:

$$\begin{pmatrix} du_1^{(i)} \\ du_2^{(i)} \\ du_3^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d\phi_3 & d\phi_2 \\ d\phi_3 & 0 & -d\phi_1 \\ -d\phi_2 & d\phi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} - x_1 \\ x_2^{(i)} - x_2 \\ x_3^{(i)} - x_3 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Per dare un significato fisico al vettore  $\mathbf{d}\phi$ , si consideri il caso piano, per cui la relazione precedente si semplifica in:

$$\begin{pmatrix} du_1^{(i)} \\ du_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d\phi_3 \\ d\phi_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} - x_1 \\ x_2^{(i)} - x_2 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

ossia:

$$\begin{aligned} du_1^{(i)} &= du_1 - d\phi_3 (x_2^{(i)} - x_2) \\ du_2^{(i)} &= du_2 + d\phi_3 (x_1^{(i)} - x_1) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Ora, dalla Figura 1.4 si evince facilmente che il vettore spostamento relativo  $\overrightarrow{P_i P_i'} - \overrightarrow{PP'}$ , indicato in Figura con  $\overrightarrow{AP_i'}$ , ha modulo pari a:

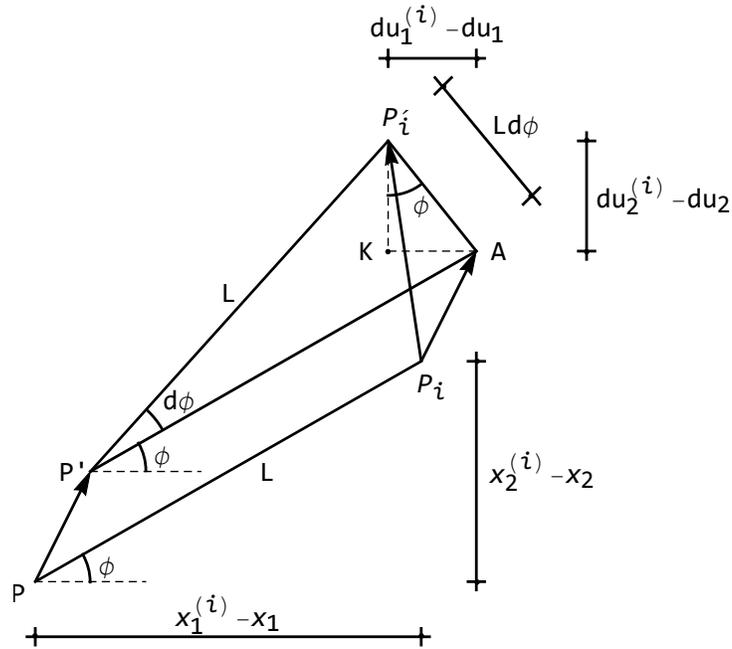


Figura 1.4: Lo spostamento rigido infinitesimo come somma di una traslazione  $PP'$  ed una rotazione intorno a  $P'$

$$AP_i' = Ld\phi \quad (1.30)$$

dove  $L$  è la lunghezza del segmento  $PP_i$  e  $d\phi$  è la variazione dell'angolo  $\phi$  che lo stesso segmento  $PP_i$  forma con l'asse orizzontale. Le componenti del vettore di spostamento relativo saranno allora fornite da:

$$\begin{aligned} du_1^{(i)} - du_1 &= -L d\phi \sin(\phi) \\ du_2^{(i)} - du_2 &= L d\phi \cos(\phi) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ma è anche:

$$\begin{aligned} L \sin(\phi) &= x_2^{(i)} - x_2 \\ L \cos(\phi) &= x_1^{(i)} - x_1 \end{aligned} \quad (1.32)$$

e quindi le (1.31) si scrivono:

$$\begin{aligned} du_1^{(i)} - du_1 &= -d\phi (x_2^{(i)} - x_2) \\ du_2^{(i)} - du_2 &= d\phi (x_1^{(i)} - x_1) \end{aligned} \quad (1.33)$$

permettendo di dare un significato fisico a  $d\phi_3$ : la rotazione del segmento  $PP_i$  intorno a  $P$  nel piano di normale  $x_3$ . Ne segue ancora che:

- un generico spostamento piano infinitesimo di un corpo rigido può considerarsi composto da una traslazione rigida e da una rotazione intorno ad un asse normale al piano

Tale spostamento può anche riguardarsi come una rotazione intorno ad un punto  $C$ , detto *centro assoluto di rotazione*, identificato come intersezione — in  $P$  e  $P'_i$  — delle normali ai vettori spostamento  $PP'$  e  $P_iP'_i$ . Tale rotazione ha ampiezza, riferendosi alla Figura 1.5, pari a:

$$d\phi' = \frac{|PP'|}{|CP|} = \frac{|P_iP'_i|}{|CP_i|} \quad (1.34)$$

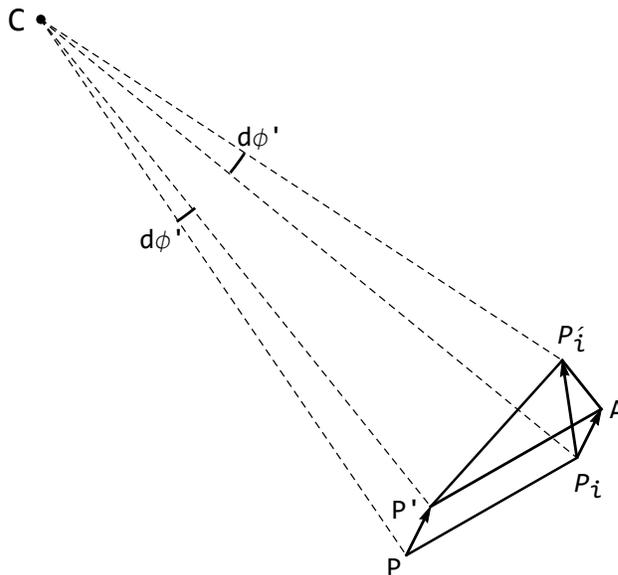


Figura 1.5: Lo spostamento rigido come rotazione intorno al centro istantaneo di rotazione  $C$

In generale, per un corpo rigido tridimensionale può dirsi che un qualsiasi spostamento infinitesimo può riguardarsi come somma di tre traslazioni lungo tre assi coordinati, e tre rotazioni intorno alle rette parallele agli assi e passanti per il punto assunto come polo.



# Capitolo 2

## I vincoli

Proseguendo nello studio della cinematica del corpo rigido, si vuole fornire in questo Capitolo una classificazione dei possibili vincoli agenti su un corpo rigido, limitatamente al caso piano, che peraltro comprende la maggioranza degli schemi strutturali. Inoltre, i vincoli considerati saranno olonomi, lisci e bilaterali.

### 2.1 I vincoli piani

Nel piano, il corpo rigido ha tre gradi di libertà, due traslazioni secondo due assi di riferimento, ed una rotazione intorno ad un asse ortogonale al piano, e passante per il polo di riferimento. Se si vuol classificare cinematicamente i vincoli, è quindi ovvio che potranno definirsi vincoli semplici, doppi o tripli, a seconda che essi sopprimano uno, due o tre gradi di libertà al corpo rigido.

#### 2.1.1 I vincoli semplici e la loro rappresentazione meccanica

Si consideri il corpo rigido  $S$ , e lo si voglia vincolare nel punto  $A$  generico attraverso un vincolo semplice, ossia un vincolo che sopprima un solo grado di libertà. Le tre possibilità immediate sono espresse dalle tre equazioni:

$$\begin{aligned}u_{1A} &= 0 \\u_{2A} &= 0 \\ \phi_A &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

Nel primo caso, illustrato nella prima colonna di Figura 2.1, il punto  $A$  non può avere spostamenti in orizzontale, e quindi esso è costretto a scorrere lungo l'asse verticale, mentre nel secondo caso sono gli spostamenti verticali ad essere proibiti, e quindi il punto dovrà scorrere in orizzontale. Più in generale, un'equazione di vincolo impone al punto vincolato l'appartenenza ad una retta inclinata genericamente di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale, sicchè le sue

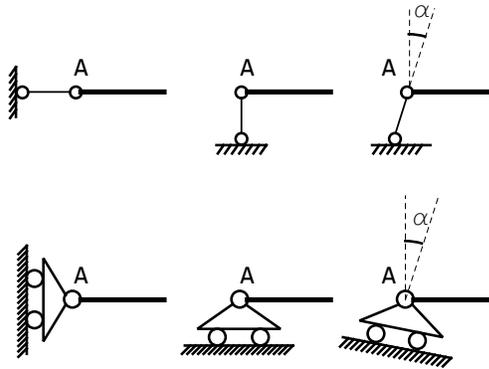


Figura 2.1: I vincoli semplici ed i loro modelli meccanici: in prima colonna il vincolo  $u_{1A} = 0$ , in seconda colonna  $u_{2A} = 0$ , in terza  $u_{2A} = u_{1A} \tan(\alpha)$

componenti di spostamento dovranno obbedire alla relazione geometrica:

$$u_{2A} = u_{1A} \tan(\alpha) \quad (2.2)$$

Il modello meccanico dei vincoli ora esposti è rappresentato da un pendolo, il cui asse è orientato ortogonalmente alla retta su cui il punto è obbligato a scorrere (prima riga della Figura 2.1), oppure da un carrello con piano di scorrimento parallelo alla retta di vincolo (seconda riga della stessa Figura).

L'ultimo tipo di vincolo permette le traslazioni in qualsiasi direzione, ma proibisce al corpo  $S$  di ruotare. Del suo modello meccanico si parlerà alla fine del capitolo.

### 2.1.2 I vincoli doppi e la loro rappresentazione meccanica

Un vincolo doppio deve, per definizione, eliminare due gradi di libertà, e quindi si hanno due possibilità: un vincolo che proibisce ambedue le traslazioni, lasciando libera la rotazione, oppure un vincolo che proibisce una traslazione e la rotazione, lasciando libero il punto di traslare lungo una direzione. Nel primo caso si parla di *appoggio*, o *cerniera esterna*, nel secondo di *bipendolo*.

#### L'appoggio, o cerniera

Si consideri il corpo  $S$ , e si voglia vincolare un suo punto  $A$  in modo da impedire qualsiasi traslazione. E' evidente che basterà imporre che siano nulle le traslazioni secondo due assi ortogonali, che converrà scegliere paralleli agli assi coordinati. Le corrispondenti equazioni di vincolo sono quindi:

$$\begin{aligned} u_{1A} &= 0 \\ u_{2A} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

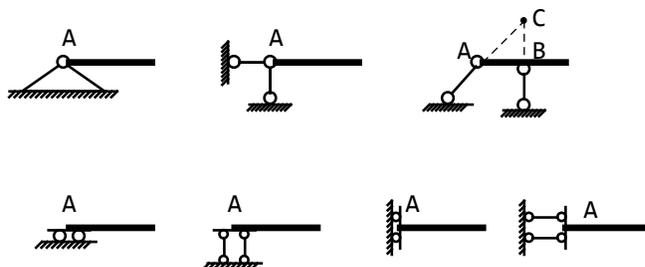


Figura 2.2: I vincoli doppi ed i loro modelli meccanici

Il modello meccanico dell'appoggio è riportato in Figura 2.2. È immediato realizzare che lo stesso vincolo può rappresentarsi attraverso la presenza contemporanea di due pendoli ad asse verticale ed orizzontale. D'altro canto, quest'ultima rappresentazione offre la possibilità di realizzare una *cerniera ideale*, come illustrato nella stessa Figura 2.2: il corpo non può traslare, ma può solo ruotare intorno al punto ideale  $C$  situato all'intersezione tra gli assi dei due pendoli.

### Il bipendolo

Il secondo tipo di vincolo doppio proibisce la traslazione lungo una retta, e la rotazione. Meccanicamente, può indicarsi con un bipendolo, come indicato in Figura 2.2, e può realizzarsi attraverso una coppia di pendoli ad asse parallelo tra loro, ed ortogonale alla retta lungo cui può traslare il punto vincolato.

### 2.1.3 I vincoli tripli e la loro rappresentazione meccanica

Un vincolo triplo impedisce al punto  $A$  le tre possibilità di movimento, e quindi può tradursi analiticamente nelle tre equazioni:

$$\begin{aligned} u_{1A} &= 0 \\ u_{2A} &= 0 \\ \phi_A &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Tale tipo di vincolo è meccanicamente rappresentato come un incastro, e può intendersi equivalente alla contemporanea presenza di tre pendoli ad assi non concorrenti in un punto (proprio od improprio) (cfr. Figura 2.3).

### 2.1.4 Sul doppio bipendolo

Il modello meccanico del vincolo semplice che proibisce la rotazione, permettendo le traslazioni, può essere ora illustrato come in Figura 2.3, giustificando così anche il nome di doppio bipendolo ad esso assegnato.

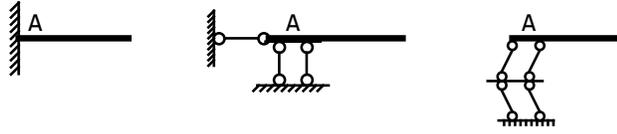


Figura 2.3: Il vincolo triplo, ed il doppio bipendolo

## 2.2 Le reazioni vincolari

Ad ogni vincolo deve corrispondere una forza che sia in grado di far rispettare il vincolo stesso. Ne segue che il vincolo semplice che proibisce le traslazioni orizzontali è equivalente ad una forza di intensità tale da annullare gli spostamenti orizzontali, e poichè essa può essere vista come l'azione del dispositivo di vincolo sulla trave, la si chiamerà *reazione vincolare*.

Del tutto analogamente, un carrello a piano di scorrimento orizzontale può essere sostituito da una reazione verticale, di valore incognito, capace di annullare gli spostamenti verticali, ed un carrello a piano di scorrimento inclinato corrisponde ad una reazione incognita diretta secondo la normale al piano di scorrimento stesso. Infine, il doppio bipendolo può essere considerato equivalente ad una *coppia reattiva*, che annulla le rotazioni. Si giunge quindi alla rappresentazione statica dei vincoli semplici illustrata in Figura 2.4.

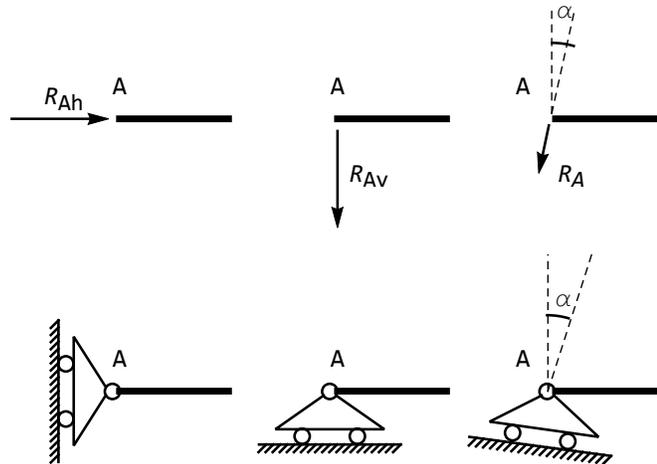


Figura 2.4: Carrelli a piano di scorrimento verticale, orizzontale o inclinato, e loro equivalente statico

I vincoli doppi, dal canto loro, impongono due condizioni cinematiche, e sono equivalenti a due forze/coppie reattive. Così, l'appoggio equivale a due forze reattive dirette secondo gli assi, ed il bipendolo ad una reazione — diretta

secondo l'asse del bipendolo — e ad una coppia reattiva. Equivalentemente, e talvolta più utile, le due forze nell'appoggio possono pensarsi composte in un'unica forza, passante per l'appoggio, ma di inclinazione incognita, mentre il bipendolo potrà essere sostituito da una forza la cui inclinazione è nota, coincidendo con la normale al piano di scorrimento dei pendoli, ma la cui effettiva posizione resta incognita.

Infine, l'incastro deve essere sostituito da due reazioni ed una coppia. Componendo le due reazioni in un'unica forza inclinata di un angolo incognito, può pensarsi che l'incastro reagisca con una forza passante per esso, ed inclinata di un angolo incognito, e con una coppia. oppure ancora, con una forza di cui non è nota l'inclinazione, e non è noto il punto di applicazione. Tutto ciò è sintetizzato nelle Figure 2.5-2.6

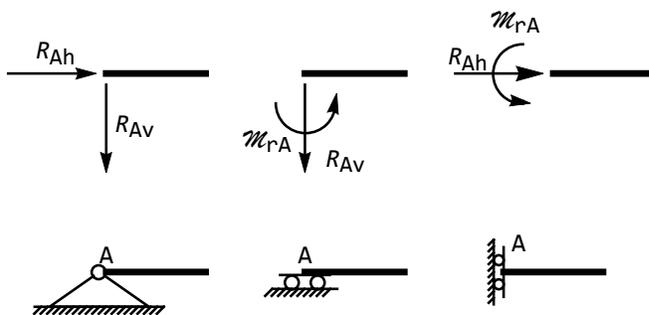


Figura 2.5: Appoggio e bipendolo, e loro equivalente statico

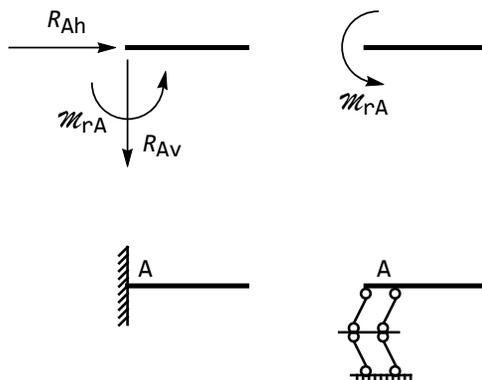


Figura 2.6: Incastro e doppio bipendolo, e loro equivalente statico



## Capitolo 3

# La statica del corpo rigido

In questa lezione si sintetizzano alcuni risultati di statica del corpo rigido, a partire da un enunciato assiomatico del principio dei lavori virtuali, da cui vengono dedotte le equazioni cardinali della statica.

### 3.1 Il principio dei lavori virtuali

Si consideri un corpo rigido  $S$ , soggetto ad un insieme di  $M$  forze  $\mathbf{F}^{(i)}$ . Le condizioni di vincolo cui il corpo  $S$  è soggetto siano esprimibili tramite equazioni, e quindi si sia in presenza di vincoli bilaterali. Inoltre, si ipotizzi che i vincoli siano *lisci*, ossia privi di attrito.

**Definizione 1.** *Si definisce spostamento virtuale del corpo  $S$  un insieme di spostamenti infinitesimi dei punti del corpo che sia compatibile con le condizioni di vincolo, compresa la condizione di rigidità.*

**Definizione 2.** *Si definisce lavoro virtuale della generica forza  $\mathbf{F}$ , per effetto dello spostamento virtuale  $\delta\mathbf{u}$  del suo punto di applicazione, il prodotto scalare:*

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{u} \quad (3.1)$$

Si accetta, quale assioma fondante della statica del corpo rigido, il seguente:

**Teorema 1. (*Principio dei lavori virtuali*):** *Si consideri un corpo rigido  $S$  vincolato con vincoli lisci e bilaterali, soggetto alle forze  $\mathbf{F}^{(i)}$ . Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del corpo rigido nella configurazione  $C_0$  è che il lavoro virtuale delle forze applicate sia nullo per tutti i possibili spostamenti virtuali a partire da  $C_0$*

Si ricorda anche che, ai fini del calcolo del lavoro virtuale, è possibile sostituire al sistema di forze applicate un qualsiasi altro insieme di forze equivalente, ossia con la stessa risultante e lo stesso momento risultante.

### 3.2 Le equazioni cardinali della statica

Si consideri ancora un corpo rigido  $S$  soggetto ad un insieme di  $M$  forze  $\mathbf{F}^{(i)}$ , e siano  $\delta\mathbf{u}^{(i)}$  gli spostamenti virtuali degli  $M$  punti di applicazione delle forze. Il lavoro virtuale sarà allora fornito da:

$$\delta L = \sum_{i=1}^M \mathbf{F}^{(i)} \cdot \delta\mathbf{u}^{(i)} \quad (3.2)$$

Si scelga ora un punto arbitrario  $O$  da assumere come polo, e si utilizzi quanto detto finora per esprimere gli spostamenti virtuali in funzione delle tre traslazioni del polo, e delle tre rotazioni:

$$\delta\mathbf{u}^{(i)} = \delta\mathbf{u} + \mathbf{d}\phi \times \overrightarrow{OP_i} \quad (3.3)$$

essendosi indicato con  $P_i$  il punto di applicazione della  $i$ -ma forza. Introducendo la (3.3) nella (3.2) si ottiene:

$$\delta L = \sum_{i=1}^M \mathbf{F}^{(i)} \cdot \delta\mathbf{u} + \sum_{i=1}^M \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{d}\phi \times \overrightarrow{OP_i} = \delta\mathbf{u} \cdot \sum_{i=1}^M \mathbf{F}^{(i)} + \mathbf{d}\phi \cdot \sum_{i=1}^M \overrightarrow{OP_i} \times \mathbf{F}^{(i)} \quad (3.4)$$

Si definiscono ora il *vettore risultante*  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^M \mathbf{F}^{(i)} \quad (3.5)$$

ed il *vettore momento risultante*  $\mathbf{M}(O)$ :

$$\mathbf{M}(O) = \sum_{i=1}^M \overrightarrow{OP_i} \times \mathbf{F}^{(i)} \quad (3.6)$$

giungendo ad esprimere il lavoro virtuale in funzione dei sei parametri lagrangiani del corpo rigido:

$$\delta L = \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{M}(O) \cdot \mathbf{d}\phi \quad (3.7)$$

Dal principio dei lavori virtuali discendono allora le:

**Equazioni cardinali della statica:** *Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido è che il sistema di forze su di esso agente sia a risultante nullo ed a momento risultante nullo:*

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M}(O) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.3 Le reazioni vincolari

Quando il corpo rigido è vincolato, tutto quanto detto finora rimane valido, a patto di sostituire ai vincoli le reazioni vincolari, ossia quelle forze incognite in grado di imporre il rispetto delle condizioni di vincoli. Dividendo quindi le forze in attive (e note) e reattive (incognite) si dovranno scrivere le equazioni della statica come:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(r)} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{(a)}(O) + \mathbf{M}^{(r)}(O) &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{3.9}$$

Le (3.9) sono da riguardarsi come sei equazioni nelle incognite reattive.



## Capitolo 4

# I vincoli interni

Proseguendo nello studio dei corpi rigidi, adotteremo d'ora in poi la seguente classificazione geometrica, necessariamente alquanto vaga: chiameremo *trave*, o *solido monodimensionale* un corpo rigido in cui una dimensione sia nettamente preponderante rispetto alle altre due, chiameremo *piastre*, o *solidi bidimensionali*, i solidi caratterizzati da due dimensioni preponderanti rispetto alla terza dimensione, chiameremo infine *solido tridimensionale* un solido in cui le tre dimensioni siano paragonabili tra loro.

### 4.1 Il solido monodimensionale, o trave

Il modo più semplice di definire un solido monodimensionale del tipo trave è considerare una figura piana che si muove nello spazio conservandosi ortogonale alla curva descritta dal suo baricentro  $G$ . La curva suddetta si dirà *asse della trave*, la figura piana suddetta si dirà *sezione retta della trave*.

In generale, l'asse della trave può essere una qualsiasi curva sghemba, ma d'ora in poi considereremo solo travi il cui asse è contenuto in un piano (*piano medio della trave*), così definendo le *travi piane*. Se poi l'asse della trave risulta essere una retta, parleremo di *travi piane ad asse rettilineo*.

Infine, si parlerà di *problema piano* quando si studia una trave piana soggetta a forze e reazioni contenute nel piano medio, e quando la sezione retta della trave è simmetrica rispetto allo stesso piano medio.

E' evidente che un elemento strutturale del tipo trave non può superare certe dimensioni, e quindi il suo utilizzo è limitato ai casi più semplici. D'altro canto, è possibile ovviare a questo inconveniente connettendo tra loro più elementi trave, attraverso connessioni, o vincoli interni, che impediscono alcuni tra i movimenti relativi, e che trasmettono le corrispondenti forze interattive. In tal modo è possibile giungere a strutture a geometria complessa, identificate come un insieme di travi rigide connesse tra loro in un numero discreto di punti attraverso opportune connessioni.

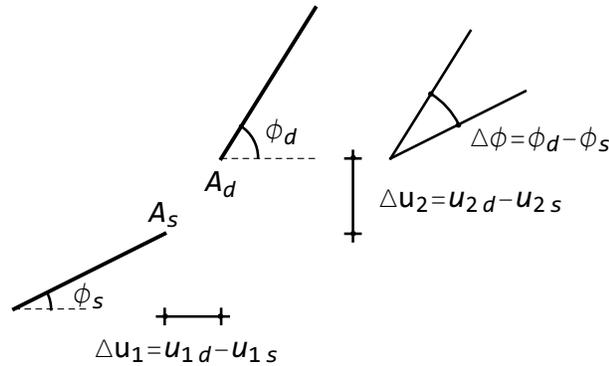


Figura 4.1: I tre possibili movimenti relativi in corrispondenza del punto  $A$

## 4.2 La cinematica dei vincoli interni

Si consideri una coppia di travi, collegate tra loro nel punto  $A$ , dove la sezione retta terminale della prima trave incontra la sezione iniziale della seconda trave. Nel caso spaziale, esistono tre traslazioni relative e tre rotazioni relative tra queste due sezioni. Nel caso piano, invece, i possibili movimenti relativi si riducono a due traslazioni relative  $\Delta u_1$  e  $\Delta u_2$  ed una singola rotazione relativa  $\Delta \phi$ , come illustrato in Figura 4.1.

Si adotta la seguente convenzione sui segni dei movimenti relativi: assegnato l'elemento di trave di estremi  $A$  e  $B$ , ed assunto un sistema di riferimento con origine in  $A$ , sia  $C$  il punto in cui si verifica il movimento relativo. Definendo *elemento di sinistra* la parte di trave  $AC$  ed *elemento di destra* la parte di trave  $CB$ , si pone:

$$\begin{aligned} \Delta u_{1C} &= u_{1Cdes} - u_{1Csin} \\ \Delta u_{2C} &= u_{2Cdes} - u_{2Csin} \\ \Delta \phi_C &= \phi_{Cdes} - \phi_{Csin} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Si ha quindi che un movimento relativo è positivo se — mantenendo ferma la parte di sinistra — la parte di destra subisce movimenti assoluti positivi.

### 4.2.1 Vincoli semplici (sconnessioni doppie)

Se le due sezioni contigue sono collegate tra loro in modo che valga la seguente equazione di vincolo:

$$\Delta u_1 = 0 \tag{4.2}$$

allora si dice che nel punto  $A$  agisce un vincolo semplice, o — equivalentemente — una sc connessione doppia. Meccanicamente, tale vincolo può rappresentarsi con un pendolo ad asse orizzontale, che visualizza l'obbligo delle due sezioni ad avere lo stesso spostamento orizzontale (cfr. Figura 4.2). Del tutto analogo è il caso in cui  $\Delta u_2 = 0$ , illustrato da un pendolo ad asse verticale.

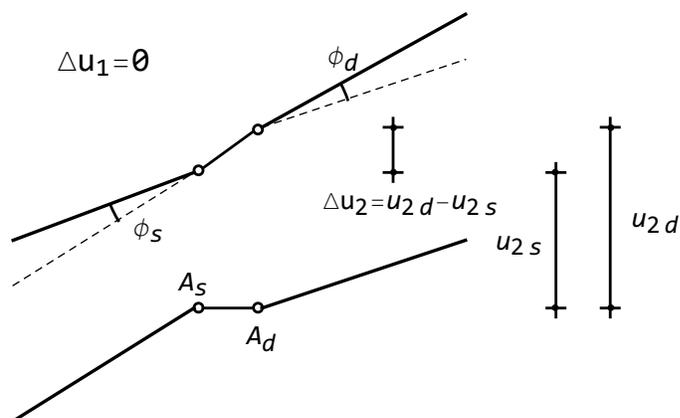


Figura 4.2: Il pendolo ad asse orizzontale ed il suo cinematismo

Un ulteriore esempio di vincolo semplice, o sconnessione doppia, è offerto dalla seguente equazione di vincolo:

$$\Delta\phi = 0 \quad (4.3)$$

Meccanicamente, tale vincolo può rappresentarsi con un doppio bipendolo, che visualizza l'obbligo delle due sezioni ad avere rotazione relativa nulla, come illustrato in Figura 4.3.

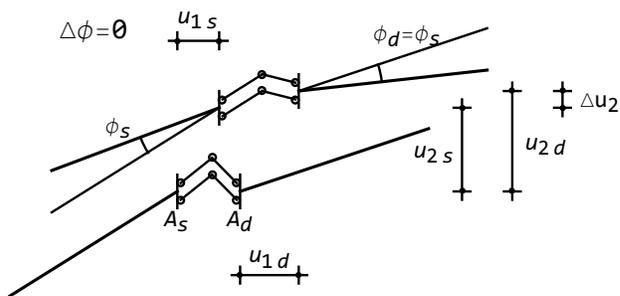


Figura 4.3: Il doppio bipendolo ed il suo cinematismo

### 4.2.2 Vincoli doppi (sconnessioni semplici)

Se le due sezioni contigue sono collegate tra loro in modo che valgano le seguenti equazioni di vincolo:

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= 0 \\ \Delta u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

allora si dice che nel punto  $A$  agisce un vincolo doppio, o — equivalentemente — una sconnessione semplice. Meccanicamente, tale vincolo può rappresentarsi con una *cerniera*, che visualizza l'obbligo delle due sezioni ad avere lo stesso spostamento, mentre le due travi possono ruotare indipendentemente intorno alla sezione  $A$ . Si giunge alla raffigurazione di Figura 4.4.

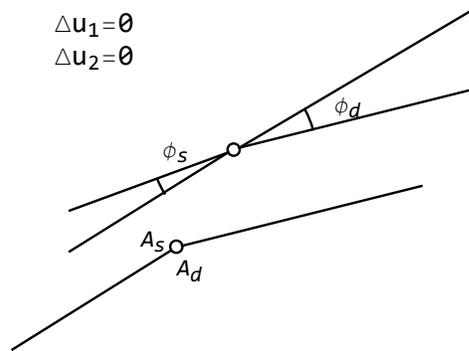


Figura 4.4: La cerniera ed il suo cinematismo

Se le due sezioni contigue sono collegate tra loro in modo che valgano le seguenti equazioni di vincolo:

$$\begin{aligned}\Delta u_1 &= 0 \\ \Delta \phi &= 0\end{aligned}\tag{4.5}$$

anche in questo caso si dice che nel punto  $A$  agisce un vincolo doppio, o — equivalentemente — una sconnessione semplice. Meccanicamente, tale vincolo può rappresentarsi con un *bipendolo*, ad asse orizzontale, che visualizza l'obbligo delle due sezioni ad avere lo stesso spostamento orizzontale e la stessa rotazione, mentre le due travi possono avere differenti spostamenti verticali. Del tutto analogo è il caso del bipendolo ad asse verticale, o di bipendolo ad asse inclinato. La rappresentazione grafica viene riportata in Figura 4.5.

### 4.3 La statica dei vincoli interni

Così come discusso per i vincoli esterni, anche i vincoli interni possono considerarsi equivalenti a forze o coppie reattive, di valore incognito, tali da imporre il rispetto del vincolo. Quindi, il pendolo può essere sostituito da due forze, uguali e contrarie, agenti secondo l'asse del pendolo, e tali da annullare lo spostamento relativo lungo l'asse del pendolo, come riportato in Figura 4.6.

Il doppio bipendolo è invece equivalente a due coppie uguali e contrarie, di valore tale da impedire la rotazione relativa, come illustrato in Figura 4.7. La cerniera — ossia un vincolo doppio — è equivalente a due forze orizzontali e due forze verticali, tali da annullare lo spostamento relativo. Il bipendolo —

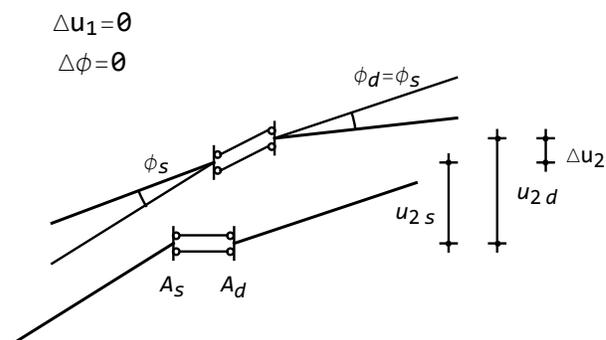


Figura 4.5: Il bipendolo ad asse orizzontale ed il suo cinematismo

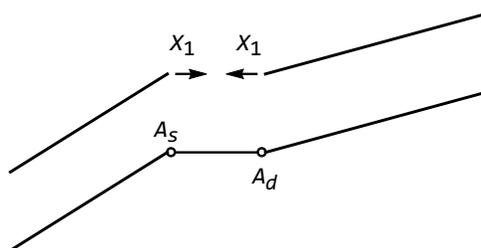


Figura 4.6: Il pendolo ad asse orizzontale ed il suo equivalente statico

anch'esso doppio — è sostituibile con due coppie e due forze dirette lungo l'asse del bipendolo, tali da annullare le rotazioni relative e gli spostamenti relativi lungo l'asse del bipendolo. Tutto ciò viene sintetizzato nelle Figure 4.8–4.9.

Si noti anche, come già fatto per i vincoli esterni, che le forze agenti in una cerniera possono comporsi in un'unica forza inclinata, e passante per la cerniera stessa, mentre la coppia e la forza reattiva del bipendolo possono ricondursi ad un'unica forza parallela all'originale, ma traslata di una opportuna quantità, in modo da generare la coppia reattiva.

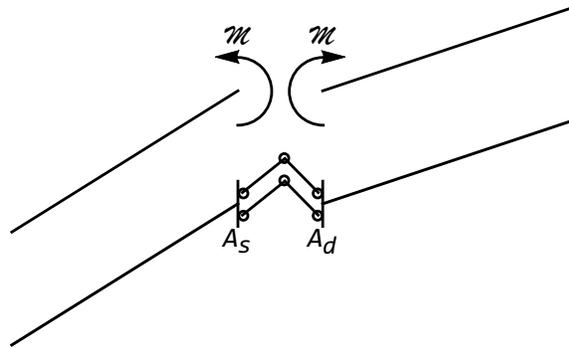


Figura 4.7: Il doppio bipendolo ed il suo equivalente statico

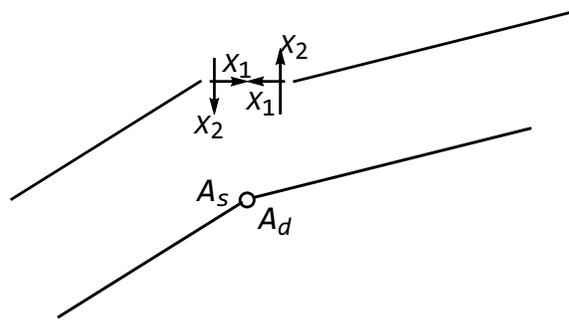


Figura 4.8: La cerniera ed il suo equivalente statico

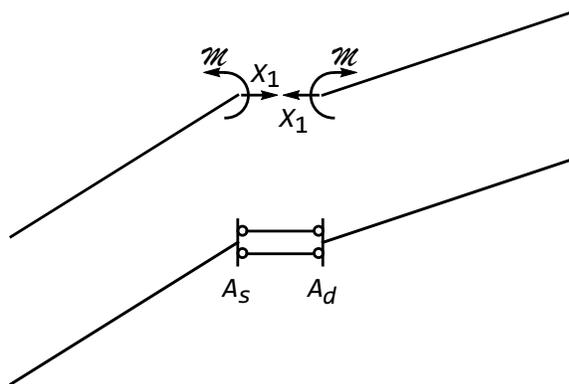


Figura 4.9: Il doppio pendolo ad asse orizzontale ed il suo equivalente statico

## Capitolo 5

# Analisi cinematica

Si consideri ora una struttura bidimensionale, ossia un insieme di travi collegate tra loro ed al suolo da opportuni vincoli. In questa lezione si vogliono studiare i possibili cinematismi della struttura, ossia i possibili spostamenti infinitesimi della struttura stessa, a partire da una configurazione iniziale.

### 5.1 La classificazione cinematica delle strutture

Si consideri una struttura costituita da  $t$  tratti, intendendo con “tratto” il pezzo di struttura compreso tra due vincoli, interni o esterni che siano. Si immagini ora di eliminare tutti i vincoli, sia esterni che interni. Ci si è ridotti in tal modo ad una insieme di  $t$  tratti liberi, ciascuno dei quali è dotato di tre gradi di libertà, due traslazionali ed uno rotazionale, e quindi la struttura non vincolata ha  $3t$  possibilità di movimento, o  $3t$  *gradi di libertà*. Numerando i tratti da 1 ad  $t$ , tali gradi di libertà possono essere convenientemente organizzati in un vettore  $\mathbf{d}$ :

$$\mathbf{d}^T = \left( u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, \phi^{(1)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, \phi^{(2)}, \dots, u_2^{(t)}, u_3^{(t)}, \phi^{(t)} \right) \quad (5.1)$$

In  $\mathbf{d}$  trovano quindi posto, tratto per tratto, lo spostamento rigido orizzontale, lo spostamento rigido verticale e la rotazione rigida, calcolata adottando un generico polo di riferimento per ogni tratto.

Siano ora  $m$  le equazioni di vincolo che si possono scrivere in base ai dispositivi di vincolo previsti, sicchè  $m$  sono i gradi di libertà soppressi dai vincoli stessi. Poichè in ogni tratto si possono esprimere gli spostamenti di un punto generico attraverso i tre parametri  $u_1, u_2$  e  $\phi$ , ne segue che le  $m$  equazioni di vincolo potranno esprimersi come equazioni lineari nei  $3t$  gradi di libertà incogniti:

$$\mathbf{C}\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

dove la matrice cinematica  $\mathbf{C}$  ha  $m$  righe e  $3t$  colonne. Si supponga ora che tra le  $m$  equazioni di vincolo esistano  $p$  relazioni di dipendenza, riducendo ad

$s = m - p$  il numero di equazioni linearmente indipendenti, e si consideri la seguente classificazione:

- 3t - s > 0** Esistono più gradi di libertà di quanti ne siano stati soppressi dai vincoli, la struttura quindi è in grado di subire uno spostamento rigido. In tal caso si parla di struttura *cinematicamente indeterminata*, o di *struttura labile*, ed occorrerà identificare i possibili meccanismi di moto.
- 3t - s = 0** I vincoli sono esattamente in numero pari ai gradi di libertà, che quindi vengono tutti proibiti. La struttura non è in grado di subire uno spostamento rigido. In tal caso si parla di struttura *cinematicamente determinata*.
- 3t - s < 0** I vincoli sono sovrabbondanti ed i gradi di libertà vengono tutti proibiti. La struttura non è in grado di subire uno spostamento rigido, ed anche in tal caso si parla di struttura *cinematicamente determinata*. La distinzione tra questi due casi risulterà evidente quando nella prossima lezione si studierà la classificazione statica delle strutture.

## 5.2 Esempi ad una singola trave

Si consideri la trave di Figura 5.1a, vincolata al suolo da una cerniera situata in corrispondenza dell'estremo di sinistra. Le condizioni di vincolo dettano:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Scegliendo come gradi di libertà le due traslazioni del punto  $A$ , e la rotazione della trave intorno allo stesso punto  $A$ , la (5.2) diviene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

La struttura è una volta labile, in quanto il rango della matrice cinematica è pari a 2, ed il corrispondente cinematismo è rappresentato da una rotazione di ampiezza non specificata intorno al punto  $A$ .

Si consideri ora la trave di Figura 5.1b, vincolata da una cerniera nell'estremo di sinistra e da un carrello a piano di scorrimento orizzontale nell'estremo di destra. Le condizioni di vincolo dettano:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \\ u_2^B &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Scegliendo anche in questo caso come gradi di libertà le due traslazioni del punto  $A$ , e la rotazione della trave intorno allo stesso punto  $A$ , occorre preventivamente esprimere la terza condizione di vincolo in termini dei tre gradi di

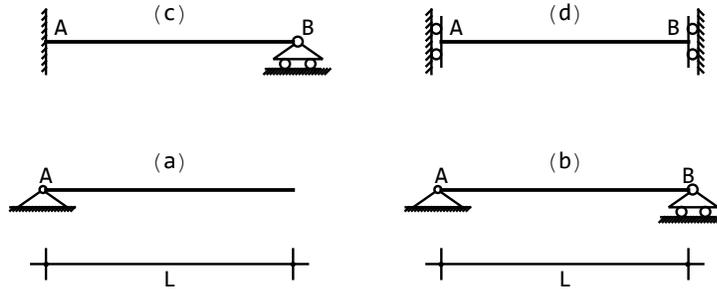


Figura 5.1: Quattro semplici esempi di analisi cinematica

libertà prescelti. E' immediato realizzare che in ipotesi di spostamenti infinitesimi si ha  $u_2^B = u_2^A - \phi^A L$ , dove  $L$  è la luce della trave, e quindi la (5.2) si scriverà ora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

La struttura è cinematicamente determinata, ed esistono tanti vincoli quanti sono i gradi di libertà:  $3t - s = 0$ , poichè il rango della matrice  $\mathbf{C}$  è massimo.

Come terzo esempio, si esamini la trave in Figura 5.1c, incastrata a sinistra ed appoggiata a destra ad un carrello a piano di scorrimento orizzontale. Le condizioni di vincolo sono quattro:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \\ \phi^A &= 0 \\ u_2^B &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

e quindi la (5.2) diviene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

La struttura è cinematicamente determinata, in quanto  $3t < s$ , ed il rango di  $\mathbf{C}$  è massimo.

Infine, si consideri la trave di Figura 5.1d, vincolata agli estremi da due bispindoli ad asse di scorrimento verticale. Per essi si avrà:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ \phi^A &= 0 \\ u_3^B &= 0 \\ \phi^B &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Ne segue che la struttura è labile, in quanto la matrice  $\mathbf{C}$  ha rango 2, e solo due condizioni di vincolo sono efficaci.

### 5.3 Un esempio più complesso

Si consideri infine il telaio di Figura 5.2, costituito da due piedritti di altezza  $H_1$  ed  $H_2$ , rispettivamente, e da un traverso di luce  $2L$ . All'estremità di sinistra un appoggio blocca ambedue le traslazioni, mentre all'estremità di destra un carrello a piano di scorrimento orizzontale blocca le traslazioni verticali. Inoltre, il traverso è suddiviso in mezzera da una cerniera.

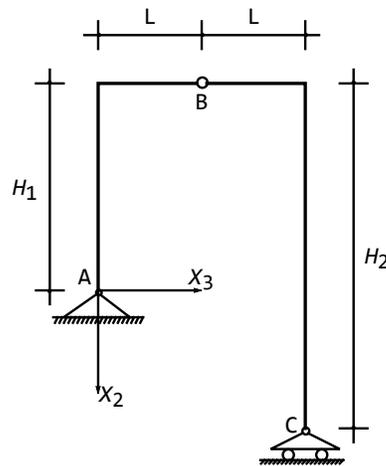


Figura 5.2: Un telaio zoppo di esempio

La struttura è formata da due tratti, ed in assenza di vincoli possiede quindi sei gradi di libertà: nel seguito si scelgono, quali coordinate lagrangiane, le traslazioni  $u_1^A$  ed  $u_2^A$  del primo tratto, la rotazione  $\phi^A$  dello stesso tratto intorno all'appoggio, le due traslazioni  $u_1^C$  ed  $u_2^C$  del secondo tratto, insieme alla rotazione  $\phi^C$  del secondo tratto intorno al carrello di destra. Corrispondentemente, esistono cinque equazioni di vincolo:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \\ u_{3s}^B &= u_{3d}^B \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} u_{2s}^B &= u_{2d}^B \\ u_2^C &= 0 \end{aligned}$$

dove  $u_{3s}^B$  ed  $u_{2s}^B$  sono gli spostamenti orizzontale e rispettivamente verticale del primo tratto in corrispondenza della cerniera interna, mentre  $u_{3d}^B$  ed  $u_{2d}^B$  sono gli spostamenti orizzontale e rispettivamente verticale del secondo tratto in corrispondenza della stessa cerniera interna.

Occorre ora esprimere queste equazioni in termini dei sei prescelti gradi di libertà. A tal fine si consideri che si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} u_{3s}^B &= u_3^A - \phi^A H_1 \\ u_{2s}^B &= u_2^A - \phi^A L \\ u_{3d}^B &= u_3^C - \phi^C H_2 \\ u_{2d}^B &= u_2^C + \phi^C L \end{aligned} \quad (5.12)$$

e quindi le (5.11) divengono:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -H_1 & -1 & 0 & H_2 \\ 0 & 1 & -L & 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \\ u_3^C \\ u_2^C \\ \phi^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

E' immediato dedurre che il rango della matrice  $\mathbf{C}$  è pari a cinque, e quindi le equazioni di vincolo sono linearmente indipendenti, segnalando che la struttura è una volta labile. Per calcolare il corrispondente meccanismo, si può porre arbitrariamente pari a  $\delta$  lo spostamento orizzontale del carrello,  $u_3^C = \delta$ , in modo che le (5.13) si trasformano in cinque equazioni non omogenee a determinante non nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H_1 & 0 & H_2 \\ 0 & 1 & L & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \\ u_2^C \\ \phi^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \\ \phi^A &= -\frac{\delta}{H_1 + H_2} \\ \phi^C &= \frac{\delta}{H_1 + H_2} \\ u_2^C &= 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

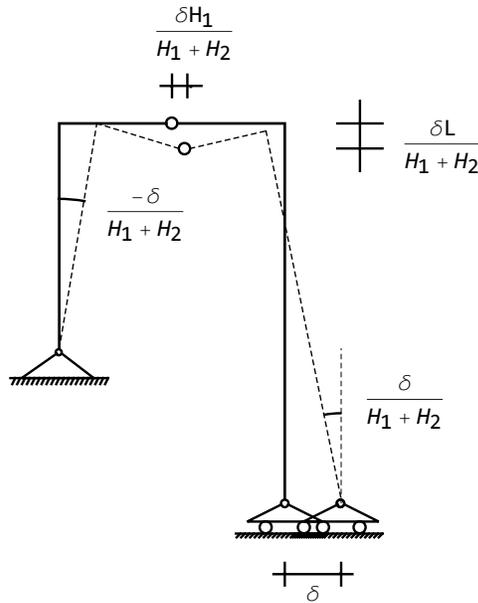


Figura 5.3: Il meccanismo per il telaio di Figura 5.2

Infine, utilizzando le (5.12) si possono ottenere gli spostamenti della cerniera:

$$\begin{aligned} u_3^B &= \frac{H_1}{H_1 + H_2} \delta \\ u_2^B &= \frac{L}{H_1 + H_2} \delta \end{aligned} \quad (5.16)$$

In Figura 5.3 è riportato il meccanismo appena identificato.

# Capitolo 6

## Analisi statica

Si consideri la stessa struttura bidimensionale della lezione precedente, ossia un insieme di travi collegate tra loro ed al suolo da opportuni vincoli. Si vuole ora indagare se la struttura in esame è in equilibrio, o meno, ed eventualmente si vuole indicare un procedimento di calcolo per le reazioni incognite dei vincoli.

### 6.1 La classificazione statica delle strutture

Si consideri una struttura costituita da  $t$  tratti, e si immagini di eliminare tutti i vincoli, sia esterni che interni, sostituendo ad essi le rispettive reazioni vincolari. Ci si è ridotti ad un insieme di  $t$  tratti liberi, soggetti ai carichi esterni, noti, ed alle  $m$  reazioni vincolari incognite, e poichè per ciascuna di queste tratti è possibile scrivere tre equazioni di equilibrio, sulla struttura non vincolata potranno scriversi  $3t$  equazioni di equilibrio nelle  $m$  incognite vincolari.

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b} \quad (6.1)$$

dove la *matrice statica*  $\mathbf{A}$  ha  $3t$  righe ed  $m$  colonne. Si supponga ora che le equazioni di equilibrio linearmente indipendenti siano  $N \leq 3t$ , tenendo conto del fatto che particolari disposizioni dei vincoli possono portare ad equazioni di equilibrio linearmente dipendenti, e si osservi la seguente classificazione:

**N - m > 0** Esistono più equazioni che incognite, sicchè le equazioni non possono essere risolte a fornire le reazioni, se non per particolari condizioni di carico, identificabili analiticamente come quelle condizioni di carico che portano ad una matrice orlata ancora di rango  $N$ . In tal caso si parla di *struttura labile*, in cui i vincoli sono incapaci di garantire l'equilibrio. Il numero  $l = N - m$  è il grado di labilità della struttura. Il corrispondente caso cinematico è quello dei meccanismi.

**N - m = 0** Il numero di equazioni di equilibrio linearmente indipendenti è pari al numero delle incognite. Ne segue che la soluzione esiste per qualsiasi condizione di carico, ed è unica. La struttura risulta in equilibrio ed è

agevole calcolare le reazioni vincolari. In tal caso si parla di *struttura isostatica*, equivalente della struttura *cinematicamente determinata*.

**N - m < 0** Esistono più reazioni vincolari che equazioni di equilibrio, la struttura è in equilibrio, ma in genere non è possibile calcolare le reazioni vincolari con le sole equazioni della statica. La struttura si dice *iperstatica*, il numero  $i = m - N$  è il grado di iperstaticità della struttura, ed esistono  $\infty^i$  soluzioni possibili.

## 6.2 La scrittura delle equazioni di equilibrio

Si consideri la trave di Figura 6.1a, vincolata al suolo da una cerniera situata in corrispondenza dell'estremo di sinistra, e soggetta ad una forza verticale  $F$  in corrispondenza dell'estremo libero. Sostituendo alla cerniera le due reazioni incognite verticali ed orizzontali  $R_H$  ed  $R_V$ , come illustrato in alto della stessa Figura 6.1a), si possono scrivere le tre equazioni di equilibrio:

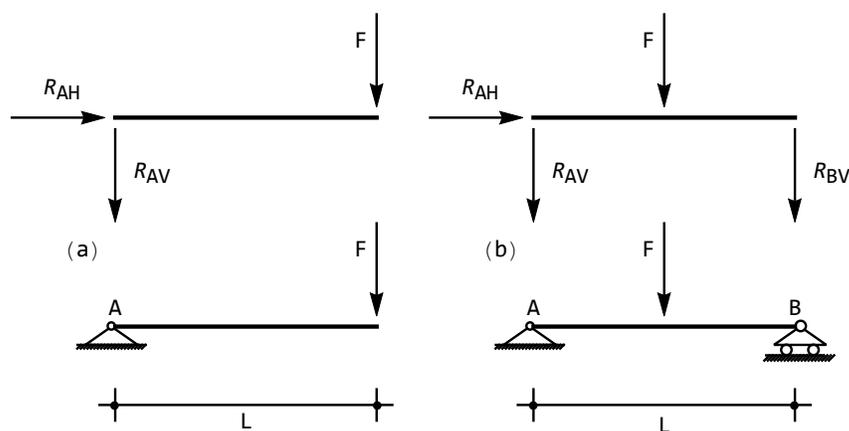


Figura 6.1: Due esempi di analisi statica

$$\begin{aligned} R_H &= 0 \\ R_V + F &= 0 \\ R_V L &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

dove si è assunto come polo l'estremo libero, e dove — come sempre — si sono assunte positive le reazioni dirette secondo gli assi e le coppie antiorarie. Le (6.2) rappresentano tre equazioni nelle due incognite reattive, e non possono essere risolte: la struttura non è in equilibrio, e ruoterà intorno alla cerniera di sinistra.

Si consideri ora la trave di Figura 6.1b, vincolata da una cerniera nell'estremo di sinistra e da un carrello a piano di scorrimento orizzontale nell'estremo di destra, e soggetta ad una forza in mezzeria. I vincoli sono equivalenti a due reazioni  $R_{AH}$  ed  $R_{AV}$  nell'estremo di sinistra, ed una reazione  $R_{BV}$  a destra. Scegliendo come polo l'estremo di sinistra, si possono scrivere le tre equazioni:

$$\begin{aligned} R_{AH} &= 0 \\ R_{AV} + R_{BV} + F &= 0 \\ F\frac{L}{2} + R_{BV}L &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{AH} \\ R_{AV} \\ R_{BV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ -F\frac{L}{2} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

La matrice ha rango massimo, la struttura è isostatica, e le reazioni possono facilmente calcolarsi.

Come terzo esempio, si esamini la trave in Figura 6.2a), incastrata a sinistra ed appoggiata a destra ad un carrello a piano di scorrimento orizzontale, e soggetta ad un carico distribuito su tutta la luce. Le reazioni incognite sono quattro, come illustrato in Figura 6.2c), mentre le equazioni di equilibrio restano tre:

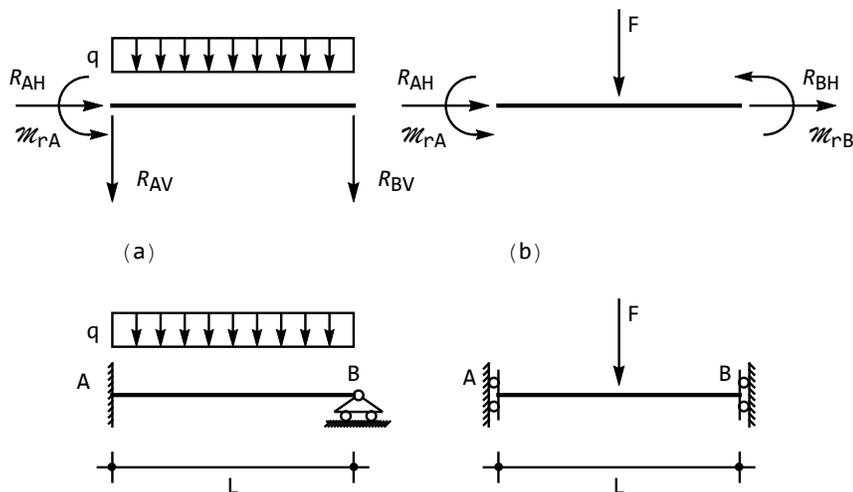


Figura 6.2: Altri due esempi di analisi statica

$$\begin{aligned}
R_{AH} &= 0 \\
R_{AV} + R_{BV} + qL &= 0 \\
-q\frac{L^2}{2} - R_{BV}L + \mathcal{M}_{rA} &= 0
\end{aligned} \tag{6.5}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{AH} \\ R_{AV} \\ R_{BV} \\ \mathcal{M}_{rA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -qL \\ \frac{L^2}{2} \\ -q\frac{L^2}{2} \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

La struttura risulta una volta iperstatica, ed esiste una infinità di soluzioni.

Infine, si consideri la trave di Figura 6.2b), vincolata agli estremi da due bipendoli ad asse di scorrimento verticale, e soggetta ad una forza in mezzzeria. Per essa si potranno scrivere le tre equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
R_{AH} + R_{BH} &= 0 \\
F &= 0 \\
\mathcal{M}_{rA} + \mathcal{M}_{rB} - F\frac{L}{2} &= 0
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Ne risulta chiaramente che per cattiva disposizione dei vincoli, la struttura non potrà risultare in equilibrio, e più in particolare subirà una traslazione verticale.

### 6.3 Un esempio più complesso

Si consideri infine il telaio di Figura 6.3, costituito da due piedritti di altezza  $H_1$  ed  $H_2$ , rispettivamente, e da un traverso di luce  $2L$ . Alle due estremità due appoggio bloccano ambedue le traslazioni, ed il traverso è suddiviso in mezzzeria per mezzo di una terza cerniera. La struttura è soggetta ad una forza orizzontale in corrispondenza del traverso.

La struttura è formata da due travi, e sostituendo ai vincoli, interni ed esterni, le corrispondenti reazioni (cfr. Figura 6.4), si possono imporre le condizioni di equilibrio per le due travi, scegliendo come poli i punti  $A$  e  $C$ , rispettivamente:

$$\begin{aligned}
R_{AH} + R_{BH} + F &= 0 \\
R_{AV} + R_{BV} &= 0 \\
-FH_1 - R_{BH}H_1 - R_{BV}L &= 0 \\
-R_{BH} + R_{HC} &= 0 \\
-R_{BV} + R_{VC} &= 0 \\
R_{BH}H_2 - R_{BV}L &= 0
\end{aligned} \tag{6.8}$$

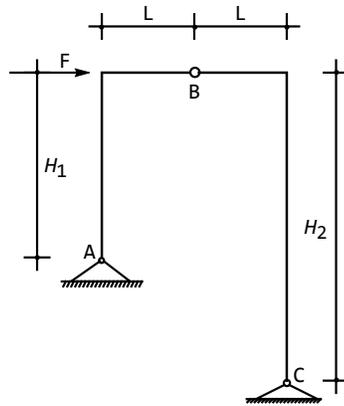


Figura 6.3: Un telaio zoppo per l'analisi statica

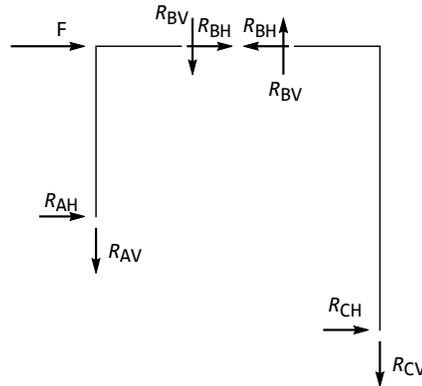


Figura 6.4: Le incognite statiche per il telaio zoppo

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & H_2 & -L & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{AH} \\ R_{AV} \\ R_{BH} \\ R_{BV} \\ R_{HC} \\ R_{VC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ -FH_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Il determinante della matrice di equilibrio è pari a  $-L(H_1 + H_2)$  e di conseguenza è diverso da zero, le reazioni possono essere calcolate e l'equilibrio è

garantito:

$$\begin{aligned}R_{AH} &= F \frac{H_2}{H_1 + H_2} \\R_{AV} &= -F \frac{H_1 H_2}{(H_1 + H_2) L} \\R_{BH} &= -F \frac{H_1}{H_1 + H_2} \\R_{BV} &= F \frac{H_1 H_2}{(H_1 + H_2) L} \\R_{HC} &= -F \frac{H_1}{H_1 + H_2} \\R_{VC} &= -F \frac{H_1 H_2}{(H_1 + H_2) L}\end{aligned}\tag{6.10}$$

# Capitolo 7

## Il concetto di tensione

*That the stree principle is not an obvious one, any teacher may convince himself by trying to teach it to students*

Clifford Truesdell – *Essays in the History of Mechanics*, Springer 1968, pag. 188

Si introduce in questa lezione un concetto basilare, quello di tensione in un punto  $P$  di un corpo  $B$  propriamente vincolato e soggetto a determinate condizioni di carico. E' quindi opportuno premettere qualche considerazione sul tipo di forze agenti sul corpo.

### 7.1 Il concetto di materia

Al di là delle interpretazioni filosofiche, il concetto di materia sembra essere uno dei più elusivi argomenti della fisica, e costituisce ancora oggi un affascinante capitolo di ricerca: fino a circa trent'anni fa, si credeva che protoni e neutroni fossero particelle elementari, poi si è visto che ambedue sono costituiti a partire dai cosiddetti “quark”. Potrebbero i quark, a loro volta, essere costituiti da particelle ancora più piccole? Oppure esistono ragioni teoriche che portino a far credere di aver trovato i blocchi fondamentali della natura?<sup>1</sup>

Qual'è la natura delle forze che tengono unite le particelle, e che sono responsabili dell'aggregazione della materia? Quanti “tipi” di forze diverse esistono? La gravitazionale, l'elettromagnetica, la nucleare debole e la nucleare forte?

---

<sup>1</sup>“We do have some theoretical reasons for believing that we have, or are very near to, a knowledge of the ultimate building blocks of nature” - Stephen Hawking, *A brief history of time*, Bantam Books, pag.73

Oppure è possibile unificare le ultime tre forze, nella cosiddetta “grand unified theory”? E perchè la gravità deve essere esclusa, e considerata a parte?

Ovviamente, questi problemi non possono preoccupare l'ingegnere, che in qualche modo deve disporre di un modello semplificato di realtà, e deve poter operare su un modello di materia più maneggevole. Sorge quindi la necessità di porre qualche ipotesi semplificatoria, che conduca ad una definizione operativa del mezzo continuo con cui l'ingegnere deve lavorare.

E l'ingegnere strutturista tratta un unico problema: calcolare spostamenti, deformazioni e tensioni in ciascun punto di una struttura soggetta a certi carichi e vincolata in un certo modo, qualunque cosa possa intendersi, per ora, con “deformazione” e “tensione”. Inoltre, è possibile limitare lo studio del suddetto problema a valori “ragionevoli” dell'intensità delle forze, quelle che si riscontrano in natura, e non quelle che è possibile generare in laboratorio.

E' anche possibile, e conveniente, suddividere le forze in base alla loro intensità, o meglio, in base al loro effetto sulla struttura: diremo quindi “moderate” le forze che producono effetti reversibili, e “intense” le forze che producono effetti irreversibili, limitandoci, nel seguito, al solo caso di forze moderate.

### 7.1.1 I primi tentativi di formalizzazione

Tralasciando, come ovvio, le teorie antiche e medievali sulla natura intima delle cose, si può senz'altro affermare che il primo tentativo scientifico di fornire un fondamento al comportamento della materia risalgia ad Isacco Newton. Secondo Newton, esisterebbe una forza attrattiva tra gli atomi costituenti i corpi, che potrebbe spiegare la natura fisica dell'elasticità, una sorta di “forza interna” che opererebbe all'interno dei corpi a somiglianza di come la forza di gravitazione opera tra i corpi<sup>2</sup>.

Molto più dettagliata, e scientificamente comprensibile, appare l'ipotesi del gesuita Boscovich, che, riprendendo il suggerimento di Newton, aveva formulato l'idea che tra due molecole contigue si sviluppi una forza agente lungo la congiungente le due molecole, e che questa forza potesse essere sia attrattiva che repulsiva.

Più precisamente, secondo Boscovich la materia sarebbe costituita da elementi materiali senza estensione, veri e propri centri di forza, d'intensità fortemente decrescente con la distanza. La repulsione, per distanze minime, spiega l'impenetrabilità dei corpi; il passaggio da repulsione ad attrazione, e viceversa, per distanze piccole spiega la coesione, il comportamento elastico ed una varia fenomenologia del comportamento dei materiali; infine, l'attrazione decrescente

<sup>2</sup>Il suggerimento di Newton si ritrova nelle note aggiuntive alla seconda edizione dell' *Optics or a treatise of the reflections, refractions and colour light*, del 1717, e venne ripreso da Musschenbroeck nel 1729, con questa straordinaria definizione di forza interna: “Tale forza interna fu introdotta da Dio in tutti i corpi, e il Creatore infinitamente efficace volle che essi operassero in sè secondo quella forza: pertanto la sua presenza è Legge di Natura simile all'altra che vien chiamata gravità”. Questa, e simili citazioni, sono riportati nel fondamentale testo di E. Benvenuto, “La scienza delle Costruzioni ed il suo sviluppo storico”, Sansoni, cui questa lezione fa costante riferimento.

col quadrato della distanza già sensibile converge alla legge di Newton<sup>3</sup>. Anche Laplace e Poisson utilizzarono questo approccio, il primo in uno studio sui fenomeni di capillarità, il secondo per alcune deduzioni sul comportamento di una lastra inflessa.

### 7.1.2 La teoria molecolare di Navier-Cauchy

Secondo questa teoria<sup>4</sup>, diretta generalizzazione dell'approccio newtoniano, il solido elastico sarebbe formato da numerosissime particelle  $p_i$ , che a seguito dell'applicazione delle forze esterne si muovono, modificando la loro mutua distanza, e generando quindi forze reattive interne, di attrazione o repulsione reciproca. Se le particelle sono distribuite in modo disordinato (materiale isotropo), allora è ragionevole pensare che, in media, le forze reattive agenti su una generica particella non mutano quando le molecole vicine si avvicinano o si allontanano. Se invece le particelle sono disposte secondo un certo ordine (materiale anisotropo), allora la risposta all'applicazione delle forze esterne varierà in base alla direzione della sollecitazione.

Rimandando ad un prossimo Capitolo gli sviluppi analitici di una simile ipotesi, si può fin d'ora osservare che essa conduce, almeno nella sua forma originaria, a conclusioni contraddette dagli esperimenti, ma che la sua potenza concettuale è tale da essere stata sostenuta a spada tratta per lunghissimo tempo, ad esempio da B. De Saint Venant. Inoltre, "non bisogna credere che la teoria molecolare conduca a risultati errati e che sia impossibile dedurre da essa il numero corretto di costanti. Il punto è che Cauchy e Poisson applicarono la teoria molecolare in una forma troppo semplificata. Usando moderni concetti della struttura dei materiali si può ottenere il risultato corretto"<sup>5</sup>, giungendo alla teoria molecolare di Voigt<sup>6</sup>.

---

<sup>3</sup>La frase su riportata è tratta da "*Sui principi di filosofia naturale che orientarono la ricerca di Saint-Venant*" di E. Benvenuto e A. Becchi, in "Omaggio a Giulio Ceradini", pag. 125–138. Da essa risulta evidente lo sforzo di unificazione delle cause naturali, già allora in atto, e di come lo spirito newtoniano permeasse qualsiasi disciplina scientifica. Non per nulla De Saint Venant definì Boscovich "il più conseguente newtoniano che ci sia e che ci possa essere". Dallo stesso lavoro citato sono tratte varie altre frasi nel seguito del Capitolo. Nella sezione Ricerca del sito <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk> può reperirsi una versione digitale della memoria citata

<sup>4</sup>La teoria fu illustrata originariamente da Navier in una memoria del 14 maggio 1821, data che segna la nascita della moderna teoria dell'elasticità ("Mémoire sur le lois de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques", *Mem. Inst. Nat.*, 7, pp.375–393, 1827), e fu poi generalizzata da Cauchy nel 1828, in due diverse memorie. ("Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle", *Exercices de Mathématiques*, 3, pp. 188–212, Parigi, 1828, e ancora "De la pression ou tension dans un système de points matériels", *ibid.* pp. 213–236

<sup>5</sup>N.I.Muskhelishvili, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity" Noordhoff 1953

<sup>6</sup>Per una discussione storica sulle teorie molecolari, vedi D. Capecchi, G. Ruta, P. Trovati, "From classical to Voigt's molecular models in elasticity", *Arch. Hist. Exact Sci.* 525–559 (2010)



Figura 7.1: N.I.Muskhelishvili

### 7.1.3 La teoria energetica di George Green

Solo un accenno si può dedicare ora alla teoria attualmente accettata in ambito ingegneristico, rimandando al seguito la sua dettagliata illustrazione.

Mentre la teoria molecolare si basa su ragionamenti di carattere microscopico, l'approccio energetico preferisce rivolgere l'attenzione ad una porzione finita di solido, basandosi su alcune ipotesi riguardanti il comportamento macroscopico del corpo in esame.

Più precisamente, l'ipotesi a base della teoria energetica è che il lavoro compiuto dalle forze esterne agenti sul solido si trasformi integralmente in una sorta di energia potenziale interna, che si ritroverà immagazzinata nel corpo. Il calcolo di questa energia, detta energia elastica, è abbastanza agevole, come si vedrà in seguito, se le forze sono applicate molto lentamente, in modo che il processo di deformazione sia isoterma, oppure molto velocemente, in modo che il processo sia adiabatico. Il primo tipo di processo di carico è fondamentale in regime statico, il secondo in regime dinamico.

## 7.2 La nozione di forza

La nozione di forza è da ritenersi primitiva, nell'ambito della meccanica, mentre da un punto di vista fisico possono distinguersi:

1. **forze di massa**, esercitate dall'esterno sul corpo in esame, come ad esempio la gravità
2. **forze di superficie esterne**, esercitate sulla frontiera del corpo da altri corpi,
3. **forze superficiali interne**, che si esercitano tra le varie porzioni in cui un corpo può idealmente suddividersi

Assegnare le forze di massa, quindi, equivale ad assegnare un campo vettoriale  $\mathbf{X}(P)$ , continuo, e la loro dimensione fisica è di una forza per unità di volume:

$$[X] = \frac{F}{L^3} \quad (7.1)$$

Le forze superficiali esterne sono definite tramite il campo vettoriale  $\mathbf{p}(P)$ , definito e continuo sulla parte di frontiera  $\partial B$  in cui esse agiscono. La loro dimensione fisica è di una forza su unità di superficie:

$$[p] = \frac{F}{L^2} \quad (7.2)$$

Si noti che si sono escluse le forze concentrate, la cui definizione sia fisica che matematica è troppo complessa per essere trattata in questa sede<sup>7</sup>. D'altro canto, nell'ambito delle scienze matematiche, la nozione di forza era guardata con sospetto già da svariati anni. Scriveva infatti B. De Saint-Venant nel 1866:

E' ben probabile che le forze, questa sorta di esseri problematici, o piuttosto di aggettivi sostantivati, che non sono nè materia nè spirito, esseri ciechi ed incoscienti e che bisogna tuttavia dotare della meravigliosa facoltà di apprezzare le distanze e di proporzionare puntualmente la loro intensità, siano sempre più espulse e scartate dalle scienze matematiche

Assegnate le forze di massa  $\mathbf{X}$  e superficiali  $\mathbf{p}$ , la *forza totale* agente su una porzione  $P$  del corpo  $B$  in esame è pari alla somma della forza superficiale agente sulla frontiera  $\partial P$  di  $P$ , e della forza di massa esercitata su  $P$  dall'esterno:

$$f(P) = \int_{\partial P} \mathbf{p} \, dA + \int_P \mathbf{X} \, dv \quad (7.3)$$

Analogamente, il *momento totale*  $m(P)$  su  $P$ , intorno all'origine  $O$ , è dato da:

$$m(P) = \int_{\partial P} \mathbf{r} \times \mathbf{p} \, dA + \int_P \mathbf{r} \times \mathbf{X} \, dv \quad (7.4)$$

---

<sup>7</sup>La definizione formale di forza concentrata può essere fornita in termini di *distribuzioni*, e la presenza di un tal tipo di forze complica grandemente l'analisi. Il lettore interessato può comunque consultare il libro di P.P. Teodorescu e W.Kecs, *Distribution Theory*, Wiley-VCH, Weinheim, 2013, oppure l'articolo 39 di P. Villaggio, *Qualitative Methods in Elasticity*, Noordhoff, 1977.

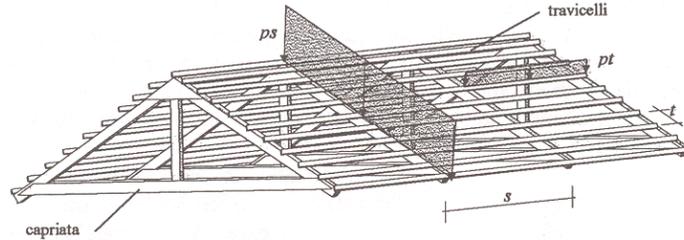


Figura 7.2: Uno schema di copertura in legno

dove  $\times$  indica il prodotto vettoriale tra il vettore posizione  $\mathbf{r}$  ed il vettore delle forze superficiali  $\mathbf{p}$  ed il vettore delle forze di massa  $\mathbf{X}$ , rispettivamente.

Nel seguito si supporrà che il corpo  $B$  sia in equilibrio in presenza delle forze esterne, ossia che si abbia:

$$f(B) = \int_{\partial B} \mathbf{p} dA + \int_B \mathbf{X} dv = 0 \quad (7.5)$$

$$m(B) = \int_{\partial B} \mathbf{r} \times \mathbf{p} dA + \int_B \mathbf{r} \times \mathbf{X} dv = 0 \quad (7.6)$$

### 7.2.1 Esempio

Si consideri il tetto in legno di Figura 7.2, schematizzabile con un insieme di travi principali (capriate) collegate tra loro dalle travi secondarie (travicelli), sulle quali poi poggia il tavolato e tutto il pacchetto del tetto, fino alle tegole. Sulla superficie del tetto graverà quindi il peso proprio delle tavole, di eventuale isolante, di tegole, del vento, della neve, etc.. Tutto ciò può ricondursi ad un singolo carico superficiale  $p$  [ $\text{FL}^{-2}$ ]. A sua volta, il carico superficiale  $p$  si tramette ai travicelli, e su ciascun travicello può considerarsi agente il carico della fascia di tetto di larghezza pari all'interasse  $t$  tra i travicelli stessi. In definitiva, sul travicello generico agisce il carico per unità di lunghezza  $q = pt$ , di dimensione fisica [ $\text{FL}^{-1}$ ].

I carichi sui travicelli si trasmetteranno a loro volta sulle travi principali. In particolare, in ciascun punto in cui una trave secondaria si appoggia sulla capriata, si avrà uno scarico concentrato, pari alla forza  $F = pts$ , dove  $s$  è l'interasse tra le capriate. Se poi l'interasse  $t$  tra le travi secondarie è abbastanza piccolo, questi scarichi possono considerarsi come un carico distribuito di intensità  $ps$ , agente sulle capriate.

Tutto ciò per quel che riguarda i carichi applicati alle capriate. Esiste poi il peso proprio delle capriate stesse, rappresentato da una forza di volume di dimensioni fisiche [ $\text{FL}^{-3}$ ].

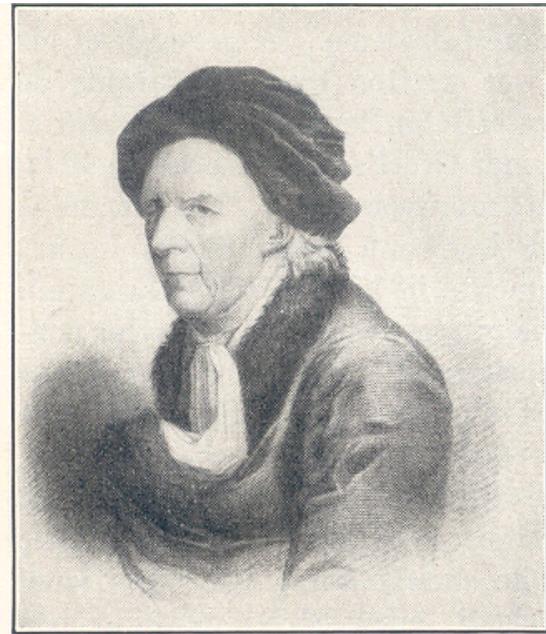


Figura 7.3: Leonardo Eulero

### 7.3 L'assioma di separazione di Eulero

La definizione di tensione fu fornita da Cauchy nel 1823, e si basa su ipotesi preventivamente accettate da Eulero in alcuni studi di meccanica dei fluidi. Più precisamente, si accetta il seguente:

**Assioma 1. (Eulero)** - Si consideri un corpo  $B$ , soggetto alle forze di massa  $\mathbf{X}$  e superficiali  $\mathbf{p}$ , e si consideri un piano fittizio  $\Pi$ , passante per il punto  $P$ , e che partizioni il corpo  $B$  in due corpi  $B_1$  e  $B_2$ .

*L'azione esercitata da  $B_1$  su  $B_2$  attraverso un intorno  $\Delta A$  di  $P$  appartenente al piano  $\Pi$ , si suppone equivalente ad un campo di forze interne definito su  $\Delta A$ .*

Per precisare ulteriormente la natura di questo campo di forze è possibile ridurlo preventivamente ad una forza risultante  $\mathbf{R}$  ed un momento risultante  $\mathbf{M}$ , come suggerito dallo stesso Eulero. La seconda operazione, che consiste nel far decrescere l'area dell'intorno  $\Delta A$  fino, al limite, a ridurla a zero, conduce alla definizione di tensione secondo Cauchy.

### 7.4 La definizione del solido di Cauchy

Si consideri un corpo  $B$ , soggetto alle forze di massa  $\mathbf{X}$  e superficiali  $\mathbf{p}$ , e si consideri un piano fittizio  $\Pi_n$ , passante per il punto  $P$  e definito dalla sua

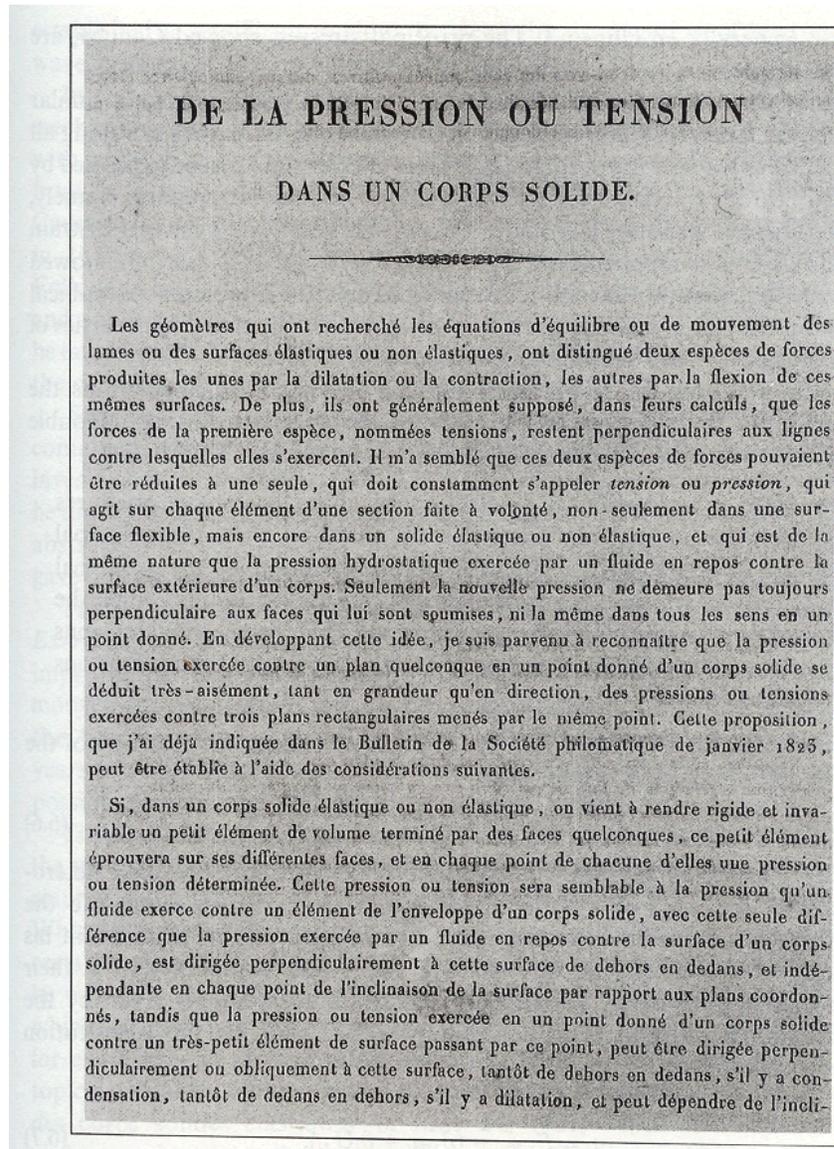


Figura 7.4: La pagina 42 del “De la pression ou tension dans un corps solide”, Exercices de Mathématiques, **2** (1827) di Cauchy, contenente la definizione di tensione

normale  $\mathbf{n}$ , che partizioni il corpo  $B$  in due corpi  $B_1$  e  $B_2$ . Accettando l'assioma di Eulero, siano  $\mathbf{R}_n$  ed  $\mathbf{M}_n$  la forza ed il momento risultante agenti sull'area  $\Delta A$ . Si considerino ora i due rapporti:

$$\frac{\mathbf{R}_n}{\Delta A} \quad \frac{\mathbf{M}_n}{\Delta A} \quad (7.7)$$

e si faccia tendere l'area  $\Delta A$  a zero. L'ipotesi di Cauchy<sup>8</sup> consiste nel ritenere che sia possibile operare i limiti:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_n}{\Delta A} \quad \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}_n}{\Delta A} \quad (7.8)$$

che il primo dia un risultato finito, ed il secondo un risultato nullo (cfr. Figura 7.5):

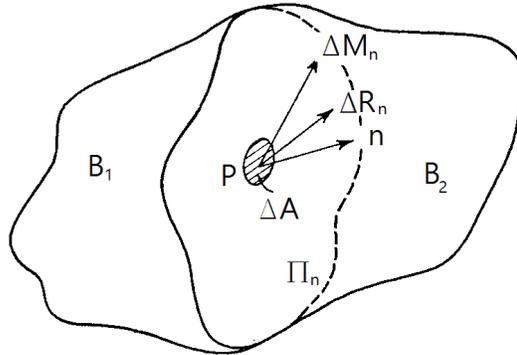


Figura 7.5: La definizione di tensione secondo Cauchy

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_n}{\Delta A} = \mathbf{t}_n \quad \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}_n}{\Delta A} = 0 \quad (7.9)$$

Alla quantità  $\mathbf{t}_n$ , funzione del punto  $P$  e della normale  $\mathbf{n}$ , si dà il nome di *tensione in  $P$  relativamente al piano di normale  $\mathbf{n}$* , ed all'insieme  $\{\mathbf{t}_n\}$  di tutte le possibili tensioni al variare della normale  $\mathbf{n}$  si dà il nome di *tensione nel punto  $P$* <sup>9</sup>.

<sup>8</sup>La definizione di tensione, ed alcune sue proprietà, possono già leggersi nella memoria di Cauchy, "De la pression ou tension dans un corps solide", Exercices de Mathematiques, 60-78, (1827), riportata nella sezione Ricerca del sito <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk>

<sup>9</sup>L'ipotesi che il secondo rapporto sia nullo definisce il cosiddetto *solido di Cauchy*.

## 7.5 Componenti normali e tangenziali di tensione

Si consideri il piano  $PCFB$  di Figura 7.6, di normale  $\mathbf{n}$ , e sia  $\mathbf{t}_n$  il relativo vettore rappresentativo della tensione agente in  $P$  sul piano di normale  $\mathbf{n}$ . Si fissino due assi coordinati  $l$  ed  $m$ , ortogonali tra loro e giacenti nel piano  $PCFB$ , in modo da definire un riferimento tri-ortogonale  $(P, l, m, n)$ . Il vettore tensione  $\mathbf{t}_n$  può scomporsi secondo questi tre assi, dando luogo alla componente  $t_{nn}$ , diretta lungo la normale al piano, ed alle due componenti  $t_{nl}$  e  $t_{nm}$  giacenti nel piano.

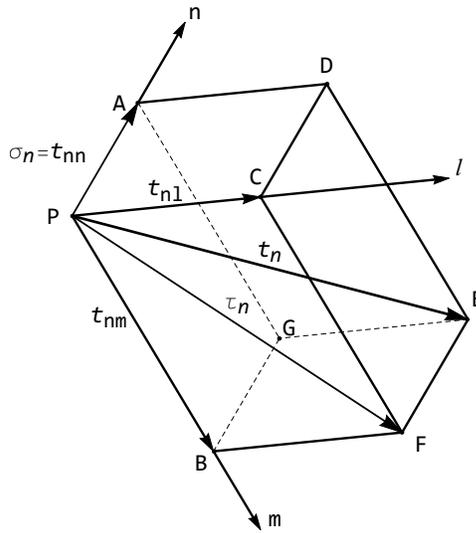


Figura 7.6: Componenti normali e tangenziali di tensione

Data l'importanza di questa scomposizione, la componente  $t_{nn}$  si chiama anche *tensione normale* al piano in  $P$ , e si denota talvolta con  $\sigma_n$  mentre le altre due tensioni si dicono *tensioni tangenziali*. Spesso, le due componenti  $t_{nl}$  e  $t_{nm}$  si compongono in un'unica componente, di intensità  $\tau_n = \sqrt{t_{nl}^2 + t_{nm}^2}$ , diretta come in Figura 7.6. Risulta, ovviamente:

$$t_n = \sqrt{t_{nl}^2 + t_{nm}^2 + t_{nn}^2} = \sqrt{\tau_n^2 + \sigma_n^2} \quad (7.11)$$

Esiste anche una diversa formalizzazione, in cui si ammette l'esistenza di un valore finito anche per il secondo rapporto:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_n}{\Delta A} &= \mathbf{t}_n \\ \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}_n}{\Delta A} &= \mathbf{m}_n \end{aligned} \quad (7.10)$$

dando luogo alle *coppie di sforzo*  $\mathbf{m}_n$ . La conseguente teoria definisce il cosiddetto *solido polare*, o di Cosserat, dal nome dei fratelli Cosserat.

In Figura 7.7 è riportata una diversa rappresentazione del vettore di tensione  $t_n$ ,

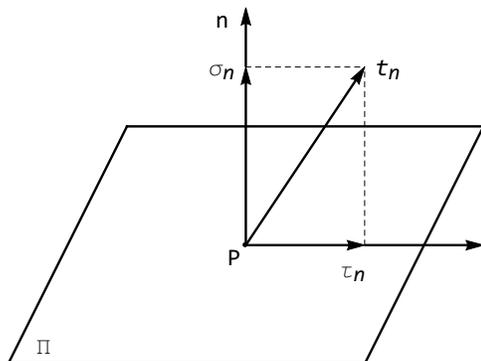


Figura 7.7: Componenti normali e tangenziali di tensione: una diversa rappresentazione

scomposto nella sua componente  $\sigma_n$ , normale al piano  $\Pi$ , e quindi parallelo ad  $\mathbf{n}$ , e nella sua componente  $\tau_n$ , giacente nel piano  $\Pi$ . A sua volta, scelta una coppia di assi ortogonali  $(l, m)$ , appartenenti al piano  $\Pi$ , la componente tangenziale  $\tau_n$  può essere scomposta in due componenti  $t_{nl}$  e  $t_{nm}$  secondo questi assi, così come riportato in Figura 7.8.

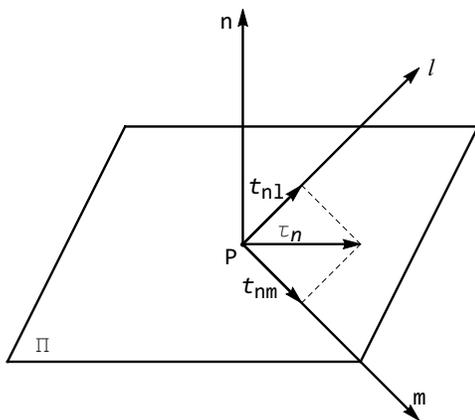


Figura 7.8: La scomposizione della componente tangenziale di tensione

## 7.6 Componenti speciali di tensione

Si consideri un punto  $P$ , appartenente al corpo  $B$  in esame, si scelga un sistema di riferimento cartesiano  $(O, X_1, X_2, X_3)$ , e si enuclei un parallelepipedo di

materia, scelto in modo che  $P$  ricada nel baricentro, e che le facce del parallelepipedo siano parallele ai piani coordinati. Inoltre, si può far decrescere la lunghezza dei lati del parallelepipedo fino ad ipotizzare che le tensioni agenti sulle sue facce possano considerarsi costanti.

Ciò fatto, si considerino le tre facce con normale uscente positiva, ossia equiverse agli assi, come riportato in Figura 7.9. Su ciascuna di queste facce agirà un vettore tensione, ciascuno con tre componenti lungo gli assi coordinati. Le nove componenti di tensione così identificate si chiamano *componenti speciali di tensione*, e giocheranno un ruolo fondamentale nel seguito. Sul piano  $ABCD$ , di normale equiversa all'asse  $X_1$ , agiscono le tre componenti di tensione  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{13}$ . Si noti che il primo indice indica la normale al piano su cui agisce la tensione, mentre il secondo indice indica la componente. Analogamente, sul piano  $BGHD$ , la cui normale è equiversa all'asse  $X_2$ , agiranno le tre componenti di tensione  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{23}$ , mentre sul piano  $CDEH$  agiranno le tre componenti di tensione  $\sigma_{31}$ ,  $\sigma_{32}$  e  $\sigma_{33}$ .

Per convenzione, le componenti speciali di tensione agenti su piani di normale equiversa agli assi sono positive se equiverse agli assi, quindi come riportati in figura. Sui tre piani di normale negativa, ossia controversa agli assi, le tensioni speciali positive saranno controverse agli assi, come riportato in Figura 7.9, e quindi saranno uguali e contrarie a quelle appena definite.

## 7.7 Riflessioni critiche sul concetto di tensione

E' evidente la natura altamente teorica della definizione di tensione appena fornita. In particolare, da un punto di vista fisico, la separazione del corpo  $B$  è una operazione ideale, poichè non si può certo sperare di operare realmente un taglio senza stravolgere l'originario stato di sollecitazione. Di conseguenza, sembra che non sia possibile un controllo sperimentale dei valori teorici della tensione.

Da un punto di vista matematico, poi, l'operazione di passaggio al limite suscita molti dubbi, non essendo chiaro *come* l'area  $\Delta A$  debba tendere a zero, e perchè il limite debba esistere ed avere un valore finito.

Tuttavia, la nozione di tensione secondo Cauchy si è rivelata così utile, sia da un punto di vista pratico-sperimentale che da un punto di vista matematico, che parecchi ricercatori hanno cercato di renderne più limpido il concetto. Se è vero che la definizione di tensione è un puro costrutto mentale, è anche vero che lo stato di sforzo può essere visualizzato, nell'ambito della foto-elasticità, e che comunque esso può essere reso evidente tramite le deformazioni che esso produce. Ulteriori giustificazioni del concetto di tensione possono ritrovarsi in ambito epistemologico: citando da Benvenuto <sup>10</sup>

“Una tensione è per definizione una proprietà dei punti interni di un corpo connessa matematicamente in modo semplice alle forze agenti

<sup>10</sup>P.W. Bridgman, “La logica della fisica moderna”, 1927, riportato nel citato libro di Benvenuto, alle pagine 431-433

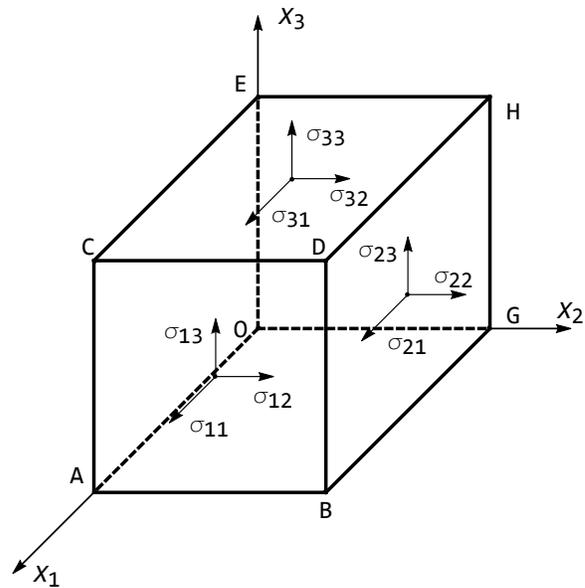


Figura 7.9: Le nove componenti cartesiane di tensione nel punto  $P$  agenti sui tre piani di normale positiva

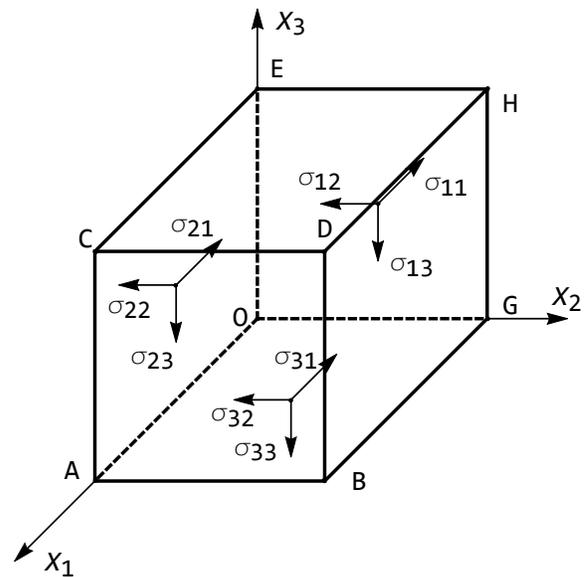


Figura 7.10: Le nove componenti cartesiane di tensione nel punto  $P$  agenti sui tre piani di normale negativa

sulla superficie libera del corpo. Una tensione è quindi, per sua natura, sempre al di fuori del raggio dell'esperienza diretta, ed è pertanto un costrutto. L'intera struttura di una tensione non corrisponde a nulla nell'esperienza diretta.

Dobbiamo poi chiederci se la tensione, che abbiamo inventato per risolvere la situazione di un corpo sottoposto a forze, è un buon costrutto. In primo luogo, una tensione ha lo stesso numero di gradi di libertà che compete al fenomeno osservabile, in quanto una delle proposizioni della teoria matematica dell'elasticità asserisce che le condizioni al contorno, le quali costituiscono le variabili sperimentali, determinano univocamente la tensione in un dato corpo; appare ovvio, esaminando le equazioni, che viceversa un sistema possibile di tensioni determina univocamente la tensione nella quantità significativa. Vi è dunque una corrispondenza biunivoca tra una tensione e la situazione fisica che essa è destinata a coprire, pertanto la tensione rappresenta un buon costrutto.

Un corpo sotto tensione è anche in uno stato di sforzo, che può venir determinato dalle deformazioni esterne, oppure lo sforzo nei punti interni può venir reso più evidente mediante quegli effetti ottici della doppia rifrazione nei corpi trasparenti, che ora vengono tanto impiegati in esperimenti dimostrativi; infine, se la tensione è spinta al di là di certi limiti, abbiamo fenomeni nuovi quali la deformazione permanente o addirittura la rottura.

Abbiamo dunque ragione a ritenerci soddisfatti del nostro costrutto della tensione. In primo luogo, dal punto di vista formale, esso rappresenta un buon costrutto perchè si ha una corrispondenza univoca con i dati fisici in termini dei quali è definito; in secondo luogo, abbiamo diritto di attribuirgli una realtà fisica perchè la tensione è connessa in modo unico ad altri fenomeni fisici, indipendenti da quelli considerati nella sua definizione. Quest'ultimo requisito, in effetti, dal punto di vista operativo, non rappresenta altro che una definizione di ciò che intendiamo per realtà delle cose non date direttamente dall'esperienza. L'esperienza mostra che la tensione, oltre che soddisfare i requisiti formali, è utilissima nel correlare i fenomeni, onde noi siamo giustificati nel dare a questo costrutto un posto preminente tra i nostri concetti”

## 7.8 Conclusioni

La definizione di tensione  $\{t_n\}$  in un punto  $P$  non è operativa, perchè l'insieme  $\{t_n\}$  è infinito. Si vedrà però nel prossimo Capitolo che la conoscenza della tensione per tre distinti valori della normale  $\mathbf{n}$  permette di determinare immediatamente la tensione per qualsiasi altro valore di  $\mathbf{n}$ .

## Capitolo 8

# Il teorema di Cauchy–Poisson

Come detto al termine della lezione precedente, occorre ora dare un criterio operativo per poter calcolare la tensione in un punto  $P$  relativamente al piano di generica normale  $\mathbf{n}$ , dimostrando il *teorema di Cauchy–Poisson*<sup>1</sup>

### 8.1 Il tetraedro elementare e le forze su esso agenti

Si consideri un punto generico  $P$  all'interno del corpo  $B$  e si voglia conoscere la tensione in  $P$  secondo il piano di normale generica  $\mathbf{n}$ . In un intorno di  $P$  si isoli un tetraedro infinitesimo di materia, di volume  $dV$ , con le tre facce ortogonali  $dA_{x_1}$ ,  $dA_{x_2}$ ,  $dA_{x_3}$  parallele ai tre piani coordinati, e con la faccia obliqua  $dA$  avente normale  $\mathbf{n}$ .

Siano  $\mathbf{t}_n$  la tensione agente in  $P$  relativamente al piano obliquo,  $\boldsymbol{\sigma}_1$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_2$  e  $\boldsymbol{\sigma}_3$  le tensioni in  $P$  relativamente ai tre piani coordinati. Si ammette ora, essendo

---

<sup>1</sup>L'enunciato originario del teorema, e la sua dimostrazione, si trovano in *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques* Bulletin des Sciences par la Société Philomatique, pp.9–13, 1823, e più diffusamente in *De la pression ou tension dans un corps solide* Ex. de Math. 2, 42–56, pubblicato nel 1827, ma scritto nel 1822.

Poisson ha dimostrato invece che l'esistenza del tensore delle tensioni implica che il corpo debba essere in equilibrio sotto le forze esterne, cfr. *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques* Mém. Acad. Sci. Inst. France (2) 8, 357–570.

Il teorema dimostrato in questa lezione è implicitamente accettato anche da A. Fresnel, in un lavoro del 1822 (*Second supplément au mémoire sur la double réfraction* in OEuvres 2, 369–442 (1868)) che però si basa sulle ipotesi di elasticità lineare, ed anche da Fourier, in un lavoro del 1814 sulla conduzione del calore (*Théorie Analytique de la Chaleur*, Paris, OEuvres 1, 1822)). Per una versione moderna dello stesso teorema si può consultare M.E. Gurtin, V.J. Mizel e W.O. Williams, *A note on Cauchy's stress theorem*, J. Math. Anal. Appl. 22, 398–401 (1968).

il tetraedro infinitesimo, che le tensioni in tutti i punti di ciascuna faccia siano uguali<sup>2</sup>, giungendo alla situazione di Figura 8.1.

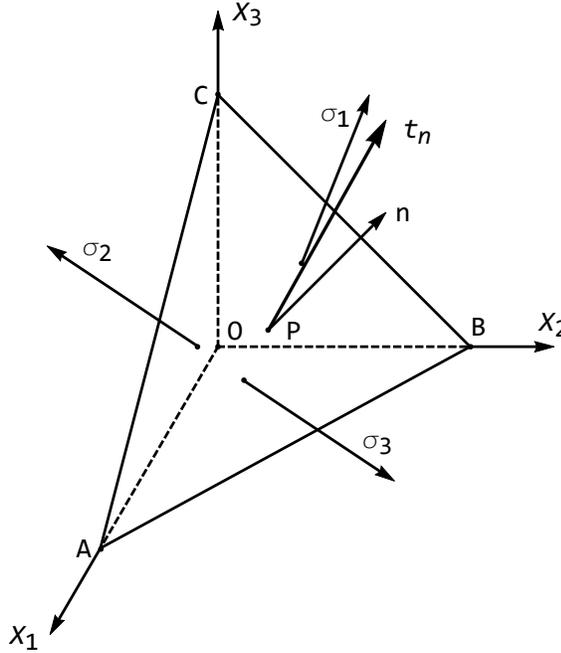


Figura 8.1: Il tetraedro elementare e le forze interne su di esso agenti

<sup>2</sup>Più rigorosamente, si assume che le tensioni varino con continuità, e quindi le componenti della forza agente sulla faccia obliqua  $ABC$  saranno esprimibili come  $(t_{n1} + \epsilon_1) dA$ ,  $(t_{n2} + \epsilon_2) dA$ , e  $(t_{n3} + \epsilon_3) dA$ , secondo i tre assi. Se poi  $h$  denota la distanza tra il piano  $ABC$  e l'origine, sarà:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_1 = 0 \qquad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_2 = 0 \qquad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_3 = 0 \qquad (8.1)$$

Analoga posizione dovrà essere assunta per le componenti cartesiane di tensione, che daranno luogo alle forze:

$$\begin{aligned} &(-\sigma_{11} + \epsilon_{11}) dA_{x1}, & (-\sigma_{12} + \epsilon_{12}) dA_{x2}, & (-\sigma_{13} + \epsilon_{13}) dA_{x3} \\ &(-\sigma_{21} + \epsilon_{21}) dA_{x2}, & (-\sigma_{22} + \epsilon_{22}) dA_{x2}, & (-\sigma_{23} + \epsilon_{23}) dA_{x2} \\ &(-\sigma_{31} + \epsilon_{31}) dA_{x3}, & (-\sigma_{32} + \epsilon_{32}) dA_{x3}, & (-\sigma_{33} + \epsilon_{33}) dA_{x3} \end{aligned} \qquad (8.2)$$

con:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_{ij} = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3 \qquad (8.3)$$

Infine, le forze di massa saranno fornite dalle espressioni:

$$(X_1 + \epsilon'_1) dV \qquad (X_2 + \epsilon'_2) dV \qquad (X_3 + \epsilon'_3) dV \qquad (8.4)$$

con:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon'_i = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (8.5)$$

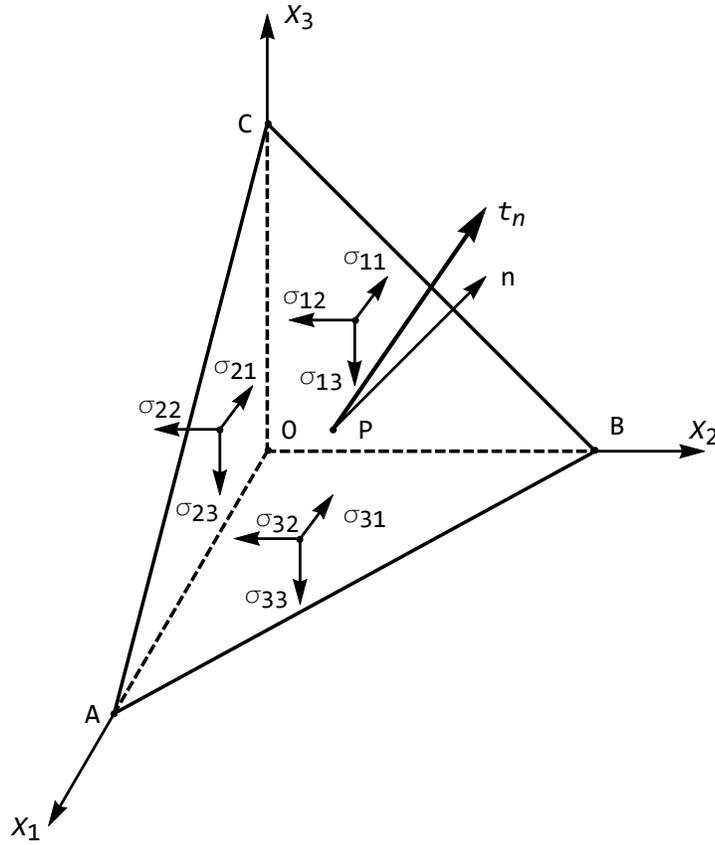


Figura 8.2: Il tetraedro elementare e le componenti delle forze interne su di esso agenti lungo i tre assi coordinati

Siano ora  $t_{n1}, t_{n2}, t_{n3}$  le componenti di  $\mathbf{t}_n$  secondo i tre assi coordinati,  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$  e  $\sigma_{13}$  le componenti di  $\boldsymbol{\sigma}_1$  secondo gli stessi assi coordinati,  $\sigma_{21}, \sigma_{22}$  e  $\sigma_{23}$  le componenti di  $\boldsymbol{\sigma}_2$ , ed infine  $\sigma_{31}, \sigma_{32}$  e  $\sigma_{33}$  siano le componenti di  $\boldsymbol{\sigma}_3$ .

Si noti che il primo indice denota la normale alla faccia su cui opera la tensione, mentre il secondo indice denota la direzione lungo la quale si calcola la componente. Inoltre, per convenzione, la componente di tensione agente su una faccia la cui normale esterna è rivolta secondo il verso positivo di uno dei tre assi sarà positiva se ha verso concorde con gli assi, mentre la componente di tensione agente su una faccia la cui normale esterna è rivolta secondo il verso negativo di uno dei tre assi sarà positiva se ha verso discorde con gli assi.

Infine, nel volume agirà una forza di volume  $\mathbf{X}$ , di componenti  $X_1, X_2$  ed  $X_3$ , e quindi, se  $dV$  indica il volume del tetraedro, su  $dV$  insisteranno anche le forze  $X_1 dV, X_2 dV$  ed  $X_3 dV$ .

In complesso, quindi, agiranno le componenti di forze indicate in Figura 8.2.

L'equilibrio alla traslazione secondo l'asse  $x_1$ , l'asse  $x_2$  e l'asse  $x_3$ , impone che sia:

$$\begin{aligned} t_{n1}dA - (\sigma_{11}dA_{x1} + \sigma_{21}dA_{x2} + \sigma_{31}dA_{x3}) + X_1dV &= 0 \\ t_{n2}dA - (\sigma_{12}dA_{x1} + \sigma_{22}dA_{x2} + \sigma_{32}dA_{x3}) + X_2dV &= 0 \\ t_{n3}dA - (\sigma_{13}dA_{x1} + \sigma_{23}dA_{x2} + \sigma_{33}dA_{x3}) + X_3dV &= 0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

e dividendo per  $dA$  si ottiene:

$$\begin{aligned} t_{n1} - \left( \sigma_{11} \frac{dA_{x1}}{dA} + \sigma_{21} \frac{dA_{x2}}{dA} + \sigma_{31} \frac{dA_{x3}}{dA} \right) + X_1 \frac{dV}{dA} &= 0 \\ t_{n2} - \left( \sigma_{12} \frac{dA_{x1}}{dA} + \sigma_{22} \frac{dA_{x2}}{dA} + \sigma_{32} \frac{dA_{x3}}{dA} \right) + X_2 \frac{dV}{dA} &= 0 \\ t_{n3} - \left( \sigma_{13} \frac{dA_{x1}}{dA} + \sigma_{23} \frac{dA_{x2}}{dA} + \sigma_{33} \frac{dA_{x3}}{dA} \right) + X_3 \frac{dV}{dA} &= 0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

Ora, per la geometria del tetraedro, si ha<sup>3</sup>:



Figura 8.3: Siméon-Denis Poisson

$$\begin{aligned} \frac{dA_{x1}}{dA} &= n_1 \\ \frac{dA_{x2}}{dA} &= n_2 \\ \frac{dA_{x3}}{dA} &= n_3 \end{aligned} \quad (8.13)$$

<sup>3</sup>Sia infatti, dalla Figura 8.1:

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \vec{r}_1 \\ \vec{OB} &= \vec{r}_2 \\ \vec{OC} &= \vec{r}_3 \end{aligned} \quad (8.8)$$

dove  $n_1, n_2, n_3$  sono i coseni direttori della normale  $\mathbf{n}$  alla giacitura prescelta:

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos(\mathbf{n}, x_1) \\ n_2 &= \cos(\mathbf{n}, x_2) \\ n_3 &= \cos(\mathbf{n}, x_3) \end{aligned} \quad (8.14)$$

Inoltre, se  $h$  è la distanza tra il piano obliquo  $ABC$  e l'origine, si ha  $dV = \frac{1}{3}hdA$ , e per  $h \rightarrow 0$  le relazioni precedenti divengono:

$$\begin{aligned} t_{n1} &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 \\ t_{n2} &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 \\ t_{n3} &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{aligned} \quad (8.15)$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

o, equivalentemente:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{S}^T \mathbf{n} \quad (8.17)$$

avendo definito la *matrice delle tensioni*:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

sicchè, operando vettorialmente:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \overrightarrow{AC} &= \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \\ \overrightarrow{BC} &= \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Calcolando il prodotto vettoriale tra  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  si ha:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \\ &= \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \times \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_1 \\ &= \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \end{aligned} \quad (8.10)$$

Ora, è noto che il prodotto vettoriale tra due vettori  $\mathbf{x}$  ed  $\mathbf{y}$  è un vettore ortogonale sia ad  $\mathbf{x}$  che ad  $\mathbf{y}$ , di modulo pari all'area del parallelogramma di lati  $\mathbf{x}$  ed  $\mathbf{y}$ , e con verso dettato dalla regola della mano destra. Ne segue che la relazione precedente può scriversi:

$$(dA)\vec{n} = (dA_{x1})\vec{v}_1 + (dA_{x2})\vec{v}_2 + (dA_{x3})\vec{v}_3 \quad (8.11)$$

dove  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  sono i vettori unitari (versori) ortogonali alle superfici  $OCB, OCA$  e  $OAB$ , rispettivamente. Infine, dividendo per  $dA$ , si ha:

$$\vec{n} = \left(\frac{dA_{x1}}{dA}\right)\vec{v}_1 + \left(\frac{dA_{x2}}{dA}\right)\vec{v}_2 + \left(\frac{dA_{x3}}{dA}\right)\vec{v}_3 \quad (8.12)$$

e quindi i tre coseni direttori della normale sono forniti dalle 8.13.

Utilizzando la notazione indiciale, e la convenzione degli indici ripetuti, potrà anche scriversi:

$$t_{ni} = \sigma_{ji}n_j \quad (8.19)$$

Si è così dimostrato il:

**Teorema 2.** (Cauchy–Poisson) - Si consideri il corpo  $B$  in equilibrio sotto le forze di massa  $\mathbf{X}$  e superficiali  $\mathbf{p}$ , ed un punto  $P$  situato al suo interno. Assegnate le tensioni in  $P$  lungo tre piani di normale  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , è possibile ricavare la tensione  $\mathbf{t}_n$  in  $P$  lungo un qualsiasi altro piano di normale  $\mathbf{n}$ , tramite la relazione:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{S}^T \mathbf{n} \quad (8.20)$$

dove  $\mathbf{S}$  è la matrice (8.18) delle componenti delle tensioni sui tre piani coordinati, di normale  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , ed  $\mathbf{n}$  è il vettore dei coseni direttori della normale rispetto agli assi  $x_1, x_2$  e  $x_3$ .

**Nota 1** - Si noti che, poichè le forze di massa scompaiono dalla deduzione della (8.20), le stesse valgono sia in regime statico che dinamico.

**Nota 2** - Se il punto  $P$  prescelto non è interno al volume, ma si trova sulla superficie, e se la normale  $\mathbf{n}$  è la normale al contorno del corpo, allora il ruolo giocato dalla tensione  $\mathbf{t}_n$  nel teorema di Cauchy–Poisson è assunto dalla forza superficiale  $\mathbf{p}$ , e le relazioni (8.20) esprimono l'equilibrio tra forze superficiali e tensioni:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

o, indicialmente:

$$p_i = \sigma_{ji}n_j \quad (8.22)$$

## 8.2 Le tensioni normali e tangenziali

Utilizzando il teorema di Cauchy–Poisson, appena dimostrato, si può calcolare facilmente la tensione normale agente sul piano di normale  $\mathbf{n}$ . Sarà infatti:

$$t_{nn} = \sigma_n = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} = t_{n1}n_1 + t_{n2}n_2 + t_{n3}n_3 = t_{ni}n_i \quad (8.23)$$

dove il punto indica il prodotto scalare. Utilizzando le (8.19) si ha:

$$\begin{aligned} t_{nn} = \sigma_n &= \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + \\ &+ (\sigma_{12} + \sigma_{21})n_1n_2 + (\sigma_{13} + \sigma_{31})n_1n_3 + (\sigma_{23} + \sigma_{32})n_2n_3 = \sigma_{ij}n_in_j \end{aligned} \quad (8.24)$$

L'ampiezza della tensione tangenziale  $\tau_n$  può calcolarsi considerando che dovrà essere:

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 \quad (8.25)$$

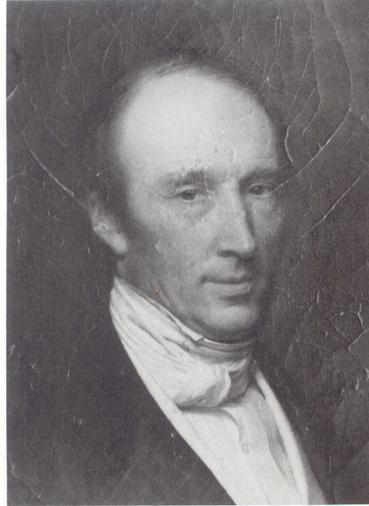


Figura 8.4: Augustin-Louis Cauchy in un dipinto di J.Roller, circa 1840

e quindi:

$$\tau_n^2 = t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 - \sigma_n^2 \quad (8.26)$$

La *direzione* della tensione tangenziale, invece, può calcolarsi determinando i suoi coseni direttori  $(n_{\tau 1}, n_{\tau 2}, n_{\tau 3})$ . Poichè la somma delle componenti di  $\sigma_n$  e di  $\tau_n$  in direzione  $x_1$  deve essere uguale a  $t_{n1}$ , dovrà essere:

$$\sigma_n n_1 + \tau_n n_{\tau 1} = t_{n1} \quad (8.27)$$

da cui subito:

$$n_{\tau 1} = \frac{t_{n1} - \sigma_n n_1}{\tau_n} \quad (8.28)$$

Del tutto analogamente:

$$\begin{aligned} n_{\tau 2} &= \frac{t_{n2} - \sigma_n n_2}{\tau_n} \\ n_{\tau 3} &= \frac{t_{n3} - \sigma_n n_3}{\tau_n} \end{aligned} \quad (8.29)$$



## Capitolo 9

# Le equazioni indefinite di equilibrio

In questa lezione si deducono le cosiddette *equazioni indefinite dell'equilibrio*, e si dimostra l'importante proprietà di simmetria della matrice delle tensioni. Ambedue questi risultati vengono raggiunti imponendo l'equilibrio di un tetraedro elementare isolato all'interno del corpo<sup>1</sup>, oppure — in modo più rigoroso — a partire dalla scrittura delle equazioni cardinali della statica su un volume arbitrario all'interno del corpo (principio di solidificazione).

### 9.1 Le forze agenti

Si consideri un corpo  $B$  e si isoli, idealmente, al suo interno, un parallelepipedo infinitesimo, con gli spigoli paralleli agli assi coordinati  $X_1, X_2, X_3$ . Le componenti di tensione agenti sulle sei facce del parallelepipedo sono riportate in Figura 9.1, positive secondo la convenzione illustrata nei Capitoli precedenti.

Ad esempio, la faccia  $EFGH$  ha normale uscente discorde all'asse coordinato  $X_1$ , e di conseguenza le tre componenti  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{13}$  sono positive se controverse agli assi coordinati, come riportato in Figura. Se gli spigoli del parallelepipedo sono lunghi  $dx_1$ ,  $dx_2$  e  $dx_3$ , rispettivamente, allora sulla faccia  $EFGH$  agiranno le forze di intensità  $\sigma_{11}dx_2dx_3$ ,  $\sigma_{12}dx_2dx_3$  e  $\sigma_{13}dx_2dx_3$ .

Sulla faccia parallela  $ABCD$  la normale uscente è equiversa all'asse  $X_1$ , e quindi le componenti di tensione saranno positive se equiverse agli assi. Le forze agenti su questa faccia saranno  $\sigma'_{11}dx_2dx_3$ ,  $\sigma'_{12}dx_2dx_3$  e  $\sigma'_{13}dx_2dx_3$ , dove

---

<sup>1</sup>La deduzione delle condizioni di equilibrio si trova in Cauchy, *Sur les relations qui existent, dans l'état d'équilibre d'un corp solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices*, Exercices de Mathématiques, 2, pp. 108–111

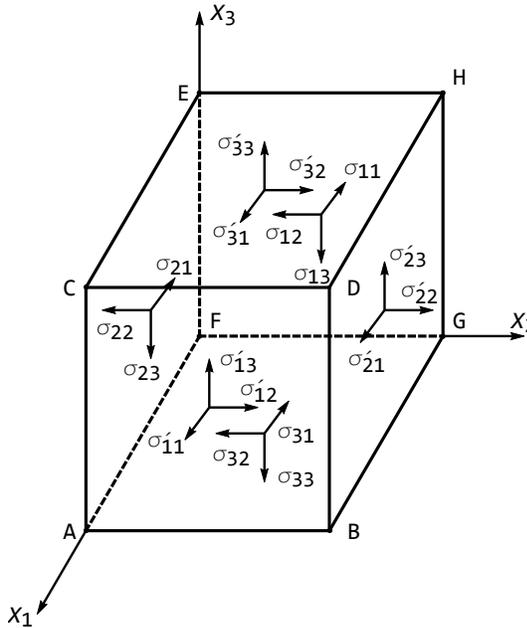


Figura 9.1: Le componenti di tensione positive agenti sulle sei facce del parallelepipedo

le tensioni  $\sigma'_{11}$ ,  $\sigma'_{12}$ ,  $\sigma'_{13}$  sono legate alle  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{13}$  dalle relazioni:

$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \\ \sigma'_{12} &= \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \\ \sigma'_{13} &= \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} dx_1\end{aligned}\tag{9.1}$$

Analogamente, sulla faccia  $ACEF$  agiranno le forze  $\sigma_{21} dx_1 dx_3$ ,  $\sigma_{22} dx_1 dx_3$  e  $\sigma_{23} dx_1 dx_3$ , mentre sulla faccia parallela  $BDHG$  agiranno le forze  $\sigma'_{21} dx_1 dx_3$ ,  $\sigma'_{22} dx_1 dx_3$  e  $\sigma'_{23} dx_1 dx_3$ , con:

$$\begin{aligned}\sigma'_{21} &= \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \\ \sigma'_{22} &= \sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 \\ \sigma'_{23} &= \sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2\end{aligned}\tag{9.2}$$

Infine, su  $ABGF$  agiranno le forze  $\sigma_{31} dx_1 dx_2$ ,  $\sigma_{32} dx_1 dx_2$  e  $\sigma_{33} dx_1 dx_2$ , mentre sulla faccia parallela  $CDEH$  agiranno le forze  $\sigma'_{31} dx_1 dx_2$ ,  $\sigma'_{32} dx_1 dx_2$  e

$\sigma'_{33}dx_1dx_2$ , con:

$$\begin{aligned}\sigma'_{31} &= \sigma_{31} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}dx_3 \\ \sigma'_{32} &= \sigma_{32} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}dx_3 \\ \sigma'_{33} &= \sigma_{33} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}dx_3\end{aligned}\tag{9.3}$$

Le relazioni precedenti sono giustificate nell'ambito di uno sviluppo in serie troncato al primo termine.

## 9.2 Le equazioni di equilibrio alla traslazione

Se il parallelepipedo infinitesimo è soggetto alla forza di massa  $\mathbf{X}$ , di componenti  $X_1$ ,  $X_2$  ed  $X_3$ , dovrà essere garantito l'equilibrio alla traslazione tra le forze esterne e quelle interne. In direzione  $X_1$ , ad esempio, sarà:

$$\begin{aligned}-\sigma_{11}dx_2dx_3 - \sigma_{21}dx_1dx_3 - \sigma_{31}dx_1dx_2 + \\ \sigma'_{11}dx_2dx_3 + \sigma'_{21}dx_1dx_3 + \sigma'_{31}dx_1dx_2 + X_1dx_1dx_2dx_3 = 0\end{aligned}\tag{9.4}$$

ed utilizzando le (9.1) si ha:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1dx_2dx_3 + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_1dx_2dx_3 + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}dx_1dx_2dx_3 + X_1dx_1dx_2dx_3 = 0\tag{9.5}$$

Poichè la quantità  $dx_1dx_2dx_3$  è sicuramente non nulla, dovrà essere necessariamente:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0\tag{9.6}$$

Del tutto analogamente, l'equilibrio alla traslazione in direzione  $X_2$  ed in direzione  $X_3$  conduce alle altre due equazioni di equilibrio:

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 = 0\tag{9.7}$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0\tag{9.8}$$

Le tre equazioni precedenti vanno sotto il nome di *equazioni indefinite dell'equilibrio*.

## 9.3 Le equazioni di equilibrio alla rotazione

Si imponga ora che il parallelepipedo sia in equilibrio rispetto alle rotazioni intorno ai tre assi, scegliendo come polo dei momenti il baricentro del parallelepipedo. Questa scelta elimina dal gioco le forze di massa, applicate proprio nel

baricentro, ed anche le tensioni  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{33}$ , il cui braccio è nullo, dato che le tensioni si suppongono applicate nei baricentri delle facce del parallelepipedo.

Ciò premesso, si consideri ad esempio l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno all'asse  $X_3$ . Si ha:

$$\sigma_{12}dx_2dx_3\frac{dx_1}{2} + \sigma'_{12}dx_2dx_3\frac{dx_1}{2} - \sigma_{21}dx_1dx_3\frac{dx_2}{2} - \sigma'_{21}dx_1dx_3\frac{dx_2}{2} = 0 \quad (9.9)$$

ed utilizzando le (9.1) e (9.2) si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}dx_2dx_3\frac{dx_1}{2} + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3\frac{dx_1}{2} \\ - \sigma_{21}dx_1dx_3\frac{dx_2}{2} - \left(\sigma_{21} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1dx_3\frac{dx_2}{2} = 0 \end{aligned} \quad (9.10)$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si giunge alla relazione:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (9.11)$$

Imponendo l'equilibrio alla rotazione anche intorno agli altri due assi si ha, del tutto analogamente:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \sigma_{31} \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} \end{aligned} \quad (9.12)$$

Ne segue, in definitiva, che la matrice delle tensioni è simmetrica, e che le componenti di tensioni si riducono a sei. Le tre tensioni ad indici uguali,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{33}$  si dicono *tensioni normali*, mentre le tre tensioni ad indici disuguali,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$  e  $\sigma_{23}$  si dicono *tensioni tangenziali*.

## 9.4 La notazione matriciale ed indiciale

Come si è visto, le equazioni di equilibrio alla rotazione implicano la simmetria della matrice delle tensioni  $\mathbf{S}$ , e di conseguenza si potrà scrivere:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (9.13)$$

Molto conveniente risulta l'introduzione del vettore  $\boldsymbol{\sigma}$  delle sei componenti di tensioni:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

Utilizzando tale notazione, le equazioni indefinite dell'equilibrio potranno sinteticamente scriversi come:

$$\delta\sigma + \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (9.15)$$

avendo introdotto la matrice di operatori differenziali:

$$\delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (9.16)$$

ed il vettore delle forze di massa:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

Alternativamente, le equazioni indefinite dell'equilibrio potranno scriversi, in notazione indiciale, come:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (9.18)$$

## 9.5 Un approccio alternativo

Le equazioni di equilibrio appena dedotte in modo diretto possono anche trarsi — in modo matematicamente più corretto — facendo uso del teorema della divergenza<sup>2</sup>. Ed infatti, si consideri un volume  $V$ , con frontiera  $\delta V$ , contenuto all'interno del corpo, e si esprimano le condizioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione:

$$\int_V \mathbf{X} \, dV + \int_{\delta V} \mathbf{t}_n \, ds = 0 \quad (9.20)$$

$$\int_V \mathbf{r} \times \mathbf{X} \, dV + \int_{\delta V} \mathbf{s} \times \mathbf{t}_n \, ds = 0 \quad (9.21)$$

Si espliciti la (9.20), utilizzando il teorema di Cauchy–Poisson:

$$\int_V X_i \, dV + \int_{\delta V} \sigma_{ji} n_j \, ds = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9.22)$$

<sup>2</sup>Se  $V$  è una regione dello spazio, e se  $f$  è un campo scalare continuo e derivabile, si ha

$$\int_{\partial V} f n_i \, ds = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dV \quad (9.19)$$

dove  $n$  è il versore della normale uscente al contorno.

ed utilizzando il teorema della divergenza:

$$\int_V X_i dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9.23)$$

Per l'arbitrarietà del volume  $V$ , ne seguono le (9.18).

Esplicitando le (9.21) si hanno invece le tre equazioni scalari:

$$\begin{aligned} \int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2) dV + \int_{\delta V} (s_2 t_{n3} - s_3 t_{n2}) ds &= 0 \\ \int_V (r_3 X_1 - r_1 X_3) dV + \int_{\delta V} (s_3 t_{n1} - s_1 t_{n3}) ds &= 0 \\ \int_V (r_1 X_2 - r_2 X_1) dV + \int_{\delta V} (s_1 t_{n2} - s_2 t_{n1}) ds &= 0 \end{aligned} \quad (9.24)$$

Utilizzando il teorema di Cauchy–Poisson, la prima di queste equazioni diviene:

$$\begin{aligned} \int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2) dV + \\ \int_{\delta V} [s_2 (\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3) - s_3 (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3)] ds &= 0 \end{aligned} \quad (9.25)$$

e per il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} \int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2) dV + \int_V \left[ \frac{\partial (r_2 \sigma_{13})}{\partial x_1} + \right. \\ \left. \frac{\partial (r_2 \sigma_{23})}{\partial x_2} + \frac{\partial (r_2 \sigma_{33})}{\partial x_3} - \frac{\partial (r_3 \sigma_{12})}{\partial x_1} - \frac{\partial (r_3 \sigma_{22})}{\partial x_2} - \frac{\partial (r_3 \sigma_{32})}{\partial x_3} \right] dV = 0 \end{aligned} \quad (9.26)$$

Svolgendo i prodotti si ha:

$$\begin{aligned} \int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2) dV + \int_V \left[ r_2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \right. \\ \left. r_2 \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{23} + r_2 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} - r_3 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - r_3 \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} - r_3 \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} - \sigma_{32} \right] dV = 0 \end{aligned} \quad (9.27)$$

Infine, utilizzando le (9.18) si ottiene, per l'arbitrarietà del volume:

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (9.28)$$

Dalle altre due equazioni si ottiene  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  e  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$

# Capitolo 10

## Tensioni e direzioni principali

In questo Capitolo si studierà ciò che avviene alla componente normale di tensione  $\sigma_n$ , al variare del piano  $\Pi$  su cui essa è calcolata. Dopo aver espresso la tensione normale in funzione dei coseni direttori alla normale  $n$  al piano  $\Pi$ , la procedura standard per la ricerca dei punti di estremo di una funzione permette di calcolare i valori minimi e massimi della  $\sigma_n$ . Risulta che in corrispondenza di tali valori il vettore  $\mathbf{t}_n$  della tensione risulta diretto secondo la normale  $n$ . Ciò implica che sui piani dove la tensione normale assume un valore estremo, non agisce tensione tangenziale.

Si deduce infine in questa lezione l'equazione secolare per la ricerca delle tensioni principali, assieme alle corrispondenti direzioni principali.

### 10.1 Tensioni normali e tangenziali, rivisitate

Si riscriva ora il teorema di Cauchy–Poisson, alla nuova luce della simmetria della matrice delle tensioni, ottenendo così le componenti del vettore tensione  $\mathbf{t}_n$  in forma definitiva:

$$\begin{aligned}t_{n1} &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\t_{n2} &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\t_{n3} &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3\end{aligned}\tag{10.1}$$

La proiezione  $t_{nl}$  di  $\mathbf{t}_n$  secondo una generica retta  $l$  si ottiene moltiplicando scalarmente il vettore  $\mathbf{t}_n$  per il vettore contenente i coseni direttori della retta  $l$ . Indicando con  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$  i coseni direttori suddetti, si ha:

$$t_{nl} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{l} = t_{ni}l_i = \sigma_{ij}l_i n_j\tag{10.2}$$

Di particolare importanza è il caso in cui  $l = n$ , ossia il caso in cui si vuol conoscere la componente di  $\mathbf{t}_n$  secondo la normale  $n$ . Si ha:

$$\sigma_n = t_{nn} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = t_{ni}n_i = \sigma_{ij}n_in_j = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 + 2\sigma_{13}n_1n_3 + 2\sigma_{23}n_2n_3 \quad (10.3)$$

Per una fondamentale proprietà del vettore dei coseni direttori  $\mathbf{n}$  della normale, si ha:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \longrightarrow n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2 \quad (10.4)$$

e quindi la tensione normale può esprimersi in funzione delle due sole variabili  $n_1$  ed  $n_2$ :

$$\sigma_n = (\sigma_{11} - \sigma_{33})n_1^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})n_2^2 + \sigma_{33} + 2\sigma_{12}n_1n_2 + 2(\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2)(1 - n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \quad (10.5)$$

Dovendo poi essere:

$$t_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad (10.6)$$

si può calcolare l'intensità della tensione tangenziale:

$$\tau_n^2 = t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 - \sigma_n^2 \quad (10.7)$$

## 10.2 La ricerca della massima e minima tensione normale

La tensione in un punto, come si è visto, è un insieme  $\{t_n\}$  di infiniti valori, funzione della normale  $\mathbf{n}$  al piano passante per  $P$ . Ha quindi senso chiedere qual'è il piano per cui la tensione normale  $\sigma_n$  assume il suo valore estremo, massimo o minimo.

Per rispondere a questa domanda occorre imporre le condizioni di stazionarietà:

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_1} = 0 \quad (10.8)$$

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_2} = 0 \quad (10.9)$$

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_3} = 0 \quad (10.10)$$

Utilizzando la (10.5), si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_n}{\partial n_1} &= 2(\sigma_{11} - \sigma_{33})n_1 + 2\sigma_{12}n_2 + 2\sigma_{13}(1 - n_1^2 - n_2^2)^{1/2} + \\ &2(\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2)\frac{1}{2}(1 - n_1^2 - n_2^2)^{-1/2}(-2n_1) = \\ &2(\sigma_{11} - \sigma_{33})n_1 + 2\sigma_{12}n_2 + 2\sigma_{13}n_3 - 2\frac{n_1}{n_3}(\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2) = \\ &2(\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3) - 2\frac{n_1}{n_3}(\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3) = 0 \end{aligned} \quad (10.11)$$

e quindi, in base al teorema di Cauchy–Poisson:

$$\frac{t_{n1}}{n_1} = \frac{t_{n3}}{n_3} \quad (10.12)$$

Del tutto analogamente dovrà anche essere:

$$\frac{t_{n1}}{n_1} = \frac{t_{n2}}{n_2} \quad (10.13)$$

$$\frac{t_{n2}}{n_2} = \frac{t_{n3}}{n_3} \quad (10.14)$$

e quindi, in definitiva, potrà porsi:

$$\frac{t_{n1}}{n_1} = \frac{t_{n2}}{n_2} = \frac{t_{n3}}{n_3} = \sigma \quad (10.15)$$

Dalla (10.3) sarà poi:

$$\sigma_n = t_{n1}n_1 + t_{n2}n_2 + t_{n3}n_3 = \sigma n_1^2 + \sigma n_2^2 + \sigma n_3^2 = \sigma \quad (10.16)$$

e dalla (10.7) risulta immediato dedurre:

$$\tau_n = 0 \quad (10.17)$$

In altri termini: - *un piano su cui la tensione normale è massima, o minima, è anche un piano su cui non agiscono tensioni tangenziali.*

### 10.3 Le tensioni principali

Si vogliono ora individuare i piani su cui la tensione normale raggiunge il suo valore massimo o minimo, o meglio, si vogliono calcolare i coseni direttori della normale a tali piani.

In base alla (10.17), ciò equivale ad individuare i piani per cui le tensioni tangenziali si annullano. In altri termini, quali sono i piani passanti per il punto  $P$ , per cui la tensione  $\mathbf{t}_n$  è diretta proprio lungo la normale, come illustrato in Figura 10.1?

Se  $\mathbf{t}_n$  è orientata secondo la normale  $\mathbf{n}$ , allora si avrà, come si osserva dalla Figura 10.2, e come confermato dalla (10.15):

$$t_{n1} = \sigma n_1 \quad (10.18)$$

$$t_{n2} = \sigma n_2 \quad (10.19)$$

$$t_{n3} = \sigma n_3 \quad (10.20)$$

D'altro canto, secondo il teorema di Cauchy–Poisson:

$$\begin{aligned} t_{n1} &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ t_{n2} &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ t_{n3} &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{aligned} \quad (10.21)$$

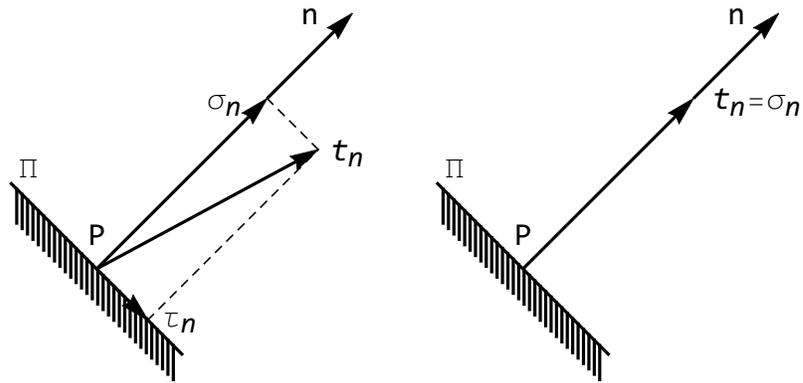


Figura 10.1: a) Il caso usuale, con la tensione  $t_n$  e le sue componenti normale e tangenziale. b) Il caso in cui la componente tangenziale si annulla, ed  $\mathbf{n}$  è direzione principale.

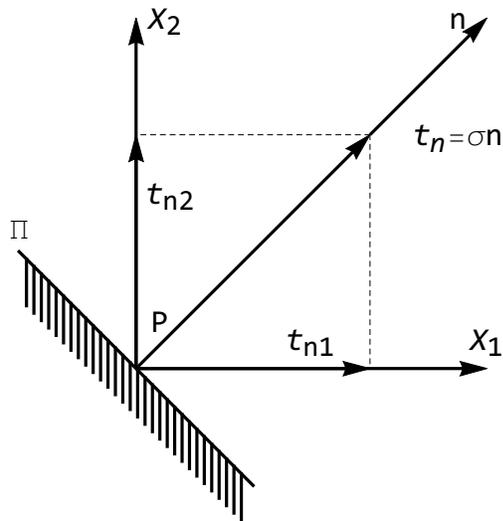


Figura 10.2: Le componenti della tensione principale  $t_n$ .

e quindi dovrà essere:

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} - \sigma) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 &= 0 \\ \sigma_{12} n_1 + (\sigma_{22} - \sigma) n_2 + \sigma_{23} n_3 &= 0 \\ \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + (\sigma_{33} - \sigma) n_3 &= 0\end{aligned}\tag{10.22}$$

E' questo un sistema di tre equazioni omogenee nelle tre incognite  $n_1, n_2, n_3$  la cui soluzione banale  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$  non ha significato fisico. Ed infatti le  $n_1, n_2$  ed  $n_3$  sono i coseni direttori della normale al piano II.

Occorre allora calcolare le soluzioni non banali, e definite a meno di costanti, imponendo che sia nullo il determinante dei coefficienti del sistema (10.22):

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{pmatrix} = 0\tag{10.23}$$

e svolgendo i calcoli si ha l'equazione cubica in  $\sigma$ :

$$-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0\tag{10.24}$$

con:

$$I_1 = \text{Traccia}(\mathbf{S}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\tag{10.25}$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2\tag{10.26}$$

$$I_3 = \text{Det}(\mathbf{S}) = \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}\tag{10.27}$$

**Nota** - L'equazione (10.24) si chiama *equazione secolare*, mentre le tre quantità  $I_1, I_2$  ed  $I_3$  prendono il nome di *invariante lineare, quadratico* e *cubico* di tensione, ad indicare che il loro valore non cambia al ruotare del sistema di riferimento adottato.

## 10.4 Le direzioni principali di tensione

Si può dimostrare che — a causa della simmetria della matrice delle tensioni — l'equazione cubica in  $\sigma$  ammette tre radici reali  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  — eventualmente coincidenti — dette *tensioni principali*. In corrispondenza di ciascuno di questi valori il sistema (10.22) diviene indeterminato, ed ammette una infinità di soluzioni non nulle. Tuttavia questa indeterminazione si può eliminare considerando che dovrà comunque essere:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1\tag{10.28}$$

Sia  $\mathbf{n}_I = (n_{11}, n_{21}, n_{31})$  la soluzione che si ottiene in corrispondenza di  $\sigma = \sigma_1$ ,  $\mathbf{n}_{II} = (n_{12}, n_{22}, n_{32})$  la soluzione che si ottiene in corrispondenza di  $\sigma = \sigma_2$ ,

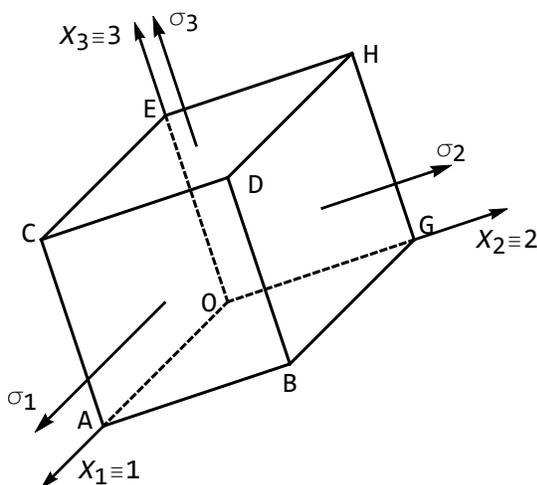


Figura 10.3: L'elemento rettangolare orientato secondo gli assi principali, e quindi soggetto alle sole tensioni normali

ed infine  $\mathbf{n}_{III} = (n_{13}, n_{23}, n_{33})$  la soluzione che si ottiene in corrispondenza di  $\sigma = \sigma_3$ .

Si può dimostrare anche che queste tre direzioni  $\mathbf{n}_I$ ,  $\mathbf{n}_{II}$  e  $\mathbf{n}_{III}$ , dette *direzioni principali di tensione*, sono tra loro ortogonali, sicchè, ad esempio:

$$\mathbf{n}_I \cdot \mathbf{n}_{II} = n_{11}n_{12} + n_{21}n_{22} + n_{31}n_{32} = 0 \quad (10.29)$$

I piani identificati dalle direzioni principali, detti *piani principali*, sono anch'essi mutuamente ortogonali, ed un cubo elementare, contenente il punto  $P$  in studio, le cui facce vengano a coincidere coi piani principali, sarà sollecitato da sole tensioni normali, pari alle tensioni principali (cfr. Figura 10.3). Ne segue che se il sistema di riferimento  $(O, X_1, X_2, X_3)$  viene ruotato fino a portarlo a coincidere col sistema principale  $(O, 1, 2, 3)$ , la matrice delle tensioni assumerà l'aspetto diagonale:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (10.30)$$

ed i tre invarianti saranno forniti da:

$$I_1 = \text{Traccia}(\mathbf{S}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (10.31)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \quad (10.32)$$

$$I_3 = \text{Det}(\mathbf{S}) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (10.33)$$

Nota — L'intera procedura illustrata in questo Capitolo rappresenta un esempio di calcolo di autovalori ed autovettori di una matrice simmetrica di ordine tre.

La teoria generale degli autovalori ed autovettori, le loro proprietà algebriche e geometriche, nonché i metodi numerici per il loro calcolo, possono ritrovarsi in qualsiasi testo di algebra lineare. Può ad esempio consultarsi B.N. Parlett, *The Symmetric Eigenvalue Problem*, SIAM, 1998.



# Capitolo 11

## Le tensioni tangenziali

In questo Capitolo si illustrano alcune semplificazioni che si ottengono scegliendo come assi coordinati la terna di assi principali, e quindi avendo una matrice delle tensioni di tipo diagonale. Poi si riformula il teorema di Cauchy–Poisson in questa ipotesi, e si scrive la formula dell’ellissoide delle tensioni. Infine, si studiano le tensioni tangenziali, ricavando i valori minimi e massimi che esse possono attingere in un intorno del punto  $P$ . Il procedimento analitico è simile a quello adottato per lo studio delle tensioni normali.

### 11.1 Il teorema di Cauchy–Poisson rivisitato

Si consideri il generico punto  $P$ , situato all’interno del corpo  $B$  in esame, e si scelga un sistema di riferimento i cui assi siano coincidenti con gli assi principali, calcolati secondo quanto detto nel Capitolo precedente. La matrice delle tensioni, in questo riferimento, sarà:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (11.1)$$

Il teorema di Cauchy–Poisson, in questo sistema di riferimento, fornisce:

$$\begin{aligned} t_{n1} &= \sigma_1 n_1 \\ t_{n2} &= \sigma_2 n_2 \\ t_{n3} &= \sigma_3 n_3 \end{aligned} \quad (11.2)$$

dove ora, ovviamente, i coseni direttori della normale uscente al piano sono calcolati a partire dagli assi principali.



Figura 11.1: Gabriel Lamé

## 11.2 L'ellissoide delle tensioni

Inserendo i valori dei coseni direttori, ricavabili dalle equazioni precedenti, nella ben nota relazione:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (11.3)$$

si giunge a definire la seguente equazione:

$$\frac{t_{n1}^2}{\sigma_1^2} + \frac{t_{n2}^2}{\sigma_2^2} + \frac{t_{n3}^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (11.4)$$

Dalla (11.4) si deduce che l'estremità del vettore tensione  $\mathbf{t}_n$ , al variare della normale  $n$ , descrive una superficie tridimensionale del tipo ellissoide, nota come *ellissoide delle tensioni*, o *ellissoide di Lamé*, i cui tre semi-assi rappresentano le tre tensioni principali.

Conosciute le tre componenti della tensione secondo i tre assi coordinati, è immediato conoscere anche la sua componente secondo la normale. E' infatti:

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (11.5)$$

mentre l'intensità della tensione tangenziale è pari a:

$$\tau_n^2 = t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2 \quad (11.6)$$

oppure, essendo:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \longrightarrow n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2 \quad (11.7)$$

si potrà anche esprimere la tensione tangenziale in funzione dei soli coseni direttori  $n_1$  ed  $n_2$ :

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 (1 - n_1^2 - n_2^2) - [\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 (1 - n_1^2 - n_2^2)]^2 \quad (11.8)$$

### 11.3 La ricerca della massima e minima tensione tangenziale

La tensione in un punto, come si è visto, è un insieme  $\{t_n\}$  di infiniti valori, funzione della normale  $\mathbf{n}$  al piano passante per  $P$ . Abbiamo già visto come individuare i piani su cui la tensione normale ha i suoi valori massimi o minimi. Resta da chiedere anche qual'è il piano, o i piani, su cui la tensione tangenziale  $\tau_n$  assume il suo valore estremo, massimo o minimo.

Per rispondere a questa domanda occorre imporre le condizioni di stazionarietà:

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial n_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (11.9)$$

Utilizzando la (11.8), si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^2}{\partial n_1} &= 2\sigma_1^2 n_1 - 2\sigma_3^2 n_1 - 2[\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 (1 - n_1^2 - n_2^2)] (2\sigma_1 n_1 - 2\sigma_3 n_1) \\ &= 2n_1 (\sigma_1 - \sigma_3) [2n_2^2 (\sigma_3 - \sigma_2) + (1 - 2n_1^2) (\sigma_1 - \sigma_3)] \end{aligned} \quad (11.10)$$

ed anche:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^2}{\partial n_2} &= 2\sigma_2^2 n_2 - 2\sigma_3^2 n_2 - 2[\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 (1 - n_1^2 - n_2^2)] (2\sigma_2 n_2 - 2\sigma_3 n_2) \\ &= 2n_2 (\sigma_2 - \sigma_3) [2n_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1) + (1 - 2n_2^2) (\sigma_2 - \sigma_3)] \end{aligned} \quad (11.11)$$

Queste due condizioni devono valere simultaneamente. Una prima soluzione della (11.10) è ovviamente  $n_1 = 0$ , che sostituita nella (11.11) fornisce:

$$n_2 = 0 \quad (11.12)$$

oppure:

$$1 - 2n_2^2 = 0 \quad (11.13)$$

La soluzione  $n_1 = n_2 = 0$ , da cui  $n_3 = 1$ , rappresenta uno dei piani principali, su cui quindi la tensione tangenziale è nulla, e quindi  $\tau_n^2$  è minimo. La seconda soluzione,  $n_1 = 0$ ,  $1 - 2n_2^2 = 0$  implica:

$$\begin{aligned} n_1 &= 0 \\ n_2^2 &= \frac{1}{2} \\ n_3^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (11.14)$$

Del tutto analogamente, una soluzione della (11.11) è  $n_2 = 0$ , che sostituita nella (11.10) fornisce un piano principale, ed una soluzione:

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{1}{2} \\ n_2^2 &= 0 \\ n_3^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (11.15)$$

Poichè sia  $n_1 = 0$  che  $n_2 = 0$  forniscono soluzioni, c'è da attendersi che anche  $n_3 = 0$  fornisca una soluzione. Introducendo questa condizione nella (11.6) si ha:

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2)^2 \quad (11.16)$$

oppure, essendo  $n_2^2 = 1 - n_1^2$ :

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 (1 - n_1^2) - [\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 (1 - n_1^2)]^2 \quad (11.17)$$

La condizione di stazionarietà conduce a scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_n^2}{\partial n_1} &= 2\sigma_1^2 n_1 - 2\sigma_2^2 n_1 - 2[\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 - \sigma_2 n_1^2] (2\sigma_1 n_1 - 2\sigma_2 n_1) \\ &= 2n_1 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 (1 - 2n_1^2) \end{aligned} \quad (11.18)$$

e quindi o  $n_1 = 0$  (ancora un piano principale) oppure:

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{1}{2} \\ n_2^2 &= \frac{1}{2} \\ n_3^2 &= 0 \end{aligned} \quad (11.19)$$

In totale, le soluzioni di interesse sono fornite dalle tre relazioni:

$$n_1^2 = 0 \quad n_2^2 = \frac{1}{2} \quad n_3^2 = \frac{1}{2} \quad (11.20)$$

$$n_1^2 = \frac{1}{2} \quad n_2^2 = 0 \quad n_3^2 = \frac{1}{2} \quad (11.21)$$

$$n_1^2 = \frac{1}{2} \quad n_2^2 = \frac{1}{2} \quad n_3^2 = 0 \quad (11.22)$$

Si consideri la prima di esse. Dovrà essere:

$$\begin{aligned} n_1 &= 0 \\ n_2 &= \frac{1}{\pm\sqrt{2}} \\ n_3 &= \frac{1}{\pm\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (11.23)$$

e quindi essa rappresenta quattro piani, ciascuno parallelo ad un asse principale, ed inclinato di 45 gradi rispetto agli altri due. Considerazioni analoghe valgono per le altre due relazioni, giungendo ad identificare dodici piani su cui la tensione tangenziale è massima.

### 11.3.1 L'intensità della tensione tangenziale massima

Per calcolare l'intensità della tensione tangenziale massima, non resta che sostituire i valori dei coseni direttori appena calcolati nella (11.6). Utilizzando la (11.23), ad esempio, si ha:

$$\begin{aligned}\tau_n^2 &= \sigma_1^2 0 + \sigma_2^2 \frac{1}{2} + \sigma_3^2 \frac{1}{2} - \left( \sigma_1 0 + \sigma_2 \frac{1}{2} + \sigma_3 \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{4} (\sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1}{4} (2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3) \\ &= \frac{1}{4} (\sigma_2 - \sigma_3)^2\end{aligned}\quad (11.24)$$

da cui subito:

$$\tau_n = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad (11.25)$$

Analogamente, per  $n_2 = 0$ , si ha:

$$\tau_n = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad (11.26)$$

e per  $n_3 = 0$ :

$$\tau_n = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (11.27)$$

### 11.3.2 La tensione normale associata alla massima tensione tangenziale

A differenza di quanto accade per i piani principali, su cui le tensioni normali sono massime e le tensioni tangenziali sono nulle, in corrispondenza dei piani con massima tensione tangenziale si ha contemporanea presenza di tensioni normali. Utilizzando le (11.5) è immediato riconoscere che si avrà:

$$\sigma_n = \begin{cases} \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, & \text{per } n_1 = 0, n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{2} \\ \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, & \text{per } n_2 = 0, n_1^2 = n_3^2 = \frac{1}{2} \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, & \text{per } n_3 = 0, n_1^2 = n_2^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (11.28)$$

### 11.3.3 La direzione della tensione tangenziale massima

La *direzione* della tensione tangenziale massima può calcolarsi determinando i suoi coseni direttori  $(n_{\tau_1}, n_{\tau_2}, n_{\tau_3})$ . Come noto, è:

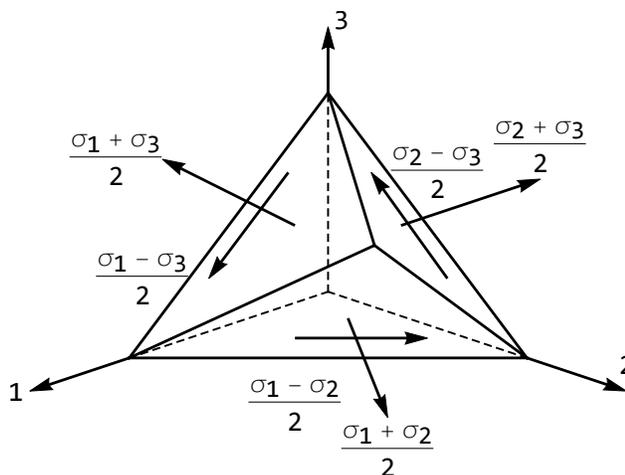


Figura 11.2: Tensioni tangenziali massime e tensioni normali associate

$$n_{\tau 1} = \frac{t_{n1} - \sigma_n n_1}{\tau_n} \quad (11.29)$$

$$n_{\tau 2} = \frac{t_{n2} - \sigma_n n_2}{\tau_n} \quad (11.30)$$

$$n_{\tau 3} = \frac{t_{n3} - \sigma_n n_3}{\tau_n} \quad (11.31)$$

ed utilizzando le (11.2):

$$n_{\tau 1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_n}{\tau_n} n_1 \quad (11.32)$$

$$n_{\tau 2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_n}{\tau_n} n_2 \quad (11.33)$$

$$n_{\tau 3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_n}{\tau_n} n_3 \quad (11.34)$$

Per  $n_1 = 0$  si ha  $n_{\tau 1} = 0$ , mentre per  $n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , si ha:

$$n_{\tau 1} = \frac{\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (11.35)$$

Analoghi risultati si hanno per le altre combinazioni di coseni direttori, sicchè può concludersi che ciascuna tensione tangenziale massima è ortogonale ad una delle tensioni principali, ed inclinata dello stesso angolo rispetto alle altre due. In Figura 11.2 è illustrato la situazione limitatamente alla regione di tensioni principali positive.

## Capitolo 12

# I cerchi di Mohr

In questa lezione si descrive un classico metodo di visualizzazione dello stato tensionale nell'intorno di un punto generico  $P$  del corpo in esame. Tale metodo è stato originariamente proposto da Otto Mohr nella seconda metà dell'Ottocento<sup>1</sup>, in stretta connessione con l'analisi della tensione; tuttavia esso è facilmente estendibile a casi diversi, quali l'analisi della deformazione ed i problemi di geometria delle masse, ed in ambiti più generali può essere applicato ad un qualsiasi tensore del secondo ordine.

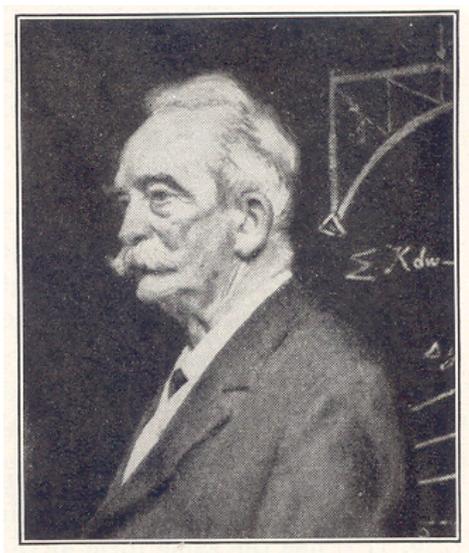


Figura 12.1: Otto Mohr

---

<sup>1</sup>Si veda O. Mohr, *Zivilingenieur*, pag. 113 (1882)

## 12.1 La convenzione sui segni di Otto Mohr

Si consideri un punto  $P$  generico, e si fissi una terna cartesiana di riferimento  $(P, X_1, X_2, X_3)$ . Si vuole ora esaminare come varia il vettore tensione  $\mathbf{t}_n$  in  $P$  sui piani che si appoggiano all'asse  $X_3$ , al variare dell'angolo  $\phi$  che definisce il piano generico (cfr. Figura 12.2).

Su ciascun elemento piano così determinato agiscono una tensione normale  $\sigma_n$  ed una tensione tangenziale  $\tau_n$  di componenti  $\tau_{nm}$  e  $\tau_{nl}$ . Nel piano  $(X_1, X_2)$ , quindi, agiscono le tensioni  $\sigma_n$  e  $\tau_{nm}$ , come riportato in Figura 12.3. Si noti che in Figura è stata riportata la tensione tangenziale positiva secondo la convenzione di Mohr, *diretta in modo da far ruotare il cubetto elementare in senso orario intorno al suo baricentro*. E' questa una convenzione sui segni molto usata nell'ambito della teoria dei cerchi di Mohr, che si andrà a sviluppare nel paragrafo seguente, convenzione in contrasto con la convenzione usuale sui segni delle componenti cartesiane di tensione  $\sigma_{12}$ . Ed infatti, dalla Figura 12.3 si evince con facilità che quando  $\phi = \pi/2$ , e quindi  $\mathbf{n}$  viene a coincidere con l'asse  $X_2$ , la  $\tau_{nm}$  è pari, in valore e segno, alla tensione  $\sigma_{21}$ , ma che quando  $\phi = 0$ , e quindi  $\mathbf{n}$  coincide con l'asse  $X_1$ , si ha che la  $\tau_{nm}$  è uguale e contraria alla  $\sigma_{12}$ .

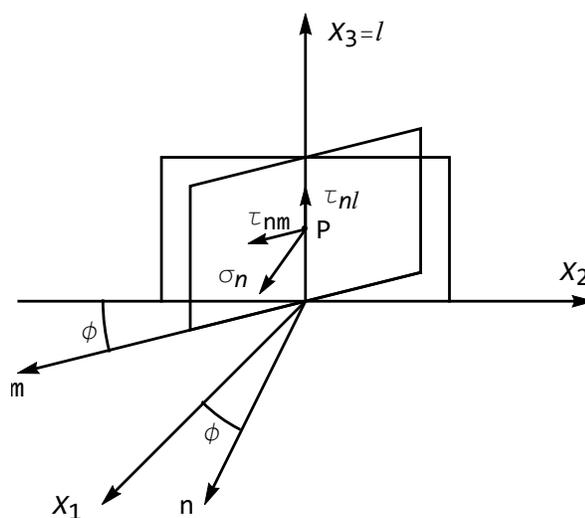


Figura 12.2: I piani per  $P$  che si appoggiano all'asse  $X_3 = ll$ , definiti dall'angolo  $\phi$  e soggetti alla tensione normale  $\sigma_n$  ed alle tensioni tangenziali  $\tau_{nm}$  e  $\tau_{nl}$

## 12.2 Il teorema di Mohr

Per ciascun elemento piano appoggiato all'asse  $X_3$ , e definito dall'angolo  $\phi$ , si riporti in un piano  $(\sigma, \tau)$  (*piano di Mohr*) il vettore di componenti  $\sigma_n$  e  $\tau_{nm}$ .

Si dimostrerà il seguente:

**Teorema 3.** (*O. Mohr 1882*) — Il vettore di componenti  $(\sigma_n, \tau_{nm})$  descrive nel piano  $\sigma\tau$  un cerchio, al ruotare dell'elemento piano intorno all'asse  $l = X_3$ .

*Dimostrazione.* Siano  $(m_1, m_2, 0)$  ed  $(n_1, n_2, 0)$  i coseni direttori degli assi  $m$  ed  $n$ , rispettivamente, sicchè si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 \\ \tau_{nm} &= \sigma_{11}m_1n_1 + \sigma_{22}m_2n_2 + \sigma_{12}(m_1n_2 + m_2n_1)\end{aligned}\quad (12.1)$$

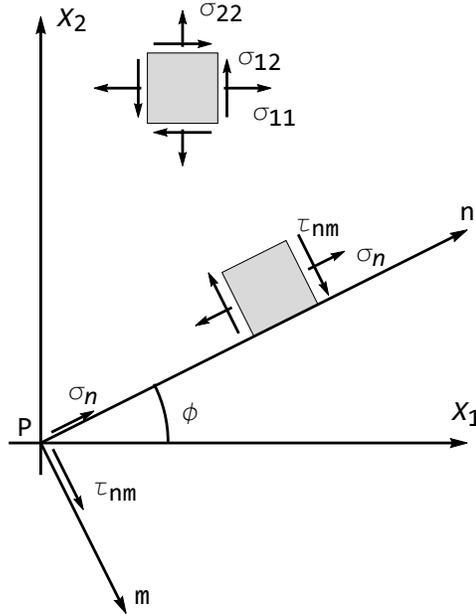


Figura 12.3: Le componenti cartesiane di tensione nel piano  $X_1X_2$ , e le componenti secondo gli assi locali  $m$  ed  $n$

Esprimendo ora i coseni direttori in funzione dell'angolo  $\phi$ , si ottiene facilmente, dalla Figura 12.3:

$$\begin{aligned}n_1 &= \cos(nx_1) = \cos(-\phi) = \cos\phi \\ n_2 &= \cos(nx_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi \\ m_1 &= \cos(mx_1) = \cos\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right) = \sin\phi \\ m_2 &= \cos(mx_2) = \cos(\pi + \phi) = -\cos\phi\end{aligned}\quad (12.2)$$

e quindi le (12.1) divengono:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_{11}\cos^2\phi + \sigma_{22}\sin^2\phi + 2\sigma_{12}\sin\phi\cos\phi \\ \tau_{nm} &= (\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin\phi\cos\phi + \sigma_{12}(\sin^2\phi - \cos^2\phi)\end{aligned}\quad (12.3)$$

Un ultimo passaggio consiste nell'esprimere le equazioni precedenti in funzione di  $2\phi$ , tramite le relazioni trigonometriche:

$$\begin{aligned}\sin \phi \cos \phi &= \frac{1}{2} \sin 2\phi \\ \cos^2 \phi - \sin^2 \phi &= \cos 2\phi \\ \cos^2 \phi &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi) \\ \sin^2 \phi &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi)\end{aligned}\tag{12.4}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\phi + \sigma_{12} \sin 2\phi \\ \tau_{nm} &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\phi - \sigma_{12} \cos 2\phi\end{aligned}\tag{12.5}$$

Infine, si ottiene, quadrando e sommando:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{nm}^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2\tag{12.6}$$

E' questa, come si voleva dimostrare, l'equazione di un cerchio di centro  $\left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, 0\right)$  e raggio:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}\tag{12.7}$$

□

La costruzione del cerchio si effettua come illustrato in Figura 12.4: riportando con il loro segno i segmenti  $OB$  ed  $OD$ , rappresentativi di  $\sigma_{11}$  e di  $\sigma_{22}$ , rispettivamente, si ottiene il centro  $C$  del cerchio nel punto medio del segmento  $BD$ . A partire da  $D$ , si riporta in  $DP$  il segmento rappresentativo di  $\sigma_{12}$ , verso l'alto se positivo, ottenendo il raggio  $CP$ , ed il cosiddetto *polo*  $P$  del cerchio.

## 12.3 L'utilizzo del cerchio di Mohr

Assegnare il piano su cui si vuol calcolare la tensione nel punto in esame equivale, per quanto detto nei paragrafi precedenti, ad assegnare l'angolo  $\phi$ , e quindi ad ogni valore di  $\phi$  corrisponde un preciso valore del segmento di componenti  $(\sigma_n, \tau_{nm})$ , ossia un preciso punto  $T_n$  di coordinate  $\sigma_n$  e  $\tau_{nm}$ . Si vuole dedurre in questo paragrafo un metodo grafico per conoscere  $T_n$ , una volta assegnato l'angolo  $\phi$ .

Si utilizzi allo scopo il seguente:

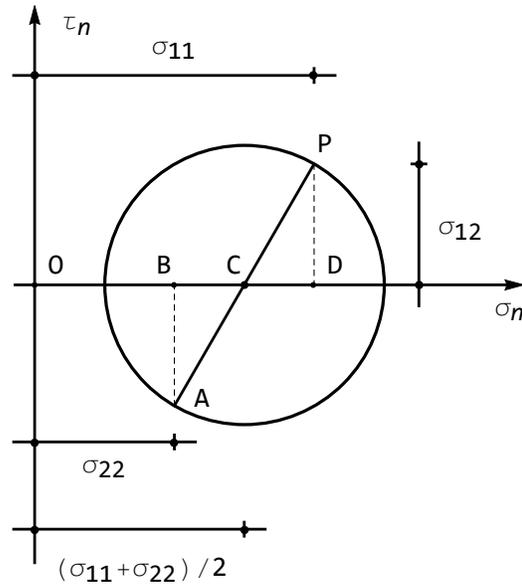


Figura 12.4: La costruzione del cerchio di Mohr

**Teorema 4.** (*O. Mohr 1882*) — Costruito il cerchio di Mohr, si disegni la retta  $t$  che unisce il polo  $P$  con il punto  $T_n$ , supposto per il momento noto. L'angolo tra la verticale e la suddetta retta  $t$  è uguale a  $\phi$ .

*Dimostrazione.* Ed infatti, detta  $v$  la verticale e  $t$  la retta che congiunge il polo col punto  $T_n$ , si avrà (cfr. Figura 12.5):

$$\tan(vt) = \frac{\sigma_n - \sigma_{11}}{\sigma_{12} - \tau_{nm}} = -\frac{\sigma_n - \sigma_{11}}{\tau_{nm} - \sigma_{12}} \quad (12.8)$$

e sostituendo i valori (12.3) si ha:

$$\begin{aligned} \tan(vt) &= \frac{-\sigma_{11}(1 - \cos^2 \phi) + \sigma_{22} \sin^2 \phi + 2\sigma_{12} \sin \phi \cos \phi}{\sigma_{12} - (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \phi \cos \phi - \sigma_{12} (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi)} \\ &= \frac{(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin^2 \phi + 2\sigma_{12} \sin \phi \cos \phi}{(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \phi \cos \phi + 2\sigma_{12} \cos^2 \phi} \\ &= \frac{\sin \phi [(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \phi + 2\sigma_{12} \cos \phi]}{\cos \phi [(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \phi + 2\sigma_{12} \cos \phi]} \\ &= \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan(\phi) \end{aligned} \quad (12.9)$$

□

Ne segue che, assegnato  $\phi$ , per conoscere  $T_n$  basta condurre per il polo  $P$  una retta  $t$  inclinata sulla verticale dello stesso angolo  $\phi$  di cui  $n$  è inclinata rispetto

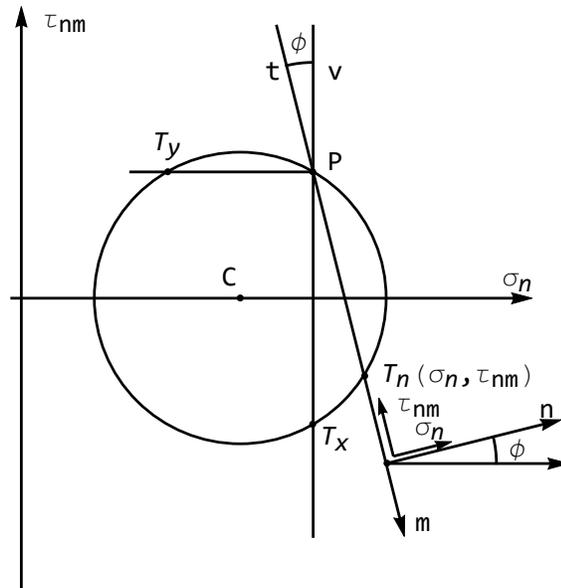


Figura 12.5: L'utilizzo del cerchio di Mohr per il calcolo dello stato tensionale sul generico elemento piano di normale  $\mathbf{n}$

all'asse  $X_1$ . Se gli assi  $\sigma, \tau$  sono paralleli ed equiversi agli assi  $X_1 X_2$ , l'operazione è equivalente a condurre per il polo  $P$  la parallela alla traccia dell'elemento piano in esame.

In Figura 12.5, oltre al caso generico, si sono riprodotti anche i due casi particolari in cui la normale al piano coincide con l'asse  $X_1$  ( $\phi = 0$ ) e con l'asse  $X_2$  ( $\phi = \pi/2$ ). Nel primo caso dal polo  $P$  si deve condurre la verticale, giungendo al punto  $T_x$  di coordinate  $\sigma_n = \sigma_{11}$  e  $\tau_{nm} = -\sigma_{12}$ . Nel secondo caso, invece, occorre portare l'orizzontale per  $P$ , giungendo nel punto  $T_y$  di coordinate  $\sigma_n = \sigma_{22}$  e  $\tau_{nm} = \sigma_{12}$ . Si ha così conferma di quanto detto, nel primo paragrafo, sulla convenzione dei segni.

Tracciato il cerchio di Mohr, è immediato rispondere ad alcune importanti domande, che consentono lo studio completo dello stato tensionale per tutti i piani che si appoggiano all'asse  $l = X_3$ :

1. quali sono le giaciture cui corrispondono minime e massime tensioni normali?
2. quali sono le corrispondenti tensioni normali minime e massime?
3. quali sono le giaciture cui corrispondono tensioni tangenziali massime?
4. quanto valgono tali tensioni tangenziali massime, e a quali tensioni normali sono associate?

5. esistono giaciture per cui la tensione è esclusivamente tangenziale, ed in caso affermativo, quanto valgono le tensioni tangenziali in oggetto?

### 12.3.1 Esempi

Si considera, come primo esempio, uno stato tensionale caratterizzato da  $\sigma_{11} > 0$  e  $\sigma_{22} > 0$ , e da  $\sigma_{12} < 0$ . Il cerchio di Mohr relativo agli elementi che si appoggiano all'asse  $X_3$  si caratterizza quindi come in Figura 12.6. In esso è

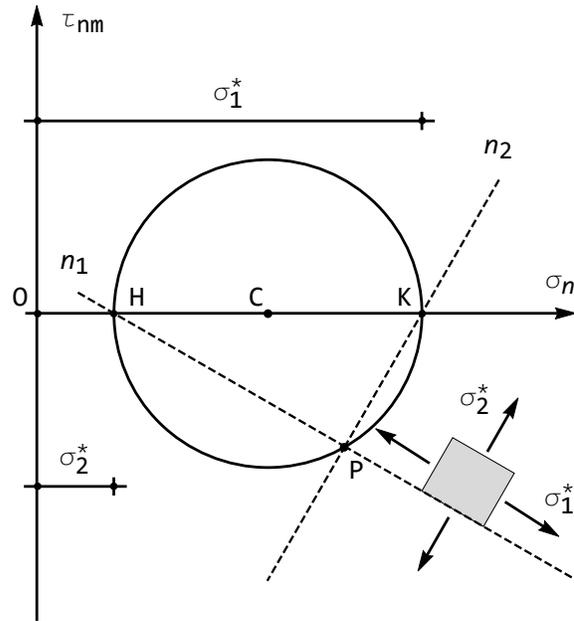


Figura 12.6: Il cerchio di Mohr in un caso per cui  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$  sono positive, mentre  $\sigma_{12}$  è negativo.

evidenziato il polo  $P$ , da cui sono state condotte le due rette  $PH$  e  $PK$ , che identificano le due direzioni  $n_1 = PH$  ed  $n_2 = PK$ . Sul piano di normale  $n_1$  agisce la tensione  $\sigma_1^*$ , massima tra quelle agenti sui piani del fascio in esame; sul piano di normale  $n_2$  agisce la tensione  $\sigma_2^*$ , minima tra quelle agenti sui piani del fascio in esame. Ad esse non si accompagna tensione tangenziale.

Come secondo esempio, invece, si può ipotizzare che  $\sigma_{11}$  sia positivo, mentre  $\sigma_{22}$  è nullo, e  $\sigma_{12}$  è negativo. In questa ipotesi, il cerchio deve necessariamente intersecare l'asse verticale, come indicato in Figura 12.7, e quindi una delle due tensioni estreme è negativa, come evidenziato anche dal cubetto. Inoltre, in questo caso si osserva che sui piani di normale  $PS$  e  $PT$  agiscono solo tensioni tangenziali. Nel primo caso, sul cubetto di normale  $PS$  agisce una tensione tangenziale positiva, tendente quindi a far ruotare il cubetto in senso orario,

nel secondo caso, invece, la tensione è negativa, e quindi il cubetto tenderà a ruotare in senso antiorario.

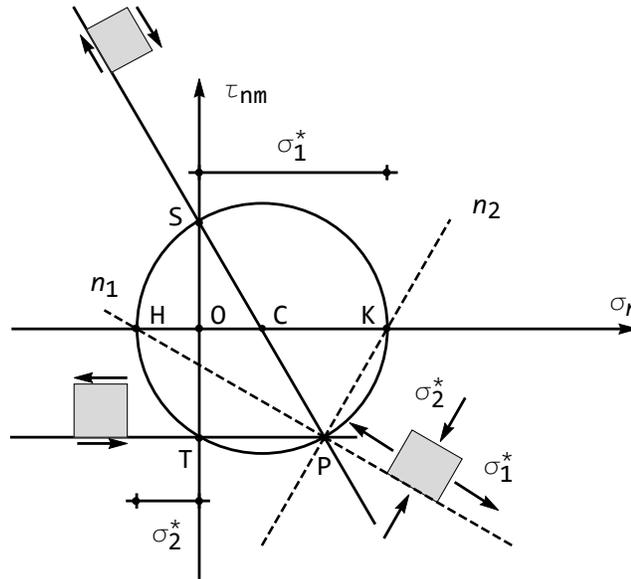


Figura 12.7: Il cerchio di Mohr in un caso per cui  $\sigma_{11}$  è positivo, mentre  $\sigma_{22} = 0$ , e  $\sigma_{12}$  è negativo.

## 12.4 La ricerca delle tensioni e direzioni principali tramite l'utilizzo dei cerchi di Mohr principali

Scrivendo il teorema di Cauchy–Poisson in termini di tensioni principali si ha, come noto:

$$\begin{aligned} t_{n1} &= \sigma_1 n_1 \\ t_{n2} &= \sigma_2 n_2 \\ t_{n3} &= \sigma_3 n_3 \end{aligned} \quad (12.10)$$

Ipotizzando che uno degli assi cartesiani sia principale, ad esempio l'asse  $X_3$ , e studiando i piani che si appoggiano all'asse  $X_3 \equiv 3$ , si deduce subito dalla terza delle equazioni precedenti che si studiano i piani per cui  $t_{n3}$  è nulla. In altri termini, sui piani di tale fascio la tensione normale  $\sigma_n$  e la tensione tangenziale  $\tau_{nm}$  esauriscono lo stato tensionale, e quindi le tensioni estreme, che nel paragrafo precedente si erano battezzate  $\sigma_1^*$  e  $\sigma_2^*$ , assumono ora il significato di tensioni principali  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

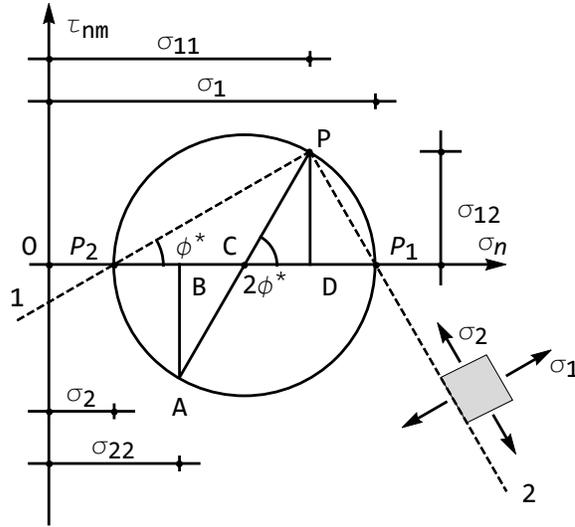


Figura 12.8: Il cerchio principale di Mohr per i fasci che si appoggiano all'asse  $X_3 \equiv 3$

Dall'esame di un cerchio di Mohr principale si può anche dedurre graficamente l'espressione analitica delle tensioni principali, assieme all'espressione dell'angolo  $\phi^*$  che definisce le due direzioni principali.

Si ha infatti, dalla Figura 12.8:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (12.11)$$

$$\tan 2\phi^* = 2 \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad (12.12)$$

Assegnato allora uno stato tensionale:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (12.13)$$

si ricavino le tre tensioni principali, ordinandole come segue:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (12.14)$$

I tre cerchi di Mohr relativi ai tre fasci di piani che si appoggiano alle tre direzioni principali sono immediatamente disegnabili, riportando semplicemente sull'asse orizzontale  $\sigma_n$  i tre segmenti:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= OP_1 \\ \sigma_2 &= OP_2 \\ \sigma_1 &= OP_3 \end{aligned} \quad (12.15)$$

e tracciando i cerchi di centri:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{OP_2 + OP_3}{2} \\C_2 &= \frac{OP_1 + OP_3}{2} \\C_3 &= \frac{OP_1 + OP_2}{2}\end{aligned}\tag{12.16}$$

e diametri  $(\sigma_2 - \sigma_1)$ ,  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  e  $(\sigma_1 - \sigma_2)$ , rispettivamente, come illustrato in Figura 12.9.

In Figura 12.10 è riportato il caso in cui le tre tensioni principali sono positive, e distinte tra loro. Dal suo esame si possono dedurre parecchie caratteristiche dello stato tensionale nel punto del corpo in esame. Ad esempio, è banale calcolare la tensione tangenziale massima, pari a  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ , e capire che essa agisce su di un piano del fascio che si appoggia all'asse 2, e precisamente sul piano con traccia che biseca l'angolo 1-3. Ad essa si accompagna la tensione normale  $(\sigma_3 + \sigma_1)/2$ . Si ritrovano così in via grafica i risultati della Lezione precedente. Si studino con cura i segni delle tensioni tangenziali sulle facce del cubetto elementare.

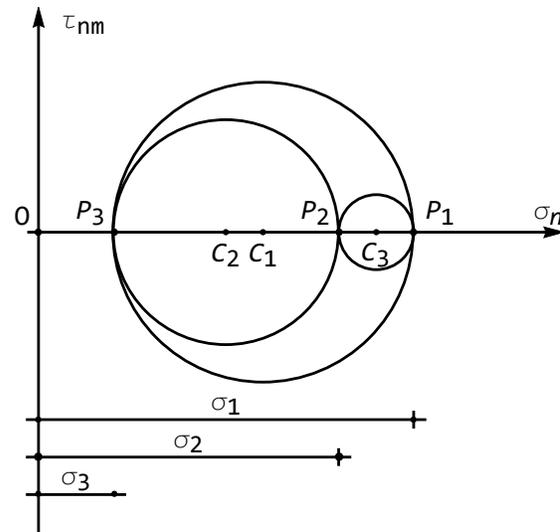


Figura 12.9: I tre cerchi principali di Mohr per i fasci che si appoggiano alle tre direzioni principali

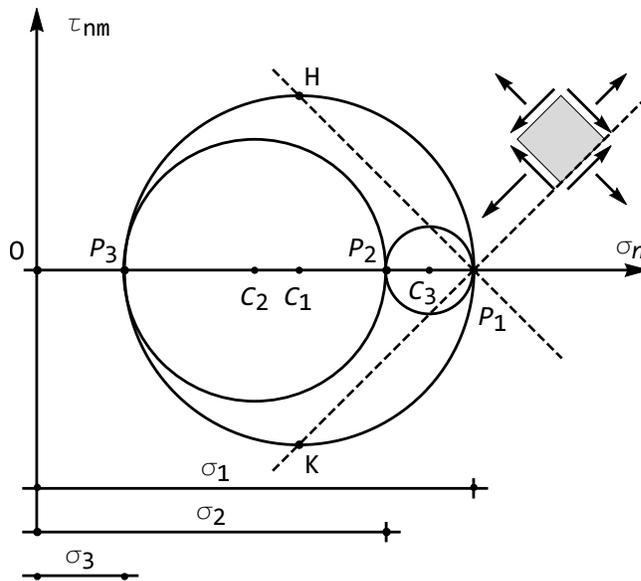


Figura 12.10: Lo stato tensionale corrispondente alla massima tensione tangenziale



## Capitolo 13

# Il gradiente di deformazione

In questa lezione si comincia ad affrontare l'analisi della deformazione, cui compito principale è rispondere al seguente problema:

- assegnate le coordinate dei punti di un corpo nella sua configurazione iniziale, e nella sua configurazione finale, ricercare la variazione in lunghezza e direzione di un segmento congiungente due punti arbitrari originariamente vicini tra loro.

Anche questo capitolo deve fare riferimento a Cauchy<sup>1</sup>

### 13.1 Gradiente di spostamento

Si consideri un corpo  $B$ , e si fissi un sistema cartesiano di riferimento. Sia  $M$  un punto generico del corpo, e siano  $(x_1, x_2, x_3)$  le sue coordinate in condizioni indeformate, ossia prima dell'applicazione delle forze.

Applicando le forze, il corpo  $B$  subisce una trasformazione, portandosi in  $B'$ , ed il punto  $M$ , a sua volta, si porta in  $M'$ , di coordinate  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Si può scrivere:

$$\xi_i = x_i + u_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (13.1)$$

o, matricialmente:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + \mathbf{u} \quad (13.2)$$

Il vettore  $\mathbf{u} = \overrightarrow{MM'}$ , di componenti  $(u_1, u_2, u_3)$  si chiama lo *spostamento* del punto  $M$ , come illustrato in Figura 13.1. Per ragioni fisiche, le componenti di spostamento si assumono funzioni continue e derivabili delle coordinate  $x_1, x_2$ , ed  $x_3$ .

---

<sup>1</sup>Il problema affrontato da Cauchy si ritrova in *Sur la condensation et la dilatation des corps solides* Exercices de Mathématiques, 2, pp. 82–93, in Opere Complete, II serie, Tomo 7 (1827). Gauthier-Villars, Parigi 1889. Una copia della memoria è reperibile nella sezione Ricerca del sito <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk>.

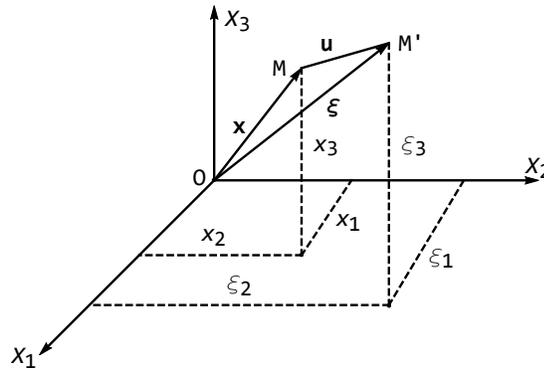


Figura 13.1: Le componenti di spostamento del punto generico  $M$

Si consideri ora un punto  $N$  appartenente ad un intorno di  $M$ , di coordinate  $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ , e sia  $N'$  il suo trasformato a seguito dell'applicazione dei carichi.  $N'$  avrà coordinate  $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$ , e potrà anche scriversi:

$$\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NN'} \quad (13.3)$$

o matricialmente:

$$\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + d\mathbf{x} + \mathbf{u} + d\mathbf{u} \quad (13.4)$$

avendo introdotto il vettore  $d\boldsymbol{\xi}$ , di componenti  $(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$ , ed il vettore  $d\mathbf{u}$ , di componenti  $(du_1, du_2, du_3)$ .

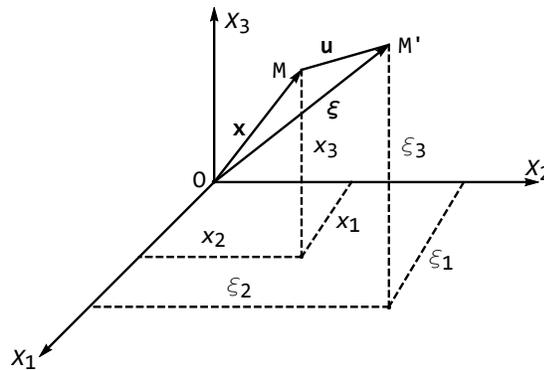


Figura 13.2: Il segmento  $MN$  ed il suo trasformato  $M'N'$

Poichè, come già detto, le componenti di spostamento sono funzioni continue e derivabili, sarà possibile utilizzare uno sviluppo in serie di Taylor intorno al punto  $M$ . Si ipotizza anche di poter arrestare lo sviluppo dopo il primo termine, supponendo quindi che il segmento  $MN$  si trasformi in un altro segmento  $M'N'$ ,

e non in un arco di curva, come illustrato in Figura 13.2. Si ha:

$$u_i + du_i = u_i + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j \quad (13.5)$$

ossia, per esteso:

$$\begin{aligned} u_1 + du_1 &= u_1 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx_2 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) dx_3 \\ u_2 + du_2 &= u_2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dx_2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) dx_3 \\ u_3 + du_3 &= u_3 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) dx_2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dx_3 \end{aligned} \quad (13.6)$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \quad (13.7)$$

ossia anche, più sinteticamente:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{H}d\mathbf{x} \quad (13.8)$$

La matrice  $\mathbf{H}$  viene definita *matrice delle componenti del gradiente di spostamento*:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (13.9)$$

ed è di fondamentale importanza nell'analisi delle deformazioni.

La matrice  $\mathbf{H}$ , come si vede, non gode di proprietà di simmetria. Tuttavia, qualsiasi matrice quadrata può essere scomposta nella somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica, secondo la formula generale:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{H} + \mathbf{H}^T}{2} + \frac{\mathbf{H} - \mathbf{H}^T}{2} \doteq \mathbf{E} + \mathbf{\Omega} \quad (13.10)$$

Esplicitamente si ha:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (13.11)$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (13.12)$$

Nota - E' possibile dimostrare<sup>2</sup> che la parte antisimmetrica  $\mathbf{\Omega}$  del gradiente degli spostamenti  $\mathbf{H}$  è responsabile delle rotazioni rigide del segmento  $MN$  e di una dilatazione cilindrica, mentre la parte simmetrica  $\mathbf{E}$  tien conto delle variazioni di lunghezza, ossia delle deformazioni del segmento  $MN$ .

## 13.2 Gradiente di deformazione

Inserendo la (13.8) nella (13.4) si ha:

$$\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + d\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{H}d\mathbf{x} \quad (13.13)$$

e semplificando in base alla (13.2):

$$d\boldsymbol{\xi} = d\mathbf{x} + \mathbf{H}d\mathbf{x} = (\mathbf{I} + \mathbf{H})d\mathbf{x} \doteq \mathbf{F}d\mathbf{x} \quad (13.14)$$

La matrice  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}$  è la cosiddetta *matrice delle componenti del gradiente di deformazione*.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (13.15)$$

<sup>2</sup>Qualsiasi testo di teoria dell'elasticità o di Scienza delle Costruzioni può servire da riferimento. Tra i più dettagliati si può citare il terzo capitolo di Adel S. Saada, *Elasticity*, Pergamon Press, 1974

Per esteso, la (13.14) si scrive:

$$\begin{aligned} d\xi_1 &= \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ d\xi_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ d\xi_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_3 \end{aligned} \quad (13.16)$$

ossia, utilizzando la convenzione degli indici ripetuti e l'operatore  $\delta$  di Kronecker:

$$d\xi_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dx_j, \quad i=1,2,3 \quad (13.17)$$

### 13.3 Allungamenti percentuali

Si consideri ancora il segmento  $\overrightarrow{MN}$ , ed il suo trasformato  $\overrightarrow{M'N'}$ . Si ha la:

**Definizione 3.** – Si definisce allungamento percentuale del segmento  $\overrightarrow{MN}$  il rapporto:

$$E_{MN} = \frac{|M'N'| - |MN|}{|MN|} \quad (13.18)$$

dove, ovviamente, il simbolo  $|\cdot|$  indica la lunghezza del segmento.

Data questa definizione, si scelga un segmento  $\overrightarrow{MN}$  parallelo all'asse  $X_1$ , e quindi di componenti  $(dx_1, 0, 0)$  e lunghezza  $dx_1$ . Applicando la (13.14), si hanno le componenti  $(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$  del segmento trasformato:

$$\begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \\ d\xi_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} dx_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13.19)$$

ossia:

$$\begin{aligned} d\xi_1 &= \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 \\ d\xi_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \\ d\xi_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 \end{aligned} \quad (13.20)$$

Il segmento  $\overrightarrow{M'N'}$  ha quindi lunghezza:

$$|M'N'| = \sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2} = |MN| \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2} \quad (13.21)$$

L'allungamento percentuale del segmento  $\overline{MN}$ , originariamente steso lungo l'asse  $X_1$ , ed indicato con  $E_{x1}$ , è fornito da:

$$\begin{aligned}
 E_{x1} &= \frac{|M'N'| - |MN|}{|MN|} \\
 &= \frac{|MN| \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2} - |MN|}{|MN|} \\
 &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2} - 1
 \end{aligned} \tag{13.22}$$

Del tutto analogamente, si possono ricavare gli *allungamenti percentuali* di segmenti stesi originariamente lungo gli assi  $X_2$  ed  $X_3$ . Si ha:

$$\begin{aligned}
 E_{x2} &= \sqrt{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2} - 1 \\
 E_{x3} &= \sqrt{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2} - 1
 \end{aligned} \tag{13.23}$$

## 13.4 Variazione di angolo

Si vuole ora completare lo studio della trasformazione subita dai tre segmenti paralleli agli assi coordinati, calcolando la rotazione che essi subiscono a causa dell'applicazione delle forze. A ciò fare, si possono calcolare i coseni direttori degli elementi trasformati.

L'elemento  $MN$ , originariamente parallelo all'asse  $X_1$  si trasforma nell'elemento  $M'N'$ , e subisce un allungamento percentuale pari a  $E_{x1}$ . I tre coseni direttori del segmento  $M'N'$  saranno allora forniti da:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11} &= \frac{d\xi_1}{|M'N'|} = \frac{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{1 + E_{x1}} \\
 \lambda_{21} &= \frac{d\xi_2}{|M'N'|} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + E_{x1}} \\
 \lambda_{31} &= \frac{d\xi_3}{|M'N'|} = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}{1 + E_{x1}}
 \end{aligned} \tag{13.24}$$

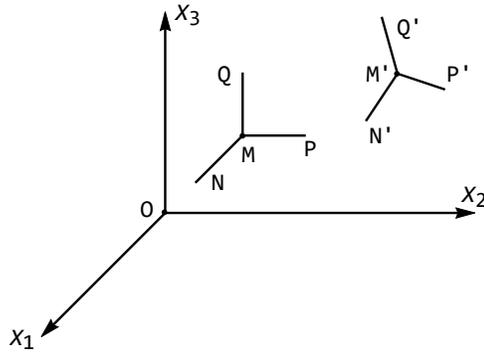


Figura 13.3: La trasformazione subita da una terna di segmenti paralleli agli assi coordinati

mentre nel caso di un segmento originariamente diretto secondo  $X_2$  si ha:

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= \frac{d\xi_1}{|M'P'|} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1 + E_{x2}} \\ \lambda_{22} &= \frac{d\xi_2}{|M'P'|} = \frac{1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}}{1 + E_{x2}} \\ \lambda_{32} &= \frac{d\xi_3}{|M'P'|} = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{1 + E_{x2}} \end{aligned} \quad (13.25)$$

ed infine, nel caso di un segmento originariamente diretto secondo  $X_3$  si ha:

$$\begin{aligned} \lambda_{13} &= \frac{d\xi_1}{|M'Q'|} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_3}}{1 + E_{x3}} \\ \lambda_{23} &= \frac{d\xi_2}{|M'Q'|} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_3}}{1 + E_{x3}} \\ \lambda_{33} &= \frac{d\xi_3}{|M'Q'|} = \frac{1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}}{1 + E_{x3}} \end{aligned} \quad (13.26)$$

Indicialmente, le nove relazioni precedenti si possono compattamente scrivere come:

$$\lambda_{ij} = \frac{\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}{1 + E_{xj}} \quad (13.27)$$



## Capitolo 14

# Il tensore di Green-Lagrange

In questo Capitolo si generalizza quanto illustrato nel Capitolo, considerando la trasformazione subita da un segmento arbitrariamente orientato nello spazio.

### 14.1 Il tensore di Green-Lagrange

Si consideri un segmento  $\overrightarrow{MN} = \mathbf{dx}$ , di componenti  $(dx_1, dx_2, dx_3)$ , e di lunghezza:

$$|MN| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = \sqrt{\mathbf{dx}^T \mathbf{dx}} \quad (14.1)$$

A seguito della applicazione delle forze, il segmento  $\overrightarrow{MN}$  si trasforma nel segmento  $\overrightarrow{M'N'} = \mathbf{d\xi}$ , di componenti  $(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$  e lunghezza:

$$|M'N'| = \sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2} = \sqrt{\mathbf{d\xi}^T \mathbf{d\xi}} \quad (14.2)$$

Usando la definizione di matrice del gradiente di deformazione si potrà scrivere:

$$\mathbf{d\xi} = \mathbf{F dx} \quad (14.3)$$

e quindi:

$$|M'N'| = \sqrt{\mathbf{d\xi}^T \cdot \mathbf{d\xi}} = \sqrt{\mathbf{dx}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F dx}} \quad (14.4)$$

ed ancora:

$$|M'N'|^2 - |MN|^2 = \mathbf{dx}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F dx} - \mathbf{dx}^T \mathbf{dx} = \mathbf{dx}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \mathbf{dx} \quad (14.5)$$

Si introduca ora la quantità, nota come *tensore di Green-Lagrange*<sup>1</sup>:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (14.6)$$

---

<sup>1</sup>La deduzione del tensore è contenuta in *On the propagation of light in crystallized media* G. Green, Math. Papers 297-311 (1839). Una versione digitale di tale lavoro può essere letta nella sezione Ricerca del sito <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk>

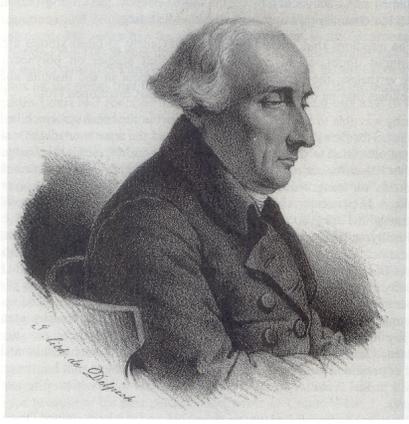


Figura 14.1: Joseph-Louis Lagrange

in modo da poter scrivere:

$$|M'N'|^2 - |MN|^2 = 2 \mathbf{d}\mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{d}\mathbf{x} \quad (14.7)$$

Si noti che il tensore  $\mathbf{D}$  può scriversi anche:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad (14.8)$$

da cui, tra l'altro, appare subito evidente la natura simmetrica di  $\mathbf{D}$ . Svolgendo i prodotti matriciali si hanno esplicitamente le sei componenti di  $\mathbf{D}$ :

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ d_{12} = d_{21} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ d_{13} = d_{31} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ d_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ d_{23} = d_{32} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ d_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (14.9)$$

oppure, utilizzando la convenzione degli indici ripetuti:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (14.10)$$

## 14.2 Gli allungamenti percentuali

L'allungamento percentuale del segmento  $MN$  è stato definito come:

$$E_{MN} = \frac{|M'N'| - |MN|}{|MN|} = \frac{|M'N'|}{|MN|} - 1 \quad (14.11)$$

da cui:

$$|M'N'| = (1 + E_{MN}) |MN| \quad (14.12)$$

Sarà pertanto:

$$|M'N'|^2 - |MN|^2 = (1 + E_{MN})^2 |MN|^2 - |MN|^2 = E_{MN} (2 + E_{MN}) |MN|^2 \quad (14.13)$$

e paragonando con la (14.7) si ha:

$$E_{MN} (2 + E_{MN}) |MN|^2 = 2\mathbf{dx}^T \mathbf{D} \mathbf{dx} \quad (14.14)$$

Dividendo ora per  $2|MN|^2$  si ha:

$$E_{MN} \left(1 + \frac{E_{MN}}{2}\right) = \frac{\mathbf{dx}^T}{|MN|} \mathbf{D} \frac{\mathbf{dx}}{|MN|} \quad (14.15)$$

ossia, infine:

$$E_{MN} \left(1 + \frac{E_{MN}}{2}\right) = \mathbf{l}^T \mathbf{D} \mathbf{l} \quad (14.16)$$

avendo introdotto il vettore  $\mathbf{l}$  dei coseni direttori dell'elemento  $\overrightarrow{MN}$ :

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{|MN|} \\ \frac{dx_2}{|MN|} \\ \frac{dx_3}{|MN|} \end{pmatrix} \quad (14.17)$$

Si è quindi dato un significato fisico al tensore di Green-Lagrange: basta conoscere le sue sei componenti ed è possibile calcolare l'allungamento percentuale di un segmento  $\overrightarrow{MN}$  orientato in modo arbitrario, e definito attraverso i suoi tre coseni direttori.

## 14.3 Definizione di deformazione

La formula (14.16) fornisce lo spunto per una definizione di tipo operativo:

**Definizione 4.** Dato un punto  $M$  del corpo  $B$ , la quantità:

$$\begin{aligned} \epsilon_{MN} &= E_{MN} \left(1 + \frac{E_{MN}}{2}\right) = \mathbf{l}^T \mathbf{D} \mathbf{l} \\ &= d_{ij} l_i l_j = d_{11} l_1^2 + d_{22} l_2^2 + d_{33} l_3^2 + 2(d_{12} l_1 l_2 + d_{13} l_1 l_3 + d_{23} l_2 l_3) \end{aligned} \quad (14.18)$$

definisce la deformazione in  $M$  del segmento  $\overrightarrow{MN}$ .

Nota - Nella pratica ingegneristica si definisce deformazione la quantità  $E_{MN}$ , che viene a coincidere con la precedente solo in certe ipotesi che verranno specificate in seguito.

## 14.4 Le componenti normali di deformazione

Si consideri un segmento  $\overrightarrow{MN} = \mathbf{dx}$ , parallelo all'asse  $X_1$ , e quindi di componenti  $(dx_1, 0, 0)$ . I coseni direttori di  $\overrightarrow{MN}$  sono dati da  $(1, 0, 0)$ . Di conseguenza, la (14.18) potrà scriversi:

$$\epsilon_{11} = E_{x1} \left( 1 + \frac{E_{x1}}{2} \right) = \mathbf{l}^T \mathbf{D} \mathbf{l} \quad (14.19)$$

e svolgendo il triplo prodotto matriciale si giunge ad identificare le componenti del tensore di Green-Lagrange lungo la diagonale principale con le deformazioni dei segmenti originariamente stesi lungo gli assi:

$$\epsilon_{11} = d_{11} \quad (14.20)$$

In termini di allungamenti percentuali, è facile dedurre che sarà:

$$E_{x1} \left( 1 + \frac{E_{x1}}{2} \right) = d_{11} \quad (14.21)$$

da cui:

$$E_{x1} = \sqrt{1 + 2d_{11}} - 1 \quad (14.22)$$

Del tutto analogamente:

$$\begin{aligned} E_{x2} &= \sqrt{1 + 2d_{22}} - 1 \\ E_{x3} &= \sqrt{1 + 2d_{33}} - 1 \end{aligned} \quad (14.23)$$

Si può dunque concludere che *gli elementi diagonali del tensore di Green-Lagrange forniscono una misura degli allungamenti percentuali di segmenti passanti per un punto  $M$  e paralleli agli assi.*

I tre elementi  $d_{11}$ ,  $d_{22}$  e  $d_{33}$  si chiamano *componenti normali della deformazione.*

## 14.5 Gli angoli taglienti

Occorre ora dare un significato geometrico anche ai restanti tre termini del tensore di Green-Lagrange, ossia a  $d_{12}$ ,  $d_{13}$  e  $d_{23}$ . A ciò fare, si considerino due elementi paralleli a due assi coordinati, ad esempio, paralleli ad  $X_1$  ed  $X_2$ . Siano essi  $\mathbf{dx}_1$  e  $\mathbf{dx}_2$ , rispettivamente, con coseni direttori  $(1, 0, 0)$  e  $(0, 1, 0)$ .

I coseni direttori del segmento trasformato  $d\xi_1$  saranno forniti da (cfr. Capitolo precedente):

$$\begin{aligned}\lambda_{11} &= \frac{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{1 + E_{x1}} \\ \lambda_{21} &= \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + E_{x1}} \\ \lambda_{31} &= \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}{1 + E_{x1}}\end{aligned}\quad (14.24)$$

mentre i coseni direttori del segmento trasformato  $d\xi_2$  saranno forniti da:

$$\begin{aligned}\lambda_{12} &= \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1 + E_{x2}} \\ \lambda_{22} &= \frac{1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}}{1 + E_{x2}} \\ \lambda_{32} &= \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{1 + E_{x2}}\end{aligned}\quad (14.25)$$

Ne segue, per una nota formula di geometria, che il coseno dell'angolo formato dai due segmenti trasformati sarà fornito da:

$$\begin{aligned}\cos(d\xi_1, d\xi_2) &= \lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22} + \lambda_{31}\lambda_{32} \\ &= \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{(1 + E_{x1})(1 + E_{x2})} \\ &= \frac{2d_{12}}{(1 + E_{x1})(1 + E_{x2})}\end{aligned}\quad (14.26)$$

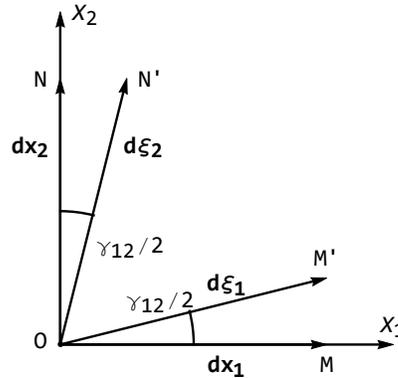
Se si indica con  $\gamma_{12}$  la variazione angolare tra  $d\mathbf{x}_1$  e  $d\mathbf{x}_2$ , (cfr. Figura 14.2) si ha anche:

$$\cos(d\xi_1, d\xi_2) = \frac{2d_{12}}{(1 + E_{x1})(1 + E_{x2})} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin \gamma_{12} \quad (14.27)$$

Analogamente, si ha

$$\cos(d\xi_1, d\xi_3) = \frac{2d_{13}}{(1 + E_{x1})(1 + E_{x3})} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{13}\right) = \sin \gamma_{13} \quad (14.28)$$

$$\cos(d\xi_2, d\xi_3) = \frac{2d_{23}}{(1 + E_{x2})(1 + E_{x3})} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{23}\right) = \sin \gamma_{23} \quad (14.29)$$

Figura 14.2: L'angolo tagliante  $\gamma_{12}$ 

Gli angoli  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$ ,  $\gamma_{23}$  si chiamano *angoli taglianti*, mentre le tre componenti  $d_{12}$ ,  $d_{13}$ ,  $d_{23}$  si chiamano le *componenti tangenziali della deformazione*. Esse descrivono la variazione angolare dell'angolo retto tra elementi passanti per  $M$  ed originariamente distesi lungo gli assi.

## 14.6 Le deformazioni principali

Come si è visto, le componenti tangenziali della deformazione,  $d_{12}$ ,  $d_{13}$  e  $d_{23}$  descrivono la variazione angolare tra coppie di segmenti distesi lungo gli assi. Se quindi queste tre quantità fossero nulle, allora gli assi coordinati sarebbero orientati in modo tale che tre segmenti ad essi paralleli subirebbero solo variazioni di lunghezza, ruoterebbero in modo solidale, ma non avrebbero mutue rotazioni. In altri termini la terna  $(X_1, X_2, X_3)$  sarebbe una *terna di direzioni principali di deformazione*. In questo caso, gli assi si battezzano  $(1, 2, 3)$  e gli allungamenti percentuali si denotano con  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ . Inoltre il tensore di Green-Lagrange assume la forma diagonale:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \quad (14.30)$$

e quindi sarà:

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{1 + 2d_1} - 1 \\ E_2 &= \sqrt{1 + 2d_2} - 1 \\ E_3 &= \sqrt{1 + 2d_3} - 1 \end{aligned} \quad (14.31)$$

ed anche:

$$\epsilon_{MN} = d_1 l_1^2 + d_2 l_2^2 + d_3 l_3^2 \quad (14.32)$$

dove, come sempre,  $l_1$ ,  $l_2$  ed  $l_3$  sono i coseni direttori del segmento  $\overrightarrow{MN}$ .

## 14.7 La ricerca delle direzioni principali

In perfetta analogia con quanto svolto nell'analisi della tensione, occorre ricercare quella direzione, o quelle direzioni per cui:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \quad (14.33)$$

ossia, matricialmente:

$$(\mathbf{D} - \varepsilon \mathbf{I})\mathbf{l} = \mathbf{0} \quad (14.34)$$

Il sistema, omogeneo, ammette sempre la soluzione banale  $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ , senza significato fisico. Occorre invece ricercare le soluzioni, definite a meno di una o più costanti, in corrispondenza dei valori nulli del determinante dei coefficienti, imponendo:

$$\text{Det}[(\mathbf{D} - \varepsilon \mathbf{I})] = 0 \quad (14.35)$$

Svolgendo il determinante si giunge ad una equazione cubica in  $\varepsilon$ , con tre radici reali, che può scriversi come:

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0 \quad (14.36)$$

dove  $I_1$ ,  $I_2$  ed  $I_3$  sono i tre *invarianti di deformazione*:

$$\begin{aligned} I_1 &= d_{11} + d_{22} + d_{33} = \text{Tr}[\mathbf{D}] \\ I_2 &= d_{11}d_{22} + d_{11}d_{33} + d_{22}d_{33} - d_{12}^2 - d_{13}^2 - d_{23}^2 \\ I_3 &= \text{Det}[\mathbf{D}] \end{aligned} \quad (14.37)$$

Siano  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  le tre radici dell'equazione secolare (14.36) in  $\varepsilon$ . In corrispondenza di ciascuna di queste tre radici, dette *deformazioni principali*, si può calcolare una direzione principale, definita a meno di una costante, ed identificata dalle sue tre componenti.

Sia  $\mathbf{l}_I = (l_{11}, l_{21}, l_{31})$  la soluzione che si ottiene in corrispondenza di  $\varepsilon = d_1$ ,  $\mathbf{l}_{II} = (l_{12}, l_{22}, l_{32})$  la soluzione che si ottiene in corrispondenza di  $\varepsilon = d_2$ , ed infine  $\mathbf{l}_{III} = (l_{13}, l_{23}, l_{33})$  la soluzione che si ottiene in corrispondenza di  $\varepsilon = d_3$ : si può dimostrare anche in questo caso che queste tre direzioni  $\mathbf{l}_I$ ,  $\mathbf{l}_{II}$  ed  $\mathbf{l}_{III}$ , sono tra loro ortogonali.



# Capitolo 15

## La teoria lineare

In questo Capitolo si esaminano le conseguenze di una ragionevole ipotesi sulla grandezza di alcune quantità di interesse fisico.

### 15.1 L'ipotesi di piccole deformazioni

E' spesso evidente, nella pratica tecnica, che le variazioni percentuali di lunghezza  $E_{x1}$ ,  $E_{x2}$  ed  $E_{x3}$ , assieme con le variazioni angolari  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$  e  $\gamma_{23}$  possono considerarsi quantità piccole rispetto all'unità. Quando ciò sia accettabile, si dirà che si è nell'ambito delle *piccole deformazioni*:

$$\begin{aligned} E_{xi} &\ll 1 \\ \gamma_{ij} &\ll 1 \end{aligned} \quad (15.1)$$

In tale ipotesi si hanno alcune interessanti semplificazioni di svariate formule. Gli allungamenti percentuali dei segmenti stesi lungo gli assi coordinati, dedotti nel Capitolo precedente, e che qui si riportano per comodità:

$$\begin{aligned} E_{x1} &= \sqrt{1 + 2d_{11}} - 1 \\ E_{x2} &= \sqrt{1 + 2d_{22}} - 1 \\ E_{x3} &= \sqrt{1 + 2d_{33}} - 1 \end{aligned} \quad (15.2)$$

si semplificano utilizzando lo sviluppo in serie della radice quadrata, ed arrestandosi al primo termine:

$$\sqrt{1 + 2d_{11}} = 1 + d_{11} - \frac{d_{11}^2}{2} + \frac{d_{11}^3}{2} + O[d_{11}^4] \quad (15.3)$$

da cui si ha:

$$\begin{aligned} E_{x1} &= d_{11} \\ E_{x2} &= d_{22} \\ E_{x3} &= d_{33} \end{aligned} \quad (15.4)$$

Ne segue che in queste ipotesi *gli elementi diagonali del tensore di Green-Lagrange forniscono direttamente gli allungamenti percentuali di segmenti passanti per un punto  $M$  e paralleli agli assi*. Inoltre, per qualsiasi segmento  $\overline{MN}$  la deformazione  $\epsilon_{MN}$ , data da:

$$\epsilon_{MN} = E_{MN} \left( 1 + \frac{E_{MN}}{2} \right) \quad (15.5)$$

si semplifica in:

$$\epsilon_{MN} = E_{MN} \quad (15.6)$$

da cui, come già suggerito, si deduce che la definizione matematica e quella ingegneristica vengono a coincidere.

Infine, occorre semplificare le (14.27–14.29) del Capitolo 14:

$$\begin{aligned} \sin \gamma_{12} &= \frac{2d_{12}}{(1 + E_{x1})(1 + E_{x2})} \\ \sin \gamma_{13} &= \frac{2d_{13}}{(1 + E_{x1})(1 + E_{x3})} \\ \sin \gamma_{23} &= \frac{2d_{23}}{(1 + E_{x2})(1 + E_{x3})} \end{aligned} \quad (15.7)$$

I seni degli angoli, come noto, possono confondersi con gli angoli stessi, se gli angoli sono piccoli:

$$\sin \gamma_{12} = \gamma_{12} - \frac{\gamma_{12}^3}{6} + O[\gamma_{12}^4] \quad (15.8)$$

ed il denominatore a secondo membro può confondersi con l'unità. Si ha quindi:

$$d_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2} \quad (15.9)$$

Quindi, nelle ipotesi semplificative di questa lezione, le tre componenti  $d_{12}$ ,  $d_{13}$ ,  $d_{23}$  coincidono con la metà della variazione angolare dell'angolo retto tra elementi passanti per  $M$  ed originariamente distesi lungo gli assi.

## 15.2 Piccoli gradienti di spostamento

Una ulteriore ipotesi semplificativa riguarda l'ampiezza delle derivate degli spostamenti. Se si assume che tutte le derivate del tipo  $\partial u_1/\partial x_1, \dots, \partial u_3/\partial x_3$  siano tanto piccole da poter trascurare i loro quadrati rispetto ad esse, allora il tensore di Green-Lagrange viene a semplificarsi drasticamente, in quanto nella sua definizione:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad (15.10)$$

deve essere trascurato l'ultimo termine, e quindi si ha:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad (15.11)$$

In altri termini:

*il tensore di Green–Lagrange viene a coincidere con la parte simmetrica del gradiente di spostamento.*

## 15.3 La decomposizione dello spostamento

Nell'ipotesi di piccoli gradienti di spostamento, gli elementi della matrice  $\mathbf{H}$  dei gradienti di spostamento sono tutti dello stesso ordine di grandezza, così come gli elementi della parte simmetrica  $\mathbf{E}$  di  $\mathbf{H}$ , e della parte antisimmetrica  $\mathbf{\Omega}$ . Ciò permette una utile decomposizione del processo deformativo in esame.

### 15.3.1 La rotazione rigida

Si consideri la scomposizione del gradiente di spostamento nella sua parte simmetrica ed antisimmetrica:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{H}d\mathbf{x} = (\mathbf{E} + \mathbf{\Omega})d\mathbf{x} \quad (15.12)$$

con:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (15.13)$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (15.14)$$

Si definisca ora il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  di componenti:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (15.15)$$

in modo da scrivere:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (15.16)$$

Ora, è noto che il generico atto di moto di un *corpo rigido*, si può scomporre in tre traslazioni  $u_{01}, u_{02}, u_{03}$ , rispetto a tre assi cartesiani di riferimento, e in tre rotazioni di ampiezza  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  intorno agli assi passanti per un punto  $P_0$  (detto polo) e paralleli agli assi di riferimento.

A seguito di questo atto di moto, lo spostamento di un generico punto  $P$  del corpo, può scriversi:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \\ x_3 - x_{03} \end{pmatrix} \quad (15.17)$$

Ne segue che l'aliquota di spostamento della (15.12):

$$d\mathbf{u}_r = \boldsymbol{\Omega} d\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x} \quad (15.18)$$

è interpretabile come una rotazione rigida con vettore rotazione di componenti:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (15.19)$$

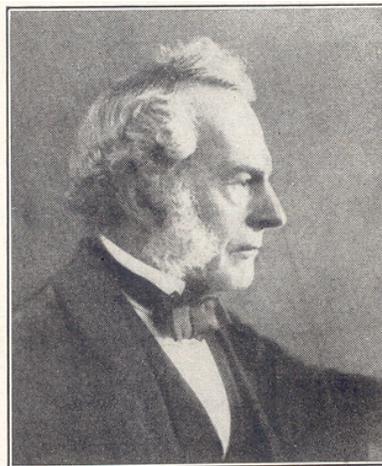


Figura 15.1: G. Stokes

### 15.3.2 La deformazione pura

La restante aliquota della (15.12):

$$d\mathbf{u}_e = \mathbf{E} d\mathbf{x} \quad (15.20)$$

è quindi responsabile dell'effettiva deformazione del segmento  $\overrightarrow{MN}$ , e la matrice  $\mathbf{E}$  si dice anche *matrice della deformazione pura*. I corrispondenti spostamenti si dicono *spostamenti da deformazione pura*.

Nota - Il concetto di decomposizione della deformazione, come illustrato in questa sezione, risale a G.Stokes, 1845.

## 15.4 L'interpretazione fisica delle direzioni principali di deformazione

La (15.20), combinata con la (15.11), permette una semplice interpretazione fisica della ricerca delle deformazioni principali con le corrispondenti direzioni principali di deformazione, operata nel Capitolo precedente sul tensore di Green-Lagrange.

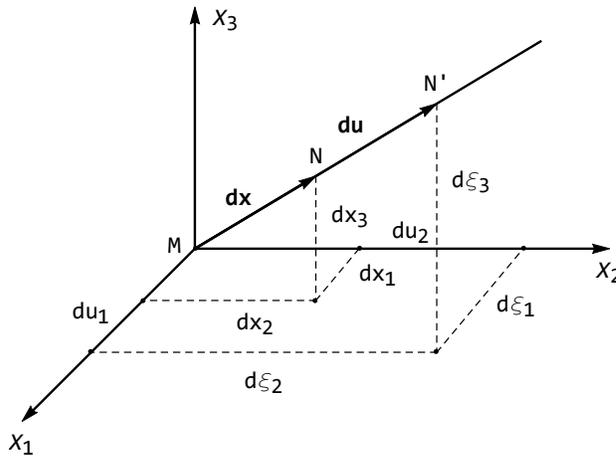


Figura 15.2: Gli spostamenti da deformazione pura e le direzioni principali di deformazione

Si consideri infatti un punto  $M$ , e sia  $p$  una direzione principale passante per  $M$ . Sia poi  $N$  un punto appartenente alla retta  $p$ , ed a distanza  $dx$  da  $M$ .

Il punto  $N$ , per effetto della deformazione pura, si porta in  $N'$ , con spostamenti forniti dalla (15.20):

$$\begin{aligned}
 du_1 &= e_{11}dx_1 + e_{12}dx_2 + e_{13}dx_3 \\
 du_2 &= e_{12}dx_1 + e_{22}dx_2 + e_{23}dx_3 \\
 du_3 &= e_{13}dx_1 + e_{23}dx_2 + e_{33}dx_3
 \end{aligned}
 \tag{15.21}$$

D'altro canto, poichè  $N$  appartiene ad una direzione principale, anche  $N'$  dovrà appartenere alla stessa direzione, e quindi  $MN'$  deve essere proporzionale

ad  $MN$  (cfr. Figura 15.2). Sarà perciò possibile scrivere:

$$\begin{aligned} du_1 &= \epsilon dx_1 \\ du_2 &= \epsilon dx_2 \\ du_3 &= \epsilon dx_3 \end{aligned} \quad (15.22)$$

Paragonando le (15.21) e (15.22) si giunge al sistema:

$$\begin{aligned} (e_{11} - \epsilon) dx_1 + e_{12} dx_2 + e_{13} dx_3 &= 0 \\ e_{12} dx_1 + (e_{22} - \epsilon) dx_2 + e_{23} dx_3 &= 0 \\ e_{13} dx_1 + e_{23} dx_2 + (e_{33} - \epsilon) dx_3 &= 0 \end{aligned} \quad (15.23)$$

identico al sistema ottenuto nel Capitolo precedente.

## 15.5 Le condizioni di compatibilità

In quest'ultima sezione si affronta il seguente problema:

- date le *tre* funzioni spostamento  $u_1(x_1, x_2, x_3)$ ,  $u_2(x_1, x_2, x_3)$  e  $u_3(x_1, x_2, x_3)$ , è da esse possibile ricavare, tramite derivazione, le *sei* componenti del tensore di deformazione.

- assegnate le *sei* funzioni  $e_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , è sempre possibile ricavare le *tre* funzioni spostamento da cui esse sarebbero generate? In altri termini, assegnate sei funzioni del tipo descritto, sono sempre esse interpretabili come componenti di deformazione, relative ad un campo di spostamenti?

La risposta alla domanda precedente è affermativa, solo quando le sei funzioni sono legate tra loro da tre condizioni, dette *condizioni di compatibilità*.

Si può dimostrare infatti il seguente:

**Teorema 5.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché le sei funzioni continue ed uniformi  $e_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  siano componenti di deformazione lineare è che siano verificate le relazioni:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left( -\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \\ 2 \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2} \end{aligned} \quad (15.24)$$

Nota - Prima di iniziare la dimostrazione, si osservi che il gruppo delle prime tre condizioni si può ottenere a partire da una qualsiasi equazione, tramite permutazione circolare degli indici  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$ , così come possono ottenersi le altre tre condizioni.

*Dimostrazione.* Si dimostrerà solo che la condizione è necessaria<sup>1</sup>. Ed infatti il secondo gruppo di condizioni può essere facilmente dimostrato in base alla seguente relazione:

$$\begin{aligned} 2e_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \rightarrow 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &= \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_1} + \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \end{aligned} \quad (15.25)$$

ed alla permutazione circolare degli indici.

Per dimostrare il primo gruppo di condizioni, si consideri che si ha:

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3} \right) \quad (15.26)$$

$$e_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} \right) \quad (15.27)$$

$$e_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \right) \quad (15.28)$$

e sommando si ha:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_1 \partial x_1} = \\ &\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} \right) \\ &= \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \end{aligned} \quad (15.29)$$

<sup>1</sup> Per dimostrare che la condizione è sufficiente, può ad esempio consultarsi N. Muskhelishvili, *Some basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff 1963, pp. 50-51. La necessità delle condizioni di compatibilità è stata dimostrata da B. De Saint Venant in una brevissima nota di due pagine, pubblicata nel 1861, mentre la dimostrazione della loro sufficienza è dovuta ad Eugenio Beltrami (*Sull'interpretazione meccanica delle formule di Maxwell*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 3, 1886). Tale nota può anche essere letta sul sito <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk>, nella sezione Ricerca.

□

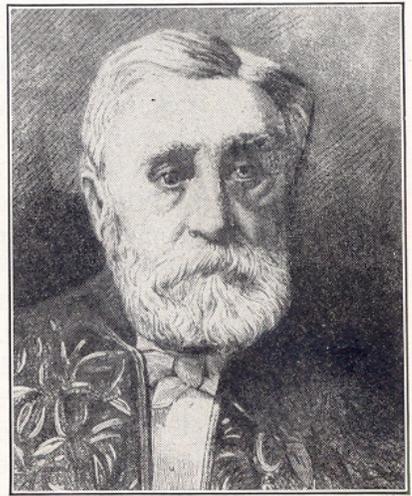


Figura 15.3: Adhémar-Jean-Claude Barré De Saint-Venant

Nota - Le equazioni di congruenza possono sintetizzarsi nell'unica formula:

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E} = 0 \quad (15.30)$$

dove la definizione di rotore di un tensore può ritrovarsi in qualsiasi testo di analisi vettoriale

## 15.6 Le identità di Bianchi

E' facilmente ipotizzabile che non tutte le condizioni di congruenza appena scritte siano indipendenti tra di loro. Ed infatti, si riscrivano le sei condizioni sotto forma di identità a zero:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{33} &= 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = 0 \\ \mathcal{G}_{11} &= 2 \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} = 0 \\ \mathcal{G}_{22} &= 2 \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2} = 0 \\ \mathcal{G}_{23} = G_{32} &= \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_1^2} = 0 \\ \mathcal{G}_{31} = G_{13} &= \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_2^2} = 0 \end{aligned} \quad (15.31)$$

$$\mathcal{G}_{12} = G_{21} = \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_3^2} = 0$$



Figura 15.4: Luigi Bianchi

Si può verificare, per sostituzione diretta, che sussistono le cosiddette *identità di Bianchi*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{G}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_{13}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{G}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_{23}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{G}_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{G}_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_{33}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \tag{15.32}$$

che legano tra loro le sei condizioni di congruenza, e facendo sì che solo tre di esse siano indipendenti. Si noti che utilizzando la convenzione degli indici ripetuti, le identità di Bianchi si scrivono:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{15.33}$$



# Capitolo 16

## Le relazioni costitutive

Da questo Capitolo si inizia lo studio del comportamento del materiale, collegando tra loro l'analisi della tensione e l'analisi della deformazione.

Ci si limiterà, dopo alcuni cenni introduttivi, al legame elastico, che è contemporaneamente il più semplice ed il più diffuso legame tra tensioni e deformazioni. Inoltre, per bassi livelli di sollecitazione quasi ogni materiale obbedisce a questo tipo di legge.

### 16.1 Introduzione

Si consideri un punto  $M$  di un corpo  $B$ , siano  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{33}$  le componenti di tensione in  $M$ , e siano  $e_{11}, e_{12}, \dots, e_{33}$  le componenti di deformazione (lineare) in  $M$ . Seguendo una simbologia utilizzata originariamente da S.G. Lekhnitskii<sup>1</sup>, si introducano ora i due vettori di ordine sei:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\} \quad (16.1)$$

$$\boldsymbol{e}^T = \{e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2e_{12}, 2e_{13}, 2e_{23}\} \quad (16.2)$$

Con questa notazione, si intende per legame costitutivo una relazione del tipo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{e}) \quad (16.3)$$

rispettosa almeno dei tre principi fondamentali<sup>2</sup>:

**principio di determinismo**, secondo cui la tensione in un corpo è determinata al più dalla storia del moto passato del corpo, ma non dalla sua storia futura

---

<sup>1</sup>In materia di elasticità e di legge di Hooke è da leggere il libro di S.G.Lekhnitskii, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden Day, San Francisco, 1963. In esso vengono stabilite anche le terminologie correntemente in uso.

<sup>2</sup>La teoria delle equazioni costitutive è ardua, e molto al di là dei limiti del presente corso. Per eventuali approfondimenti, si può consultare C. Truesdell e W. Noll, *Non-linear Field Theories of Mechanics*, Springer, Terza Edizione (2004) particolarmente la sezione 26, pagg.56–58

**principio di azione locale**, secondo cui la tensione in un punto non è influenzata dal moto delle particelle materiali esterne ad un intorno arbitrariamente piccolo della particella in esame.

**principio di indifferenza del riferimento materiale**, secondo cui due “osservatori” devono poter determinare la stessa tensione, indipendentemente dal riferimento in cui si pongono.

Un legame costitutivo che obbedisce a questi tre principi fornisce risultati logici, ma è ancora troppo generico per poter definire univocamente un materiale. Introducendo ulteriori ipotesi si possono identificare i comportamenti viscosi, plastici, elasto-plastici, elastici, elastici anisotropi, elastici ortotropi, elastici isotropi etc.

## 16.2 La legge di Hooke e la risposta elastica

Data la gran varietà di materiali esistenti in natura, ed attualmente anche fabbricati industrialmente, una equazione costitutiva che possa riprodurre le differenti risposte fornite dai differenti materiali è una utopia. In questo campo, per ottenere buoni risultati è giocoforza far ricorso ad esperimenti, e limitare l’indagine a singoli materiali.

D’altro canto, le sperimentazioni di laboratorio, attraverso prove a trazione ed a taglio, dimostrano che — almeno per bassi valori delle sollecitazioni — tutti i più comuni materiali da costruzione esibiscono un iniziale *comportamento elastico*, cui ora ci si dedicherà in dettaglio.

E di origine sperimentale sono le prime ipotesi qualitative sul comportamento dei materiali: Isaac Beeckman, nel 1630, in una lettera a padre Mersenne fa osservare come, appendendo un peso ad una molla, più lunga è la molla, e più si abbassa il peso. Successivamente, William Petty, nel 1674, pubblicò la memoria *The Discourse made before the Royal Society concerning the Use of Duplicate Proportion, together with a New Hypothesis of Springing or Elastic Motion* in cui il comportamento elastico del materiale viene spiegato con un complicato sistema di atomi, cui si attribuisce non solo proprietà polari, ma anche caratteristiche sessuali, giustificando tale assunto in base al versetto 1 : 27 della Genesi: *e Dio li creò maschio e femmina*, ed estendendo tale versetto non solo all’umanità, ma anche agli atomi.

A parte queste curiosità — tratte dal testo di E. Benvenuto *An Introduction to the History of Structural Mechanics* Vol.I, pag 263 — la prima pietra della moderna teoria dell’elasticità fu posta da Robert Hooke, nel suo trattato *Lectures de potentia restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies*, pubblicato nel 1678. In esso Hooke dichiara di aver scoperto la sua teoria delle molle ben diciotto anni prima, ma di averla tenuta segreta per motivi di priorità scientifica:

Circa due anni orsono publicai questa Teoria in un anagramma alla fine del mio libro sulla descrizione degli elioscopi, ossia *ceiinossttuu*,

ossia *ut tensio sic vis* (la Potenza in ogni molla sta nella stessa proporzione con la (es)Tensione).

Con Hooke, quindi, si hanno i primi risultati quantitativi, mirabilmente illustrati con una serie di impeccabili esperimenti condotti sull'apparato riprodotto in Figura 16.1:

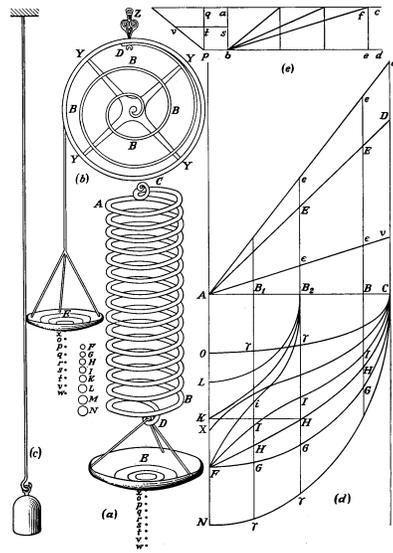


Figura 16.1: L'apparato sperimentale di Robert Hooke

Si prenda una molla metallica di 20, 30 o 40 piedi, la si appenda verticalmente ad un chiodo, ed all'altra estremità si ponga una scodella per poggiarvi i pesi. Poi con un compasso si misuri la distanza tra il fondo della scodella ed il suolo sottostante, poi si pongano i pesi nella scodella e si misuri l'allungarsi della molla, registrandolo ogni volta. Paragonando i diversi allungamenti della molla, si vedrà che essi saranno sempre proporzionali ai pesi che li hanno causati<sup>3</sup>

Hooke descrive anche esperimenti con molle elicoidali, molle di orologio a spirale, e pezzi di legno in flessione, traendo le seguenti conclusioni:

<sup>3</sup>Take a wire string [Fig. 16.1] of 20, or 30, or 40 ft long, and fasten the upper part thereof to a nail, and to the other end fasten a Scale to receive the weights: Then with a pair of Compasses take the distance of the bottom of the scale from the ground or floor underneath, and set down the said distance, then put in weights into the said scale and measure the several stretchings of the said string, and set them down. Then compare the several stretchings of the said string, and you will find that they will always bear the same proportions one to the other that the weights do that made them.

E' evidente che la Regola, o Legge di Natura in ogni corpo elastico è, che la forza necessaria a riportarlo alla sua posizione naturale è sempre proporzionale alla distanza che esso ha percorso, sia ciò accaduto per rarefazione, o mutua separazione delle sue parti, o per condensazione, ossia per ammassamento delle sue parti. Nè questo è osservabile solo in questi corpi, ma in qualsiasi altro corpo elastico, sia esso di metallo, legno, argilla, capelli, corni, seta, vetro, ed altri<sup>4</sup>

Nella sua forma generalizzata, invece, la legge di Hooke fu enunciata da Navier il 14 maggio 1821, in una riunione della Paris Academy, e poi pubblicata nel 1827. Infine, essa fu ripresa ed ampliata da Cauchy in due memorie del 1822 e del 1828, e sistemata da Poisson nel 1829.

La traduzione moderna degli esperimenti di Hooke presuppone quindi una proporzionalità lineare tra la forza applicata alla molla, e l'allungamento della molla stessa. Più in generale, si consideri una barra di metallo, di lunghezza iniziale  $l_0$  e sezione circolare di diametro iniziale  $d_0$  ed area  $A_0$ , e la si sottoponga a due forze di trazione, uguali e contrarie, applicate agli estremi. All'aumentare dell'intensità della forza  $F$ , la barra si allungherà, la sua lunghezza diverrà  $l$ , e si potrà riportare in un diagramma l'andamento dell'allungamento percentuale  $\epsilon = (l - l_0) / l_0$  in funzione della tensione assiale  $\sigma = F / A_0$ . Il risultato avrà un aspetto simile a quello riportato in Figura 16.2, confermando che — in un certo intervallo di valori della forza  $F$  — la relazione tra tensione  $\sigma$  e deformazione  $\epsilon$  è una relazione di proporzionalità lineare, mentre al crescere della forza applicata il comportamento del materiale diviene più complesso, ed esula dai nostri interessi.

La generalizzazione degli esperimenti di Hooke, condotti in regime monodimensionale, ai casi in cui sono presenti più tensioni contemporaneamente, porta ad ipotizzare una natura lineare della funzione  $f$  (cfr. eqn. 16.3), per cui si

<sup>4</sup>It is very evident that the Rule or Law of Nature in every springing body is, that the force or power thereof to restore itself to its natural position is always proportionate to the distance or space it is removed therefrom, whether it be by rarefaction, or the separation of its parts the one from the other, or by a Condensation, or crowding of those parts nearer together. Nor is it observable in these bodies only, but in all other springy bodies whatsoever, whether metal, wood, stones, baked earth, hair, horns, silk, bones, sinews, glass, and the like. Respect being had to the particular figures of the bodies bended, and the advantageous or disadvantageous ways of bending them. From this principle it will be easy to calculate the several strength of Bows . . . as also of the Balistae or Catapultae used by the Ancients. . .

It will be easy to calculate the proportionate strength of the spring of a watch [. . .] From the same also it will be easy to give the reason of the Isochrone motion of a Spring or extended string, and of the uniform sound produced by those whose vibrations are quick enough to produce an audible sound. From this appears the reason why a spring applied to the balance of a watch doth make the vibrations thereof equal, whether they be greater or smaller. . . From this it will be easy to make a Philosophical Scale to examine the weight of any body without putting in weights . . . This Scale I contrived in order to examine the gravitation of bodies towards the Center of the Earth, viz, to examine whether bodies at a further distance from the center of the earth did not loose somewhat of their power or tendency towards it

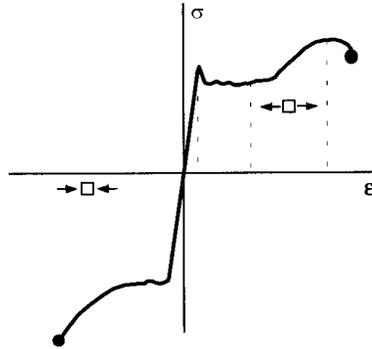


Figura 16.2: Il risultato di un tipico esperimento in regime monoassiale di tensione

giunge alla *legge di Hooke generalizzata*:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1123} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2223} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3323} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1223} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1312} & c_{1313} & c_{1323} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312} & c_{2313} & c_{2323} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{13} \\ 2e_{23} \end{pmatrix} \quad (16.4)$$

o, matricialmente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{e} \quad (16.5)$$

avendo introdotto la *matrice C di elasticità*. Indicialmente si ha:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}e_{hk} \quad (16.6)$$

Ipotizzando, come usuale, che la matrice  $\mathbf{C}$  sia invertibile, si giunge facilmente alla *legge di Hooke inversa*, in grado di esprimere le deformazioni in termini di tensioni:

$$\mathbf{e} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} \quad (16.7)$$

### 16.3 L'ipotesi molecolare

Mentre la deduzione della (16.4) può considerarsi una generalizzazione dei classici esperimenti di Hooke, sorge ora il problema di caratterizzare le 36 costanti elastiche della matrice  $\mathbf{C}$ , in modo tale che le eventuali sperimentazioni possano fornire soddisfacenti conferme sull'effettivo comportamento del materiale.

In particolare, sorgono le seguenti domande:

— quante costanti possono fissarsi con ragionamenti validi per qualunque corpo, ossia in base a sole considerazioni fisico-matematiche, che non coinvolgano la natura del materiale?

— esistono in natura, ed ancor più in tecnica, una varietà di materiali con direzioni privilegiate, quali ad esempio le fibre dei tronchi di legname, o le fibre di carbonio. Come si riflette la presenza di queste direzioni privilegiate sulla matrice  $\mathbf{C}$ ?

— esistono in natura alcuni materiali per cui non esiste una direzione privilegiata, ed in questa categoria rientrano alcuni materiali di uso comune in edilizia, come ad esempio l'acciaio. Quante costanti sono necessarie per definire il comportamento di un simile materiale? E qual è l'aspetto della matrice  $\mathbf{C}$ , in questa ipotesi?

Come già accennato nella prima lezione, l'ipotesi fisica originariamente accettata era una generalizzazione dell'ipotesi di Newton sulle forze di attrazione–repulsione. Secondo questa teoria, Cauchy dimostrò che, in generale, solo 15 costanti sono necessarie per definire un materiale, ed inoltre, che basta una singola costante per definire un materiale senza direzioni privilegiate.

Un seguito di esperimenti ha dimostrato che questa ipotesi uni–costante non permette una buona rispondenza con la realtà, e questo ha condotto al graduale abbandono della teoria molecolare, a favore della teoria energetica<sup>5</sup>.

## 16.4 L'ipotesi di George Green

La teoria energetica di George Green, ora universalmente accettata ed utilizzata, si basa su di una ipotesi astratta dalle profonde conseguenze matematiche, e conduce a conclusioni teoriche che si sono rivelate essere in buon accordo con i dati sperimentali.

Basandosi sul principio di conservazione dell'energia, l'ipotesi di base è stata così espressa dallo stesso Green<sup>6</sup>:

Qualunque sia il modo in cui le particelle elementari di un corpo agiscono le une sulle altre, se tutte le forze interne sono moltiplicate per gli spostamenti elementari nelle rispettive direzioni, la somma globale per ciascuna porzione del corpo sarà sempre il differenziale esatto di qualche funzione. Ma una volta che questa funzione è nota, possiamo immediatamente applicare i metodi generali forniti dalla *Mécanique Analytique*, e che sembrano particolarmente ben applicabili a problemi riguardanti il moto di sistemi composti da un numero enorme di particelle mutuamente interagenti. Uno dei vantaggi di questo metodo, di grande importanza, è che conduce con meri passaggi matematici a tutte le equazioni e condizioni che

<sup>5</sup>Per chi desideri maggiori dettagli è consigliata la lettura di *Sui principi di filosofia naturale che orientarono la ricerca di Saint-Venant*, di E. Benvenuto e A. Becchi, riportata nel sito <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk>, nella sezione Ricerca

<sup>6</sup>L'ipotesi si trova formulata in *On the laws of reflexion and refraction of light*, Trans. Cambridge Philosophical Society, 1838, ed è riportata in *Mathematical papers of the late George Greene*, p. 245, London 1871. Una copia può essere letta nel sito <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk>, nella sezione Ricerca

sono necessarie e sufficienti per la soluzione completa di qualsiasi problema cui possa essere applicato

L'ipotesi di Green, tradotta in linguaggio più moderno, significa che il lavoro delle tensioni (le *forze interne*), compiuto per unità di volume, in corrispondenza di una variazione infinitesima di deformazione (*gli spostamenti elementari*), è il differenziale esatto di una funzione.

Il calcolo di questa funzione è abbastanza agevole se le forze sono applicate molto lentamente, in modo che il processo di deformazione sia isoterma, oppure molto velocemente, in modo che il processo di deformazione sia adiabatico. Il primo tipo di processo di carico è fondamentale in regime statico, il secondo in regime dinamico.



Figura 16.3: Il mulino di famiglia di George Green

In ambedue i casi, infatti, le leggi della termodinamica assicurano che il processo di deformazione vedrà tutto il lavoro delle forze esterne tramutarsi in energia interna.

Si consideri allora un corpo  $B$ , soggetto alle forze di massa  $\mathbf{X}$  ed alle forze superficiali  $\mathbf{p}$ , e siano  $\boldsymbol{\sigma}$  ed  $\mathbf{e}$  i vettori delle tensioni e delle deformazioni. Per effetto di una variazione di spostamento  $d\mathbf{u}$ , le forze esterne compieranno il lavoro:

$$dW = \int_B X_i du_i dV + \int_{\partial B} p_i du_i ds \quad (16.8)$$

Utilizzando il teorema di Cauchy–Poisson si ha:

$$dW = \int_B X_i du_i dV + \int_{\partial B} \sigma_{ij} n_j du_i ds \quad (16.9)$$

ed applicando il teorema della divergenza si ha:

$$dW = \int_B X_i du_i dV + \int_B \frac{\partial(\sigma_{ij} du_i)}{\partial x_j} dV \quad (16.10)$$

Svolgendo la derivata del prodotto si ottiene:

$$dW = \int_B X_i du_i dV + \int_B \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} du_i dV + \int_B \sigma_{ij} \frac{\partial du_i}{\partial x_j} dV \quad (16.11)$$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio garantiscono che il lavoro delle forze esterne si riduce a:

$$dW = \int_B \sigma_{ij} \frac{\partial du_i}{\partial x_j} dV \quad (16.12)$$

E' possibile infine scrivere:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial du_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} d \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \sigma_{ij} (de_{ij} + d\omega_{ij}) = \sigma_{ij} de_{ij} \quad (16.13)$$

in quanto  $\sigma_{ij} d\omega_{ij} = 0$ , per il carattere di simmetria delle tensioni e quello di antisimmetria delle  $\omega_{ij}$ . In definitiva, quindi, un incremento di spostamento  $\mathbf{du}$  causa un incremento di deformazioni  $\mathbf{de}$ , ed il lavoro delle forze esterne è esprimibile in termini di tensioni come:

$$dW = \int_B \sigma_{ij} de_{ij} dV \quad (16.14)$$

L'ipotesi di George Green implica l'esistenza di un *potenziale elastico*  $\phi$ , tale da poter scrivere:

$$dW = \int_B d\phi dV = \int_B \sigma_{ij} de_{ij} dV \quad (16.15)$$

e  $d\phi$  deve essere un differenziale esatto. Da quest'ultima relazione si può dedurre:

$$d\phi = \sigma_{11} de_{11} + \sigma_{22} de_{22} + \sigma_{33} de_{33} + 2\sigma_{12} de_{12} + 2\sigma_{13} de_{13} + 2\sigma_{23} de_{23} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{de} \quad (16.16)$$

e affinché  $d\phi$  sia un differenziale esatto, dovrà essere:

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{11}} de_{11} + \frac{\partial \phi}{\partial e_{22}} de_{22} + \frac{\partial \phi}{\partial e_{33}} de_{33} + \frac{\partial \phi}{\partial e_{12}} de_{12} + \frac{\partial \phi}{\partial e_{13}} de_{13} + \frac{\partial \phi}{\partial e_{23}} de_{23} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{ij}} de_{ij} \end{aligned} \quad (16.17)$$

e quindi, dal confronto tra queste due espressioni, si ha:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{11}} \\
 \sigma_{22} &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{22}} \\
 \sigma_{33} &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{33}} \\
 \sigma_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial e_{12}} \\
 \sigma_{13} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial e_{13}} \\
 \sigma_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial e_{23}}
 \end{aligned} \tag{16.18}$$

**Definizione 5.** *Un materiale per cui venga accettata l'ipotesi di Green si chiama materiale iperelastico.*

## 16.5 Il materiale linearmente elastico

L'esistenza di un potenziale elastico non implica necessariamente una relazione lineare tra tensioni e deformazioni. Se però si suppone che un corpo dotato di potenziale elastico è anche linearmente elastico, allora può dimostrarsi il:

**Teorema 6.** *La matrice di elasticità:*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1123} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2223} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3323} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1223} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1312} & c_{1313} & c_{1323} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312} & c_{2313} & c_{2323} \end{pmatrix} \tag{16.19}$$

è simmetrica, e quindi le costanti elastiche divengono 21.

*Dimostrazione.* Ed infatti, in ipotesi di elasticità lineare si ha:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= c_{1111}e_{11} + c_{1122}e_{22} + c_{1133}e_{33} + 2c_{1112}e_{12} + 2c_{1113}e_{13} + 2c_{1123}e_{23} \\
 \sigma_{22} &= c_{2211}e_{11} + c_{2222}e_{22} + c_{2233}e_{33} + 2c_{2212}e_{12} + 2c_{2213}e_{13} + 2c_{2223}e_{23}
 \end{aligned} \tag{16.20}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial e_{22}} &= c_{1122} \\
 \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial e_{11}} &= c_{2211}
 \end{aligned} \tag{16.21}$$

D'altro canto, si è anche ipotizzata l'esistenza di un potenziale elastico, per cui:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{11}} \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{22}}\end{aligned}\tag{16.22}$$

da cui subito, per il teorema di Schwartz:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial e_{22}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial e_{11} \partial e_{22}} = \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial e_{11}}\tag{16.23}$$

ed infine:

$$c_{1122} = c_{2211}\tag{16.24}$$

Del tutto analogamente, si ottiene:

$$c_{ijhk} = c_{hki j}\tag{16.25}$$

□

Nota - Questa è la prima discrepanza tra la teoria molecolare, che prevede al più 15 diverse costanti elastiche indipendenti, e la teoria energetica, che ne prevede 21. Sembra che, sperimentalmente, sia possibile dimostrare che la cosiddetta *pietra blu* possiede 21 costanti elastiche distinte.

## 16.6 Il potenziale elastico e la linearità elastica

Si vuol ora dimostrare che si può giungere alla legge di Hooke anche esprimendo il potenziale elastico in termini di deformazioni, e poi limitandosi alla parte lineare del risultante sviluppo in serie.

Infatti, utilizzando uno sviluppo in serie di potenze, si può scrivere il potenziale come somma di un termine costante, un termine lineare nelle deformazioni, un termine quadratico nelle deformazioni, etc:

$$\phi(\mathbf{e}) = \phi_0 + \phi_1(\mathbf{e}) + \phi_2(\mathbf{e}) + \phi_3(\mathbf{e}) + \dots\tag{16.26}$$

La parte costante  $\phi_0$  può trascurarsi, perchè, come usuale, ci si interessa di variazioni di energia, e non di valori assoluti.

La parte lineare  $\phi_1$ , se presente, darebbe luogo, tramite le (16.31), a termini costanti nelle tensioni, in palese contraddizione con la supposta esistenza di uno stato naturale, caratterizzato da assenza di tensioni e deformazioni. Infine, termini superiori al quadratico non porterebbero più ad una relazione lineare tensioni-deformazioni. Ne segue che il potenziale elastico, in ipotesi di validità della legge di Hooke, dovrà essere una forma quadratica nelle deformazioni:

$$\phi = \frac{1}{2} c_{ijhk} e_{ij} e_{hk}\tag{16.27}$$



Figura 16.4: Carlo Alberto Castigliano

o ancora, matricialmente:

$$\phi = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e} \quad (16.28)$$

Utilizzando la legge di Hooke inversa si hanno due espressioni alternative del potenziale. La prima esprime il potenziale come forma bilineare nelle tensioni e nelle deformazioni:

$$\phi = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} \quad (16.29)$$

La seconda invece esprime il potenziale come forma quadratica delle tensioni:

$$\phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} a_{ijhk} \sigma_{ij} \sigma_{hk} \quad (16.30)$$

Dalla (16.30) si ottengono le *relazioni di Castigliano*:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{11}} \\ e_{22} &= \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{22}} \\ e_{33} &= \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{33}} \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{12}} \\ e_{13} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{13}} \\ e_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{23}} \end{aligned} \quad (16.31)$$

duali delle (16.31), ma in realtà valide in un ambito più ristretto, quello dei materiali linearmente elastici.

## Capitolo 17

# Il solido anisotropo

La formulazione più generale della legge di Hooke passa attraverso l'introduzione di 81 costanti:

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk} e_{hk} \quad (17.1)$$

il cui carattere di tensorialità è garantito dalla regola del quoziente. Si ha quindi un tensore del quarto ordine, detto *tensore di elasticità*, il cui aspetto dipende dal tipo di materiale che si sta esaminando. Alcune restrizioni sono comunque di carattere generale:

— la simmetria del tensore delle tensioni implica che:

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk} e_{hk} = \sigma_{ji} = c_{jihk} e_{hk} \quad (17.2)$$

e quindi esiste simmetria rispetto ai primi due indici:

$$c_{ijhk} = c_{jihk} \quad (17.3)$$

— la simmetria del tensore delle deformazioni implica che esiste simmetria anche rispetto agli altri due indici:

$$c_{ijhk} = c_{ijkh} \quad (17.4)$$

Ed infatti, si consideri uno stato deformativo in cui la sola componente non nulla sia  $e_{12} = e_{21}$ . Per esso, la legge di Hooke fornisce lo stato tensionale:

$$\sigma_{ij} = c_{ij12} e_{12} + c_{ij21} e_{21} = (c_{ij12} + c_{ij21}) e_{12} = 2\bar{c}_{ij12} e_{12} \quad (17.5)$$

avendo definito la nuova costante:

$$\bar{c}_{ij12} = \frac{1}{2} (c_{ij12} + c_{ij21}) \quad (17.6)$$

simmetrica rispetto al terzo e quarto indice. Le due proprietà (17.3) e (17.4) si dicono *proprietà di simmetria minore*, e riducono a 36 il numero delle costanti

elastiche. Infine, si è dimostrato che in ipotesi di esistenza di un potenziale elastico vale anche la proprietà di simmetria maggiore:

$$c_{ijhk} = c_{hki j} \quad (17.7)$$

e quindi le costanti elastiche si riducono a 21. Sfruttando queste tre proprietà di simmetria, in definitiva, la legge di Hooke si scriverà:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1123} \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2223} \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3323} \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1223} \\ c_{1113} & c_{2213} & c_{3313} & c_{1213} & c_{1313} & c_{1323} \\ c_{1123} & c_{2223} & c_{3323} & c_{1223} & c_{1323} & c_{2323} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{13} \\ 2e_{23} \end{pmatrix} \quad (17.8)$$

Infine, si ricordi che il carattere di tensorialità delle costanti elastiche implica che esse varino, al variare del sistema di riferimento, secondo la relazione:

$$c'_{ijkl} = l_{im}l_{jn}l_{kp}l_{lq}c_{mnpq} \quad i, j, k, l, m, n, p, q = 1, 2, 3 \quad (17.9)$$

dove  $\mathbf{L}$  è la matrice che contiene, in colonna, i coseni direttori dei nuovi assi rispetto ai vecchi assi.

## 17.1 I materiali monoclini

Si consideri un materiale che abbia simmetria di comportamento rispetto ad un piano  $\Pi$ , ossia un materiale *monoclinico*. Si assuma che  $\Pi$  sia il piano  $OX_1 - OX_2$ , e si completi la terna di riferimento con un terzo asse  $OX_3$ , ortogonale a  $\Pi$ : il tipo di simmetria che si sta studiando implica che le costanti elastiche non mutano al variare del sistema di riferimento da  $(O, X_1, X_2, X_3)$  a  $(O, X_1, X_2, X'_3)$ , come illustrato in Figura 17.1.

La matrice  $\mathbf{L}$  dei coseni direttori dei vecchi assi rispetto ai nuovi è fornita da:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17.10)$$

Applicando la legge di variazione (17.9) si ottiene:

$$c'_{1111} = l_{1m}l_{1n}l_{1p}l_{1q}c_{mnpq} = c_{1111} \quad (17.11)$$

e risultati simili si hanno per tutti i coefficienti elastici in cui non compare il pedice 3, oppure per tutti i coefficienti elastici in cui il pedice 3 compare un numero pari di volte (due o quattro volte). Se invece il pedice tre compare un numero dispari di volte, (una volta o tre volte), allora si ha, ad esempio:

$$c'_{1113} = l_{1m}l_{1n}l_{1p}l_{3q}c_{mnpq} = -c_{1113} \quad (17.12)$$

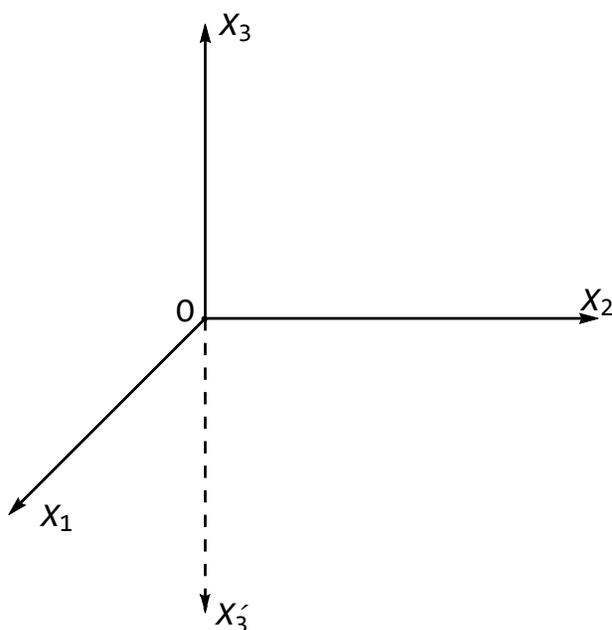


Figura 17.1: La simmetria esibita dai materiali monoclini: nulla varia ribaltando l'asse verticale

Poichè, per la richiesta simmetria, dovrà anche essere  $c'_{1113} = c_{1113}$ , ne segue che  $c_{1113}$  deve essere nullo, così come nulli sono tutti i coefficienti con un numero dispari di pedice 3. In definitiva, la matrice delle costanti elastiche per un materiale monoclini si scrive in funzione di 13 quantità, come segue:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & c_{3312} & 0 & 0 \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & c_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & c_{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1323} & c_{2323} \end{pmatrix} \quad (17.13)$$

Si noti che una rotazione degli assi di riferimento modifica l'aspetto della matrice, distruggendone l'aspetto ma preservando la simmetria e la possibilità di definire il materiale in termini di 13 costanti elastiche.

## 17.2 I materiali ortotropi

Si consideri un materiale che abbia simmetria di comportamento rispetto a due piani ortogonali tra loro, ossia un materiale *ortotropo*.

Si assuma che i piani di simmetria siano i piani coordinati  $OX_1 - OX_2$ , ed  $OX_2 - OX_3$ : il tipo di simmetria che si sta studiando implica che le costanti

elastiche non mutano al variare del sistema di riferimento da  $(O, X_1, X_2, X_3)$  a  $(O, X'_1, X_2, X'_3)$ , come illustrato in Figura 17.2.

La matrice  $\mathbf{L}$  dei coseni direttori dei vecchi assi rispetto ai nuovi è fornita da:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17.14)$$

Applicando la legge di variazione (17.9), ed utilizzando i coseni direttori (17.14) si nota che dovranno essere nulli i coefficienti elastici i cui pedici contengono una combinazione di 1 e 3 in numero dispari, giungendo quindi alla matrice delle costanti elastiche in termini di 9 quantità, come segue:

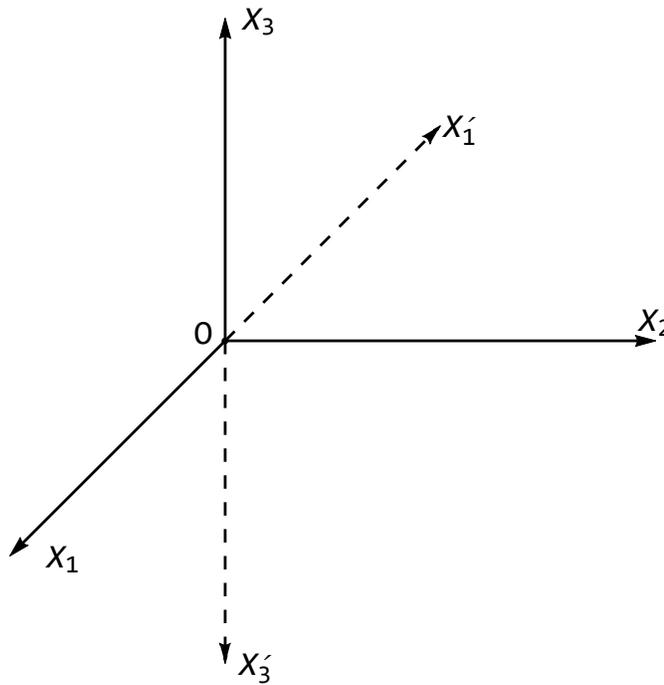


Figura 17.2: La simmetria esibita dai materiali ortotropi: nulla varia ribaltando gli assi  $X_1$  ed  $X_3$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{2323} \end{pmatrix} \quad (17.15)$$

Ovviamente, l'inversa della matrice  $\mathbf{C}$  ha lo stesso aspetto della matrice  $\mathbf{C}$ , sicchè per un materiale ortotropo l'applicazione di una tensione normale causa solo l'insorgere di deformazioni normali, e l'applicazione di una tensione tangenziale causa l'insorgere della sola corrispondenza deformazione tagliante. Questa caratteristica è tuttavia valida solo per questo particolare sistema di riferimento.

### 17.3 I materiali trasversalmente isotropi

Si consideri ora un materiale *trasversalmente isotropo*, ossia un materiale che possiede un asse di simmetria, e sia esso  $OX_3$ . La simmetria di rotazione rispetto ad esso significa quindi che i coefficienti elastici non devono mutare al ruotare degli assi  $OX_1$  ed  $OX_2$  di un arbitrario angolo  $\phi$ , come illustrato in Figura 17.3.

La matrice dei coseni direttori dei nuovi assi rispetto ai vecchi è fornita da:

$$L = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17.16)$$

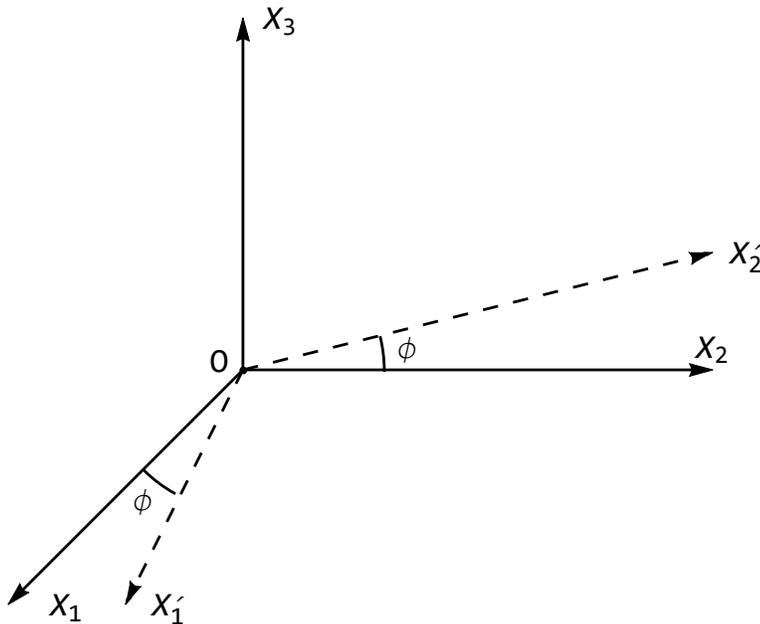


Figura 17.3: La simmetria nei materiali trasversalmente isotropi: nulla varia al seguito di una rotazione intorno all'asse  $X_3$

Per dedurre le restrizioni imposte ai coefficienti elastici da questo tipo di simmetria, si consideri che la legge di Hooke si scriverà:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{hk} \quad (17.17)$$

nel sistema di riferimento originario, e:

$$\sigma'_{pq} = c_{pqrs} e'_{rs} \quad (17.18)$$

nel sistema di riferimento ruotato. Mentre i coefficienti elastici dovranno rimanere costanti, tensioni e deformazioni si trasformano secondo le leggi di trasformazione dei tensori del secondo ordine. Sarà quindi  $\sigma'_{pq} = l_{pi} l_{qj} \sigma_{ij}$ , ed esplicitando:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= l_{1i} l_{1j} \sigma_{ij} = l_{11} l_{11} \sigma_{11} + 2l_{11} l_{12} \sigma_{12} + l_{12} l_{12} \sigma_{22} \\ &= \sigma_{11} \cos^2 \phi + 2\sigma_{12} \cos \phi \sin \phi + \sigma_{22} \sin^2 \phi \\ \sigma'_{12} &= l_{1i} l_{2j} \sigma_{ij} = l_{11} l_{21} \sigma_{11} + l_{11} l_{22} \sigma_{12} + l_{12} l_{21} \sigma_{12} + l_{12} l_{22} \sigma_{22} \\ &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \cos \phi \sin \phi + \sigma_{12} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ \sigma'_{22} &= l_{2i} l_{2j} \sigma_{ij} = l_{21} l_{21} \sigma_{11} + 2l_{21} l_{22} \sigma_{12} + l_{22} l_{22} \sigma_{22} \\ &= \sigma_{11} \sin^2 \phi - 2\sigma_{12} \cos \phi \sin \phi + \sigma_{22} \cos^2 \phi \\ \sigma'_{13} &= l_{1i} l_{3j} \sigma_{ij} = l_{11} l_{33} \sigma_{13} + l_{12} l_{33} \sigma_{23} = \sigma_{13} \cos \phi + \sigma_{23} \sin \phi \\ \sigma'_{23} &= l_{2i} l_{3j} \sigma_{ij} = l_{21} l_{33} \sigma_{13} + l_{22} l_{33} \sigma_{23} = -\sigma_{13} \sin \phi + \sigma_{23} \cos \phi \\ \sigma'_{33} &= l_{3i} l_{3j} \sigma_{ij} = l_{33} l_{33} \sigma_{33} = \sigma_{33} \end{aligned} \quad (17.19)$$

con risultati analoghi per le deformazioni. Si scriva ora *in extenso* la relazione che fornisce  $\sigma'_{11}$ :

$$\sigma'_{11} = c_{1111} e'_{11} + c_{1122} e'_{22} + c_{1133} e'_{33} + 2c_{1112} e'_{12} + 2c_{1113} e'_{13} + 2c_{1123} e'_{23} \quad (17.20)$$

e la si esprima in termini di tensioni  $\sigma_{ij}$  e deformazioni  $e_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \cos^2 \phi + 2\sigma_{12} \cos \phi \sin \phi + \sigma_{22} \sin^2 \phi = & \\ c_{1111} (e_{11} \cos^2 \phi + 2e_{12} \cos \phi \sin \phi + e_{22} \sin^2 \phi) + & \\ c_{1122} (e_{11} \sin^2 \phi - 2e_{12} \cos \phi \sin \phi + e_{22} \cos^2 \phi) + c_{1133} e_{33} + & \\ 2c_{1112} ((e_{22} - e_{11}) \cos \phi \sin \phi + e_{12} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)) + & \\ 2c_{1113} (e_{13} \cos \phi + e_{23} \sin \phi) + 2c_{1123} (-e_{13} \sin \phi + e_{23} \cos \phi) & \end{aligned} \quad (17.21)$$

D'altro canto, si ha anche:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{1111} e_{11} + c_{1122} e_{22} + c_{1133} e_{33} + 2c_{1112} e_{12} + 2c_{1113} e_{13} + 2c_{1123} e_{23} \\ \sigma_{22} &= c_{2211} e_{11} + c_{2222} e_{22} + c_{2233} e_{33} + 2c_{2212} e_{12} + 2c_{2213} e_{13} + 2c_{2223} e_{23} \\ \sigma_{12} &= c_{1211} e_{11} + c_{1222} e_{22} + c_{1233} e_{33} + 2c_{1212} e_{12} + 2c_{1213} e_{13} + 2c_{1223} e_{23} \end{aligned} \quad (17.22)$$

e quindi la (17.21) può esprimersi interamente in termini di deformazioni:

$$\begin{aligned}
 & (c_{1111}e_{11} + c_{1122}e_{22} + c_{1133}e_{33} + 2c_{1112}e_{12} + 2c_{1113}e_{13} + 2c_{1123}e_{23}) \cos^2 \phi + \\
 & 2(c_{1211}e_{11} + c_{1222}e_{22} + c_{1233}e_{33} + 2c_{1212}e_{12} + 2c_{1213}e_{13} + 2c_{1223}e_{23}) \cos \phi \sin \phi + \\
 & (c_{2211}e_{11} + c_{2222}e_{22} + c_{2233}e_{33} + 2c_{2212}e_{12} + 2c_{2213}e_{13} + 2c_{2223}e_{23}) \sin^2 \phi = \\
 & c_{1111} (e_{11} \cos^2 \phi + 2e_{12} \cos \phi \sin \phi + e_{22} \sin^2 \phi) + \\
 & c_{1122} (e_{11} \sin^2 \phi - 2e_{12} \cos \phi \sin \phi + e_{22} \cos^2 \phi) + \\
 & c_{1133}e_{33} + 2c_{1112} ((e_{22} - e_{11}) \cos \phi \sin \phi + e_{12} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)) + \\
 & 2c_{1113} (e_{13} \cos \phi + e_{23} \sin \phi) + 2c_{1123} (-e_{13} \sin \phi + e_{23} \cos \phi)
 \end{aligned} \tag{17.23}$$

Uguagliando a zero il coefficiente di  $e_{11}$  si ottiene:

$$c_{1211} = 0 \tag{17.24}$$

Uguagliando a zero il coefficiente di  $e_{22}$  si ottiene:

$$2c_{1222} \cos \phi + c_{2222} \sin \phi = c_{1111} \sin \phi + 2c_{1112} \cos \phi \tag{17.25}$$

e quindi si può dedurre:

$$\begin{aligned}
 c_{1222} &= c_{1112} \\
 c_{2222} &= c_{1111}
 \end{aligned} \tag{17.26}$$

Uguagliando a zero il coefficiente di  $e_{33}$  si ottiene:

$$c_{1133} \cos^2 \phi + 2c_{1233} \cos \phi \sin \phi + c_{2233} \sin^2 \phi = c_{1133} \tag{17.27}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
 c_{2233} &= c_{1133} \\
 c_{1233} &= 0
 \end{aligned} \tag{17.28}$$

Uguagliando a zero il coefficiente di  $e_{12}$  si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & 4c_{1212} \cos \phi \sin \phi + 2c_{2212} \sin^2 \phi = \\
 & 2c_{1111} 2 \cos \phi \sin \phi - 2c_{1122} \cos \phi \sin \phi - 2c_{1112} \sin^2 \phi
 \end{aligned} \tag{17.29}$$

da cui è possibile dedurre:

$$\begin{aligned}
 c_{1212} &= \frac{1}{2} (c_{1111} - c_{1122}) \\
 c_{2212} &= -c_{1112}
 \end{aligned} \tag{17.30}$$

e dal confronto con la prima delle (33) si ha anche:

$$c_{2212} = c_{1112} = 0 \tag{17.31}$$

Uguagliando a zero il coefficiente di  $e_{13}$  si ottiene:

$$c_{1113} \cos^2 \phi + 2c_{1213} \cos \phi \sin \phi + c_{2213} \sin^2 \phi = c_{1113} \cos \phi - c_{1123} \sin \phi \quad (17.32)$$

e quindi si può dedurre:

$$\begin{aligned} c_{1113} &= 0 \\ c_{1213} &= 0 \\ c_{2213} &= 0 \end{aligned} \quad (17.33)$$

Infine, uguagliando a zero il coefficiente di  $e_{23}$  si ottiene:

$$c_{1123} \cos^2 \phi + 2c_{1223} \cos \phi \sin \phi + c_{2223} \sin^2 \phi = c_{1113} \sin \phi + c_{1123} \cos \phi \quad (17.34)$$

da cui:

$$\begin{aligned} c_{1123} &= 0 \\ c_{1223} &= 0 \\ c_{2223} &= 0 \end{aligned} \quad (17.35)$$

La matrice delle costanti elastiche si è così semplificata:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{1133} & c_{3333} & 0 & c_{3313} & c_{3323} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3313} & 0 & c_{1313} & c_{1323} \\ 0 & 0 & c_{3323} & 0 & c_{1323} & c_{2323} \end{pmatrix} \quad (17.36)$$

Si scriva ora la relazione che lega la  $\sigma'_{33}$  alla  $\sigma_{33}$ :

$$\begin{aligned} c_{3311}e'_{11} + c_{3322}e'_{22} + c_{3333}e'_{33} + 2c_{3312}e'_{12} + 2c_{3313}e'_{13} + 2c_{3323}e'_{23} = \\ c_{3311}e_{11} + c_{3322}e_{22} + c_{3333}e_{33} + 2c_{3312}e_{12} + 2c_{3313}e_{13} + 2c_{3323}e_{23} \end{aligned} \quad (17.37)$$

ossia:

$$\begin{aligned} c_{3311} (e_{11} \cos^2 \phi + 2e_{12} \cos \phi \sin \phi + e_{22} \sin^2 \phi) + \\ c_{3322} (e_{11} \sin^2 \phi - 2e_{12} \cos \phi \sin \phi + e_{22} \cos^2 \phi) + c_{3333}e_{33} + \\ 2c_{3312} ((e_{22} - e_{11}) \cos \phi \sin \phi + e_{12} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)) + \\ 2c_{3313} (e_{13} \cos \phi + e_{23} \sin \phi) + \\ 2c_{3323} (-e_{13} \sin \phi + e_{23} \cos \phi) = \\ c_{3311}e_{11} + c_{3322}e_{22} + c_{3333}e_{33} + 2c_{3312}e_{12} + 2c_{3313}e_{13} + 2c_{3323}e_{23} \end{aligned} \quad (17.38)$$

Annullando i coefficienti di  $e_{13}$  si giunge a scrivere:

$$c_{3313} \cos \phi - c_{3323} \sin \phi = c_{3313} \quad (17.39)$$

da cui:

$$\begin{aligned} c_{3313} &= 0 \\ c_{3323} &= 0 \end{aligned} \quad (17.40)$$

e la matrice delle costanti elastiche si è così ulteriormente semplificata:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{1133} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & c_{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1323} & c_{2323} \end{pmatrix} \quad (17.41)$$

Scrivendo infine la relazione che lega  $\sigma'_{13}$  a  $\sigma_{13}$  si giunge alla forma finale della matrice di elasticità per materiali trasversalmente isotropi. Si ha infatti, da un lato:

$$\begin{aligned} c_{1311}e'_{11} + c_{1322}e'_{22} + c_{1333}e'_{33} + 2c_{1312}e'_{12} + 2c_{1313}e'_{13} + 2c_{1323}e'_{23} = \\ (c_{1311}e_{11} + c_{1322}e_{22} + c_{1333}e_{33} + 2c_{1312}e_{12} + 2c_{1313}e_{13} + 2c_{1323}e_{23}) \cos \phi + \\ (c_{2311}e_{11} + c_{2322}e_{22} + c_{2333}e_{33} + 2c_{2312}e_{12} + 2c_{2313}e_{13} + 2c_{2323}e_{23}) \sin \phi \end{aligned} \quad (17.42)$$

ed esprimendo le  $e'_{ij}$  in termini di  $e_{ij}$ :

$$\begin{aligned} c_{1311} (e_{11} \cos^2 \phi + 2e_{12} \cos \phi \sin \phi + e_{22} \sin^2 \phi) + \\ c_{1322} (e_{11} \sin^2 \phi - 2e_{12} \cos \phi \sin \phi + e_{22} \cos^2 \phi) + c_{1333}e_{33} + \\ 2c_{1312} ((e_{22} - e_{11}) \cos \phi \sin \phi + e_{12} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)) + \\ 2c_{1313} (e_{13} \cos \phi + e_{23} \sin \phi) + 2c_{1323} (-e_{13} \sin \phi + e_{23} \cos \phi) \\ = (c_{1311}e_{11} + c_{1322}e_{22} + c_{1333}e_{33} + 2c_{1312}e_{12} + 2c_{1313}e_{13} + 2c_{1323}e_{23}) \cos \phi + \\ (c_{2311}e_{11} + c_{2322}e_{22} + c_{2333}e_{33} + 2c_{2312}e_{12} + 2c_{2313}e_{13} + 2c_{2323}e_{23}) \sin \phi \end{aligned} \quad (17.43)$$

Annullando il coefficiente di  $e_{13}$  si ottiene:

$$2c_{1313} \cos \phi - 2c_{1323} \sin \phi = 2c_{1313} \cos \phi + 2c_{2313} \sin \phi \quad (17.44)$$

e quindi:

$$c_{1323} = 0 \quad (17.45)$$

mentre l'annullarsi del coefficiente di  $e_{23}$  implica:

$$c_{1313} \sin \phi + c_{1323} \cos \phi = c_{1323} \cos \phi + c_{2323} \sin \phi \quad (17.46)$$

ossia:

$$c_{1313} = c_{2323} \quad (17.47)$$

Si è giunti così alla forma finale della matrice di elasticità per *materiali trasversalmente isotropi*:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{1133} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} \end{pmatrix} \quad (17.48)$$

Come si vede, il materiale trasversalmente isotropo può definirsi attraverso l'introduzione di 5 costanti elastiche indipendenti.

## 17.4 I materiali isotropi

Si è così giunti al caso più stringente di simmetria, quella posseduta dai materiali indifferenti alla scelta del riferimento. Equivalentemente, si considerano ora i materiali che godono della proprietà di simmetria rotazionale rispetto a due assi mutuamente ortogonali, i cosiddetti *materiali isotropi*. Per essi, un ragionamento identico a quello svolto per il materiale trasversalmente isotropo porta a concludere che dovrà essere:

$$\begin{aligned} c_{1313} &= \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) \\ c_{3333} &= c_{1111} \\ c_{1133} &= c_{1122} \end{aligned} \quad (17.49)$$

e quindi il solido isotropo è definito da due costanti elastiche, e dalla matrice di elasticità:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1111} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1122} & c_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{1111} - c_{1122}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{1111} - c_{1122}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{1111} - c_{1122}}{2} \end{pmatrix} \quad (17.50)$$

E' infine usuale, seguendo Lamè, definire le due costanti elastiche:

$$\begin{aligned} \lambda &= c_{1122} \\ \mu &= \frac{1}{2}(c_{1111} - c_{1122}) \end{aligned} \quad (17.51)$$

da cui subito:

$$c_{1111} = \lambda + 2\mu \quad (17.52)$$

e la matrice di elasticità assume la forma canonica:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (17.53)$$

## 17.5 Le costanti ingegneristiche per i materiali anisotropi

Volendo dedurre i valori delle costanti elastiche, ed assegnare loro un chiaro significato fisico, è possibile assoggettare un provino di materiale a due insiemi di test, in cui viene indotto uno stato tensionale monoassiale di tensione, o uno stato di taglio puro, rispettivamente. Nel primo caso lo stato tensionale sarà del tipo:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17.54)$$

mentre nel secondo insieme di test si avranno stati tensionali del tipo:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17.55)$$

Per materiali anisotropi, in ogni caso sorgeranno sei componenti di deformazione. Per lo stato tensionale (17.54) si potrà misurare la deformazione assiale  $e_{11}$ , direttamente proporzionale alla tensione  $\sigma_{11}$ :

$$e_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} \quad (17.56)$$

Si è introdotto in tal modo il primo modulo di Young  $E_{11}$ . Le altre due deformazioni normali saranno esprimibili come:

$$\begin{aligned} e_{12} &= -\nu_{12}e_{11} = -\nu_{12}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}} \\ e_{13} &= -\nu_{13}e_{11} = -\nu_{13}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}} \end{aligned} \quad (17.57)$$

introducendo i due coefficienti di Poisson  $\nu_{12}$  e  $\nu_{13}$ . Infine, sorgeranno le tre deformazioni tangenziali, che potranno misurarsi attraverso i rispettivi angoli taglienti:

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \eta_{11,12}e_{11} = \eta_{11,12}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}} \\ \gamma_{13} &= \eta_{11,13}e_{11} = \eta_{11,13}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}} \\ \gamma_{23} &= \eta_{11,23}e_{11} = \eta_{11,23}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}} \end{aligned} \quad (17.58)$$

Si sono introdotti i *coefficienti di influenza mutua del secondo tipo*  $\eta_{11,12}$ ,  $\eta_{11,13}$  ed  $\eta_{11,23}$ . Essi sono definiti da quattro indici, la prima coppia si riferisce alla tensione applicata, la seconda coppia all'angolo tagliante che si sta misurando.

Ripetendo il test per gli altri due stati monoassiali di tensione lungo  $X_2$  ed  $X_3$ , si possono misurare altri due moduli di Young  $E_{22}$  ed  $E_{33}$ , altri quattro coefficienti di Poisson  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{23}$  e  $\nu_{31}$ ,  $\nu_{32}$ , ed altri sei coefficienti di influenza mutua del secondo tipo  $\eta_{22,12}$ ,  $\eta_{22,13}$ ,  $\eta_{22,23}$  e  $\eta_{33,12}$ ,  $\eta_{33,13}$ ,  $\eta_{33,23}$ .

Passando ai test di taglio, si supponga di partire dallo stato tensionale (17.55). Per esso, è immediato calcolare il corrispondente angolo tagliante:

$$\gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \quad (17.59)$$

introducendo il primo modulo a taglio  $G_{12}$ . Gli altri due angoli taglienti saranno definiti attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned} \gamma_{13} &= \mu_{12,13} \gamma_{12} = \mu_{12,13} \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \\ \gamma_{23} &= \mu_{12,23} \gamma_{12} = \mu_{12,23} \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \end{aligned} \quad (17.60)$$

definendo i due *coefficienti di Chentsov*  $\mu_{12,13}$  e  $\mu_{12,23}$ . Anch'essi sono definiti da quattro indici, la prima coppia si riferisce alla tensione applicata, la seconda coppia all'angolo tagliante che si sta misurando. Infine, in un materiale anisotropo una tensione tangenziale causerà anche deformazioni normali, che potranno essere definite attraverso l'introduzione dei *coefficienti di influenza mutua del primo tipo*:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \eta_{12,11} \gamma_{12} = \eta_{12,11} \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \\ e_{22} &= \eta_{12,22} \gamma_{12} = \eta_{12,22} \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \\ e_{33} &= \eta_{12,33} \gamma_{12} = \eta_{12,33} \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \end{aligned} \quad (17.61)$$

In definitiva, il materiale anisotropo è interamente caratterizzato quando si siano misurate le trentasei quantità:

- tre moduli di Young  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{33}$
- tre moduli a taglio  $G_{12}$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{23}$
- sei coefficienti di Poisson  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{23}$ ,  $\nu_{31}$ ,  $\nu_{32}$
- nove coefficienti di influenza mutua del secondo tipo:

$$\begin{array}{ccc} \eta_{11,12} & \eta_{11,13} & \eta_{11,23} \\ \eta_{22,12} & \eta_{22,13} & \eta_{22,23} \\ \eta_{33,12} & \eta_{33,13} & \eta_{33,23} \end{array}$$

— nove coefficienti di influenza mutua del secondo tipo:

$$\begin{array}{ccc} \eta_{12,11} & \eta_{12,22} & \eta_{12,33} \\ \eta_{13,11} & \eta_{13,22} & \eta_{13,33} \\ \eta_{23,11} & \eta_{23,22} & \eta_{23,33} \end{array}$$

— sei coefficienti di Chentsov:

$$\begin{array}{cc} \mu_{12,13} & \mu_{12,23} \\ \mu_{13,12} & \mu_{13,23} \\ \mu_{23,12} & \mu_{23,13} \end{array}$$

## La legge di Hooke in termini di costanti ingegneristiche

Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} - \frac{\nu_{21}}{E_{22}}\sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_{33}}\sigma_{33} + \frac{\eta_{12,11}}{G_{12}}\sigma_{12} + \frac{\eta_{13,11}}{G_{13}}\sigma_{13} + \frac{\eta_{23,11}}{G_{23}}\sigma_{23} \\ e_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}}\sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} - \frac{\nu_{32}}{E_{33}}\sigma_{33} + \frac{\eta_{12,22}}{G_{12}}\sigma_{12} + \frac{\eta_{13,22}}{G_{13}}\sigma_{13} + \frac{\eta_{23,22}}{G_{23}}\sigma_{23} \\ e_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_{11}}\sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_{22}}\sigma_{22} + \frac{\sigma_{33}}{E_{33}} + \frac{\eta_{12,33}}{G_{12}}\sigma_{12} + \frac{\eta_{13,33}}{G_{13}}\sigma_{13} + \frac{\eta_{23,33}}{G_{23}}\sigma_{23} \\ \gamma_{12} &= \frac{\eta_{11,12}}{E_{11}}\sigma_{11} + \frac{\eta_{22,12}}{E_{22}}\sigma_{22} + \frac{\eta_{33,12}}{E_{33}}\sigma_{33} + \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} + \frac{\mu_{13,12}}{G_{13}}\sigma_{13} + \frac{\mu_{23,12}}{G_{23}}\sigma_{23} \\ \gamma_{13} &= \frac{\eta_{11,13}}{E_{11}}\sigma_{11} + \frac{\eta_{22,13}}{E_{22}}\sigma_{22} + \frac{\eta_{33,13}}{E_{33}}\sigma_{33} + \frac{\mu_{12,13}}{G_{12}}\sigma_{12} + \frac{\sigma_{13}}{G_{13}} + \frac{\mu_{23,13}}{G_{23}}\sigma_{23} \\ \gamma_{23} &= \frac{\eta_{11,23}}{E_{11}}\sigma_{11} + \frac{\eta_{22,23}}{E_{22}}\sigma_{22} + \frac{\eta_{33,23}}{E_{33}}\sigma_{33} + \frac{\mu_{12,23}}{G_{12}}\sigma_{12} + \frac{\mu_{13,23}}{G_{13}}\sigma_{13} + \frac{\sigma_{23}}{G_{23}} \end{aligned} \quad (17.62)$$

da cui le relazioni di simmetria:

$$\begin{aligned} -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} \\ -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} &= -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} \\ \frac{\eta_{12,11}}{G_{12}} &= \frac{\eta_{11,12}}{E_{11}} \\ \frac{\eta_{13,11}}{G_{13}} &= \frac{\eta_{11,13}}{E_{11}} \\ \frac{\eta_{23,11}}{G_{23}} &= \frac{\eta_{11,23}}{E_{11}} \\ -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} &= -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} \\ \frac{\eta_{12,22}}{G_{12}} &= \frac{\eta_{22,12}}{E_{22}} \\ \frac{\eta_{13,22}}{G_{13}} &= \frac{\eta_{22,13}}{E_{22}} \end{aligned} \quad (17.63)$$

$$\begin{aligned}\frac{\eta_{23,22}}{G_{23}} &= \frac{\eta_{22,23}}{E_{22}} \\ \frac{\eta_{12,33}}{G_{12}} &= \frac{\eta_{33,12}}{E_{33}} \\ \frac{\eta_{13,33}}{G_{13}} &= \frac{\eta_{33,13}}{E_{33}} \\ \frac{\eta_{23,33}}{G_{23}} &= \frac{\eta_{33,23}}{E_{33}} \\ \frac{\mu_{13,12}}{G_{13}} &= \frac{\mu_{12,13}}{G_{12}} \\ \frac{\mu_{23,12}}{G_{23}} &= \frac{\mu_{12,23}}{G_{12}} \\ \frac{\mu_{23,13}}{G_{23}} &= \frac{\mu_{13,23}}{G_{13}}\end{aligned}\tag{17.64}$$

## Capitolo 18

# Il solido isotropo

Si è visto che le costanti elastiche previste dalla teoria di Green sono, in generale, 21. Non sembra possibile ridurre questo numero, se non introducendo particolari ipotesi sul comportamento del materiale. D'altro canto, un sempre maggior numero di prodotti industriali viene appositamente costruito con particolari fibre e direzioni privilegiate, ed anche parecchi prodotti naturali, come il legno, mostrano spiccate proprietà di *simmetria*. Per tali materiali si può mostrare che il numero di costanti elastiche diminuisce, e più stringenti sono le proprietà di simmetria esibite, più piccolo sarà il numero delle costanti. Così, un materiale che abbia un solo piano di simmetria (i cosiddetti materiali *monoclinici*) può definirsi con 13 costanti elastiche, un materiale che abbia due piani di simmetria ortogonali (i materiali *ortotropi*) abbisogna di 9 costanti elastiche, un materiale che abbia una proprietà di simmetria di rotazione intorno ad un asse (i materiali *trasversalmente isotropi*) può essere definito con 5 costanti. Un caso, tuttavia, merita particolare attenzione, e ad esso è dedicato il presente capitolo, il caso più stringente di tutti, quello in cui si abbia simmetria rotazionale intorno a due assi ortogonali tra loro: non esistono direzioni privilegiate, ed il materiale si dice *isotropo*.

### 18.1 Legge di Hooke per materiale isotropo

Si è già dimostrato nel Capitolo precedente che, nel caso di un materiale linearmente elastico ed isotropo, le costanti elastiche si riducono a due. Ed infatti, in ipotesi di isotropia, la scelta degli assi coordinati diviene arbitraria, e si può convenientemente orientare la terna di riferimento secondo gli assi principali di deformazione. In tal caso il potenziale elastico si esprime:

$$\begin{aligned} \phi = \frac{1}{2} c_{ijkl} e_{ij} e_{hk} &= \frac{1}{2} c_1 e_1^2 + \frac{1}{2} c_2 e_2^2 + \frac{1}{2} c_3 e_3^2 + \\ &+ \frac{1}{2} d_1 e_1 e_2 + \frac{1}{2} d_2 e_1 e_3 + \frac{1}{2} d_3 e_2 e_3 + \frac{1}{2} d_4 e_1 e_2 + \frac{1}{2} d_5 e_1 e_3 + \frac{1}{2} d_6 e_2 e_3 \end{aligned} \quad (18.1)$$

e poichè per la simmetria la numerazione degli assi è ininfluyente, si ha  $c_1 = c_2 = c_3 = c$  ed anche  $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d$ . Il potenziale elastico si riduce quindi a:

$$\phi = \frac{c}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + \frac{d}{2} (2e_1e_2 + 2e_1e_3 + 2e_2e_3) \quad (18.2)$$

che può anche risciversi come:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{d}{2} (e_1 + e_2 + e_3)^2 + \frac{c-d}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \\ &= \frac{\lambda}{2} (e_1 + e_2 + e_3)^2 + \mu (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \end{aligned} \quad (18.3)$$

riottenendo i due coefficienti di Lamè  $\lambda$  e  $\mu$ . Si esprime ora il potenziale in funzione degli invarianti di deformazione:

$$\begin{aligned} I_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ I_2 &= e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 \end{aligned} \quad (18.4)$$

A tal fine si osservi preliminarmente che:

$$I_1^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + 2e_1e_2 + 2e_1e_3 + 2e_2e_3 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + 2I_2 \quad (18.5)$$

e che quindi:

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = I_1^2 - 2I_2 \quad (18.6)$$

Ne segue che la richiesta espressione di  $\phi$  in termini di invarianti è:

$$\phi = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu (I_1^2 - 2I_2) = \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) I_1^2 - 2\mu I_2 \quad (18.7)$$

In un riferimento arbitrario, quindi, il potenziale si scrive come:

$$\begin{aligned} \phi &= \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) (e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 - \\ &\quad 2\mu (e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{22}e_{33} - e_{12}^2 - e_{13}^2 - e_{23}^2) \end{aligned} \quad (18.8)$$

e le leggi di Green forniscono le tensioni:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{11}} = \lambda (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{11} \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{22}} = \lambda (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{22} \\ \sigma_{33} &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{33}} = \lambda (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{33} \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial e_{12}} = 2\mu e_{12} \\ \sigma_{13} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial e_{13}} = 2\mu e_{13} \\ \sigma_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial e_{23}} = 2\mu e_{23} \end{aligned} \quad (18.9)$$

ossia, matricialmente :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{13} \\ 2e_{23} \end{pmatrix} \quad (18.10)$$

o, indicialmente:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij} \lambda e_{kk} \quad (18.11)$$

Le relazioni (18.9) possono invertirsi, a fornire le deformazioni in funzione delle tensioni. Ed infatti, sommando membro a membro le prime tre equazioni — o, equivalentemente, contraendo gli indici  $i$  e  $j$  nella (18.11) — si giunge ad una relazione tra gli invarianti lineari di tensione e di deformazione:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (3\lambda + 2\mu) (e_{11} + e_{22} + e_{33}) \quad (18.12)$$

ossia:

$$e_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu} \quad (18.13)$$

Utilizzando la (18.13) è immediato dedurre, dalla (18.11), la *legge di Hooke inversa*:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \right) \quad (18.14)$$

o, per esteso:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right) \\ e_{22} &= \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{22} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right) \\ e_{33} &= \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{33} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right) \\ e_{12} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{12} \\ e_{13} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{13} \\ e_{23} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{23} \end{aligned} \quad (18.15)$$

Nota – Sorge una seconda discrepanza tra la teoria molecolare, che prevede di caratterizzare il corpo isotropo con una singola costante elastica, e la teoria energetica, che abbisogna di due costanti indipendenti<sup>1</sup>. Anche in questo caso, e con più decisione, gli esperimenti indicano che la teoria energetica è nel giusto.

<sup>1</sup>Che il solido isotropo linearmente elastico possa essere definito tramite due costanti può essere provato anche dal seguente, sintetico ragionamento. Nel caso isotropo anche il potenziale

Nota – Affinchè non si abbiano deformazioni infinite in presenza di tensioni finite, bisognerà che sia  $\mu$  che  $3\lambda + 2\mu$  siano diverse da zero, ed in realtà si presupporrà che ambedue queste quantità siano strettamente positive.

Nota – Il coefficiente  $\mu$  viene anche detto  $G$ , ed in questo caso si chiama *modulo di resistenza a taglio*, per i motivi che si esporranno nel prossimo paragrafo.

Per i solidi isotropi, è possibile dimostrare il seguente, importante

**Teorema 7.** *In un solido isotropo, le direzioni principali di deformazione coincidono con le direzioni principali di tensione*

*Dimostrazione.* Ipotizzando di calcolare le deformazioni in un sistema di riferimento in cui gli assi coincidono con le direzioni principali di deformazione, si ha, per definizione, l'annullarsi delle componenti taglianti  $e_{ij}$ ,  $i \neq j$ . Applicando la legge di Hooke per materiali isotropi (18.11) si calcolano le tensioni e si ottiene  $\sigma_{ij} = 0$  per  $i \neq j$ . Ciò significa appunto che le tensioni sono calcolate in un sistema di riferimento in cui gli assi coincidono con le direzioni principali di tensione.  $\square$

## 18.2 Modulo di Young e coefficiente di Poisson

Il secondo coefficiente di Lamè  $\mu$  può essere suscettibile di una semplice interpretazione fisica: esso rappresenta il rapporto tra la tensione tangenziale generica e la corrispondente variazione angolare. Non altrettanto può dirsi per la prima costante di Lamè  $\lambda$ .

Sorge così la convenienza di definire in modo opportuno altre due costanti elastiche indipendenti, che siano più facili da determinare tramite semplici esperimenti. A tal fine, si consideri una barra di acciaio, vincolata all'estremo di sinistra, e soggetta ad una forza di trazione all'estremo di destra. Si ha uno stato di tensione, all'interno del corpo, in cui solo una tensione normale è diversa da zero, ad esempio la  $\sigma_{11}$ , mentre le tensioni tangenziali sono tutte nulle.

---

elastico dovrà essere insensibile alla rotazione degli assi, e quindi può ipotizzarsi che esso sia funzione dei tre invarianti di deformazione:

$$\phi = \phi(I_1, I_2, I_3) \quad (18.16)$$

e poichè il potenziale deve essere una forma quadratica delle deformazioni, dovrà essere necessariamente:

$$\phi = C_0 I_1^2 + C_1 I_2 \quad (18.17)$$

Più laborioso, come visto, è il cammino per giungere alla effettiva forma della matrice di elasticità

Dalle (18.15) si ottiene il corrispondente stato deformativo:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11} \doteq \frac{\sigma_{11}}{E} \\
 e_{22} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11} \doteq -\frac{\nu \sigma_{11}}{E} \\
 e_{33} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11} \doteq -\frac{\nu \sigma_{11}}{E} \\
 e_{12} &= e_{13} = e_{23} = 0
 \end{aligned}
 \tag{18.18}$$

La prima costante,  $E$ , si chiama *modulo di Young*<sup>2</sup>, o *modulo di elasticità longitudinale*, e può facilmente interpretarsi come il rapporto tra la tensione monoassiale applicata e la conseguente dilatazione specifica lungo la direzione di tensione. Esso ha quindi le stesse dimensioni fisiche di una tensione, ossia forza su unità di superficie.

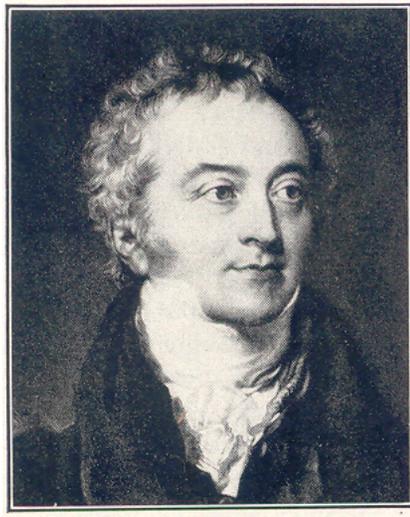


Figura 18.1: Thomas Young

<sup>2</sup>The so-called “Young modulus” was invented almost a hundred years earlier by Euler as a boy of nineteen, studying mathematics under John Bernoulli’s direction. It was invented for a definite reason: Euler tried to derive James Bernoulli’s law of bending of a beam from Hooke’s law of extension for the longitudinal fibres. [...] To solve this problem, as Euler did, it is *mathematically necessary* to introduce a measure of elasticity that represents a material property, independent of the size of the specimen. When we look into the details, we find that Young, despite all his talk about “useful knowledge”, bungled by defining the modulus as the ratio of force to strain, as had nearly everyone else for a century before him, thus obtaining a quantity that varies from specimen to specimen of the same material.

C.A.Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, Springer 1968, pagg.318–319

La seconda costante,  $\nu$ , si chiama *coefficiente di Poisson*, o *coefficiente di contrazione laterale*, e misura il rapporto tra la contrazione laterale e l'allungamento assiale. Come tale, esso è un numero puro.

### 18.3 Relazione tra i moduli di Lamè ed i moduli ingegneristici

Dalle (18.18) si ricava subito:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{aligned} \quad (18.19)$$

e di conseguenza, se si conoscono i valori dei due moduli di Lamè, possono immediatamente conoscersi anche i valori delle costanti ingegneristiche.

Le relazioni precedenti, poi, possono invertirsi, giungendo a:

$$\begin{aligned} \mu = G &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \end{aligned} \quad (18.20)$$

Inserendo queste relazioni nella legge di Hooke (18.11) si giunge all'espressione in termini di costanti ingegneristiche:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1 + \nu} e_{11} + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (e_{11} + e_{22} + e_{33}) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1 + \nu} e_{22} + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (e_{11} + e_{22} + e_{33}) \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} e_{33} + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (e_{11} + e_{22} + e_{33}) \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1 + \nu} e_{12} \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{1 + \nu} e_{13} \\ \sigma_{23} &= \frac{E}{1 + \nu} e_{23} \end{aligned} \quad (18.21)$$

o anche:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} e_{ij} + \delta_{ij} \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e_{kk} \quad (18.22)$$

mentre la legge di Hooke inversa (18.15) si semplifica in:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E} ((1 + \nu)\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})) \\ e_{22} &= \frac{1}{E} ((1 + \nu)\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{33} &= \frac{1}{E} ((1 + \nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})) \\
 e_{12} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12} \\
 e_{13} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{13} \\
 e_{23} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{23}
 \end{aligned} \tag{18.23}$$

o anche, indicialmente:

$$e_{ij} = \frac{1}{E} ((1 + \nu)\sigma_{ij} - \delta_{ij}\nu\sigma_{kk}) \tag{18.24}$$

con matrice di elasticità inversa  $\mathbf{A}$  fornita da:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{pmatrix} \tag{18.25}$$

## 18.4 Limitazioni sulle costanti elastiche

Da un punto di vista fisico, le due costanti ingegneristiche hanno un significato tale da far ipotizzare subito che ambedue possano assumere solo valori positivi. Ed infatti ben strano sarebbe un materiale che soggetto ad una trazione si accorciasse, o che compresso si allungasse. Analogamente, sarebbe difficile immaginare un materiale che nel mentre si allunga in direzione dello sforzo, contemporaneamente viene ad allargarsi in direzione ortogonale<sup>3</sup>. Comunque, da un punto di vista matematico, si può ragionevolmente ipotizzare che la matrice di elasticità  $\mathbf{C}$ , e quindi anche la sua inversa  $\mathbf{A}$ , sia definita positiva. Ne segue che il determinante di  $\mathbf{A}$ , e tutti i suoi minori principali, devono essere positivi, e stante la struttura della matrice  $\mathbf{A}$ , le condizioni che si ottengono sono le seguenti:

**minore di ordine uno**

$$\frac{1}{E} > 0 \tag{18.26}$$

e quindi si ritrova che il modulo di Young deve essere positivo,

**minore di ordine due**

$$\det \left( \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1 - \nu^2}{E} > 0 \tag{18.27}$$

e quindi  $\nu$  dovrà essere compreso tra  $-1$  ed  $1$ , ed infine:

<sup>3</sup>Solo recentemente, si è giunti a produrre materiali con  $\nu$  negativo, i cosiddetti *materiali auxetici*, ma di essi non ci occuperemo, in quanto non rappresentano materiali da costruzione

minore di ordine tre

$$\det \left( \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{(1+\nu)^2(1-2\nu)}{E} > 0 \quad (18.28)$$

da cui segue che  $\nu$  deve essere minore di  $1/2$ .

In definitiva, da un punto di vista prettamente matematico, l'ipotesi che la matrice di elasticità sia definita positiva ha condotto alle seguenti limitazioni:

$$E > 0 \quad (18.29)$$

$$-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad (18.30)$$

Sperimentalmente, la prima di queste relazioni è pienamente confermata, mentre la seconda viene talvolta ristretta in:

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad (18.31)$$

Nel seguito sono riportati i valori di  $E$  (in  $kg/cm^2$ ) e di  $\nu$  per alcuni materiali di uso comune. Come si vede, l'intervallo dei valori è notevolmente ampio, per ambedue le costanti.

Materiale	E	$\nu$
Conglomerato cementizio	200000 ÷ 400000	0.10 ÷ 0.16
Granito	500000 ÷ 600000	0.10 ÷ 0.20
Vetro	600000 ÷ 800000	0.25
Caucciù	10 ÷ 80	0.5
Acciai	2100000 ÷ 2200000	0.25 ÷ 0.33
Alluminio	670000 ÷ 700000	0.36

# Capitolo 19

## L'equilibrio elastico

I primi Capitolo sono stati dedicati all'analisi della tensione, giungendo ad enunciare le equazioni indefinite dell'equilibrio in termini di tensioni. Nei successivi Capitoli, invece, si sono studiate le deformazioni, giungendo a definire le equazioni di compatibilità. Infine, negli ultimi Capitoli si sono illustrati alcuni legami tra tensioni e deformazioni.

E' giunto il momento di conglobare quanto si è dedotto in una sola, grande sintesi.

### 19.1 I problemi ai limiti dell'elasticità

Il *problema misto della teoria dell'elasticità* può enunciarsi come segue:

– Si abbia un corpo isotropo  $B$ , costituito da materiale linearmente elastico, e sia  $\partial B$  la sua frontiera. Su una porzione di frontiera, sia essa  $\partial B_1$ , siano assegnate le forze superficiali  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ , mentre sulla restante parte di frontiera  $\partial B_2$  siano assegnati gli spostamenti  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ . Inoltre, siano  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  le forze di massa agenti in  $B$ .

Occorre ricercare gli spostamenti  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , le deformazioni  $e_{ij}$  e le tensioni  $\sigma_{ij}$  che in ciascun punto del corpo  $B$  soddisfano:

1. le *tre* condizioni di equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad (19.1)$$

2. le *sei* condizioni di congruenza, che legano le deformazioni alle derivate degli spostamenti:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (19.2)$$

3. le *sei* equazioni costitutive, che legano le deformazioni alle tensioni in ipotesi di solido isotropo e linearmente elastico:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij} \lambda e_{kk} \quad (19.3)$$

Inoltre, sulla frontiera  $\partial B_1$  devono essere soddisfatte le condizioni di equilibrio ai limiti:

$$p_i = \sigma_{ij}n_j \quad (19.4)$$

mentre sulla parte di frontiera  $\partial B_2$  gli spostamenti devono rispettare i vincoli:

$$u_i = f_i \quad (19.5)$$

Come si vede, esistono quindici equazioni in quindici incognite; si ha la possibilità di far scomparire deformazioni e tensioni, giungendo a definire tre equazioni nelle tre componenti di spostamento, oppure si può far scomparire spostamenti e deformazioni, giungendo a definire sei equazioni nelle sei componenti di tensioni. Solo la prima via sarà illustrata in qualche dettaglio, mentre per la seconda via si rimanda ad un qualsiasi trattato di Scienza delle Costruzioni

## 19.2 Le equazioni di Navier–Cauchy

Si parta dalle (19.3), e si utilizzino le (19.2), scrivendo:

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (19.6)$$

e derivando rispetto ad  $x_j$ , supponendo il corpo omogeneo:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial u_j^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \delta_{ij} \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_j} \quad (19.7)$$

Si osservi che ora si è anche implicitamente assunta la sommatoria sull'indice  $j$ . La (19.1) diviene allora, tenendo conto delle proprietà del  $\delta$  di Kronecker:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial u_j^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + X_i = 0 \quad (19.8)$$

e rinominando da  $k$  a  $j$  l'indice dell'ultimo termine:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial u_j^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + X_i = 0 \quad (19.9)$$

ossia:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial u_j^2}{\partial x_i \partial x_j} + X_i = 0 \quad (19.10)$$

Per esteso, si ottiene:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + X_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + X_2 &= 0 \\ \mu \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + X_3 &= 0 \end{aligned} \quad (19.11)$$

Siamo quindi giunti ad un sistema di tre equazioni differenziali alle derivate parziali<sup>1</sup>, nelle tre incognite  $u_i$ , cui va associata su  $\partial B_1$  la condizione ai limiti (19.4), in cui ovviamente le tensioni siano espresse in termini di spostamento. Utilizzando a tal fine le (19.3) e poi le (19.2) si ha subito:

$$p_i = \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) n_j \quad (19.12)$$

Sulla restante parte di frontiera  $\partial B_2$ , invece, le condizioni ai limiti restano le (19.5).

E' quasi sempre impossibile, e sempre difficoltoso, risolvere questo problema ai limiti analiticamente, mentre più agevole risulta la sua soluzione numerica.

### 19.2.1 Le equazioni di Navier–Cauchy in notazione matriciale

Utilizzando un formalismo matriciale, è possibile dimostrare le equazioni di Cauchy-Navier in modo molto più sintetico, e nelle più generali ipotesi di anisotropia. Si scrivano infatti le equazioni indefinite dell'equilibrio (19.1) nella forma già utilizzata nella (9.15) del Capitolo 9:

$$\delta \sigma + \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (19.13)$$

avendo introdotto la matrice degli operatori differenziali (cfr. 9.16):

$$\delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (19.14)$$

<sup>1</sup>Queste equazioni furono dedotte originariamente da Navier nel 1821, e poi da lui stesso pubblicate nel 1823, sotto forma di abstract, ed infine nel 1827, *Memoire sur les lois de l'equilibre et du mouvement des corps solides elastiques*, Mem. Acad. Sci. Inst. France, 7, 375–393. Tuttavia, Navier accettava la teoria molecolare, secondo cui  $\lambda = \mu$ . Nella loro forma attuale, le equazioni rimontano a Cauchy, *Sur les equations qui expriment les conditions d'equilibre ou les lois du mouvement interieur d'un corps solide, elastique ou non elastique*, Ex. de Math, 3, 160–187 (1828), Poisson, *Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps elastiques*, Mem. Acad. Sci. Inst. France (2), 8, 357–570 (1829) e Lamè–Clapeyron, *Memoire sur l'equilibre des corps solides homogenes*, Mem. Divers Savants Acad. Sci. Paris (2), 4, 465–562 (1833), e sono pertanto note come equazioni di Cauchy, o anche equazioni di Lamè, o di Lamè–Cauchy, ed infine anche di Navier–Cauchy.

Le equazioni (19.2) possono sintetizzarsi, come può facilmente verificarsi, in:

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{u} \quad (19.15)$$

Infine, le equazioni costitutive (19.3) si scrivono:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \mathbf{e} \quad (19.16)$$

con  $\mathbf{C}$  matrice di elasticità fornita — in ipotesi di isotropia — da:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (19.17)$$

Inserendo la (19.15) nella (19.16) si ottiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{u} \quad (19.18)$$

e dalla (19.13) si giunge subito alle richieste equazioni di Cauchy–Navier in forma matriciale:

$$\boldsymbol{\delta} \mathbf{C} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{u} + \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (19.19)$$

Svolgendo il triplo prodotto matriciale si giunge alle (19.10).

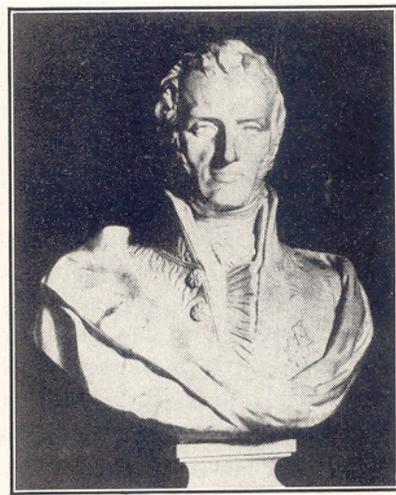


Figura 19.1: Claude–Louis Navier

### 19.3 Il principio di sovrapposizione

Sfruttando la linearità delle equazioni di Navier–Cauchy, è possibile dimostrare il seguente:

**Teorema 8.** (*Principio di sovrapposizione*) - Si consideri un corpo  $B$ , soggetto alle forze superficiali  $\mathbf{p}$  ed alle forze di massa  $\mathbf{X}$ . Siano  $\boldsymbol{\sigma}$  le tensioni provocate da questo insieme di forze. Sia poi  $\mathbf{p}'$  e  $\mathbf{X}'$  un secondo insieme di forze, che provoca le tensioni  $\boldsymbol{\sigma}'$ . Se sul corpo agiscono contemporaneamente ambedue gli insiemi di forze esterne, allora le tensioni nel corpo saranno pari a  $\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}'$ .

### 19.4 Il principio di unicità

Formalizzato il problema ai limiti misto dell'elasticità, occorre chiedersi: esiste una soluzione a questo problema? e se esiste, è unica? Citando da G. Fichera, *Problemi analitici nuovi nella fisica matematica classica*, CNR (1985), p.16:

La dimostrazione dei teoremi di esistenza per i problemi della Statica elastica ha severamente impegnato, a partire dalla fine del secolo scorso, gli analisti.

Non ci addentreremo, pertanto, in ragionamenti e teoremi di tipo puramente matematico, rimandando il lettore all'esposizione dettagliata contenuta nel lungo lavoro di G. Fichera *Existence Theorems in Elasticity*, Handbuch der Physik, Vol. VIa/2. Springer, pp. 347–389,(1972).

Relativamente più facili sono i problemi di unicità, potendosi dimostrare il fondamentale:

**Teorema 9.** (*Principio di unicità di Kirchhoff*) - Le soluzioni del problema misto dell'elasticità differiscono tra loro al più per uno spostamento rigido. Se inoltre la parte di frontiera su cui sono assegnati gli spostamenti è non vuota, allora il problema misto ha al più una soluzione

*Dimostrazione.* Siano infatti  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}, \mathbf{u})$  e  $(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{e}', \mathbf{u}')$  due diverse soluzioni del problema misto ai limiti. Per il primo insieme di tensioni, dovrà essere:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad (19.20)$$

con le condizioni ai limiti su  $\partial B_1$ :

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (19.21)$$

e su  $\partial B_2$  :

$$u_i = f_i \quad (19.22)$$

Analogamente, per la seconda soluzione si ha:

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad (19.23)$$

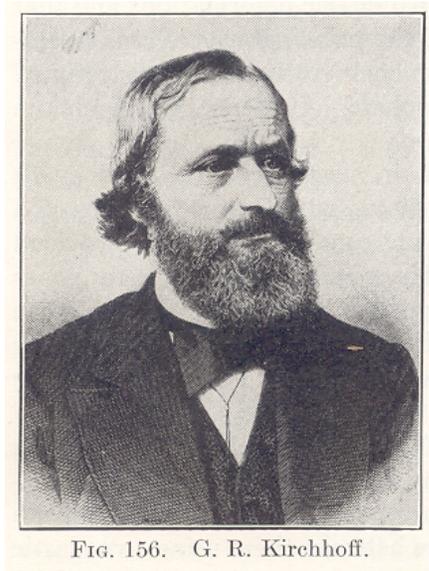


FIG. 156. - G. R. Kirchhoff.

Figura 19.2: Gustav R. Kirchhoff

$$p_i = \sigma'_{ij} n_j \quad (19.24)$$

$$u'_i = f_i \quad (19.25)$$

Sottraendo membro a membro le (19.20) dalle (19.23) si ha:

$$\frac{\partial (\sigma'_{ij} - \sigma_{ij})}{\partial x_i} = 0 \quad (19.26)$$

ed analogamente, per le condizioni ai limiti:

$$0 = (\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}) n_i \quad (19.27)$$

$$u'_i - u_i = 0 \quad (19.28)$$

Si è quindi definito un problema ai limiti per un corpo in equilibrio sotto forze di massa nulle e forze superficiali nulle su  $\partial B_1$ , e con spostamenti nulli sulla frontiera  $\partial B_2$ . In tale situazione il potenziale elastico non potrà che essere nullo, e poichè il potenziale elastico è una forma quadratica definita positiva, nulle dovranno essere tutte le sue componenti di tensioni e di deformazione:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} \quad (19.29)$$

$$e'_{ij} = e_{ij} \quad (19.30)$$

mentre gli spostamenti, proporzionali alle derivate prime delle deformazioni, potranno differire tra loro al più di un moto rigido.  $\square$

## Capitolo 20

# Stati piani di tensione e spostamento

Si è visto, nella lezione precedente, che la soluzione del problema ai limiti dell'elasticità non sempre è perseguibile analiticamente; esistono tuttavia alcuni casi particolari in cui possono effettuarsi interessanti sviluppi analitici. A questi casi è dedicata la presente lezione, in cui viene introdotta la più semplice funzione di tensione, la funzione di Airy, che permette la soluzione di alcuni importanti esempi strutturali.

### 20.1 Stati monoassiali di tensione

Un corpo  $B$ , per definizione, è in *stato monoassiale di tensione*, se in ciascun punto del corpo le tensioni assumono la forma:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (20.1)$$

ed inoltre l'unica componente non nulla di tensione è funzione della sola coordinata  $x_3$ :

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}(x_3) \quad (20.2)$$

Si ha quindi la situazione di Figura 20.1

Le direzioni principali di tensione sono l'asse  $X_3$  e qualsiasi coppia di rette nel piano  $(X_1, X_2)$ .

Siano per ipotesi nulle le forze di massa, sicchè le prime due equazioni indefinite dell'equilibrio sono identicamente nulle, mentre la terza si riduce a:

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (20.3)$$

da cui subito:

$$\sigma_{33} = \sigma_0 = \text{costante} \quad (20.4)$$

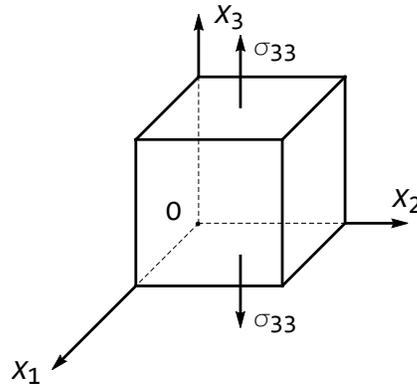


Figura 20.1: Stato monoassiale di tensione

Dalle tensioni può ricavarsi lo stato deformativo, utilizzando la legge di Hooke per materiali omogenei ed isotropi. Sarà:

$$\begin{aligned} e_{11} &= e_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_0 \\ e_{33} &= \frac{\sigma_0}{E} \\ e_{12} &= e_{13} = e_{23} = 0 \end{aligned} \quad (20.5)$$

Infine, gli spostamenti si ottengono integrando il sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{\sigma_0}{E} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (20.6)$$

Dalle prime tre relazioni si trae:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_1 + \phi_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_2 + \phi_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= \frac{\sigma_0}{E}x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (20.7)$$

e dalle seconde tre:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} &= 0 \\
 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} &= 0 \\
 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{20.8}$$

Poichè sarà anche, ovviamente:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} = 0
 \tag{20.9}$$

ne segue che il campo di spostamenti  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  rappresenta un moto rigido. Se i vincoli sono tali da eliminare gli spostamenti rigidi, infine, si ha:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_1(x_1) = -\frac{\nu}{E} \sigma_0 x_1 \\
 u_2 &= u_2(x_2) = -\frac{\nu}{E} \sigma_0 x_2 \\
 u_3 &= u_3(x_3) = \frac{\sigma_0}{E} x_3
 \end{aligned}
 \tag{20.10}$$

Nota - E' questo lo stato tensionale che si è utilizzato per definire le due costanti ingegneristiche  $E$  e  $\nu$ .

## 20.2 Stati monoassiali di deformazione

Analogamente a quanto detto per gli stati monoassiali di tensione, uno stato monoassiale di deformazione è caratterizzato da una matrice di deformazioni pari a:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix}
 \tag{20.11}$$

ed inoltre l'unica componente non nulla di deformazione è funzione della sola coordinata  $x_3$ .

Le tensioni corrispondenti si ottengono dalla legge di Hooke:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} e_{33} = \sigma_{11}(x_3) \\
 \sigma_{22} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} e_{33} = \sigma_{22}(x_3) \\
 \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} e_{33} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} e_{33} = \sigma_{33}(x_3) \\
 \sigma_{12} &= \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0
 \end{aligned}
 \tag{20.12}$$

In assenza di forze di massa, le prime due equazioni indefinite dell'equilibrio sono identicamente nulle, mentre la terza assicura che:

$$\sigma_{33} = \sigma_0 = \text{costante} \quad (20.13)$$

da cui anche:

$$e_{33} = e_0 = \text{costante} \quad (20.14)$$

Ne segue infine che gli spostamenti sono forniti, a meno di traslazioni rigide, da:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \equiv 0 \\ u_3 &= e_0 x_3 \end{aligned} \quad (20.15)$$

### 20.3 Stato piano di spostamento

E' questo il caso in cui esistono solo due componenti di spostamento, funzioni di due sole coordinate. Ad esempio, uno stato piano di spostamento relativo al piano  $(X_1, X_2)$  è definito dalle ipotesi:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2) \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2) \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (20.16)$$

Le corrispondenti deformazioni sono pari a:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20.17)$$

con:

$$e_{ij} = e_{ij}(x_1, x_2) \quad (20.18)$$

Le tensioni si ottengono applicando la legge di Hooke, giungendo a:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (20.19)$$

L'espressione esplicita delle tensioni può aversi in termini di costanti di Lamè:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu e_{11} + \lambda(e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{22} &= 2\mu e_{22} + \lambda(e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{33} &= \lambda(e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{12} &= 2\mu e_{12} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0 \end{aligned} \quad (20.20)$$

oppure in termini di costanti ingegneristiche:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu}e_{11} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(e_{11} + e_{22}) \\
 \sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu}e_{22} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(e_{11} + e_{22}) \\
 \sigma_{33} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(e_{11} + e_{22}) \\
 \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu}e_{12} \\
 \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0
 \end{aligned} \tag{20.21}$$

Si ha quindi l'importante relazione:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \tag{20.22}$$

Poichè le tensioni sono funzioni delle sole coordinate  $x_1$  ed  $x_2$ , le equazioni indefinite dell'equilibrio divengono:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 &= 0 \\
 \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 &= 0 \\
 X_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{20.23}$$

Ne segue che uno stato piano di spostamento avrà possibilità di realizzarsi solo se le due componenti  $X_1$  ed  $X_2$  delle forze di massa sono funzioni delle sole coordinate  $x_1$  ed  $x_2$ , e se la componente  $X_3$  è identicamente nulla.

Le equazioni di Navier–Cauchy si semplificano in:

$$\begin{aligned}
 \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + X_1 &= 0 \\
 \mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + X_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{20.24}$$

Infine, l'unica equazione di compatibilità che non sia soddisfatta identicamente è:

$$2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \tag{20.25}$$

Alcuni esempi classici di schemi strutturali che rispettano le ipotesi a base di questa sezione sono riportate nelle Figure 20.2 e 20.3. In Figura 20.2 è illustrato un cilindro di sezione retta generica, soggetto ad una distribuzione uniforme di forze sulle generatrici: se esso è considerato infinitamente lungo, oppure se si trascurano gli effetti di bordo locali, per ragioni di simmetria si potrà affermare che lo stato di spostamento rispetta le condizioni (20.16). Del tutto analogamente, in Figura 20.3 è illustrato un terrapieno ed una sezione di galleria: se essi sono sufficientemente lunghi da poter trascurare gli effetti di bordo, e se sono caricati opportunamente, essi rientrano nei casi di stati piani di spostamento.

## 20.4 Stato piano di tensione

Uno *stato piano di tensione* è caratterizzato da uno stato tensionale del tipo:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20.26)$$

con le componenti di tensione funzioni delle coordinate  $x_1$  ed  $x_2$ , giungendo quindi alla situazione di Figura 20.4. Si ha, dalle leggi di Hooke, una matrice delle deformazioni del tipo:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix} \quad (20.27)$$

con:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \\ e_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) \\ e_{33} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ e_{12} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12} \\ e_{13} &= e_{23} = 0 \end{aligned} \quad (20.28)$$

e quindi anche le deformazioni sono funzioni delle sole coordinate  $x_1$  ed  $x_2$ .

Le equazioni indefinite dell'equilibrio restano le (20.23), con quel che ne segue per le forze di massa, mentre le equazioni di compatibilità interna si semplificano notevolmente. Le prime due sono infatti identicamente soddisfatte, mentre le altre quattro divengono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 \\ 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} &= 0 \end{aligned} \quad (20.29)$$

Dovrà quindi essere:

$$e_{33} = c_1 + c_2 x_1 + c_3 x_2 \quad (20.30)$$

Si vedrà tuttavia che spesso la  $e_{33}$  può essere trascurata, e quindi l'unica condizione di compatibilità da tenere in conto resta la (20.25).

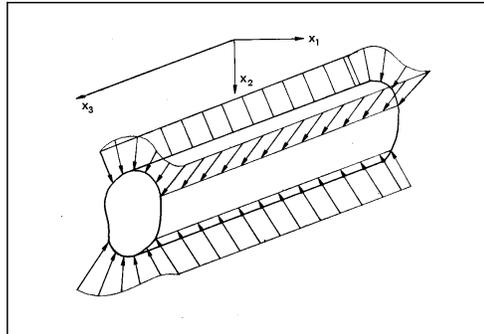


Figura 20.2: Un cilindro infinitamente lungo in stato piano di spostamento

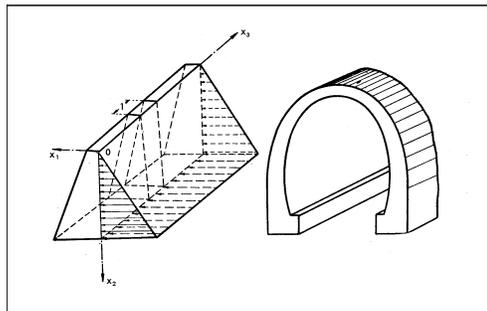


Figura 20.3: Altri due esempi di stati piani di spostamento: un terrapieno ed una galleria

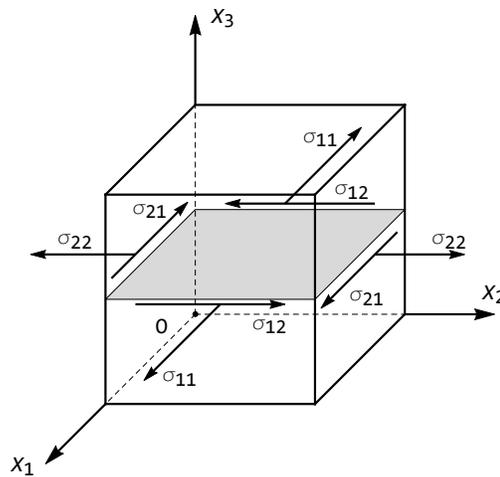


Figura 20.4: Uno stato piano di tensione

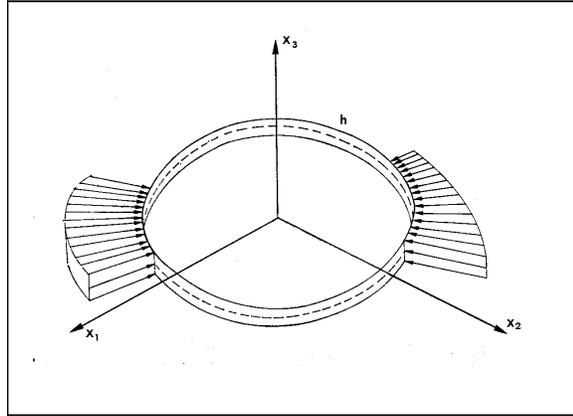


Figura 20.5: Lastra sottile in stato piano di tensione

L'esempio classico di stato piano di tensione è illustrato in Figura 20.5, dove è illustrata una lastra sottile piana, con piano medio contenuto nel piano  $(X_1, X_2)$ , soggetta a forze agenti secondo lo stesso piano. Più in dettaglio, le forze sul contorno si suppongono applicate solo lungo lo spessore della lastra, e sono simmetricamente distribuite rispetto al piano medio.

Poichè le due facce della lastra sono scariche, per ipotesi, ne segue che su tali facce dovrà aversi:

$$\begin{aligned}\sigma_{31} \left( x_1, x_2, x_3 = \pm \frac{h}{2} \right) &= 0 \\ \sigma_{32} \left( x_1, x_2, x_3 = \pm \frac{h}{2} \right) &= 0 \\ \sigma_{33} \left( x_1, x_2, x_3 = \pm \frac{h}{2} \right) &= 0\end{aligned}\tag{20.31}$$

Inoltre, le tensioni tangenziali  $\sigma_{31}$  e  $\sigma_{32}$  sono funzioni dispari di  $x_3$ , mentre la tensione normale  $\sigma_{33}$  è una funzione pari della stessa coordinata  $x_3$ , e se lo spessore  $h$  è sufficientemente piccolo potrà assumersi ovunque  $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$ , rientrando nelle ipotesi di questa sezione.

## 20.5 Gli stati piani e la funzione di tensione

Se si ignorano le tre equazioni di compatibilità in  $e_{33}$ , allora gli stati piani di tensione e di spostamento possono essere trattati in modo unificato e semplificato, ed alcune interessanti soluzioni del problema di elasticità possono essere illustrate anche con metodi elementari di calcolo. Si consideri infatti che in ambedue i casi si possono assumere come incognite primarie le tre componenti di tensione  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{12}$ , ed utilizzare le due equazioni indefinite dell'equilibrio

e l'unica condizione di compatibilità:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 &= 0 \\
 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2}
 \end{aligned} \tag{20.32}$$

Le tre equazioni precedenti devono valere all'interno di un dominio piano  $B$ , sulla cui frontiera dovranno valere le due equazioni:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 &= p_1 \\
 \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 &= p_2
 \end{aligned} \tag{20.33}$$

Occorre ora utilizzare le leggi di Hooke per trasformare l'ultima delle (20.32) in una equazione nelle incognite primarie, e poichè le leggi di Hooke si specializzano diversamente per gli stati piani di spostamento e di tensione, è opportuno trattare separatamente i due casi.

### 20.5.1 Gli stati piani di tensione

Le equazioni da utilizzare sono le (20.28), che sostituite nella terza delle (20.32) conducono a scrivere:

$$2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} \right) \tag{20.34}$$

ossia:

$$2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) \tag{20.35}$$

Dalle prime delle (20.32) si ha poi:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} &= -\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \\
 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2}
 \end{aligned} \tag{20.36}$$

e sostituendo nella (20.35):

$$\begin{aligned}
 (1 + \nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \\
 \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{20.37}$$

e semplificando:

$$(1 + \nu) \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} = 0 \quad (20.38)$$

ed infine:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1 + \nu) \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) \quad (20.39)$$

### 20.5.2 Gli stati piani di spostamento

Le leggi di Hooke forniscono, in questo caso:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ e_{22} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ e_{12} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12} \end{aligned} \quad (20.40)$$

con la relazione aggiuntiva (20.22), che porta a scrivere:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (1 + \nu) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (20.41)$$

Le prime due delle (20.40) divengono quindi:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (1 + \nu) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ e_{22} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} (1 + \nu) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{aligned} \quad (20.42)$$

Sostituendo nella terza delle (20.32) si ha:

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} \right) - \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) \quad (20.43)$$

ed utilizzando le (20.36):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} \right) - \\ \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (20.44)$$

ossia ancora:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{1}{1 - \nu} \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) \quad (20.45)$$

Si noti infine che nel caso di forze di massa nulle o costanti sia la (20.39) — valida per gli stati piani di tensione — che la (20.45) — valida per gli stati piani di spostamento — si semplificano in:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \quad (20.46)$$

### 20.5.3 La funzione di Airy nel caso di forze di massa nulle

Nel caso di forze di massa nulle le tre equazioni che reggono il problema ai limiti dell'elasticità:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) &= 0\end{aligned}\quad (20.47)$$

si possono drasticamente semplificare introducendo una funzione  $\Phi(x_1, x_2)$  tale che:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}\end{aligned}\quad (20.48)$$



Figura 20.6: G.B. Airy

Ed infatti, introducendo queste tre relazioni nelle (20.47) si nota che le prime due sono identicamente soddisfatte, mentre la terza si riduce a richiedere che sia:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = 0 \quad (20.49)$$

La funzione  $\Phi(x_1, x_2)$  è la prima e più semplice tra le numerose funzioni di tensione che si sono utilizzate in teoria dell'elasticità. Essa fu introdotta nell'Ottocento dal matematico ed astronomo G.B. Airy, di cui quindi porta il nome<sup>1</sup>.

#### 20.5.4 Il caso della lastra rettangolare

Si consideri ora un dominio bidimensionale di forma rettangolare, di base  $2b$  ed altezza  $2h$ . Posto l'origine degli assi nel baricentro del rettangolo, le condizioni ai limiti si specializzano nel richiedere, sui quattro lati (cfr. Figura 20.7)

— sul lato  $AB$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (0, -1)$  si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= -p_1 \\ \sigma_{22} &= -p_2\end{aligned}\tag{20.50}$$

— sul lato  $BC$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (1, 0)$  si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= p_1 \\ \sigma_{12} &= p_2\end{aligned}\tag{20.51}$$

— sul lato  $CD$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (0, 1)$  si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= p_1 \\ \sigma_{22} &= p_2\end{aligned}\tag{20.52}$$

— sul lato  $AD$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (-1, 0)$  si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p_1 \\ \sigma_{12} &= -p_2\end{aligned}\tag{20.53}$$

Ciò premesso, si utilizza ora il *metodo inverso*, che consiste nell'assumere una soluzione  $\Phi(x_1, x_2)$  per l'equazione (20.49), da essa dedurre il campo tensionale, e tramite le condizioni ai limiti risalire alle forze superficiali  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  agenti sul dominio.

#### Esempio n.1 - La soluzione polinomiale quadratica

Una soluzione della (20.49) sarà sicuramente ottenibile ipotizzando che la funzione di Airy  $\Phi(x_1, x_2)$  sia esprimibile come un polinomio di secondo grado:

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{c_0}{2}x_1^2 + c_1x_1x_2 + \frac{c_2}{2}x_2^2\tag{20.54}$$

<sup>1</sup>G.B. Airy *On the strains in the interior of beams*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 153, 49–80 (1863). E' questo il primo e più semplice esempio di funzione di tensione, limitato agli stati bidimensionali.

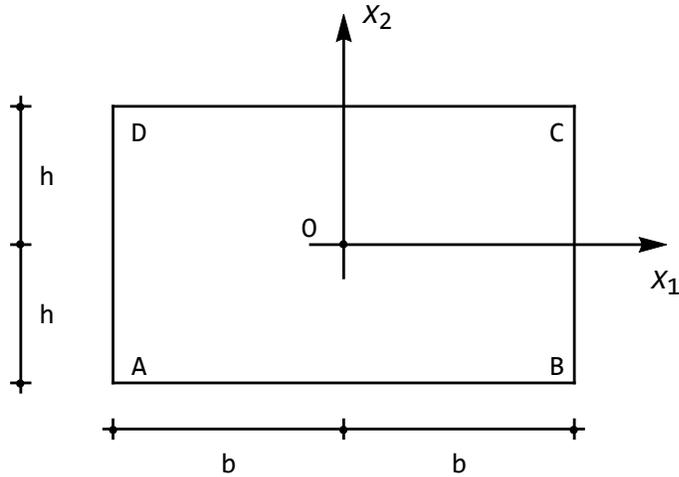


Figura 20.7: Un dominio rettangolare in stato piano

Il corrispondente campo tensionale sarà costante, e pari a:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = c_2 \\
 \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = c_0 \\
 \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -c_1
 \end{aligned}
 \tag{20.55}$$

Utilizzando ora le condizioni ai limiti, si potrà concludere che le forze esterne che causano le tensioni (20.55) saranno fornite da (cfr. Figura 20.8): — sul lato  $AB$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (0, -1)$  si avrà una componente  $p_1 = c_1$ , diretta in senso equiverso all'asse  $X_1$ , e quindi verso destra, ed una componente  $p_2 = -c_0$  diretta in senso contrario all'asse  $X_2$ , ossia verso il basso,

— sul lato  $BC$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (1, 0)$  si avrà una componente  $p_1 = c_2$ , diretta in senso equiverso all'asse  $X_1$ , e quindi verso destra, ed una componente  $p_2 = -c_1$ , diretta in senso contrario all'asse  $X_2$ , ossia verso il basso,

— sul lato  $CD$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (0, 1)$  si avrà una componente  $p_1 = -c_1$ , diretta in senso contrario all'asse  $X_1$ , e quindi verso sinistra, ed una componente  $p_2 = c_0$ , diretta in senso equiverso all'asse  $X_2$ , ossia verso l'alto,

— sul lato  $AD$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (-1, 0)$  si avrà una componente  $p_1 = -c_2$ , diretta in senso contrario all'asse  $X_1$ , e quindi verso sinistra, ed una componente  $p_2 = c_1$ , diretta in senso equiverso all'asse  $X_2$ , ossia verso l'alto

Possono distinguersi i seguenti casi particolari:

1.  $c_0 = c_1 = 0$ , trazione semplice secondo l'asse orizzontale
2.  $c_1 = c_2 = 0$ , trazione semplice secondo l'asse verticale

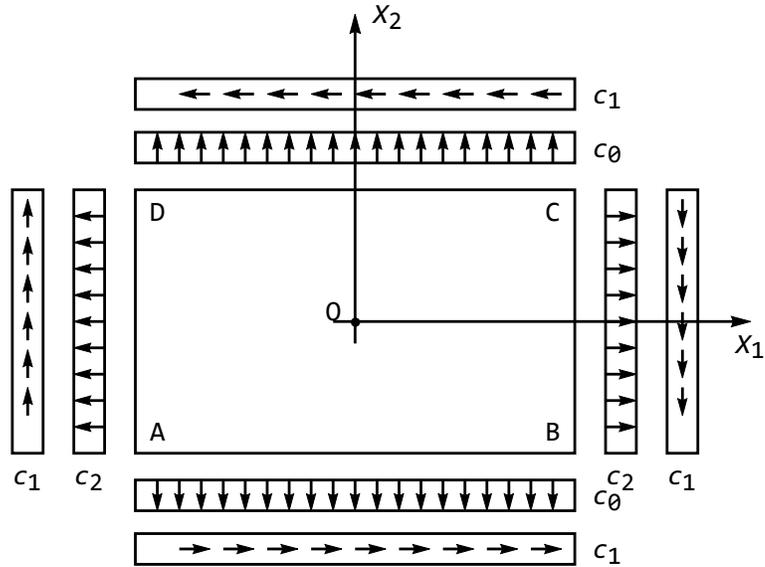


Figura 20.8: Le forze esterne corrispondenti ad una funzione di Airy polinomiale di secondo grado

3.  $c_0 = c_2 = 0$ , taglio semplice

### Esempio n.2 - La soluzione polinomiale cubica

Una soluzione della (20.49) sarà sicuramente ottenibile anche ipotizzando che  $\Phi(x_1, x_2)$  sia esprimibile come un polinomio di terzo grado:

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{c_0}{6}x_1^3 + \frac{c_1}{2}x_1^2x_2 + \frac{c_2}{2}x_1x_2^2 + \frac{c_3}{6}x_2^3 \quad (20.56)$$

Il corrispondente campo tensionale sarà ora variabile linearmente all'interno del solido, e pari a:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = c_2x_1 + c_3x_2 \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = c_0x_1 + c_1x_2 \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -c_1x_1 - c_2x_2 \end{aligned} \quad (20.57)$$

Utilizzando le condizioni ai limiti, si potrà concludere che le forze esterne che causano le tensioni (20.57) saranno fornite da:

— sul lato  $AB$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (0, -1)$  si avranno le forze:

$$\begin{aligned} p_1 &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ p_2 &= -c_0 x_1 - c_1 x_2 \end{aligned} \quad (20.58)$$

— sul lato  $BC$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (1, 0)$  si avranno le forze:

$$\begin{aligned} p_1 &= c_2 x_1 + c_3 x_2 \\ p_2 &= -c_1 x_1 - c_2 x_2 \end{aligned} \quad (20.59)$$

— sul lato  $CD$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (0, 1)$  si avranno le forze:

$$\begin{aligned} p_1 &= -c_1 x_1 - c_2 x_2 \\ p_2 &= c_0 x_1 + c_1 x_2 \end{aligned} \quad (20.60)$$

— sul lato  $AD$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (-1, 0)$  si avranno le forze:

$$\begin{aligned} p_1 &= -c_2 x_1 - c_3 x_2 \\ p_2 &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \end{aligned} \quad (20.61)$$

Alcune sollecitazioni di interesse sono ricavabili come casi particolari:

**Caso 1** –  $c_0 = c_1 = c_2 = 0$  I lati orizzontali sono scarichi, i due lati verticali sono sollecitati da un carico orizzontale  $p_1$ , variabile linearmente lungo l'altezza del dominio piano in esame. In particolare,  $p_1 = c_3 x_2$  sul lato destro, e  $p_1 = -c_3 x_2$  sul lato sinistro.

Come può evincersi dalla Figura 20.9, la distribuzione di forze superficiali lungo il bordo destro è equivalente ad una coppia oraria, mentre a sinistra è equivalente ad una coppia antioraria della stessa intensità. E' questo il caso della *flessione*.

**Caso 2** –  $c_0 = c_2 = c_3 = 0$  Si avrà ora:

— sul lato  $AB$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (0, -1)$  si avranno le forze  $p_1 = c_1 x_1$  linearmente variabili, e le forze  $p_2 = c_1 h$ , costanti,

— sul lato  $BC$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (1, 0)$  si avranno le forze  $p_2 = -c_1 b$ , costanti,

— sul lato  $CD$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (0, 1)$  si avranno le forze  $p_1 = -c_1 x_1$  linearmente variabili, e le forze  $p_2 = c_1 h$ , costanti,

— sul lato  $AD$ , di normale uscente  $\mathbf{n} = (-1, 0)$  si avranno le forze  $p_2 = -c_1 b$ , costanti,

Ne segue la condizione di carico in Figura 20.10. Gli altri due casi particolari sono simili a quelli descritti.

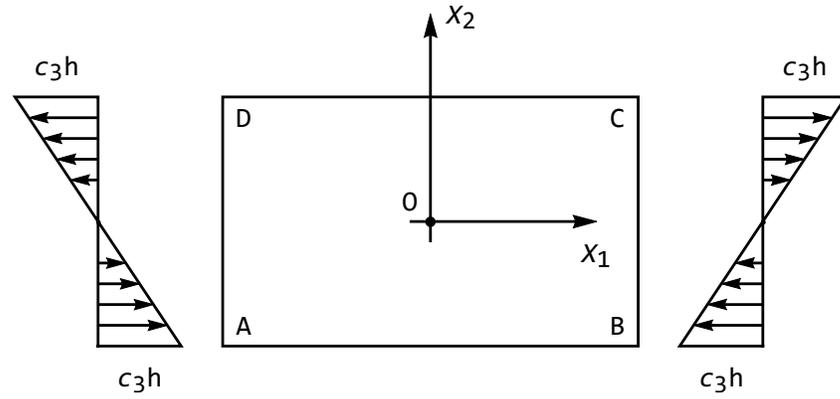


Figura 20.9: Le forze esterne corrispondenti ad una funzione di Airy polinomiale di terzo grado  $\Phi(x_1, x_2) = \frac{c_3}{6} x_2^3$

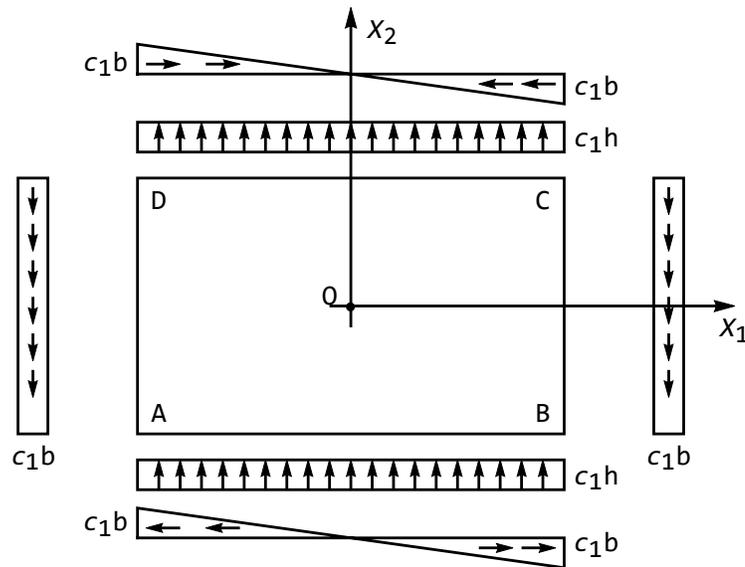


Figura 20.10: Le forze esterne corrispondenti ad una funzione di Airy polinomiale di terzo grado  $\Phi(x_1, x_2) = \frac{c_1}{3} x_1^2 x_2$

## Capitolo 21

# I principi variazionali

Nei Capitoli lezioni precedenti si è adottata la cosiddetta via differenziale, o *metodo diretto*, nel senso che si sono scritte le condizioni di equilibrio elastico in termini di equazioni differenziali, ottenendo il sistema di tre equazioni lineari del secondo ordine, note come equazioni di Navier–Cauchy.

Da questo Capitolo si inizia a percorrere la cosiddetta via integrale, o *metodo variazionale*, in cui le condizioni di equilibrio verranno espresse tramite identità integrali, introducendo alcuni funzionali di fondamentale importanza e definendo alcuni principi di minimo di uso corrente in teoria delle strutture. Ambedue gli approcci sono antichissimi, come può dedursi dalla seguente citazione di Eulero:

Poichè la fabbrica dell'Universo è perfetta, ed è il lavoro del più saggio Creatore, nulla accade nell'universo per cui non si manifesti qualche relazione di massimo o minimo.

Non c'è quindi alcun dubbio che qualunque cosa nell'universo possa spiegarsi in modo soddisfacente a partire dalle cause finali, con l'ausilio del metodo dei massimi e minimi, così come con l'ausilio delle stesse cause effettive. Perciò, si aprono due vie per studiare i fenomeni naturali, uno tramite l'analisi delle cause effettive, comunemente chiamato metodo diretto, e l'altro per mezzo delle cause finali

### 21.1 Il principio dei lavori virtuali

Si dimostrerà ora il principio dei lavori virtuali per solidi deformabili, diretta estensione del principio dei lavori virtuali per i sistemi rigidi. Laddove, però, quest'ultimo è stato assunto come assioma fondamentale, e quindi indimostrabile, della statica dei corpi rigidi, il principio dei lavori virtuali per solidi deformabili è una identità matematica, che può essere dimostrata ed interpretata meccanicamente. Esso rappresenta la pietra miliare della meccanica, e su di esso

è possibile edificare tutto l'edificio concettuale della meccanica stessa. Ad esso sono dedicati innumerevoli articoli e libri, sia di carattere storico che scientifico<sup>1</sup>.

Si consideri un corpo  $B$ , soggetto alle forze di massa  $\mathbf{X}$ , alle forze superficiali  $\mathbf{p}$  sulla parte di frontiera  $\partial B_1$  ed agli spostamenti  $\mathbf{f}$  sulla restante parte  $\partial B_2$ . Si forniscono le seguenti:

**Definizione 6.** Una distribuzione simmetrica di tensioni:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (21.1)$$

si dice staticamente ammissibile se soddisfa le condizioni indefinite di equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + X_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + X_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 &= 0 \end{aligned} \quad (21.2)$$

all'interno del corpo, e le condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= p_1 \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 &= p_2 \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 &= p_3 \end{aligned} \quad (21.3)$$

sulla frontiera  $\partial B_1$ .

**Definizione 7.** Una terna di spostamenti  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  si dice geometricamente ammissibile se è rispettosa dei vincoli, ossia se soddisfa le condizioni:

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1 \\ u_2 &= f_2 \\ u_3 &= f_3 \end{aligned} \quad (21.4)$$

sulla frontiera  $\partial B_2$ .

Vale la seguente *identità fondamentale*, che lega le due quantità appena definite:

<sup>1</sup>Ad esempio, si può consultare il libro di G.A.O. Davies, *Virtual Work in Structural Analysis*, J. Wiley 1982, per applicazioni svolte sia utilizzando il principio degli spostamenti virtuali (Capitolo 2) che il principio delle forze virtuali (Capitolo 3). Una interessante storia del principio dei lavori virtuali può leggersi nel libro *I Fondamenti della Statica* di Gustavo Colonnetti, UTET 1927, mentre una storia più moderna è quella di Sergio Cavallone, pubblicato in *Impiantistica Italiana*, marzo 1995, pp.148-158. Infine, Danilo Capecchi ha dedicato alla storia del principio dei lavori virtuali i libri *Il Principio dei Lavori Virtuali da Aristotele a Bernoulli*, Luda, Napoli (2000) e *Storia del principio dei lavori virtuali. La Meccanica alternativa Hevelius*, Benevento (2002)

**Teorema 10.** (*Principio dei lavori virtuali*) - Siano:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (21.5)$$

un campo di tensioni staticamente ammissibili, ed  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  un campo di spostamenti geometricamente ammissibili. Vale la seguente identità:

$$\int_B \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = \int_B X_i u_i dV + \int_{\partial B_1} p_i u_i ds + \int_{\partial B_2} \sigma_{ij} n_j f_i ds \quad (21.6)$$

ossia, in esteso:

$$\begin{aligned} & \int_B \left( \sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sigma_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \sigma_{12} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right. \\ & \quad \left. + \sigma_{13} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \sigma_{23} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \right) dV = \\ & \int_B (X_1 u_1 + X_2 u_2 + X_3 u_3) dV + \int_{\partial B_1} (p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3) ds + \\ & \int_{\partial B_2} ((\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) f_1 + (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3) f_2 + \\ & \quad (\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3) f_3) ds \end{aligned} \quad (21.7)$$

*Dimostrazione.* Applicando il teorema di Gauss agli integrali al primo membro si ha:

$$\int_B \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = - \int_B \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i dV + \int_{\partial B} \sigma_{ij} n_j u_i ds \quad (21.8)$$

e quindi la (21.6) diviene:

$$\int_{\partial B} \sigma_{ij} n_j u_i ds = \int_B \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) u_i dV + \int_{\partial B_1} p_i u_i ds + \int_{\partial B_2} \sigma_{ij} n_j f_i ds \quad (21.9)$$

Se il campo di tensioni è staticamente ammissibile, allora gli integrali di volume saranno nulli, in base alle (21.2). Spezzando gli integrali al primo membro in due integrali, il primo esteso a  $\partial B_1$  ed il secondo a  $\partial B_2$  si ha:

$$\int_{\partial B_1} (\sigma_{ij} n_j - p_i) u_i ds = \int_{\partial B_2} (\sigma_{ij} n_j) (f_i - u_i) ds \quad (21.10)$$

Il primo membro sarà nullo, se le tensioni sono staticamente ammissibili, in base alla (21.3), mentre il secondo membro sarà nullo, se gli spostamenti sono geometricamente ammissibili, in base alle (21.4). L'uguaglianza è quindi dimostrata.  $\square$

**Interpretazione meccanica** - Si consideri il primo integrale di volume a secondo membro della (21.6):

$$L_B = \int_B X_i u_i dV \quad (21.11)$$

Esso è interpretabile come il lavoro compiuto dalle forze di massa per effetto del campo di spostamenti geometricamente ammissibili  $\mathbf{u}$ . Poichè questo lavoro non è reale, in quanto gli spostamenti non devono necessariamente essere quelli effettivi, si parla di lavoro *virtuale* delle forze di massa.

Analogamente, l'integrale:

$$L_s = \int_{\partial B_1} p_i u_i ds \quad (21.12)$$

è il lavoro virtuale delle forze superficiali applicate, mentre l'integrale:

$$L_f = \int_{\partial B_2} \sigma_{ij} n_j f_i ds \quad (21.13)$$

è il lavoro virtuale che le tensioni staticamente ammissibili compiono per effetto degli eventuali cedimenti imposti  $\mathbf{f}$ . Nel caso di vincoli perfetti, questa aliquota sarà nulla.

Infine, l'integrale a primo membro:

$$L_\sigma = \int_B \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \quad (21.14)$$

potrà risciversi, ricordando la decomposizione della matrice del gradiente di spostamento nella somma di una parte simmetrica ed una antisimmetrica:

$$L_\sigma = \int_B \sigma_{ij} (e_{ij} + \omega_{ij}) dV \quad (21.15)$$

e poichè risulta  $\sigma_{ij} \omega_{ij} = 0$ , come può facilmente controllarsi, si ha:

$$L_\sigma = \int_B \sigma_{ij} e_{ij} dV \quad (21.16)$$

e quindi l'integrale a primo membro potrà interpretarsi come il lavoro virtuale che le tensioni staticamente ammissibili compiono per effetto delle deformazioni geometricamente ammissibili, ossia derivate dal campo di spostamenti geometricamente ammissibili.

Ed infatti, si consideri la faccia di area  $dx_1 dx_3$  del parallelepipedo elementare, riportato in pianta in Figura 21.1. Su di essa agisce la tensione normale  $\sigma_{11}$  e la tensione tangenziale  $\sigma_{12}$ , e corrispondentemente è presente una dilatazione in senso assiale di intensità  $e_{11}$  ed una variazione angolare  $\gamma_{12} = 2e_{12}$ . Il lavoro della forza elementare  $\sigma_{11} dx_1 dx_3$  è calcolabile considerando che il coefficiente di dilatazione assiale  $e_{11}$  implica un allungamento del segmento  $dx_1$  pari a  $e_{11} dx_1$ , mentre il lavoro della forza elementare  $\sigma_{12} dx_2 dx_3$  è calcolabile considerando che

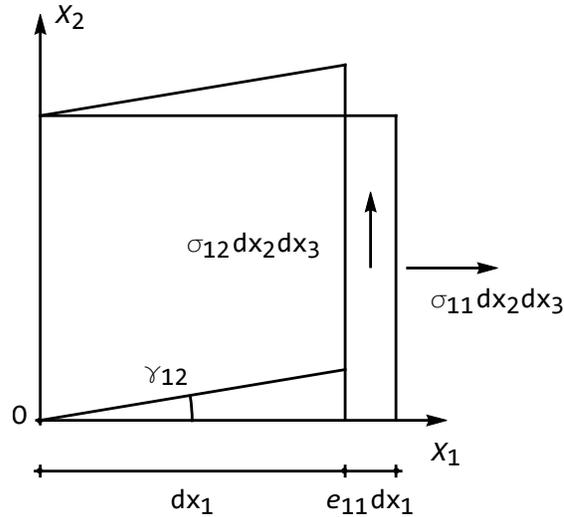


Figura 21.1: Le forze elementari agenti su una faccia del parallelepipedo, e le corrispondenti deformazioni

una variazione angolare  $\gamma_{12}$  implica che la faccia si sposta in verticale di  $\gamma_{12} dx_1$ . Segue che il lavoro complessivo è:

$$L = \sigma_{11} e_{11} dx_1 dx_2 dx_3 + 2\sigma_{12} e_{12} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (21.17)$$

È evidente che non esiste alcun legame (elastico o altri) tra le  $\sigma_{ij}$  e le  $e_{ij}$ , e questo giustifica l'aggettivo "virtuale" ad un lavoro che non è effettivamente svolto. L'identità (21.6), pertanto, può anche essere enunciata affermando che *il lavoro virtuale interno di un campo di tensioni staticamente ammissibile per effetto di un campo di spostamenti geometricamente ammissibile, è pari al lavoro virtuale esterno delle forze di massa, delle forze superficiali e degli eventuali cedimenti presenti.*

Per esprimere il principio dei lavori virtuali in forma compatta, particolarmente conveniente risulta la notazione matriciale. Ricordando di aver definito il vettore colonna delle tensioni:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\} \quad (21.18)$$

ed il vettore colonna delle deformazioni:

$$\mathbf{e}^T = \{e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2e_{12}, 2e_{13}, 2e_{23}\} \quad (21.19)$$

è facile realizzare che il p.l.v. si scrive:

$$\int_B \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e} dV = \int_B \mathbf{X}^T \mathbf{u} dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \mathbf{u} ds + \int_{\partial B_2} (\mathbf{S}\mathbf{n})^T \mathbf{f} ds \quad (21.20)$$

## 21.2 Il principio degli spostamenti virtuali

Si ipotizzi ora di aver risolto il problema dell'equilibrio elastico, e di aver quindi ricavato gli spostamenti effettivi  $\mathbf{u}^* = (u^*, v^*, w^*)$  e le tensioni effettive:

$$\mathbf{S}^* = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^* & \sigma_{12}^* & \sigma_{13}^* \\ \sigma_{12}^* & \sigma_{22}^* & \sigma_{23}^* \\ \sigma_{13}^* & \sigma_{23}^* & \sigma_{33}^* \end{pmatrix} \quad (21.21)$$

E' ovvio che gli spostamenti  $\mathbf{u}^*$  sono geometricamente ammissibili, e che le tensioni  $\mathbf{S}^*$  sono staticamente ammissibili

Si definisca poi un ulteriore campo di spostamenti arbitrario:

$$\mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u} = \{u_1^* + \delta u_1, u_2^* + \delta u_2, u_3^* + \delta u_3\} \quad (21.22)$$

anch'esso geometricamente ammissibile, ed ottenuto aggiungendo alla soluzione classica lo *spostamento virtuale* (o la *variazione*)  $\delta\mathbf{u}$ . Poichè sia  $\mathbf{u}^*$  che  $\mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}$  sono geometricamente ammissibili, ne segue che dovrà essere:

$$\delta\mathbf{u} = 0 \quad (21.23)$$

sulla parte di frontiera  $\partial B_2$ .

Si scriva il principio dei lavori virtuali utilizzando  $\mathbf{S}^*$  come tensioni, e  $\mathbf{u}^*$  come spostamenti

$$\int_B \boldsymbol{\sigma}^{*T} \mathbf{e}^* dV = \int_B \mathbf{X}^T \mathbf{u}^* dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \mathbf{u}^* ds + \int_{\partial B_2} (\mathbf{S}^* \mathbf{n})^T \mathbf{f} ds \quad (21.24)$$

Si scriva poi il principio dei lavori virtuali utilizzando ancora  $\mathbf{S}^*$  come tensioni, e  $\mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}$  come spostamenti:

$$\begin{aligned} \int_B \boldsymbol{\sigma}^{*T} (\mathbf{e}^* + \delta\mathbf{e}) dV = \\ \int_B \mathbf{X}^T (\mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}) dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T (\mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}) ds + \int_{\partial B_2} (\mathbf{S}^* \mathbf{n})^T \mathbf{f} ds \end{aligned} \quad (21.25)$$

dove  $\delta\mathbf{e}$  sono le deformazioni virtuali dovute agli spostamenti virtuali  $\delta\mathbf{u}$ .

Sottraendo membro a membro si giunge al:

**Teorema 11.** (*Principio degli spostamenti virtuali*) - Sia  $\mathbf{S}^*$  un campo di tensioni staticamente ammissibile, e sia  $\delta\mathbf{u}$  un campo di spostamenti arbitrario, che soddisfi le condizioni omogenee:

$$\delta u_i = 0 \quad (21.26)$$

su  $\partial B_2$ .

Vale la seguente uguaglianza:

$$\int_B \boldsymbol{\sigma}^{*T} \delta\mathbf{e} dV = \int_B \mathbf{X}^T \delta\mathbf{u} dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \delta\mathbf{u} ds \quad (21.27)$$

o, in forma indiciale:

$$\int_B \sigma_{ij}^* \delta e_{ij} dV = \int_B X_i \delta u_i dV + \int_{\partial B_1} p_i \delta u_i ds \quad (21.28)$$

## 21.3 Il principio delle forze virtuali

Analogamente a quanto detto per il paragrafo precedente, si ipotizzi di aver risolto il problema dell'equilibrio elastico, e di aver quindi ricavato gli spostamenti effettivi  $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$  e le tensioni effettive:

$$\mathbf{S}^* = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^* & \sigma_{12}^* & \sigma_{13}^* \\ \sigma_{12}^* & \sigma_{22}^* & \sigma_{23}^* \\ \sigma_{13}^* & \sigma_{23}^* & \sigma_{33}^* \end{pmatrix} \quad (21.29)$$

Si definisca ora un campo di tensioni arbitrario:

$$\mathbf{S}^* + \delta\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^* + \delta\sigma_{11} & \sigma_{12}^* + \delta\sigma_{12} & \sigma_{13}^* + \delta\sigma_{12} \\ \sigma_{12}^* + \delta\sigma_{12} & \sigma_{22}^* + \delta\sigma_{22} & \sigma_{23}^* + \delta\sigma_{23} \\ \sigma_{13}^* + \delta\sigma_{13} & \sigma_{23}^* + \delta\sigma_{23} & \sigma_{33}^* + \delta\sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (21.30)$$

anch'esso staticamente ammissibile, ed ottenuto aggiungendo alla soluzione classica le *tensioni virtuali* (o le *variazioni*)  $\delta\mathbf{S}$ . Poichè sia  $\mathbf{S}^*$  che  $\mathbf{S}^* + \delta\mathbf{S}$  sono staticamente ammissibili, ne segue che dovrà essere:

$$\frac{\partial \delta\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (21.31)$$

nell'interno del corpo, e:

$$\delta\sigma_{ij}n_j = 0 \quad (21.32)$$

sulla parte di frontiera  $\delta B_1$ . In altri termini le tensioni virtuali  $\delta\mathbf{S}$  sono *autoequilibrate*.

Si scriva il principio dei lavori virtuali utilizzando  $\mathbf{S}^*$  come tensioni, e  $\mathbf{u}^*$  come spostamenti:

$$\int_B \boldsymbol{\sigma}^{*T} \mathbf{e}^* dV = \int_B \mathbf{X}^T \mathbf{u}^* dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \mathbf{u}^* ds + \int_{\partial B_2} (\mathbf{S}^* \mathbf{n})^T \mathbf{f} ds \quad (21.33)$$

Si scriva poi il principio dei lavori virtuali utilizzando ancora  $\mathbf{u}^*$  come spostamenti, e  $\mathbf{S}^* + \delta\mathbf{S}$  come tensioni:

$$\int_B (\boldsymbol{\sigma}^* + \delta\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{e}^* dV = \int_B \mathbf{X}^T \mathbf{u}^* dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \mathbf{u}^* ds + \int_{\partial B_2} [(\mathbf{S}^* + \delta\mathbf{S}) \mathbf{n}]^T \mathbf{f} ds \quad (21.34)$$

Sottraendo membro a membro si giunge al:

**Teorema 12.** (*Principio delle forze virtuali*) - Sia  $\mathbf{u}^*$  un campo di spostamenti geometricamente ammissibile, e sia  $\delta\mathbf{S}$  un campo di tensioni arbitrario autoequilibrato.

Vale la seguente uguaglianza:

$$\int_B \delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e}^* dV = \int_{\partial B_2} (\delta\mathbf{S}\mathbf{n})^T \mathbf{f} ds \quad (21.35)$$

o, in forma indiciale:

$$\int_B \delta\sigma_{ij} e_{ij}^* dV = \int_{\partial B_2} \delta\sigma_{ij} n_j f_i ds \quad (21.36)$$

## 21.4 L'energia elastica

Si consideri un corpo  $B$ , e si supponga che per esso valgano le leggi dell'iperelasticità, garantendo l'esistenza di un potenziale elastico definito in ciascun punto del corpo. Si definisce *energia elastica*  $L$  di un corpo  $B$  l'integrale, esteso al volume di  $B$ , del potenziale elastico, espresso in funzione degli spostamenti.

In ipotesi di validità della legge di Hooke, quindi, si ha:

$$L(\mathbf{e}) = \int_B \phi(\mathbf{e}) \, dV = \frac{1}{2} \int_B \mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e} \, dV \quad (21.37)$$

Si definisce poi *energia potenziale*  $P$  dei carichi applicati l'inverso del lavoro da essi compiuto:

$$P(\mathbf{u}) = - \int_B \mathbf{X}^T \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \mathbf{u} \, ds \quad (21.38)$$

La *variazione*  $\delta L$  dell'energia elastica si ottiene nel modo più semplice calcolando la differenza tra la quantità incrementata e la quantità originaria:

$$\begin{aligned} \delta L &= L(\mathbf{e} + \delta \mathbf{e}) - L(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \int_B (\mathbf{e} + \delta \mathbf{e})^T \mathbf{C} (\mathbf{e} + \delta \mathbf{e}) \, dV - \frac{1}{2} \int_B \mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e} \, dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_B (\mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e} + \delta \mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{e} + \delta \mathbf{e}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e}) \, dV = \\ &= \int_B \mathbf{e}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{e} \, dV + \frac{1}{2} \int_B \delta \mathbf{e}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{e} \, dV \end{aligned} \quad (21.39)$$

dove si è utilizzata la simmetria della matrice  $\mathbf{C}$  al fine di dimostrare che  $\delta \mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{e}$ .

Come si vede dalla formula precedente, la variazione  $\delta L$  è somma di una quantità lineare in  $\delta \mathbf{e}$  e di una quantità quadratica in  $\delta \mathbf{e}$ . La parte lineare si chiama spesso *variazione prima* della energia elastica:

$$\delta_1 L = \int_B \mathbf{e}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{e} \, dV \quad (21.40)$$

mentre la parte quadratica, detta *variazione seconda*, è fornita da:

$$\delta_2 L = \frac{1}{2} \int_B \delta \mathbf{e}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{e} \, dV \quad (21.41)$$

La variazione  $\delta P$  dell'energia potenziale si ottiene analogamente:

$$\begin{aligned} \delta P &= P(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - P(\mathbf{u}) = \\ &= - \int_B \mathbf{X}^T (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) \, dV - \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T (\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) \, ds + \int_B \mathbf{X}^T \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \mathbf{u} \, ds = \\ &= - \int_B \mathbf{X}^T \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{u} \, ds \end{aligned} \quad (21.42)$$

Si può notare che la variazione dell'energia potenziale è limitata ad una sola parte lineare in  $\delta \mathbf{u}$ , e quindi può scriversi:

$$\delta_1 P = - \int_B \mathbf{X}^T \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{u} ds \quad (21.43)$$

## 21.5 Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale

Si consideri l'espressione del principio degli spostamenti virtuali, come fornita dalla (21.27), e si introduca la legge di Hooke nel primo integrale:

$$\int_B \mathbf{e}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{e} dV - \int_B \mathbf{X}^T \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \delta \mathbf{u} ds = 0 \quad (21.44)$$

Si noti che ora le tensioni e le deformazioni non sono più quantità tra loro indipendenti, ma sono collegate dal legame elastico ipotizzato. Di conseguenza, si è eliminato l'asterisco sulla prima  $\mathbf{e}$ .

Utilizzando la (21.40) e la (21.43) si ha poi:

$$\delta_1(L + P) = 0 \quad (21.45)$$

La quantità tra parentesi si dice l'*energia potenziale totale*  $E_t$  del corpo B:

$$E_t = L + P = \frac{1}{2} \int_B \mathbf{e}^T \mathbf{C} \mathbf{e} dV - \int_B \mathbf{X}^T \mathbf{u} dV - \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \mathbf{u} ds \quad (21.46)$$

ed è pari alla somma dell'energia elastica e dell'energia potenziale dei carichi.

La (21.46) dimostra il:

**Teorema 13.** (*Principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale*) - *Il funzionale dell'energia potenziale totale raggiunge un punto di stazionarietà in corrispondenza dello spostamento  $\mathbf{u}$  soluzione del problema elastico.*

Nota - Come si è visto, la via variazionale è antichissima, ed è molto difficile attribuire la paternità del principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale<sup>2</sup>.

## 21.6 L'energia complementare

Si consideri un corpo  $B$ , e si supponga che per esso valgano le leggi dell'iperelasticità, garantendo l'esistenza di un potenziale elastico definito in ciascun punto del

<sup>2</sup>Secondo Gurtin, le idee di base sono dovute a George Green, *On the laws of reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media*, Trans. Cambridge Phil. Soc. 7, 1-24 (1839), anche se la sistemazione definitiva è dovuta ad A.E.H. Love *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd ed. Dover Publ. (1906) e Gustavo Colonnetti, *L'equilibrio elastico dal punto di vista energetico*, Mem. Accad. Sci. Torino, (2), 62, 479-495 (1912)

corpo. Si definisce *energia complementare*  $L_c$  di un corpo  $B$  l'integrale, esteso al volume di  $B$ , del potenziale elastico, espresso in funzione delle tensioni. In ipotesi di validità della legge di Hooke, quindi, si ha:

$$L_c(\boldsymbol{\sigma}) = \int_B \phi(\boldsymbol{\sigma}) \, dV = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad (21.47)$$

La *variazione*  $\delta L_c$  dell'energia complementare si ottiene analogamente a quanto



Figura 21.2: Gustavo Colonnetti

già fatto per l'energia elastica:

$$\delta L_c = \int_B \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A} \delta \boldsymbol{\sigma} \, dV + \frac{1}{2} \int_B \delta \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A} \delta \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad (21.48)$$

e la *variazione prima* della energia complementare è:

$$\delta_1 L_c = \int_B \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A} \delta \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad (21.49)$$

## 21.7 Il principio di stazionarietà dell'energia complementare totale

Si consideri l'espressione del principio delle forze virtuali, come fornita dalla (21.35), e si introduca la legge di Hooke nel primo integrale:

$$\int_B \delta \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_{\partial B_2} (\delta \mathbf{S} \mathbf{n})^T \mathbf{f} \, ds = 0 \quad (21.50)$$

Utilizzando la (21.49) si ha poi:

$$\delta_1 \left\{ L_c - \int_{\partial B_2} (\mathbf{S} \mathbf{n})^T \mathbf{f} \, ds \right\} = 0 \quad (21.51)$$

La quantità tra parentesi si dice *energia complementare totale*  $E_{tc}$  del corpo  $B$ :

$$E_{tc} = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_{\partial B_2} (\mathbf{S}n)^T \mathbf{f} \, ds \quad (21.52)$$

La (21.52) dimostra il:

**Teorema 14.** (*Principio di stazionarietà dell'energia complementare totale*) - *Il funzionale dell'energia complementare totale raggiunge un punto di stazionarietà in corrispondenza della soluzione del problema elastico.*

Secondo Gurtin, la paternità del principio di stazionarietà dell'energia complementare totale può essere attribuita a Gustavo Colonnetti<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Si veda ancora Gustavo Colonnetti, *L'equilibrio elastico dal punto di vista energetico*, Mem. Accad. Sci. Torino, (2), 62, 479-495 (1912)



## Capitolo 22

# La geometria delle aree

In questo Capitolo si richiamano sinteticamente alcune nozioni di geometria delle aree (baricentro di una figura piana, momento statico e momento di inerzia di una figura piana rispetto ad un asse) che saranno essenziali per il seguente studio della trave.

### 22.1 La nozione di baricentro

Si consideri un'area  $\Sigma$  nel piano, sia  $(O, X_1, X_2)$  un sistema di riferimento ortogonale levogiro, sia  $P$  un punto generico di  $\Sigma$ , di coordinate  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ .

Una *traslazione* del sistema di riferimento, che sposti l'origine  $O = (0, 0)$  nel punto  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20})$  si ottiene correlando le coordinate  $\mathbf{x}$  del generico punto  $P$  nel vecchio sistema di riferimento alle coordinate  $\mathbf{x}^t$  dello stesso punto  $P$  nel nuovo riferimento tramite le relazioni (cfr. Figura 22.1):

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad (22.1)$$

o, equivalentemente:

$$\begin{aligned} x_1^t &= x_1 - x_{01} \\ x_2^t &= x_2 - x_{02} \end{aligned} \quad (22.2)$$

Una *rotazione* del sistema di riferimento, definita attraverso una rotazione di ampiezza  $\phi$ , si ottiene correlando le coordinate  $\mathbf{x}$  del generico punto  $P$  nel vecchio sistema di riferimento alle coordinate  $\mathbf{x}^r$  dello stesso punto  $P$  nel nuovo riferimento tramite le relazioni:

$$\mathbf{x}^r = \mathbf{R}\mathbf{x} \quad (22.3)$$

dove  $\mathbf{R}$  è la matrice di rotazione:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (22.4)$$

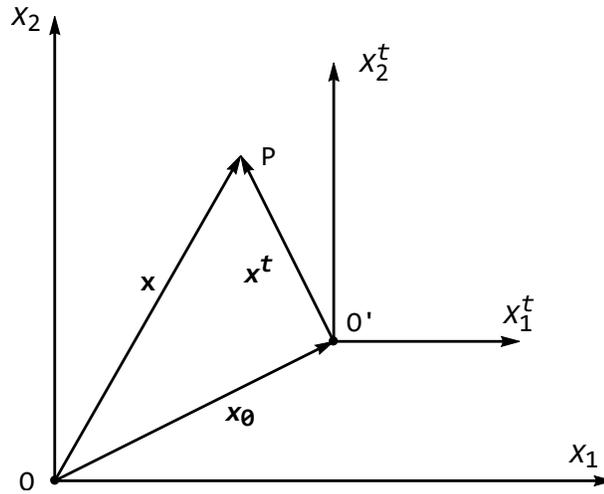


Figura 22.1: La traslazione rigida del sistema di riferimento

Ed infatti, dalla Figura 22.2 risulta agevole calcolare:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^r \cos \phi - x_2^r \sin \phi \\ x_2 &= x_1^r \sin \phi + x_2^r \cos \phi \end{aligned} \quad (22.5)$$

ed invertire questa relazione. Si noti che la matrice di rotazione  $\mathbf{R}$  è ortogonale propria, ossia ha determinante pari a +1, e la sua inversa coincide con la sua trasposta.

Ciò premesso, si definisce *vettore dei momenti statici* relativo all'area  $\Sigma$  ed al sistema di riferimento  $(O, X_1, X_2)$  il seguente vettore:

$$\mathbf{S} = \int_{\Sigma} \mathbf{x} \, dA = \begin{pmatrix} \int_{\Sigma} x_1 \, dA \\ \int_{\Sigma} x_2 \, dA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_2 \\ S_1 \end{pmatrix} \quad (22.6)$$

Si noti subito che la prima componente del vettore dei momenti statici è stata individuata col simbolo  $S_2$ , ed indica il momento statico dell'area  $\Sigma$  rispetto all'asse  $X_2$ , mentre la seconda componente del vettore dei momenti statici è stata individuata col simbolo  $S_1$ , ed indica il momento statico dell'area  $\Sigma$  rispetto all'asse  $X_1$ :

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\Sigma} x_2 \, dA \\ S_2 &= \int_{\Sigma} x_1 \, dA \end{aligned} \quad (22.7)$$

A seguito di una traslazione (22.1) del sistema di riferimento, il vettore dei momenti statici di  $\Sigma$  rispetto al sistema di riferimento traslato diverrà:

$$\mathbf{S}^t = \int_{\Sigma} \mathbf{x}^t \, dA = \int_{\Sigma} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \, dA = \mathbf{S} - \Sigma \mathbf{x}_0 \quad (22.8)$$

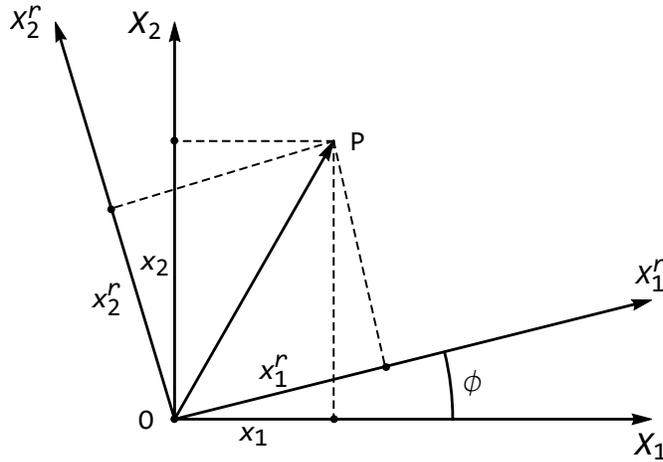


Figura 22.2: Rotazione rigida del sistema di riferimento

o anche, più esplicitamente:

$$\begin{aligned} S_2^t &= S_2 - \Sigma x_{01} \\ S_1^t &= S_1 - \Sigma x_{02} \end{aligned} \quad (22.9)$$

Esisterà allora un punto  $G$ , di coordinate  $(x_{G1}, x_{G2})$ , tale che il vettore dei momenti statici di  $\Sigma$  rispetto al sistema di riferimento traslato in  $G$  sarà nullo. Tale punto si definisce *baricentro* di  $\Sigma$ , e dalle relazioni precedenti possono trarsi le sue coordinate nel sistema di riferimento originario:

$$\begin{aligned} x_{G1} &= \frac{S_2}{\Sigma} \\ x_{G2} &= \frac{S_1}{\Sigma} \end{aligned} \quad (22.10)$$

Può dimostrarsi che le coordinate del baricentro non dipendono dal particolare sistema di riferimento  $(O, X_1, X_2)$  originariamente prescelto.

Dalle (22.10) si trae anche la possibilità di calcolare i momenti statici concentrando l'area  $\Sigma$  nel baricentro, e moltiplicandola per l'opportuna distanza.

## 22.2 Il tensore dei momenti di inerzia

Si definisce *tensore dei momenti di inerzia* di un'area  $\Sigma$  rispetto ad un sistema di riferimento  $(O, X_1, X_2)$  il seguente tensore simmetrico del secondo ordine:

$$\mathbf{I} = \int_{\Sigma} \mathbf{x}\mathbf{x}^T dA = \begin{pmatrix} \int_{\Sigma} x_1^2 dA & \int_{\Sigma} x_1 x_2 dA \\ \int_{\Sigma} x_1 x_2 dA & \int_{\Sigma} x_2^2 dA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{22} & I_{12} \\ I_{12} & I_{11} \end{pmatrix} \quad (22.11)$$

Si noti che anche in questo caso si è definito il *momento d'inerzia* di  $\Sigma$  rispetto all'asse  $X_1$ :

$$I_{11} = \int_{\Sigma} x_2^2 \, dA \quad (22.12)$$

il momento d'inerzia di  $\Sigma$  rispetto all'asse  $X_2$ :

$$I_{22} = \int_{\Sigma} x_1^2 \, dA \quad (22.13)$$

ed infine il *momento centrifugo* di  $\Sigma$  rispetto agli assi  $X_1$  ed  $X_2$ :

$$I_{12} = \int_{\Sigma} x_1 x_2 \, dA \quad (22.14)$$

La traccia della matrice dei momenti di inerzia, invariante rispetto al variare del sistema di riferimento, prende il nome di *momento di inerzia polare*  $I_p$  dell'area  $\Sigma$ :

$$I_p = I_{11} + I_{22} \quad (22.15)$$

### 22.2.1 Le leggi di Huyghens

Si vuol vedere ora come varia il tensore dei momenti di inerzia a seguito di una traslazione del sistema di riferimento. Applicando la regola di traslazione (22.1) si avrà:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^t &= \int_{\Sigma} \mathbf{x}^t \mathbf{x}^{tT} \, dA = \int_{\Sigma} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \, dA \\ &= \int_{\Sigma} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \, dA - \left( \int_{\Sigma} \mathbf{x} \, dA \right) \mathbf{x}_0^T - \mathbf{x}_0 \int_{\Sigma} \mathbf{x}^T \, dA + \mathbf{x}_0 \left( \int_{\Sigma} dA \right) \mathbf{x}_0^T \end{aligned} \quad (22.16)$$

ossia ancora:

$$\mathbf{I}^t = \mathbf{I} + \Sigma \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T - \mathbf{S} \mathbf{x}_0^T - \mathbf{x}_0 \mathbf{S}^T \quad (22.17)$$

Esplicitando si ha:

$$\begin{aligned} I_{22}^t &= I_{22} + A x_{01}^2 - 2S_2 x_{01} \\ I_{11}^t &= I_{11} + A x_{02}^2 - 2S_1 x_{02} \\ I_{12}^t &= I_{12} + A x_{01} x_{02} - S_1 x_{01} - S_2 x_{02} \end{aligned} \quad (22.18)$$

Se l'origine del sistema di riferimento originario coincide col baricentro, si ha  $S_1 = S_2 = 0$ , e si giunge alle classiche *leggi di Huygens*:

$$\begin{aligned} I_{22}^t &= I_{22} + A x_{01}^2 \\ I_{11}^t &= I_{11} + A x_{02}^2 \\ I_{12}^t &= I_{12} + A x_{01} x_{02} \end{aligned} \quad (22.19)$$

Da esse si deduce immediatamente che il momento di inerzia baricentrico è il minimo tra quelli ottenibili per traslazione del sistema di riferimento<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> *Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, Parigi 1673



Figura 22.3: Christiaan Huygens

### 22.2.2 I momenti centrali di inerzia

Si vuol vedere ora come varia il tensore dei momenti di inerzia a seguito di una rotazione del sistema di riferimento. Applicando la regola di rotazione (22.3) si avrà:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^r &= \int_{\Sigma} \mathbf{x}^r \mathbf{x}^{rT} dA = \\ &= \int_{\Sigma} \mathbf{R} \mathbf{x} (\mathbf{R} \mathbf{x})^T dA = \int_{\Sigma} \mathbf{R} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^T dA = \mathbf{R} \left( \int_{\Sigma} \mathbf{x} \mathbf{x}^T dA \right) \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \mathbf{I} \mathbf{R}^T \end{aligned} \quad (22.20)$$

Esplicitando si ha, utilizzando la (22.4):

$$\begin{aligned} I_{22}^r &= I_{11} \sin^2 \phi + 2I_{12} \cos \phi \sin \phi + I_{22} \cos^2 \phi \\ I_{11}^r &= I_{11} \cos^2 \phi - 2I_{12} \cos \phi \sin \phi + I_{22} \sin^2 \phi \\ I_{12}^r &= (I_{11} - I_{22}) \sin \phi \cos \phi + I_{12} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \end{aligned} \quad (22.21)$$

Ricordando le formule trigonometriche:

$$\begin{aligned} \sin 2\phi &= 2 \sin \phi \cos \phi \\ \cos 2\phi &= \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \end{aligned} \quad (22.22)$$

il momento d'inerzia centrifugo potrà anche scriversi:

$$I_{12}^r = \frac{1}{2} (I_{11} - I_{22}) \sin 2\phi + I_{12} \cos 2\phi \quad (22.23)$$

Esisterà quindi un valore dell'angolo  $\phi$  per cui il momento d'inerzia centrifugo  $I_{12}^r$  viene ad annullarsi. Indicando tale angolo con  $\phi^*$  si avrà:

$$\frac{1}{2} (I_{11} - I_{22}) \sin 2\phi^* + I_{12} \cos 2\phi^* = 0 \quad (22.24)$$

ossia:

$$\frac{\sin 2\phi^*}{\cos 2\phi^*} = 2 \frac{I_{12}}{I_{22} - I_{11}} \quad (22.25)$$

da cui:

$$\phi^* = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2I_{12}}{I_{22} - I_{11}} \right) \quad (22.26)$$

con la restrizione  $-\pi/4 \leq \phi^* \leq \pi/4$

Assegnando al sistema di riferimento  $(O, X_1, X_2)$  una rotazione di ampiezza  $\phi^*$  si giunge al cosiddetto *sistema di riferimento principale*  $(O, \xi_1, \xi_2)$ , mentre gli assi  $\xi_1$  e  $\xi_2$  così ottenuti si dicono *assi principali di inerzia*. In tale sistema di riferimento il tensore dei momenti di inerzia si diagonalizza:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} \quad (22.27)$$

ed i due momenti di inerzia  $I_1$  ed  $I_2$  rispetto agli assi  $\xi_1$  e  $\xi_2$  si dicono *momenti principali di inerzia*. Se inoltre l'origine  $O$  del sistema di riferimento coincide col baricentro  $G$  dell'area  $\Sigma$ , allora il sistema di riferimento  $(G, \xi_1, \xi_2)$  si dice sistema *centrale* di riferimento, gli assi  $\xi_1$  e  $\xi_2$  sono gli *assi centrali di inerzia*, ed i momenti d'inerzia  $I_1$  ed  $I_2$  sono i *momenti centrali di inerzia*.

## 22.3 La sezione rettangolare

Si vuole illustrare, a titolo di esempio, la ricerca del baricentro e dei momenti centrali d'inerzia per una sezione rettangolare di base  $b$  ed altezza  $h$ . A tal fine, si sceglie ad arbitrio un riferimento iniziale, ad esempio con origine nel vertice in basso a sinistra, e gli assi coincidenti con i lati del rettangolo, come illustrato in Figura 22.4. Poi si calcolano i due momenti statici rispetto a questi due assi. Rispetto all'asse orizzontale  $X_1$  si ha:

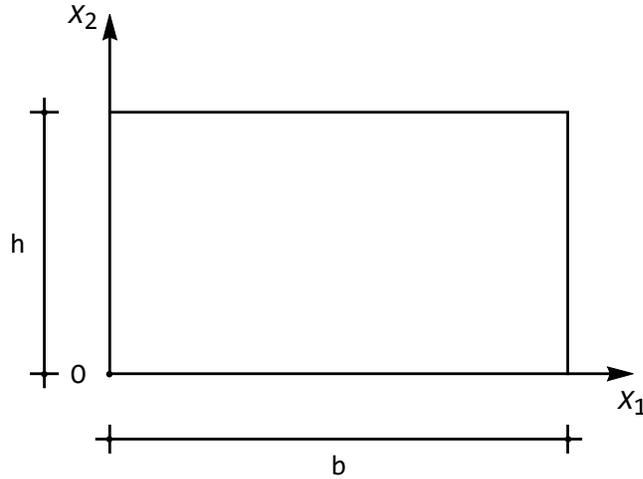
$$S_1 = \int_{\Sigma} x_2 dA = \int_0^b \int_0^h x_2 dx_2 dx_1 = \frac{bh^2}{2} \quad (22.28)$$

e rispetto all'asse verticale  $X_2$ :

$$S_2 = \int_{\Sigma} x_1 dA = \int_0^h \int_0^b x_1 dx_1 dx_2 = \frac{b^2h}{2} \quad (22.29)$$

Le coordinate del baricentro si ottengono allora applicando le (22.10):

$$\begin{aligned} x_{G1} &= \frac{S_2}{bh} = \frac{b}{2} \\ x_{G2} &= \frac{S_1}{bh} = \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (22.30)$$


 Figura 22.4: Una sezione rettangolare di base  $b$  ed altezza  $h$ 

In genere, può dimostrarsi che il baricentro di un'area piana dotata di un'asse di simmetria è obbligato ad appartenere a quest'asse, e poichè il rettangolo possiede due assi di simmetria, il baricentro si trova necessariamente alla loro intersezione.

I momenti d'inerzia rispetto allo stesso sistema di riferimento possono calcolarsi come:

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \int_{\Sigma} x_2^2 \, dA = \int_0^b \int_0^h x_2^2 \, dx_2 \, dx_1 = \frac{bh^3}{3} \\
 I_{22} &= \int_{\Sigma} x_1^2 \, dA = \int_0^h \int_0^b x_1^2 \, dx_1 \, dx_2 = \frac{b^3h}{3} \\
 I_{12} &= \int_{\Sigma} x_1x_2 \, dA = \int_0^b \int_0^h x_1x_2 \, dx_1 \, dx_2 = \frac{b^2h^2}{4}
 \end{aligned} \tag{22.31}$$

Traslando il sistema di riferimento fino a portare l'origine a coincidere con il baricentro, si hanno i momenti di inerzia baricentrici ottenibili a partire dalle leggi di Huyghens (22.19):

$$\begin{aligned}
 I_{22}^t &= \frac{b^3h}{3} - bh \frac{b^2}{4} = \frac{b^3h}{12} \\
 I_{11}^t &= \frac{bh^3}{3} - bh \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{12} \\
 I_{12}^t &= \frac{b^2h^2}{4} - bh \frac{b}{2} \frac{h}{2} = 0
 \end{aligned} \tag{22.32}$$

Poichè il momento centrifugo è nullo, si può concludere che i (22.32) sono i momenti centrali di inerzia.

## 22.4 La sezione circolare e la corona circolare

Si consideri un'area circolare di raggio  $R$ , come riportato in Figura 22.5. Per ragioni di simmetria, il baricentro coincide con il centro della circonferenza. Il calcolo dei momenti di inerzia si conduce nel modo più spedito in coordinate polari, ponendo:

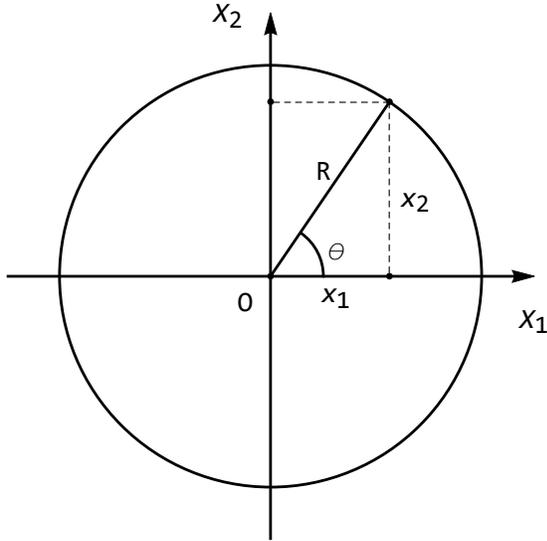


Figura 22.5: Il caso della sezione circolare

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \theta \\x_2 &= r \sin \theta\end{aligned}\tag{22.33}$$

per cui si ha uno Jacobiano pari a:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r\tag{22.34}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}I_{11} &= \int_{\Sigma} x_2^2 \, dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \theta \, r \, d\theta \, dr = \frac{\pi R^4}{4} \\I_{22} &= \int_{\Sigma} x_1^2 \, dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \theta \, r \, d\theta \, dr = \frac{\pi R^4}{4} \\I_{12} &= 0\end{aligned}\tag{22.35}$$

Sia l'uguaglianza dei due momenti di inerzia  $I_{11}$  e  $I_{22}$  che l'annullarsi del momento centrifugo sono ovvie conseguenze della simmetria della sezione. Il momento d'inerzia polare sarà pari a:

$$I_p = I_{11} + I_{22} = \frac{\pi R^4}{2} \quad (22.36)$$

Considerando ora una sezione a forma di corona circolare, con raggio interno  $R_i$  e raggio esterno  $R_e$ , si osservi che le sue caratteristiche inerziali possono dedursi pensando la sezione come la differenza tra una sezione circolare piena di raggio  $R_e$  ed una di raggio  $R_i$ . Si ha così, immediatamente:

$$\begin{aligned} I_{11} = I_{22} &= \frac{\pi (R_e^4 - R_i^4)}{4} \\ I_p &= \frac{\pi (R_e^4 - R_i^4)}{2} \end{aligned} \quad (22.37)$$

## 22.5 La sezione triangolare

Si consideri ora una sezione a forma di triangolo rettangolo, di base  $b$  ed altezza  $h$ , come riportato in Figura 22.6. Il momento statico rispetto all'asse  $X_1$  si può calcolare come:

$$S_1 = \int_{\Sigma} x_2 \, dA = \int_0^b \int_0^{h(x_1)} x_2 \, dx_2 \, dx_1 \quad (22.38)$$

Ora, sfruttando la similitudine dei triangoli, dalla Figura 22.6 si evince:

$$\frac{h}{b} = \frac{h(x_1)}{b-x_1} \rightarrow h(x_1) = \frac{h(b-x_1)}{b} \quad (22.39)$$

Sarà pertanto:

$$S_1 = \int_{\Sigma} x_2 \, dA = \int_0^b \int_0^{h(b-x_1)/b} x_2 \, dx_2 \, dx_1 = \frac{bh^2}{6} \quad (22.40)$$

e rispetto all'asse verticale  $X_2$ :

$$S_2 = \int_{\Sigma} x_1 \, dA = \int_0^b \int_0^{h(b-x_1)/b} x_1 \, dx_2 \, dx_1 = \frac{b^2h}{6} \quad (22.41)$$

Il baricentro del triangolo ha quindi coordinate (cfr. Figura 22.7):

$$\begin{aligned} x_{G1} &= \frac{S_2}{A} = \frac{b}{3} \\ x_{G2} &= \frac{S_1}{A} = \frac{h}{3} \end{aligned} \quad (22.42)$$

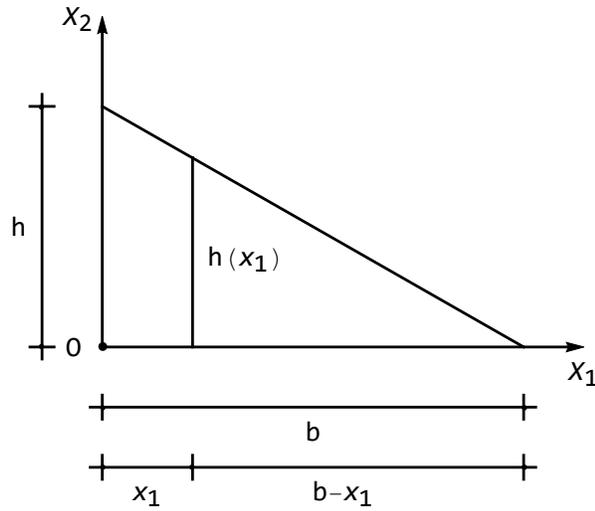


Figura 22.6: Il caso della sezione triangolare

I momenti di inerzia rispetto agli assi  $X_1$  ed  $X_2$  sono calcolabili attraverso la loro definizione:

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \int_{\Sigma} x_2^2 dA = \int_0^b \int_0^{h(b-x_1)/b} x_2^2 dx_2 dx_1 = \frac{bh^3}{12} \\
 I_{22} &= \int_{\Sigma} x_1^2 dA = \int_0^b \int_0^{h(b-x_1)/b} x_1^2 dx_2 dx_1 = \frac{b^3h}{12} \\
 I_{12} &= \int_{\Sigma} x_1x_2 dA = \int_0^b \int_0^{h(b-x_1)/b} x_1x_2 dx_2 dx_1 = \frac{b^2h^2}{24}
 \end{aligned} \tag{22.43}$$

I momenti di inerzia rispetto agli assi baricentrici si calcolano applicando la legge di Huygens:

$$\begin{aligned}
 I'_{22} &= I_{22} - Ax_{G1}^2 = \frac{b^3h}{12} - \frac{bh}{2} \frac{b^2}{9} = \frac{b^3h}{36} \\
 I'_{11} &= I_{11} - Ax_{G2}^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2} \frac{h^2}{9} = \frac{bh^3}{36} \\
 I'_{12} &= I_{12} - Ax_{01}x_{02} = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{bh}{2} \frac{b}{3} \frac{h}{3} = -\frac{b^2h^2}{72}
 \end{aligned} \tag{22.44}$$

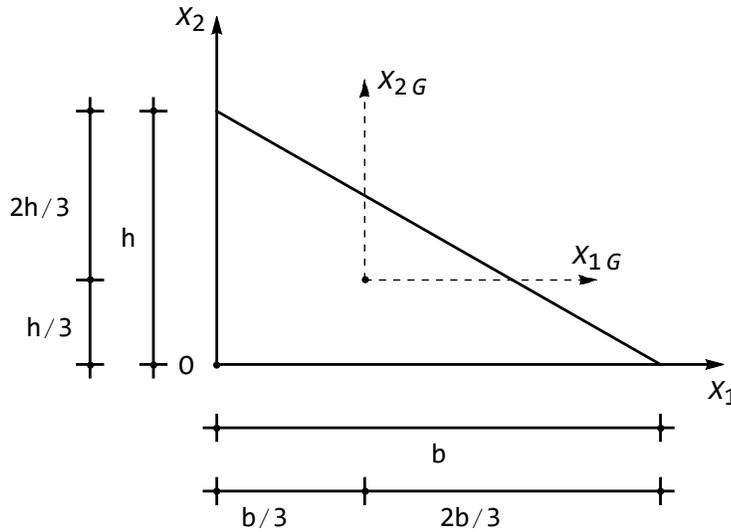


Figura 22.7: Il baricentro della sezione triangolare e gli assi baricentrici

## 22.6 La sezione ellittica

Si consideri una sezione a forma ellittica, con semiassi di lunghezza  $a$  e  $b$ , rispettivamente, e quindi di equazione:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad (22.45)$$

in un riferimento con origine nel baricentro ed assi coordinati orientati secondo i semiassi (cfr. Figura 22.8). Il baricentro è immediatamente identificabile come intersezione dei due assi di simmetria, mentre l'area racchiusa dall'ellisse si può calcolare tramite integrazione:

$$A = \int_{-b}^b \int_{-a\sqrt{1-x_2^2/b^2}}^{a\sqrt{1-x_2^2/b^2}} dx_1 dx_2 = \pi ab \quad (22.46)$$

Del tutto analogamente, i momenti di inerzia si calcolano facilmente utilizzando *Mathematica*, oppure facendo uso delle formule di riduzione. E' ad esempio:

$$I_{22} = \int_{\Sigma} x_1^2 dx_1 dx_2 \quad (22.47)$$

e l'integrale è esteso all'area ellittica  $\Sigma$  definita dall'equazione (22.45). Facendo uso delle formule di riduzione, si può scrivere:

$$I_{22} = \int_{-b}^b dx_2 \int_{-a\sqrt{1-x_2^2/b^2}}^{a\sqrt{1-x_2^2/b^2}} x_1^2 dx_1 = \frac{2a^3}{3} \int_{-b}^b \left(1 - \frac{x_2^2}{b^2}\right)^{3/2} dx_2 \quad (22.48)$$

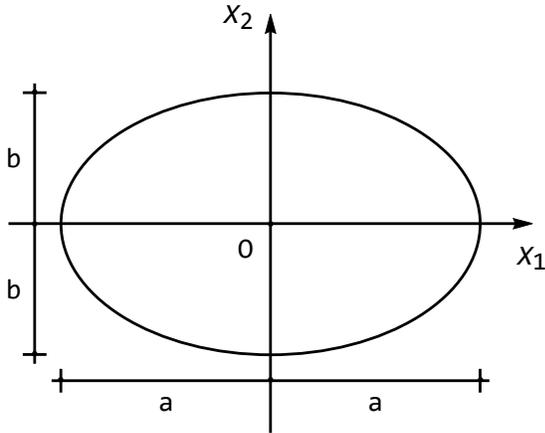


Figura 22.8: Una sezione di forma ellittica

Per calcolare l'ultimo integrale si adotti il cambio di variabile:

$$\eta = \frac{x_2}{b} \quad (22.49)$$

da cui  $dx_2 = b d\eta$ . Inoltre gli estremi di integrazione diventano  $-1$  ed  $1$ , e quindi infine:

$$I_{22} = \frac{2a^3}{3} \int_{-1}^1 (1 - \eta^2)^{3/2} b d\eta = \frac{2a^3 b}{3} \frac{3}{8} \pi = \frac{\pi a^3 b}{4} \quad (22.50)$$

Del tutto analogamente si ha:

$$I_{11} = \frac{\pi b^3 a}{4} \quad (22.51)$$

ed anche:

$$I_p = I_{11} + I_{22} = \frac{\pi a^3 b}{4} + \frac{\pi b^3 a}{4} = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2) \quad (22.52)$$

Per motivi di simmetria, il momento centrifugo è nullo, quindi gli assi scelti sono centrali di inerzia.

# Capitolo 23

## Il problema della trave

In questo Capitolo si inizia lo studio dettagliato del comportamento strutturale di un solido dalla particolare geometria: la trave.

### 23.1 La descrizione del solido

Si consideri un solido omogeneo  $B$ , a forma di cilindro retto, formato da materiale linearmente elastico ed isotropo. La *sezione retta* si ottiene tagliando il solido con un piano parallelo alle due basi, mentre l'*asse* del solido è la retta cui appartengono i baricentri delle sezioni rette. I segmenti paralleli all'asse si chiamano *fibre*.

E' usuale assumere come riferimento una terna ortogonale con origine in  $G$ , baricentro di una delle due basi, ed assi  $X_1, X_2$  contenuti nel piano di una delle due basi, mentre l'asse  $X_3$  è orientato verso l'interno del corpo, come illustrato in Figura 23.1.

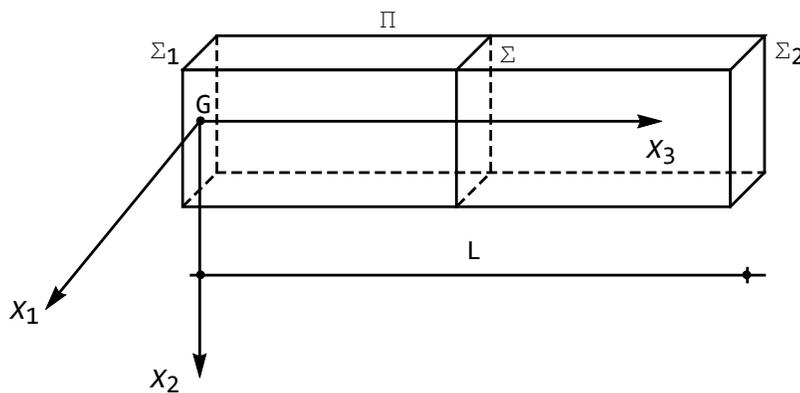


Figura 23.1: Il solido del tipo trave

## 23.2 La posizione del problema

Un'ipotesi fondamentale riguarda i carichi applicati alla trave. Si assume infatti che le forze di massa siano assenti, e che la superficie laterale sia scarica, sicchè le uniche forze ammesse sono le forze superficiali sulle due basi  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . È evidente che almeno l'ipotesi sulle forze di massa è una approssimazione, attesa la presenza quanto meno delle forze di gravità. Tuttavia, spesso l'influenza di tali forze risulta trascurabile.

Il *problema forte di De Saint-Venant* consiste nel ricercare gli spostamenti dei punti della trave omogenea  $B$ , in ipotesi di materiale isotropo e linearmente elastico, in assenza di forze di massa e di forze superficiali sul mantello laterale  $\Pi$ , soggetta ai carichi  $\mathbf{p}^{(1)}$  sulla base di sinistra  $\Sigma_1$  e  $\mathbf{p}^{(2)}$  sulla base di destra  $\Sigma_2$ .

Una condizione necessaria per la risoluzione del problema appena posto è che il solido trave — considerato come un corpo rigido — sia in equilibrio nei riguardi delle tre traslazioni e delle tre rotazioni, ossia che si abbia:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} \mathbf{p}^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} \mathbf{p}^{(2)} dA &= 0 \\ \int_{\Sigma_1} \mathbf{r} \times \mathbf{p}^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} \mathbf{r} \times \mathbf{p}^{(2)} dA &= 0 \end{aligned} \quad (23.1)$$

dove  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione di un punto rispetto all'origine  $G$ . In questa ipotesi sulle forze, e con opportune condizioni di regolarità per il mantello  $\Pi$  e per le forze stesse, può dimostrarsi che il problema di De Saint-Venant ammette soluzione. In forma scalare, le (23.1) si scrivono:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} p_1^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} p_1^{(2)} dA &= 0 \\ \int_{\Sigma_1} p_2^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} p_2^{(2)} dA &= 0 \\ \int_{\Sigma_1} p_3^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} p_3^{(2)} dA &= 0 \\ \int_{\Sigma_1} x_2 p_3^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} x_2 p_3^{(2)} dA - L \int_{\Sigma_2} p_2^{(2)} dA &= 0 \\ - \int_{\Sigma_1} x_1 p_3^{(1)} dA - \int_{\Sigma_2} x_1 p_3^{(2)} dA + L \int_{\Sigma_2} p_1^{(2)} dA &= 0 \\ \int_{\Sigma_1} (x_1 p_2^{(1)} - x_2 p_1^{(1)}) dA + \int_{\Sigma_2} (x_1 p_2^{(2)} - x_2 p_1^{(2)}) dA &= 0 \end{aligned} \quad (23.2)$$

## 23.3 Le caratteristiche della sollecitazione esterna

Sulle due basi  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  si definiscono le *caratteristiche della sollecitazione esterna*, come i vettori risultanti ed i vettori momenti risultanti delle forze elementari,

nell'ipotesi che l'origine del sistema di riferimento venga traslato fino a coincidere con il baricentro della sezione in esame. Sulla base  $\Sigma_1$  si ha allora:

$$\mathbf{F}^{(1)} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{p}^{(1)} dA \quad (23.4)$$

$$\mathcal{M}^{(1)} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{r} \times \mathbf{p}^{(1)} dA = \int_{\Sigma_1} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & p_3^{(1)} \end{pmatrix} dA \quad (23.5)$$

o, scalarmente:

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} p_1^{(1)} dA \\ F_2^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} p_2^{(1)} dA \\ F_3^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} p_3^{(1)} dA \\ \mathcal{M}_1^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} x_2 p_3^{(1)} dA \\ \mathcal{M}_2^{(1)} &= - \int_{\Sigma_1} x_1 p_3^{(1)} dA \\ \mathcal{M}_3^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} (x_1 p_2^{(1)} - x_2 p_1^{(1)}) dA \end{aligned} \quad (23.6)$$

Sulla base  $\Sigma_2$  si hanno invece le caratteristiche della sollecitazione esterna:

$$\mathbf{F}^{(2)} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{p}^{(2)} dA \quad (23.7)$$

$$\mathcal{M}^{(2)} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{r} \times \mathbf{p}^{(2)} dA = \int_{\Sigma_2} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ p_1^{(2)} & p_2^{(2)} & p_3^{(2)} \end{pmatrix} dA \quad (23.8)$$

o, scalarmente:

$$\begin{aligned} F_1^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} p_1^{(2)} dA \\ F_2^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} p_2^{(2)} dA \\ F_3^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} p_3^{(2)} dA \\ \mathcal{M}_1^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} x_2 p_3^{(2)} dA \\ \mathcal{M}_2^{(2)} &= - \int_{\Sigma_2} x_1 p_3^{(2)} dA \\ \mathcal{M}_3^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} (x_1 p_2^{(2)} - x_2 p_1^{(2)}) dA \end{aligned} \quad (23.9)$$

Definite queste quantità, le equazioni di equilibrio (23.1) forniscono sei relazioni tra le dodici caratteristiche della sollecitazione esterna:

$$\begin{aligned}
 F_i^{(1)} &= -F_i^{(2)} \\
 \mathcal{M}_1^{(1)} &= -\mathcal{M}_1^{(2)} + F_2^{(2)}L \\
 \mathcal{M}_2^{(1)} &= -\mathcal{M}_2^{(2)} - F_1^{(2)}L \\
 \mathcal{M}_3^{(1)} &= -\mathcal{M}_3^{(2)}
 \end{aligned}
 \tag{23.10}$$

### 23.4 Le caratteristiche della sollecitazione interna

Si introduce ora un concetto di fondamentale importanza per l'analisi delle travi e delle piastre, ossia il concetto di *caratteristiche della sollecitazione interna*. Si consideri all'uopo un solido del tipo trave, e si operi un taglio secondo la sezione retta  $\Sigma$ , situata alla generica ascissa  $x_3$ , rimuovendo la parte del solido che non contiene l'origine. Si scelga come riferimento una terna ottenuta trasladando la terna originaria fino a portare l'origine in  $\Sigma$ , sicchè l'asse  $X_3$  resta inalterato, mentre i due nuovi assi  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  sono paralleli ad  $X_1$  ed  $X_2$ , rispettivamente. Sia  $\mathbf{t}_{x_3}$  il vettore tensione agente sulla sezione  $\Sigma$ , di normale equiversa ad  $X_3$ .

**Definizione 8.** *Si definiscono caratteristiche della sollecitazione interna in  $\Sigma$ , le risultanti delle forze elementari  $\mathbf{t}_{x_3} dA$  secondo i tre assi  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  ed  $X_3$ , ed i momenti risultanti delle stesse forze rispetto agli stessi assi.*

Sarà quindi, per definizione:

$$\begin{aligned}
 T_1(x_3) &= \int_{\Sigma} \sigma_{13} dA \\
 T_2(x_3) &= \int_{\Sigma} \sigma_{23} dA \\
 N(x_3) &= \int_{\Sigma} \sigma_{33} dA \\
 M_1(x_3) &= \int_{\Sigma} \sigma_{33} x_2 dA \\
 M_2(x_3) &= - \int_{\Sigma} \sigma_{33} x_1 dA \\
 M_t(x_3) &= \int_{\Sigma} (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) dA
 \end{aligned}
 \tag{23.11}$$

e, sempre per definizione,  $T_1$  e  $T_2$  si chiamano *sforzo di taglio* secondo  $X_1$  ed  $X_2$ , rispettivamente,  $N$  si chiama *sforzo normale*,  $M_1$  ed  $M_2$  si chiamano *momenti flettenti* relativi ad  $X_1$  ed  $X_2$ , rispettivamente, ed  $M_t$  si chiama *momento torcente*. In genere, queste sei caratteristiche coesistono. Tuttavia, per particolari sollecitazioni esterne, si possono ottenere dei casi più semplici, in cui una

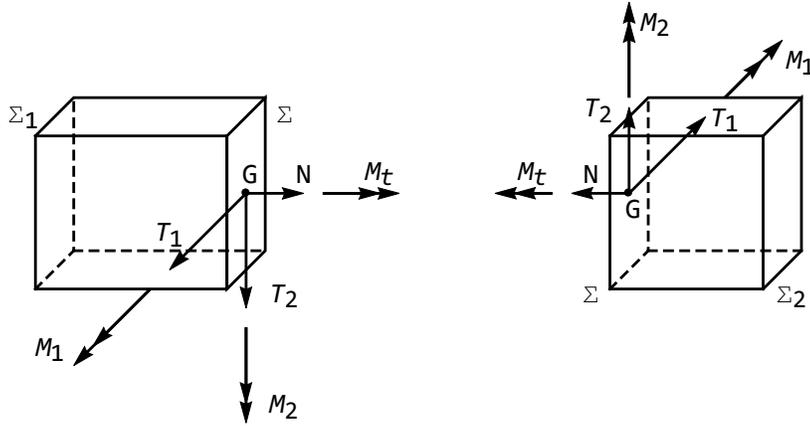


Figura 23.2: Le caratteristiche della sollecitazione interna

sola, o al massimo due, caratteristiche sono diverse da zero, mentre le altre si annullano. A questi casi semplici sono dedicate le prossime lezioni.

### 23.5 Le caratteristiche della sollecitazione esterna in termini di tensioni

Si noti che è anche possibile esprimere le caratteristiche della sollecitazione esterna in termini di tensioni, anziché di forze superficiali. Basta all'uopo utilizzare il teorema di Cauchy–Poisson, tenendo conto che la normale alla sezione  $\Sigma_1$  ha coseni direttori  $(0, 0, -1)$ , mentre la normale alla sezione  $\Sigma_2$  avrà coseni direttori  $(0, 0, 1)$ . Sarà quindi:

$$\begin{aligned} p_i^{(1)} &= -\sigma_{i3} \\ p_i^{(2)} &= \sigma_{i3} \end{aligned} \quad (23.12)$$

e quindi le caratteristiche della sollecitazione esterna sono esprimibili come:

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} &= - \int_{\Sigma_1} \sigma_{13} \, dA \\ F_2^{(1)} &= - \int_{\Sigma_1} \sigma_{23} \, dA \\ F_3^{(1)} &= - \int_{\Sigma_1} \sigma_{33} \, dA \\ \mathcal{M}_1^{(1)} &= - \int_{\Sigma_1} x_2 \sigma_{33} \, dA \\ \mathcal{M}_2^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} x_1 \sigma_{33} \, dA \end{aligned} \quad (23.13)$$

$$\mathcal{M}_3^{(1)} = - \int_{\Sigma_1} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dA$$

sulla base di sinistra, e:

$$\begin{aligned} F_1^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} \sigma_{13} dA \\ F_2^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} \sigma_{23} dA \\ F_3^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} \sigma_{33} dA \\ \mathcal{M}_1^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} x_2 \sigma_{33} dA \\ \mathcal{M}_2^{(2)} &= - \int_{\Sigma_2} x_1 \sigma_{33} dA \\ \mathcal{M}_3^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dA \end{aligned} \tag{23.14}$$

sulla base di destra. Le dodici caratteristiche sono riportate in Figura 23.3

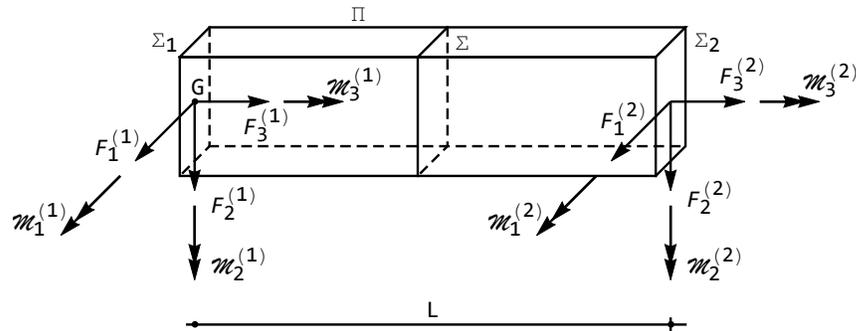


Figura 23.3: Le caratteristiche della sollecitazione esterna sulla trave

### La relazione tra caratteristiche della sollecitazione esterna ed interna.

Quando la sezione retta  $\Sigma$  viene scelta all'ascissa  $x_3 = L$ , essa viene a coincidere con la sezione di destra  $\Sigma_2$ , e le normali uscenti sono equiverse. Ne segue che le caratteristiche della sollecitazione interna calcolate sulla sezione di destra

coincidono, anche in segno, con le caratteristiche della sollecitazione esterna:

$$\begin{aligned}
 T_1(x_3 = L) &= F_1^{(2)} \\
 T_2(x_3 = L) &= F_2^{(2)} \\
 N(x_3 = L) &= F_3^{(2)} \\
 M_1(x_3 = L) &= \mathcal{M}_1^{(2)} \\
 M_2(x_3 = L) &= \mathcal{M}_2^{(2)} \\
 M_t(x_3 = L) &= \mathcal{M}_3^{(2)}
 \end{aligned}
 \tag{23.15}$$

Se invece la sezione retta  $\Sigma$  viene scelta all'ascissa  $x_3 = 0$ , essa viene a coincidere con la sezione di sinistra  $\Sigma_1$ , ma le normali uscenti sono controverse, e quindi le caratteristiche della sollecitazione interna sulla sezione di sinistra sono uguali e contrarie alle caratteristiche della sollecitazione esterna:

$$\begin{aligned}
 T_1(x_3 = 0) &= -F_1^{(1)} \\
 T_2(x_3 = 0) &= -F_2^{(1)} \\
 N(x_3 = 0) &= -F_3^{(1)} \\
 M_1(x_3 = 0) &= -\mathcal{M}_1^{(1)} \\
 M_2(x_3 = 0) &= -\mathcal{M}_2^{(1)} \\
 M_t(x_3 = 0) &= -\mathcal{M}_3^{(1)}
 \end{aligned}
 \tag{23.16}$$

## 23.6 Il problema debole di De Saint–Venant

Nelle stesse ipotesi geometriche del problema di De Saint–Venant, si consideri ora il seguente:

*Problema debole di De Saint–Venant:* ricercare gli spostamenti dei punti della trave omogenea  $B$ , in ipotesi di materiale isotropo e linearmente elastico, in assenza di forze di massa e di forze superficiali sul mantello laterale  $\Pi$ , soggetta alle tre forze risultanti  $\mathbf{F}^{(1)}$  ed ai tre momenti risultanti  $\mathcal{M}^{(1)}$  sulla base di sinistra  $\Sigma_1$  ed alle tre forze risultanti  $\mathbf{F}^{(2)}$  ed ai tre momenti risultanti  $\mathcal{M}^{(2)}$  sulla base di destra  $\Sigma_2$ .

Come già detto, di queste dodici quantità solo sei sono effettivamente indipendenti, poichè per l'equilibrio della trave dovranno valere le relazioni (23.10). Si vedrà, nella prossima lezione, che sotto certe ipotesi il problema forte può ricondursi al problema debole, se si accetta il postulato di De Saint–Venant.



## Capitolo 24

# Il postulato di De Saint–Venant

In questo Capitolo si illustra la particolarizzazione, alla teoria della trave, delle equazioni dell'elasticità fin qui presentate, e si introduce il postulato di De Saint–Venant, che permette di dare validità generale alle sei soluzioni del problema debole.

### 24.1 L'ipotesi di De Saint–Venant sulle tensioni

Si nota subito, da quanto esposto nel Capitolo precedente, che le tensioni  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{12}$  non giocano alcun ruolo nella definizione delle caratteristiche della sollecitazione esterna sulle due basi della trave, o nella definizione delle caratteristiche della sollecitazione interna sulla generica sezione retta. Ciò induce ad ipotizzare che in ciascun punto della trave sia:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0 \quad (24.1)$$

e che quindi lo stato tensionale sia del tipo:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (24.2)$$

Questa assunzione verrà giustificata *a posteriori*, nel senso che si mostrerà che utilizzando la (24.1) si può calcolare una soluzione al problema dell'equilibrio elastico. Poiché il principio di Kirchhoff assicura che essa è anche unica, saremo abilitati a confermare la (24.1). L'interpretazione fisica dell'ipotesi (24.1) è evidente: per esse la trave è ridotta ad un insieme di elementi piani longitudinali che si trasmettono tra loro solo tensioni tangenziali in senso parallelo all'asse della trave, ma non tensioni normali, come illustrato in Figura 24.1.

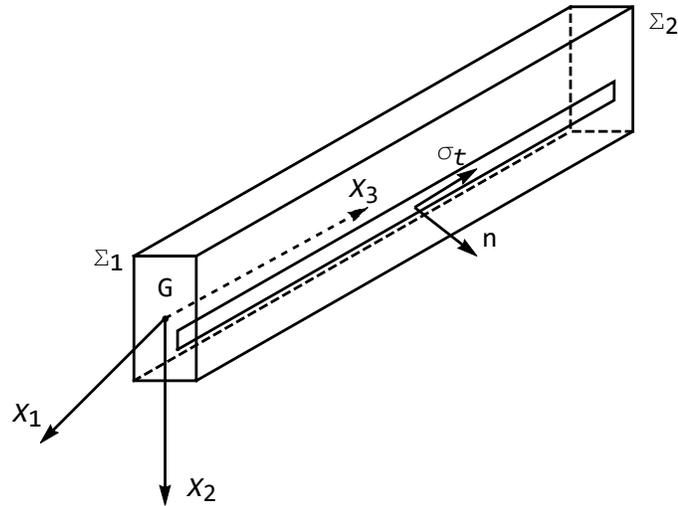


Figura 24.1: Il comportamento della trave alla luce dell'ipotesi sullo stato tensionale

Ed infatti, un qualsiasi elemento piano parallelo all'asse avrà normale definita dai coseni direttori  $(n_1, n_2, 0)$  e quindi la tensione normale in un qualsiasi suo punto sarà fornita da:

$$\sigma_n = t_n \cdot n = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 = 0 \quad (24.3)$$

se si suppone valida la (24.1). Si studia ora come si venga a semplificare il problema dell'equilibrio elastico per il solido trave soggetto all'ipotesi (24.1) sullo stato tensionale

### Le equazioni indefinite dell'equilibrio

Le equazioni indefinite dell'equilibrio divengono, utilizzando le (24.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (24.4)$$

Ne segue, dalle prime due equazioni, che le tensioni tangenziali non dipendono dalla variabile  $x_3$ , e quindi si riproducono identiche su tutte le sezioni rette. Inoltre, derivando la terza rispetto ad  $x_3$  si giunge a scrivere:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} = 0 \quad (24.5)$$

e quindi la tensione  $\sigma_{33}$  varia al più con legge lineare rispetto ad  $x_3$ .

### 24.1.1 Le condizioni ai limiti

Occorre scrivere le condizioni ai limiti  $\sigma_{ij}n_j = p_i$  in corrispondenza della superficie laterale e di ciascuna delle due basi. La normale alla superficie laterale, per definizione, ha coseni direttori  $(n_1, n_2, 0)$ , e quindi le condizioni ai limiti si riducono, utilizzando anche le (24.1), alla singola:

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0 \quad (24.6)$$

ossia:

$$\boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (24.7)$$

avendo definito il vettore:

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (24.8)$$

della tensione tangenziale.

Segue dalla (24.7) che in corrispondenza di un punto qualsiasi del contorno della generica sezione retta, la tensione tangenziale è diretta secondo la tangente al contorno.

Sulla base di sinistra, in  $x_3 = 0$ , i coseni direttori sono  $(0, 0, -1)$ , e quindi si hanno le tre condizioni:

$$\sigma_{i3} = -p_i^{(1)} \quad (24.9)$$

Infine, sulla base di destra, per  $x_3 = L$ , i coseni direttori sono  $(0, 0, 1)$ , e quindi le tre condizioni ai limiti sono:

$$\sigma_{i3} = p_i^{(2)} \quad (24.10)$$

### 24.1.2 Le leggi di Hooke

Applicando la legge di Hooke:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad (24.11)$$

dallo stato tensionale (24.2) si ottiene lo stato deformativo:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\ e_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{E} \\ e_{12} &= 0 \\ e_{13} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} \\ e_{23} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \end{aligned} \quad (24.12)$$

Si noti che tra le tre deformazioni normali esiste la relazione:

$$e_{11} = e_{22} = -\nu e_{33} \quad (24.13)$$

ossia:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\nu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (24.14)$$

### 24.1.3 Le equazioni di Navier–Cauchy

Si ripercorra il cammino già fatto per ottenere le equazioni dell'equilibrio elastico, come descritto nel Capitolo 19. Partendo quindi dalle equazioni indefinite dell'equilibrio (24.4), si utilizzino le leggi di Hooke inverse, ottenibili facilmente dalle (24.11), giungendo a scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{13}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial e_{23}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial e_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_2} \right) + E \frac{\partial e_{33}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (24.15)$$

Introducendo le relazioni tra deformazioni e derivate degli spostamenti, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} &= 0 \end{aligned} \quad (24.16)$$

Infine, semplificando la terza in base alla (24.14) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} &= 0 \end{aligned} \quad (24.17)$$

Si noti che, nell'ambito della teoria della trave, le equazioni di Navier–Cauchy non dipendono dalle costanti elastiche, e quindi dal materiale di cui è costituita la trave. Posto in tal modo, il problema dell'equilibrio elastico può essere affrontato utilizzando il cosiddetto metodo semi-inverso di De Saint-Venant. In breve, esso si basa sul fatto che una qualsiasi terna di spostamenti  $(u_1, u_2, u_3)$

che soddisfi sia le equazioni di equilibrio sia le condizioni ai limiti deve essere l'unica possibile soluzione del problema della trave, in base al principio di Kirchhoff. Assegnando quindi uno stato tensionale rispettoso delle prescrizioni suddette (tensioni tangenziali costanti lungo l'asse, tensione normale al più lineare lungo l'asse) si ricava lo stato deformativo, tramite le leggi di Hooke, lo stato di spostamento integrando le relazioni deformazioni-spostamenti, e si deducono *a posteriori* le caratteristiche della sollecitazione esterna che causano le assegnate tensioni.

Mentre soddisfare le equazioni di Navier–Cauchy (24.17) non è particolarmente complicato, risulta molto più complesso soddisfare le condizioni ai limiti, e non tanto quella sulla superficie laterale quanto quelle sulle due basi, che dipendono dalle forze applicate e — per il problema forte — dalla loro distribuzione puntuale.

Un postulato, ormai universalmente accettato, e largamente provato da ogni tipo di esperimento, permette di ricondurre il problema forte al problema debole, eliminando alla radice la necessità di esaminare l'effettiva distribuzione delle forze sulle basi.

## 24.2 Il postulato di De Saint–Venant nella sua forma storica

Il postulato di De Saint–Venant è stato da lui enunciato e commentato in più occasioni. Ad esempio, nella prefazione alla celebre memoria *De la torsion des prismes*, Dunod, Parigi (1855), così scriveva:

Le diverse espressioni fornite nel corso della Memoria per gli spostamenti dei punti dei prismi elastici, per le dilatazioni e le variazioni angolari delle loro parti, le torsioni etc. sono tutte rigorose, allo stesso titolo delle equazioni generali dell'equilibrio elastico, sia in isotropia che in anisotropia, poichè noi le deduciamo con un'analisi esente da ipotesi od omissioni. Esse devono quindi fornire risultati esatti, a condizione che le forze esterne che producono questi effetti siano applicate e distribuite sulle basi, o sezioni estreme dei prismi, esattamente nella maniera prescritta, con la caratteristica di provocare su tutte le sezioni intermedie una distribuzione analoga di sforzi.

Queste espressioni divengono soltanto approssimate nel momento in cui se ne estende l'uso ad altri modi di applicazione e distribuzione delle forze esterne. Il grado di approssimazione non potrà essere precisato — allo stato attuale dell'analisi — ma numerose esperienze, in mancanza di calcoli, fanno ritenere che esso sia notevole. Ad esempio, se si afferra con una tenaglia un estremo di un prisma in caucciù, si vedrà che l'effetto prodotto si estende solo fino ad una piccolissima distanza dal punto di applicazione dell'azione, e che il resto del prisma si comporta come se questa azione non esistesse

affatto. Da ciò, e da una quantità di esperienze simili, si può concludere che forze applicate su una medesima parte di un prisma elastico e che si fanno equilibrio in media, e quindi con risultante e momento risultante nullo, non causano spostamento che in quella parte e in quelle estremamente vicine, senza influenzare percettibilmente le parti del prisma che si trovano un po' al di qua o al di là. Ne segue che tutte le volte che si hanno, verso le estremità di un prisma di una certa lunghezza, forze qualsiasi che stirino il prisma, lo flettano, lo torcano etc., si può sempre rimpiazzare queste forze, con tutta l'approssimazione desiderabile nei riguardi dei loro effetti su tutte le altre parti del prisma, con delle forze staticamente equivalenti o che non ne differiscano che per sistemi in equilibrio, o — in altre parole — con delle forze che abbiano la stessa risultante geometrica e lo stesso momento risultante, e che siano applicate e distribuite nel modo particolare che presuppone la nostra soluzione<sup>1</sup>.

e svariati anni dopo così precisava, alla pagina 145 del libro di A. Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, tradotto da M.M. Saint Venant e Flamant, con Note estese di M.M. Saint-Venant, Dunod, Parigi, 1883:

forze staticamente equivalenti, ossia con la stessa risultante e lo stesso momento risultante, producono gli stessi effetti lungo tutto il solido, qualunque sia il loro modo di applicazione e di distribuzio-

<sup>1</sup>Les expressions diverses que nous donnons dans le courant de ce Mémoire pour les déplacements des points des prismes élastiques, pour les dilatations et glissements relatifs de leurs parties, les torsions, etc, sont toutes rigoureuses au même titre que les équations générales de l'équilibre d'élasticité, soit égale, soit inégale dans les trois sens, dont nous les déduisons par une analyse exempte d'hypothèses et suppressions. Elles doivent ainsi fournir des résultats *exacts*, à la condition que les forces extérieures qui produisent ces effets soient bien appliquées et distribuées sur les bases ou sections extrêmes des prismes de la manière supposée, ayant pour caractère d'entraîner sur toutes les sections intermédiaires une distribution intérieure semblable.

Elles ne deviennent simplement *approximatives* que dès l'instant où l'on en étend l'usage aux cas d'un autre mode d'application et de distribution des forces extérieures. Le degré de l'approximation ne saurait être précisé dans l'état actuel de l'analyse, mais diverses expériences, à défaut du calcul, font juger qu'il est considérable. Que, par exemple, l'on pince avec une tenaille l'un des bouts d'un prisme en caoutchouc, l'on verra que l'impression produite ne s'étend qu'à une distance fort petite des lignes où l'action s'exerce, et que le reste du prisme se comporte comme si cette action n'existait pas. De ce fait et d'un grand nombre d'autres, on peut conclure que des forces appliquées sur une même partie d'un prisme élastique et qui se font équilibre par son moyen, ou dont la résultante et le moment résultant sont nuls, ne déplacent que les points de cette partie et ceux qui en sont extrêmement voisins, sans agir perceptiblement sur ceux qui se trouvent quelque peu en deçà ou au delà. D'où il suit que toutes les fois qu'il y a, vers les extrémités d'un prisme d'une certaine longueur, des forces quelconques qui l'étendent, le fléchissent, le tordent, etc., on peut toujours les remplacer avec toute l'approximation désirable, quant à leurs effets sur toutes les autres parties, par des forces statiquement *équivalentes* ou n'en différant que par des systèmes en équilibre, autrement dit par des forces ayant même résultante géométrique et même moment résultant, et qui soient appliquées et distribuées de la manière particulière que supposent nos solutions.

ne, eccetto che nel luogo dove esse agiscono, e su porzioni vicine e piccolissime, si da poterle trascurare<sup>2</sup>

ed ancora, in una nota al paragrafo 28, pagina 174 dello stesso testo:

le soluzioni, anche se, per essere rigorosamente esatte, presuppongono un modo particolare, e mai realizzato, di applicazione e distribuzione delle forze alle estremità della trave che esse stirano, flettono o torcono, si possono nondimeno utilizzare, con tutta l'approssimazione desiderabile, se forze ad esse staticamente equivalenti sono applicate e distribuite in un altro modo su queste estremità: in altri termini, le seconde forze causeranno gli stessi stiramenti, flessioni e torsioni delle prime lungo tutta la trave ch'esse sollecitano, eccetto porzioni piccolissime della sua lunghezza, misurata a partire dai punti dove esse agiscono<sup>3</sup>.

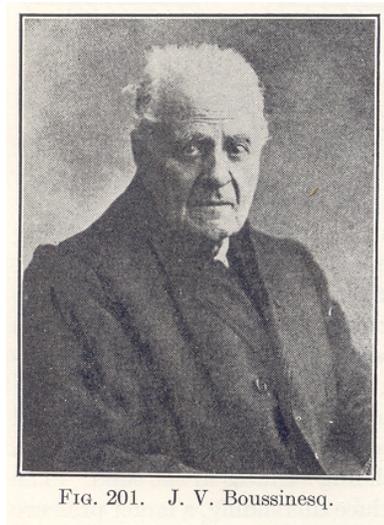


FIG. 201. J. V. Boussinesq.

Figura 24.2: J. Boussinesq

<sup>2</sup> "... des forces, statiquement équivalentes, ou ayant la même résultante et le même moment résultant, produisent les mêmes effets sur toute la longueur de solides, quel que soit leur mode d'application et de distribution, excepté tout auprès des endroits où elles agissent, ou sur des portions à peine sensibles et dont on peut négliger de tenir compte

<sup>3</sup> "... les solutions ..., bien qu'elles exigent, pour être rigoureuses, un mode particulier, jamais réalisé, d'application et de distribution des forces aux extrémités des tiges qu'elles étendent, fléchissent ou tordent, conviennent néanmoins, avec toute l'approximation désirable, si des forces qui leur soient statiquement équivalentes sont appliquées, et distribuées d'un autre manière quelconque vers ces extrémités: c'est—à—dire que les dernières forces donneront les mêmes extensions, flexions et torsions que les premières, tout le long de la tige qu'elles sollicitent, en exceptant toutefois des portions très petites de sa longueur, comptées à partir des points où elles agissent ..."

Una generalizzazione ai solidi tridimensionali fu poi subito fornita da Boussinesq nel 1885:

Un sistema equilibrato di forze esterne applicato ad un corpo elastico, i cui punti di applicazione giacciono all'interno di una sfera assegnata, produce deformazioni di grandezza trascurabile a distanze dalla sfera sufficientemente grandi rispetto al suo raggio <sup>4</sup>

### 24.3 Conseguenze del postulato

La più importante conseguenza del postulato di De Saint-Venant risiede nella possibilità di disinteressarsi dell'effettiva distribuzione delle forze applicate alle basi, ma di ritenere che solo le *caratteristiche* delle forze stesse siano importanti, ai fini della soluzione del problema della trave. Ed infatti, si consideri un solido

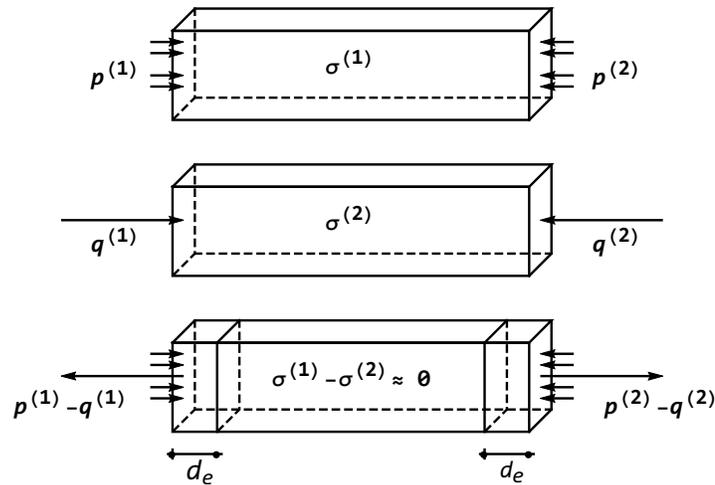


Figura 24.3: Al di là della distanza di estinzione  $d_e$ , le tensioni sono trascurabili

trave soggetto alle forze superficiali  $\mathbf{p}^{(1)}$  e  $\mathbf{p}^{(2)}$  sulle due basi, (Figura 24.3), e siano  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$  le tensioni da esse prodotte. Siano poi  $\mathbf{q}^{(1)}$  e  $\mathbf{q}^{(2)}$  altri due insiemi di forze superficiali, e  $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$  le tensioni da esse prodotte. Per il principio di sovrapposizione, l'insieme di forze superficiali  $\mathbf{p}^{(1)} - \mathbf{q}^{(1)}$  e  $\mathbf{p}^{(2)} - \mathbf{q}^{(2)}$  causerà le tensioni  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ . Se ora i due insiemi di forze hanno le stesse caratteristiche, allora la loro differenza sarà un insieme di forze a caratteristiche nulle, e quindi in equilibrio. Ne segue, per il postulato, che ad opportuna distanza  $d_e$  dalle basi dovrà essere  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = 0$ .

<sup>4</sup>J. Boussinesq *Application des potentiel à l'étude de l'équilibre e des mouvements des solides élastiques* - Gauthier-Villars, Paris 1885

Se ne deduce che due insiemi di forze diverse, applicate alle basi, ma con le stesse caratteristiche, danno luogo alle stesse tensioni, al di là di una certa distanza  $d_e$  dalle basi, detta *distanza di estinzione*. In altri termini, la soluzione del problema di De Saint-Venant dipende dalle caratteristiche della sollecitazione, ossia da sei parametri.

Ne segue che se si conoscono sei soluzioni indipendenti per il problema debole, allora tutte le altre possibilità potranno ottenersi tramite sovrapposizione. Nelle prossime Lezioni queste sei soluzioni verranno dedotte utilizzando il metodo semi-inverso, partendo dalle seguenti ipotesi sullo stato tensionale:

- Caso 1 -  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$  e  $\sigma_{33}$  costante
- Caso 2 -  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$  e  $\sigma_{33}$  variabile linearmente secondo  $x_1$
- Caso 3 -  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$  e  $\sigma_{33}$  variabile linearmente secondo  $x_2$
- Caso 4 -  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}$
- Caso 5 -  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$  e  $\sigma_{33}$  variabile linearmente secondo  $x_1$  ed  $x_3$
- Caso 6 -  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$  e  $\sigma_{33}$  variabile linearmente secondo  $x_2$  ed  $x_3$

## 24.4 Le formulazioni energetiche del postulato di De Saint-Venant

Sia la versione originaria del postulato di De Saint Venant che la formulazione di Boussinesq, mentre utilissimi da un punto di vista pratico, non possono essere accettati in un ambito teorico. Ed infatti, come puntualizzato da Fichera:

Poichè la classica teoria lineare dell'Elasticità, aderente o meno che possa essere alla realtà fisica, è una teoria matematica, cioè rigorosamente ipotetico-deduttiva, è evidente che il principio di Saint-Venant non può essere accettato come postulato, ma deve essere dimostrato matematicamente, come conseguenza di tutta l'assiomatica che sta alla base di quella teoria. Naturalmente, questo presuppone una

precisa formulazione matematica del principio stesso, che indichi chiaramente quello che occorre dimostrare<sup>5</sup>.



Figura 24.4: Gaetano Fichera

Inoltre, si è mostrato che travi a sezione retta sottile possono essere caricate agli estremi da forze in equilibrio i cui effetti si risentono lungo tutta la trave, così fornendo un controesempio all'enunciato classico del postulato. E d'altro canto R.von Mises ha puntualizzato che in presenza di forze tangenziali il postulato di Boussinesq cade in difetto. Ne segue la necessità di riformulare il postulato, specificando con attenzione il modo in cui le forze sono applicate, arrivando così alla versione di Sternberg del 1954, rigorosamente enunciata e provata, ma ben al di là dei limiti del corso. Si veda, per una estensiva discussione, il libro di P.Villaggio *Qualitative Methods in Elasticity*, Noordhoff 1977.

Un approccio diverso allo stesso problema è stato suggerito da O. Zanaboni in una serie di memorie del 1937, *Dimostrazione generale del principio di De Saint Venant*, Atti Accademia Lincei 25 (1937), pagg. 117–121, *Valutazione dell'errore massimo cui dà luogo l'applicazione del principio di De Saint Venant*, Atti Accademia Lincei 25 (1937), pagg. 595–601 e *Sull'approssimazione dovuta al principio del De Saint Venant nei solidi prismatici isotropi*, Atti Accademia Lincei 26 (1937), pagg. 340–345. Secondo Zanaboni, non ha senso occuparsi dello smorzarsi *puntuale* delle deformazioni, ma occorre calcolare l'andamento globale delle deformazioni, esaminando l'ammontare dell'energia di deformazione posseduta da porzioni di solido via via più lontane dalle basi. L'intuizione era giusta, i tentativi di formalizzazione matematica erano inaccettabili, e si è dovuto attendere la sistemazione definitiva di Richard Toupin nel 1965 per ottenere un teorema matematicamente ineccepibile che può a buon diritto essere considerato la controparte moderna del postulato di De Saint-Venant:

<sup>5</sup>G.Fichera, *Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica Classica* pag. 50, Quaderni del Consiglio Nazionale delle Ricerche 1985

### 24.4.1 Il teorema di Toupin

Si indichi con  $(\mathbf{u}', \mathbf{e}', \boldsymbol{\sigma}')$  la soluzione del problema debole di De Saint-Venant, e con  $(\mathbf{u}'', \mathbf{e}'', \boldsymbol{\sigma}'')$  la soluzione del corrispondente problema forte. Il campo di spostamenti  $\mathbf{u} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}''$  conduce allora ad uno stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}''$  nullo sul mantello laterale, ed a caratteristiche nulle sulle due basi.

Se ora  $B$  indica la trave in esame, sia  $B_{x_3}$  la porzione di trave compresa tra la sezione retta all'ascissa  $x_3$  e la sezione retta di mezzeria  $x_3 = L/2$ , e sia  $L_{x_3}$  l'energia di deformazione contenuta in  $B_{x_3}$ :

$$L_{x_3} = \frac{1}{2} \int_{B_{x_3}} c_{ijhk} e_{ij} e_{hk} dV \quad (24.18)$$

Si noti che si è supposto il materiale anisotropo. Comunque, poichè il potenziale elastico è definito positivo, l'energia elastica  $L_{x_3}$  sarà una funzione non crescente di  $x_3$ , e dovrà essere, per ovvi motivi  $L_{L/2} = 0$ . Il teorema di Toupin fornisce indicazioni su come  $L_{x_3}$  decresce al tendere di  $x_3$  da 0 (metà trave) a  $x_3 = L/2$  (volume nullo):

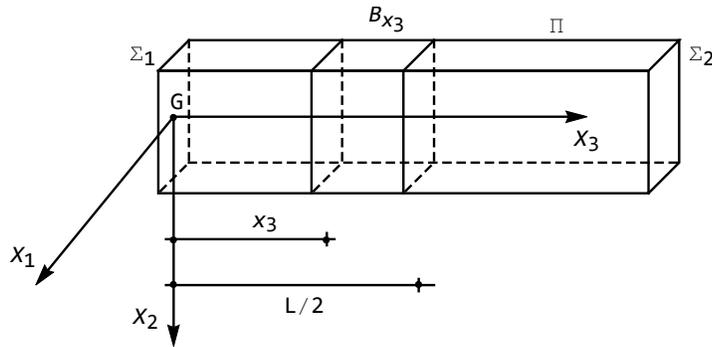


Figura 24.5: Il cilindro identificato dalle sezioni rette a distanza  $x_3$  ed  $L/2$  dalla base di sinistra

**Teorema 15.** (Toupin) - Nelle ipotesi introdotte, l'energia elastica  $L_{x_3}$  soddisfa la disequaglianza:

$$L_{x_3} \leq L_0 \exp \left[ -\frac{(x_3 - s)}{k(s)} \right] \quad (24.19)$$

per  $x_3 \geq 0$ ,  $s > 0$ , e:

$$k(s) = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho \omega_0^2(s)}} \quad (24.20)$$

con:

$$\mu^* = \frac{\mu_M^2}{\mu_m} \quad (24.21)$$

e  $\mu_m$  e  $\mu_M$  sono il minimo ed il massimo modulo elastico. Infine,  $\rho$  è la densità di massa del materiale di cui è costituita la trave, ed  $\omega_0(s)$  può identificarsi con la prima frequenza libera di vibrazione di un cilindro di spessore  $s$  e base  $\Sigma_1$ , composto dello stesso materiale della trave. Il parametro  $s$  può essere variato, in modo da ottimizzare la quantità  $k(s)$ .

Il teorema — la cui dimostrazione va ben al di là dei limiti del presente testo — è contenuto in R. Toupin *Saint-Venant's principle*, Arch. Rat. Mech. & Anal. 18, pagg. 293-304 (1965), e può essere letto nella sezione Ricerche del sito <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk>. Una sua dimostrazione dettagliata si può consultare nel libro di D.İeşan, *Saint-Venant problem*, Springer Lecture Notes in Mathematics.

## Capitolo 25

# Sforzo assiale e flessione

Si studiano in questo Capitolo i casi di sollecitazione caratterizzati dall'assenza di tensioni tangenziali, e quindi dalla presenza della sola tensione normale  $\sigma_{33}$ . Più in particolare, si studieranno i casi in cui  $\sigma_{33}$  è costante, e quelli in cui varia linearmente con  $x_1$  o con  $x_2$ .

### 25.1 Lo sforzo assiale

Si esamini un solido del tipo trave, e si ponga l'origine del riferimento nel baricentro della sezione di sinistra.

Si ipotizzi che le tensioni all'interno della trave, a distanza superiore a quella di estinzione, siano date da:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (25.1)$$

e che  $\sigma_{33} = \sigma_0$  sia costante.

Nello spirito del metodo semi-inverso, da questa ipotizzata distribuzione di tensioni si vuol dedurre la corrispondente distribuzione di deformazione e di spostamenti, e si vuol sapere a quale caratteristiche della sollecitazione esterna sulle basi essa corrisponda.

In altri termini, invece di assegnare le forze applicate alle basi, e ricavare le tensioni, si segue la via inversa, partendo dalle tensioni, e ricavando *a posteriori* quell'insieme di caratteristiche che producono le assegnate tensioni.

Dalla (25.1) si può trarre lo stato deformativo, utilizzando le leggi di Hooke, come dedotte nel Capitolo precedente:

$$e_{11} = -\frac{\nu}{E}\sigma_0 \quad (25.2)$$

$$e_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_0 \quad (25.3)$$

$$e_{33} = \frac{\sigma_0}{E} \quad (25.4)$$

$$e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0 \quad (25.5)$$

e quindi esistono solo deformazioni normali. Per ricavare gli spostamenti, si parta dalle (25.2–25.4), ottenendo:

$$\begin{aligned} e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 &\implies u_1 = -\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_1 + \phi_1(x_2, x_3) \\ e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 &\implies u_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_2 + \phi_2(x_1, x_3) \\ e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 &\implies u_3 = \frac{\sigma_0}{E}x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (25.6)$$

Sostituendo nelle altre tre equazioni (25.5) si ha:

$$\begin{aligned} e_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 &\implies \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 &\implies \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0 &\implies \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (25.7)$$

e queste equazioni, unite alle ovvie relazioni:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = 0 \quad (25.8)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = 0 \quad (25.9)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} = 0 \quad (25.10)$$

portano a concludere che il campo di spostamenti  $\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$  genera deformazioni nulle, e quindi è un moto rigido. Supponendo, come usuale, che i vincoli siano tali da impedire moti rigidi, la terna definitiva di spostamenti connessi con le (25.2–25.5) sarà allora:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_1 \\ u_2 &= -\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_2 \\ u_3 &= \frac{\sigma_0}{E}x_3 \end{aligned} \quad (25.11)$$

Poichè le (25.11) sono lineari, le equazioni di Cauchy–Navier del Capitolo 24 sono identicamente soddisfatte. Inoltre, poichè le tensioni tangenziali sono

nulle, soddisfatta è anche l'unica condizione ai limiti dello stesso Capitolo 24, da imporre sulla superficie laterale. Ne segue che la distribuzione di tensioni (25.1) dà luogo ad una possibile soluzione del problema della trave. Vediamo quali caratteristiche della sollecitazione esterna applicate alle basi producono la distribuzione (25.1) delle tensioni.

Le caratteristiche della sollecitazione esterna sulla faccia di destra sono fornite, per definizione, da:

$$\begin{aligned}
 F_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{13} \, dA = 0 \\
 F_2^{(2)} &= \int_A \sigma_{23} \, dA = 0 \\
 F_3^{(2)} &= \int_A \sigma_{33} \, dA = \sigma_0 A \\
 M_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{33} x_2 \, dA = \sigma_0 \int_A x_2 \, dA = 0 \\
 M_2^{(2)} &= - \int_A \sigma_{33} x_1 \, dA = -\sigma_0 \int_A x_1 \, dA = 0 \\
 M_3^{(2)} &= \int_A (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) \, dA = 0
 \end{aligned} \tag{25.12}$$

dove si è fatto uso dell'annullarsi del momento statico rispetto ad assi baricentrici.

Analogamente, si ha, sulla faccia di sinistra:

$$\begin{aligned}
 F_1^{(1)} &= F_2^{(1)} = 0 \\
 F_3^{(1)} &= - \int_A \sigma_{33} \, dA = -\sigma_0 A \\
 M_1^{(1)} &= M_2^{(1)} = M_3^{(1)} = 0
 \end{aligned} \tag{25.13}$$

Quindi, le caratteristiche della sollecitazione esterna sulle due basi si riducono a due forze uguali e contrarie:

$$\begin{aligned}
 F_3^{(2)} &= F_3 = \sigma_0 A \\
 F_3^{(1)} &= -F_3
 \end{aligned} \tag{25.14}$$

e la sollecitazione si chiama *sollecitazione semplice di sforzo assiale di trazione* (se  $F_3 > 0$ ) o di *compressione* (se  $F_3 < 0$ ).

L'unica caratteristica di sollecitazione interna è lo sforzo normale  $N$ , positivo se  $F_3$  è positiva, negativo se  $F_3$  è negativa. Esso è costante lungo la trave, e vale:

$$N = \int_A \sigma_{33} \, dA = \sigma_0 A \tag{25.15}$$

da cui:

$$\sigma_0 = \sigma_{33} = \frac{N}{A} \tag{25.16}$$

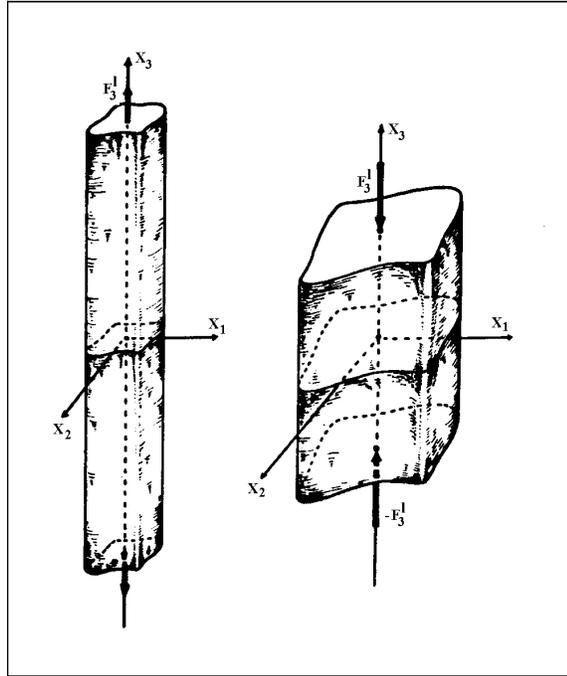


Figura 25.1: La sollecitazione di trazione e compressione (adattato da G. Fichera *Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica classica*)

Sostituendo nella terna di spostamenti si ha infine:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\nu \frac{N}{EA} x_1 \\ u_2 &= -\nu \frac{N}{EA} x_2 \\ u_3 &= \frac{N}{EA} x_3 \end{aligned} \quad (25.17)$$

### 25.1.1 L'energia di deformazione

L'energia di deformazione  $L$  di un tronco di trave lungo  $l$ , soggetta a sforzo normale può agevolmente calcolarsi in base alla definizione:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dv = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 dv = \frac{N^2}{2EA^2} \int_V dv = \frac{N^2 l}{2EA} \quad (25.18)$$

Un'utile espressione alternativa si ottiene esprimendo l'energia elastica in funzione degli spostamenti:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dv = \frac{E}{2} \int_V e_{33}^2 dv = \frac{EA}{2} \int_0^l \left( \frac{du_3}{dx_3} \right)^2 dx_3 \quad (25.19)$$

## 25.2 Flessione retta nel piano

Si esamini un solido del tipo trave, si ponga l'origine del riferimento nel baricentro della sezione di sinistra, e si orientino gli assi  $X_1$  ed  $X_2$  secondo gli assi principali di inerzia della sezione, portandoli quindi a coincidere con gli assi centrali di inerzia.

Si ipotizzi che le tensioni all'interno della trave, a distanza superiore a quella di estinzione, siano date da:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (25.20)$$

e che stavolta  $\sigma_{33} = cx_2$ , ossia che la tensione vari linearmente secondo l'asse  $X_2$ .

### 25.2.1 La deduzione degli spostamenti

Dalla (25.20) si può trarre lo stato deformativo:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{\nu}{E}cx_2 \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E}cx_2 \\ e_{33} &= \frac{c}{E}x_2 \\ e_{12} &= e_{13} = e_{23} = 0 \end{aligned} \quad (25.21)$$

e quindi anche in questo caso esistono solo deformazioni normali. Gli spostamenti sono allora ricavabili con un procedimento simile a quello già illustrato per il caso dello sforzo normale. Partendo dalle espressioni delle deformazioni normali si ha:

$$\begin{aligned} e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 &\implies u_1 = -\frac{\nu}{E}cx_1x_2 + \phi_1(x_2, x_3) \\ e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 &\implies u_2 = -\frac{\nu}{2E}cx_2^2 + \phi_2(x_1, x_3) \\ e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 &\implies u_3 = \frac{c}{E}x_2x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (25.22)$$

e sostituendo nelle altre tre equazioni (25.21) si ha:

$$\begin{aligned} e_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 &\implies \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} - \frac{\nu}{E}cx_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 &\implies \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0 &\implies \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} + \frac{c}{E}x_3 \right) = 0 \end{aligned} \quad (25.23)$$

Dalla prima e dalla terza si ricavano le derivate della  $\phi_2$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} &= \frac{\nu}{E} c x_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} &= -\frac{c}{E} x_3 - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2}\end{aligned}\quad (25.24)$$

Dalla prima si ottiene, integrando:

$$\phi_2 = \frac{\nu}{2E} c x_1^2 + \psi_2(x_1, x_3) \quad (25.25)$$

ed infine, dalla seconda:

$$\psi_2 = -\frac{c}{2E} x_3^2 + \chi_2(x_1, x_3) \quad (25.26)$$

In definitiva, quindi, si ha una terna di spostamenti pari a:

$$\begin{aligned}u_1 &= -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 + \phi_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{2E} c x_2^2 + \frac{\nu}{2E} c x_1^2 - \frac{c}{2E} x_3^2 + \chi_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= \frac{c}{E} x_2 x_3 + \phi_3(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (25.27)$$

Sarà ora possibile verificare che l'annullarsi delle tre deformazioni taglianti implica:

$$\begin{aligned}e_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \chi_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \chi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \right) = 0\end{aligned}\quad (25.28)$$

portando a concludere che il campo di spostamenti  $\phi^* = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \chi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$  genera deformazioni nulle, e quindi è un moto rigido. Supponendo, come usuale, che i vincoli siano tali da impedire moti rigidi, la terna definitiva di spostamenti connessi con le (25.20) sarà allora:

$$\begin{aligned}u_1 &= -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 \\ u_2 &= -\frac{c\nu}{2E} \left( x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_1^2 \right) \\ u_3 &= \frac{c}{E} x_2 x_3\end{aligned}\quad (25.29)$$

### 25.2.2 La deduzione delle caratteristiche

Le caratteristiche della sollecitazione esterna sono fornite da:

$$\begin{aligned}
 F_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{13} \, dA = 0 \\
 F_2^{(2)} &= \int_A \sigma_{23} \, dA = 0 \\
 F_3^{(2)} &= \int_A \sigma_{33} \, dA = c \int_A x_2 \, dA = 0 \\
 \mathcal{M}_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{33} x_2 \, dA = c \int_A x_2^2 \, dA = cI_{11} \\
 \mathcal{M}_2^{(2)} &= - \int_A \sigma_{33} x_1 \, dA = -c \int_A x_1 x_2 \, dA = 0 \\
 \mathcal{M}_3^{(2)} &= \int_A (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) \, dA = 0
 \end{aligned} \tag{25.30}$$

dove si è fatto uso dell'annullarsi del momento statico rispetto ad assi baricentrici e del momento centrifugo rispetto a due assi principali di inerzia. Inoltre l'integrale:

$$I_{11} = \int_A x_2^2 \, dA \tag{25.31}$$

è il momento di inerzia della sezione retta rispetto all'asse  $X_1$ .

Analogamente, si ha, sulla faccia di sinistra:

$$F_1^{(1)} = F_2^{(1)} = F_3^{(1)} = \mathcal{M}_2^{(1)} = \mathcal{M}_3^{(1)} = 0 \tag{25.32}$$

$$\mathcal{M}_1^{(1)} = -\mathcal{M}_1^{(2)} = -cI_{11} \tag{25.33}$$

Quindi, le caratteristiche della sollecitazione esterna sulle due basi si riducono a due coppie uguali e contrarie:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1^{(2)} &= \mathcal{M}_1 = cI_{11} \\
 \mathcal{M}_1^{(1)} &= -\mathcal{M}_1
 \end{aligned} \tag{25.34}$$

e la sollecitazione si chiama *sollecitazione semplice di flessione*, o anche *flessione retta*, relativa all'asse  $X_1$

L'unica caratteristica di sollecitazione interna è il *momento flettente*  $M_1$ , costante lungo l'asse della trave, e pari a:

$$M_1 = \int_A \sigma_{33} x_2 \, dA = cI_{11} \tag{25.35}$$

da cui:

$$c = \frac{M_1}{I_{11}} \tag{25.36}$$

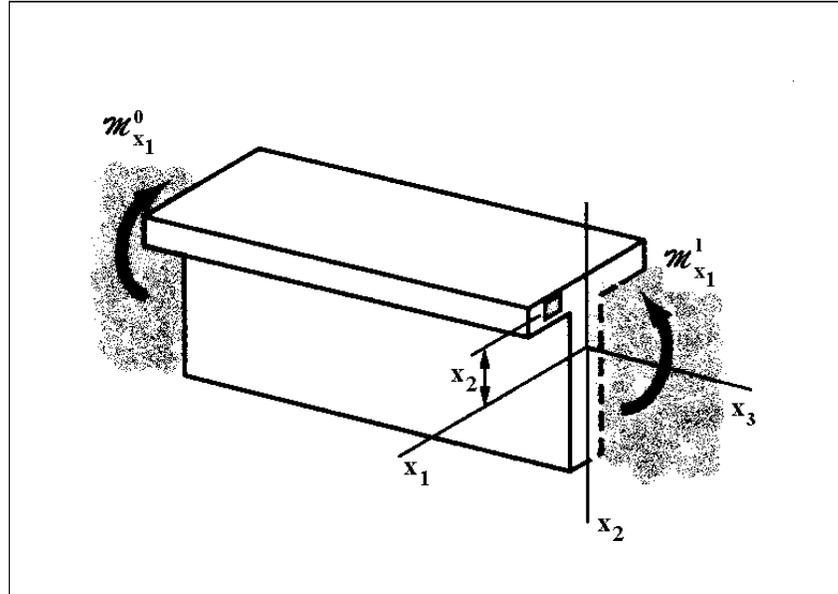


Figura 25.2: Flessione nel piano

ed infine:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_{11}} x_2 \quad (25.37)$$

E' questa la fondamentale formula di Navier: essa assicura che le tensioni si annullano sull'asse  $X_1$ , sono costanti in corrispondenza di ogni corda parallela all'asse  $X_1$ , proporzionali alla distanza da questo. Per  $M_1 > 0$  le tensioni sono positive, ossia di trazione, per  $x_2 > 0$ , negative, ossia di compressione, per  $x_2 < 0$ , come illustrato in Figura 25.3:

Osservando la trave disposta con l'asse  $X_3$  orizzontale e l'asse  $X_2$  verticale ed orientato verso il basso, il momento flettente è positivo se le due coppie applicate  $M_1$  sono dirette in senso orario sulla estremità di sinistra ed in senso antiorario su quella di destra, e le tensioni che ne derivano sono positive al di sotto dell'asse neutro  $X_1$ , e negative al di sopra. Si spiega così la dizione comune, secondo cui in una trave ad asse orizzontale il momento flettente positivo tende le fibre inferiori e comprime quelle superiori<sup>1</sup>.

Di basilare importanza è la seguente:

**Definizione 9.** *Il piano su cui si annullano gli spostamenti si dice piano neutro, e la traccia di tale piano sulla sezione retta si dice asse neutro. Ne segue, in*

<sup>1</sup>V. Franciosi, *Fondamenti di Scienza delle Costruzioni* Vol. II, pag. 137, Liguori, Napoli, 1987

questo caso, che il piano neutro coincide con il piano  $(X_1, X_3)$ , e l'asse neutro coincide con l'asse  $X_1$

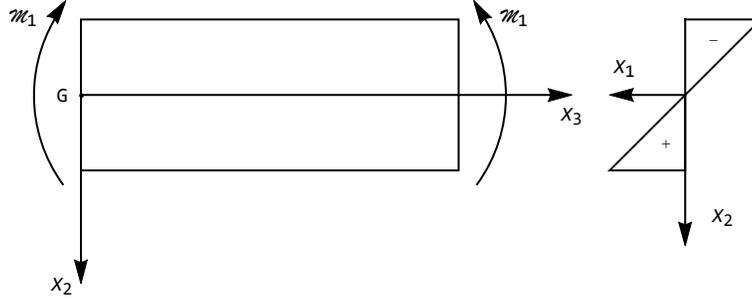


Figura 25.3: Momenti flettenti positivi e diagramma di tensioni alla Navier

### 25.2.3 Analisi degli spostamenti

Utilizzando la (25.36), gli spostamenti da flessione si scrivono:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2) = -\frac{M_1 \nu}{EI_{11}} x_1 x_2 \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2, x_3) = -\frac{M_1 \nu}{2EI_{11}} \left( x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_1^2 \right) \\ u_3 &= u_3(x_2, x_3) = \frac{M_1}{EI_{11}} x_2 x_3 \end{aligned} \quad (25.38)$$

#### Le sezioni rette

Si consideri ora un punto  $A$ , di coordinate  $(x_1, x_2, x_3)$ , e si deducano le coordinate  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  del suo trasformato  $A'$ :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + u_1 = x_1 - \frac{M_1 \nu}{EI_{11}} x_1 x_2 \\ \xi_2 &= x_2 + u_2 = x_2 - \frac{M_1 \nu}{2EI_{11}} \left( x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_1^2 \right) \\ \xi_3 &= x_3 + u_3 = x_3 + \frac{M_1}{EI_{11}} x_2 x_3 \end{aligned} \quad (25.39)$$

Quindi, i punti della sezione retta, di equazione  $x_3 = k$ , si troveranno, a deformazione avvenuta, sulla superficie di equazione:

$$\xi_3 = k \left( 1 + \frac{M_1}{EI_{11}} x_2 \right) = k \left[ 1 + \frac{M_1}{EI_{11}} (\xi_2 - u_2) \right] \quad (25.40)$$

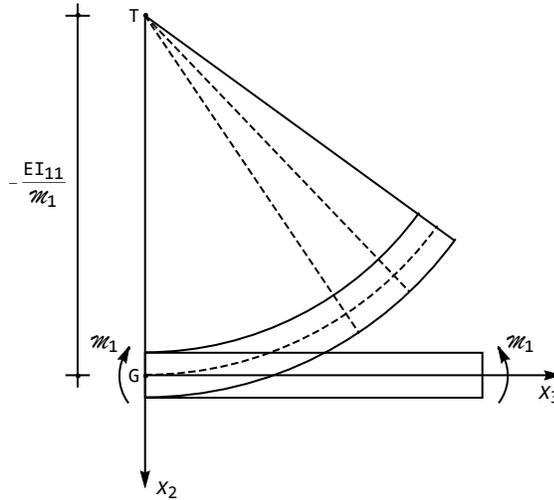


Figura 25.4: La planeità delle sezioni rette

In prima approssimazione si può trascurare  $u_2$  rispetto ad  $x_2$ , e quindi confondere  $x_2$  con  $\xi_2$ , e l'equazione precedente diviene:

$$\xi_3 = k \left( 1 + \frac{M_1}{EI_{11}} \xi_2 \right) \quad (25.41)$$

E' questa l'equazione di un piano, e si giustifica l'affermazione che *nella sollecitazione di flessione le sezioni rette si conservano piane*. Inoltre, la traccia del piano di equazione (25.41) sul piano  $(X_2, X_3)$  interseca l'asse  $X_2$  nel punto  $T$  di coordinate  $(0, -EI_{11}/M_1)$ , come illustrato in Figura 25.4 ed in Figura 25.5. Poichè quanto detto non dipende da  $k$ , e quindi è valido per qualsiasi sezione retta, si può concludere che a seguito della deformazione i punti della generica sezione retta apparterranno al fascio di piani il cui sostegno è la retta passante per  $T$  ed ortogonale al piano  $(X_2, X_3)$ . La quantità  $r = \frac{-EI_{11}}{M_1}$  si dice *raggio di curvatura*, ed il suo inverso:

$$\rho = \frac{1}{r} = -\frac{M_1}{EI_{11}} \quad (25.42)$$

è detta *curvatura*. Si può quindi concludere che le rette del piano  $(X_1, X_3)$ , e quindi anche l'asse  $X_3$ , si trasformano in archi di cerchio.

### Le deformazioni nel piano

Le sezioni rette di equazione  $x_3 = k$  restano piane, come si è appena visto, ma ciò non significa che non esistano deformazioni nel piano delle sezioni rette

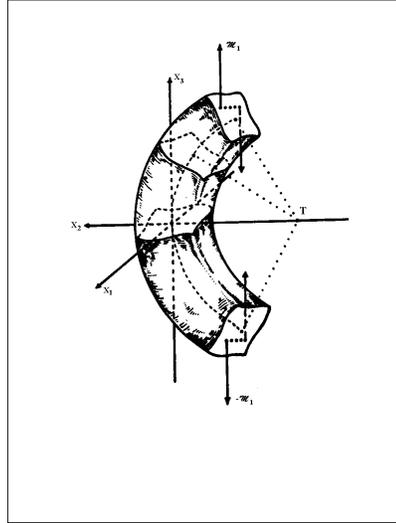


Figura 25.5: La planietà delle sezioni rette (adattato da G. Fichera *Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica classica*)

stesse. Ed infatti, si consideri il piano di equazione  $x_1 = h$ , i cui punti si portano, a deformazione avvenuta, sulla superficie di equazione:

$$\xi_1 = x_1 + u_1 = h \left( 1 - \nu \frac{M_1}{EI_{11}} x_2 \right) \approx h \left( 1 - \nu \frac{M_1}{EI_{11}} \xi_2 \right) \quad (25.43)$$

Nell'ordine di approssimazione che ha condotto a confondere  $x_2$  con  $\xi_2$  la precedente rappresenta ancora un piano, parallelo all'asse  $X_3$ , la cui traccia sulla generica sezione retta interseca l'asse  $X_2$  in un punto  $T'$  di coordinate  $\left( 0, \frac{EI_{11}}{\nu M_1} \right)$ . La quantità  $r' = \frac{EI_{11}}{\nu M_1}$  è ancora un *raggio di curvatura*, ed il suo inverso  $\rho' = \nu \rho$  è detto *curvatura anticlastica*. Complessivamente, un tronco di trave soggetto a flessione si deforma come illustrato in Figura 25.6.

### L'asse

Si consideri l'asse della trave, di equazione  $x_1 = x_2 = 0$ . A seguito della deformazione, i suoi punti subiranno gli spostamenti:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= -\frac{M_1}{2EI_{11}} x_3^2 \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (25.44)$$

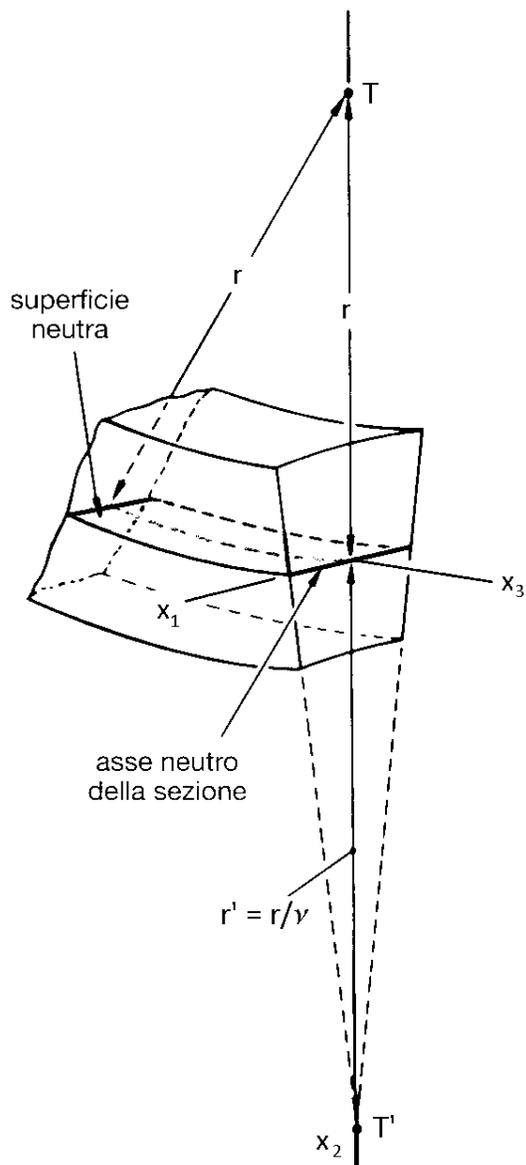


Figura 25.6: La deformazione di un tronco di trave soggetto a flessione

Pertanto l'asse si trasforma in una parabola, di curvatura:

$$\chi = \frac{\frac{d^2 u_2}{dx_3^2}}{\left(1 + \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (25.45)$$

D'altro canto, nella solita ipotesi di piccoli gradienti di spostamento è lecito approssimare ad 1 il denominatore, ritrovando la curvatura (25.42):

$$\chi \approx \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = -\frac{M_1}{EI_{11}} = \rho \quad (25.46)$$

Sono utili le due seguenti:

**Definizione 10.** *Il piano che contiene la deformata dell'asse si chiama piano di flessione, ed in questo caso coincide con il piano  $(X_2, X_3)$ . La traccia del piano di flessione sulla sezione retta, si chiama asse di flessione, ed in questo caso coincide con l'asse  $X_2$ .*

**Definizione 11.** *Il piano ortogonale all'asse momento della coppia applicata si chiama piano di sollecitazione, ed in questo caso coincide con il piano  $(X_2, X_3)$ . La traccia del piano di sollecitazione sulla sezione retta si chiama asse di sollecitazione, ed in questo caso coincide con l'asse  $X_2$ .*

### 25.2.4 L'energia di deformazione

L'energia di deformazione  $L$  di un tronco di trave lungo  $l$ , soggetta a flessione nel piano, può agevolmente calcolarsi in base alla definizione:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dv = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 dv = \frac{M_1^2}{2EI_{11}^2} \int_0^l \int_{\Sigma} x_2^2 dA dx_3 = \frac{M_1^2 l}{2EI_{11}} \quad (25.47)$$

Un'utile espressione alternativa si ottiene anche in questo caso esprimendo l'energia elastica in funzione degli spostamenti, utilizzando la (25.46):

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dv = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 dv = \frac{EI_{11}}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 u_2}{dx_3^2}\right)^2 dx_3 \quad (25.48)$$

## 25.3 Flessione retta fuori dal piano

Analogamente al caso precedente può trattarsi il caso in cui la tensione normale  $\sigma_{33}$  sia l'unica componente di tensione presente, e che sia distribuita con legge

lineare lungo l'asse  $X_1$ . E' questa la terza sollecitazione semplice di De Saint-Venant, per cui quindi:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (25.49)$$

con  $\sigma_{33} = cx_1$ .

### 25.3.1 La deduzione degli spostamenti

Ripetendo i passaggi analitici già illustrati per la sollecitazione semplice di flessione nel piano si ottengono le deformazioni:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{\nu}{E}cx_1 \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E}cx_1 \\ e_{33} &= \frac{c}{E}x_1 \\ e_{12} &= e_{13} = e_{23} = 0 \end{aligned} \quad (25.50)$$

che in termini di derivate di spostamenti si scrivono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= -\frac{\nu}{E}cx_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\frac{\nu}{E}cx_1 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{c}{E}x_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (25.51)$$

Le prime tre condizioni forniscono:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{2E}cx_1^2 + \phi_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{E}cx_1x_2 + \phi_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= \frac{c}{E}x_1x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (25.52)$$

che utilizzate nella quarta condizione conducono a scrivere:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} - \frac{\nu c}{E}x_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = 0 \implies \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} = \frac{\nu c}{E}x_2 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \implies \phi_1 = \frac{\nu c}{2E}x_2^2 + \psi_1(x_2, x_3) \quad (25.53)$$

Ne segue che ora la prima componente di spostamento si scriverà:

$$u_1 = -\frac{\nu}{2E}cx_1^2 + \frac{\nu}{2E}x_2^2 + \psi_1(x_2, x_3) \quad (25.54)$$

Introducendo anche questa espressione nella quinta condizione si ha:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} + \frac{c}{E}x_3 + \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1} = 0 \implies \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} = -\frac{c}{E}x_3 - \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1} \implies \psi_1 = -\frac{c}{2E}x_3^2 + \chi_1(x_2, x_3) \quad (25.55)$$

e quindi la terna di spostamenti diviene:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{2E}cx_1^2 + \frac{\nu c}{2E}x_2^2 - \frac{c}{2E}x_3^2 + \chi_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{E}cx_1x_2 + \phi_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= \frac{c}{E}x_1x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (25.56)$$

E' possibile ora verificare che il campo di spostamenti  $(\chi_1, \phi_2, \phi_3)$  non causa deformazioni, e quindi si potrà assumere la terna di spostamenti:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{c\nu}{2E} \left( x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_2^2 \right) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{E}cx_1x_2 \\ u_3 &= \frac{c}{E}x_1x_3 \end{aligned} \quad (25.57)$$

### 25.3.2 La deduzione delle caratteristiche

Applicando le definizioni di caratteristiche di sollecitazione esterna si ottiene, ponendo l'origine nel baricentro ed orientando gli assi secondo le direzioni centrali di inerzia

$$\begin{aligned} F_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{13} \, dA = 0 \\ F_2^{(2)} &= \int_A \sigma_{23} \, dA = 0 \\ F_3^{(2)} &= \int_A \sigma_{33} \, dA = c \int_A x_1 \, dA = 0 \\ \mathcal{M}_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{33}x_2 \, dA = c \int_A x_1x_2 \, dA = 0 \\ \mathcal{M}_3^{(2)} &= \int_A (\sigma_{23}x_1 - \sigma_{13}x_2) \, dA = 0 \\ \mathcal{M}_2^{(2)} &= -\int_A \sigma_{33}x_1 \, dA = -c \int_A x_1^2 \, dA = -cI_{22} \end{aligned} \quad (25.58)$$

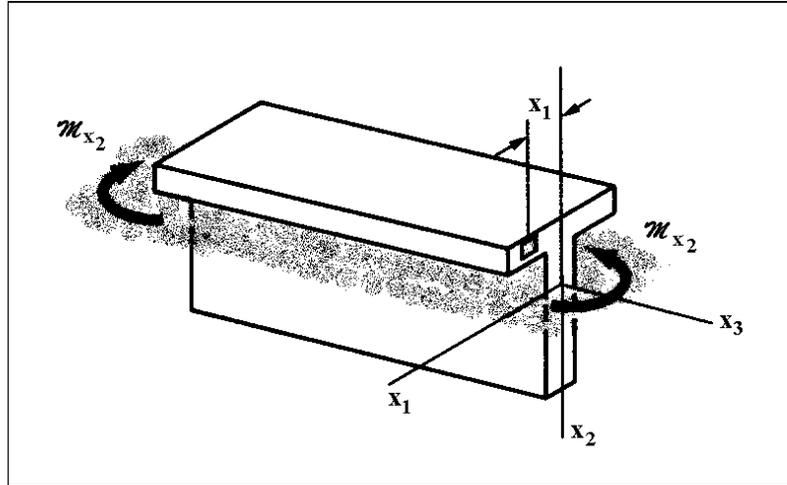


Figura 25.7: La flessione fuori del piano

dove l'integrale:

$$I_{22} = \int_A x_1^2 dA \quad (25.59)$$

è il momento di inerzia della sezione retta rispetto all'asse verticale  $x_2$ .

Analogamente, sulla faccia di sinistra si annullano tutte le c.s.e. a parte la coppia risultante  $\mathcal{M}_2^{(1)}$ :

$$F_1^{(1)} = F_2^{(1)} = F_3^{(1)} = \mathcal{M}_1^{(1)} = \mathcal{M}_3^{(1)} = 0; \quad (25.60)$$

$$\mathcal{M}_2^{(1)} = -\mathcal{M}_2^{(2)} = cI_{22} \quad (25.61)$$

Quindi, le caratteristiche della sollecitazione esterna sulle due basi si riducono a due coppie uguali e contrarie:

$$\mathcal{M}_2^{(2)} = \mathcal{M}_2 = -cI_{22} \quad (25.62)$$

$$\mathcal{M}_2^{(1)} = -\mathcal{M}_2$$

e la sollecitazione si chiama *sollecitazione semplice di flessione*, o anche *flessione retta*, relativa all'asse  $x_2$ .

L'unica caratteristica di sollecitazione interna è il *momento flettente*  $M_2$ :

$$M_2 = - \int_A \sigma_{33} x_1 dA = -cI_{22} \quad (25.63)$$

da cui:

$$c = -\frac{M_2}{I_{22}} \quad (25.64)$$

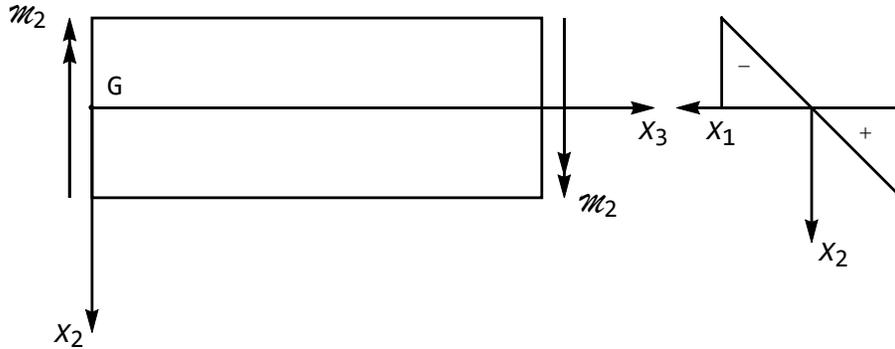


Figura 25.8: Momenti flettenti positivi per la flessione fuori dal piano

ed infine:

$$\sigma_{33} = -\frac{M_2}{I_{22}}x_1 \quad (25.65)$$

Si è giunti quindi ad una formula analoga alla *formula di Navier*: essa assicura che le tensioni si annullano sull'asse  $X_2$ , sono costanti in corrispondenza di ogni corda parallela all'asse  $X_2$ , proporzionali alla distanza da questo. Per  $M_2 > 0$  le tensioni sono positive, ossia di trazione, per  $x_1 < 0$ , negative, ossia di compressione, per  $x_1 > 0$ . In questo caso, quindi, il piano medio è il piano  $X_2 - X_3$ , mentre l'asse neutro coincide con l'asse  $X_2$ .

### 25.3.3 Analisi degli spostamenti

E' possibile dimostrare che anche in questo caso le sezioni rette si trasformano in piani, e quindi è preservata la planeità delle sezioni rette. Inoltre, l'asse della trave si tramuta in una curva contenuta nel piano  $X_1 - X_3$ , che quindi è in questo caso il piano di flessione, mentre l'asse di flessione sarà la traccia del piano di flessione sulla sezione retta, e quindi sarà l'asse  $X_1$ . Ciò giustifica il nome corrente di *flessione fuori del piano*.

Infine, la relazione tra la caratteristica della sollecitazione interna  $M_2$  e la curvatura dell'asse della trave si scriverà in questo caso:

$$\chi = \frac{d^2 u_1}{dx_3^2} = \frac{M_2}{EI_{22}} \quad (25.66)$$

Il piano ortogonale all'asse momento della coppia applicata si chiama *piano di sollecitazione*, ed in questo caso coincide con il piano  $X_1 - X_3$ . La traccia del piano di sollecitazione sulla sezione retta si chiama *asse di sollecitazione*, ed in questo caso coincide con l'asse  $X_1$ .

### 25.3.4 L'energia di deformazione

L'energia di deformazione  $L$  di un tronco di trave lungo  $l$ , soggetta a flessione fuori del piano può agevolmente calcolarsi in base alla definizione:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dv = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 dv = \frac{M_2^2}{2EI_{22}^2} \int_0^l \int_{\Sigma} x_1^2 dA dx_3 = \frac{M_2^2 l}{2EI_{22}} \quad (25.67)$$

ed ancora:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dv = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 dv = \frac{EI_{22}}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 u_1}{dx_3^2} \right)^2 dx_3 \quad (25.68)$$

## 25.4 L'ortogonalità energetica

Si immagini ora che il tronco di trave sia soggetto contemporaneamente ad una forza assiale  $F_3^{(2)}$  e a due coppie flettenti  $\mathcal{M}_1^{(2)}$  e  $\mathcal{M}_2^{(2)}$ . Per il principio di sovrapposizione degli effetti, la tensione normale  $\sigma_{33}$  sarà fornita da:

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 \quad (25.69)$$

Ne segue che l'energia di deformazione sarà fornita da:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dv = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 dv = \frac{1}{2E} \int_V \left( \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 \right)^2 dv \quad (25.70)$$

L'integrando non dipende dalla variabile  $x_3$ , e quindi potrà scriversi, indicando con  $l$  la lunghezza della trave:

$$\begin{aligned} L &= \frac{l}{2E} \int_{\Sigma} \left( \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 \right)^2 dA = \\ &= \frac{N^2 l}{2EA} + \frac{M_1^2 l}{2EI_{11}} + \frac{M_2^2 l}{2EI_{22}} + \\ &+ \frac{l}{2E} \frac{N M_1}{A I_{11}} \int_{\Sigma} x_2 dA - \frac{l}{2E} \frac{N M_2}{A I_{22}} \int_{\Sigma} x_1 dA - \frac{l}{2E} \frac{M_1 M_2}{I_{11} I_{22}} \int_{\Sigma} x_1 x_2 dA \end{aligned} \quad (25.71)$$

Se gli assi  $X_1$  ed  $X_2$  sono coincidenti con gli assi centrali di inerzia, allora gli ultimi tre integrali si annullano, e quindi:

$$L = \frac{N^2 l}{2EA} + \frac{M_1^2 l}{2EI_{11}} + \frac{M_2^2 l}{2EI_{22}} \quad (25.72)$$

L'energia di deformazione di un tronco di trave soggetto contemporaneamente a sforzo normale, flessione retta nel piano e flessione retta fuori del piano è pari alla somma delle energie elastiche dovute alla presenza di solo sforzo normale, di solo momento flettente nel piano, e di solo momento flettente fuori del piano. In altri termini, le energie mutue di deformazione si annullano, e le tre sollecitazioni sono *ortogonali in senso energetico*.

## Capitolo 26

# Flessione deviata e sforzo normale eccentrico

Con lo studio della flessione fuori del piano si è esaurito l'esame delle sollecitazioni semplici di De Saint Venant caratterizzate dalla presenza di sola tensione normale  $\sigma_{33}$ . In questo Capitolo si vogliono esaminare le travi soggette a coppie flettenti con asse non coincidente con gli assi centrali di inerzia della sezione, e le travi soggette ad una forza assiale non applicata nel baricentro della sezione retta. In ambedue i casi lo studio potrà condursi sovrapponendo i casi di sollecitazione semplice già esaminati

### 26.1 Flessione deviata

Si consideri una trave di De Saint–Venant, sollecitata sulla base di destra da una coppia  $\mathcal{M}$  il cui asse  $s$  non coincide con gli assi centrali di inerzia della sezione, e per l'equilibrio, sulla base di sinistra da una coppia uguale e contraria  $-\mathcal{M}$  con lo stesso asse. In questo caso, quindi, a differenza di quanto accadeva nel caso delle sollecitazioni semplici, il piano di sollecitazione non coincide con alcun piano coordinato, come illustrato in Figura 26.1.

La coppia  $\mathcal{M}$  può scomporsi nelle due componenti secondo gli assi,  $\mathcal{M}_1$  ed  $\mathcal{M}_2$ , da cui si può dedurre che le caratteristiche della sollecitazione interna agenti sulla trave saranno i due momenti flettenti  $M_1$  ed  $M_2$ . Inoltre, l'asse di sollecitazione è individuato dall'angolo che esso forma con l'asse  $X_2$ , e sarà, come ovvio dalla Figura 26.2:

$$\tan(sX_2) = -\frac{M_2}{M_1} \quad (26.1)$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, possiamo considerare questa sollecitazione come la somma delle due flessioni rette appena studiate, e quindi calcolare spostamenti, deformazioni e tensioni sommando gli spostamenti, le deformazioni e le tensioni ottenute nello studio delle due flessioni rette. Ne

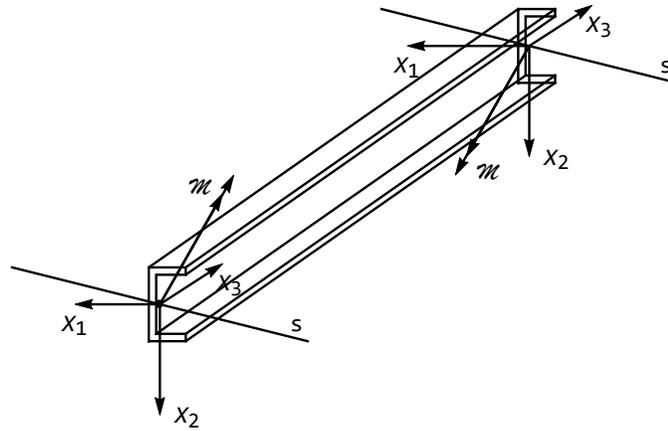


Figura 26.1: Il regime di flessione deviata

segue che la terna di spostamenti si potrà esprimere come:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{M_1\nu}{EI_{11}}x_1x_2 + \frac{M_2\nu}{2EI_{22}}\left(x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_2^2\right) \\ u_2 &= -\frac{M_1\nu}{2EI_{11}}\left(x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_1^2\right) + \frac{M_2\nu}{EI_{22}}x_1x_2 \\ u_3 &= \frac{M_1}{EI_{11}}x_2x_3 - \frac{M_2}{EI_{22}}x_1x_3 \end{aligned} \quad (26.2)$$

mentre le tensioni saranno fornite dalla *formula binomia*:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_{11}}x_2 - \frac{M_2}{I_{22}}x_1 \quad (26.3)$$

Come sempre, il luogo di tensioni nulle si chiama *asse neutro*, ed in questo caso sarà definito dall'equazione:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_{11}}x_2 - \frac{M_2}{I_{22}}x_1 = 0 \quad (26.4)$$

Per individuare l'asse neutro, è necessario individuare l'angolo che esso forma con gli assi coordinati. A tal fine, si ricorda che una retta generica  $n$  passante per l'origine ha equazione:

$$ax_1 + bx_2 = 0 \quad (26.5)$$

e forma con gli assi coordinati  $X_1$  ed  $X_2$  gli angoli  $nX_1 = \phi$  ed  $nX_2 = nX_1 + \pi/2 = \phi + \pi/2$ , le cui tangenti trigonometriche si leggono dalla Figura 26.3:

$$\tan(nX_1) = \tan \phi = -\frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{b} \quad (26.6)$$

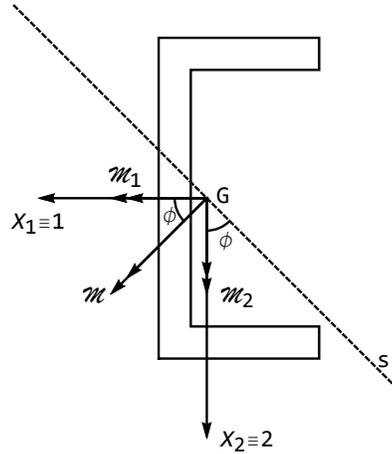


Figura 26.2: La flessione deviata come somma di due flessioni rette

$$\tan(nX_2) = \tan(\phi + \pi/2) = -\cot \phi = \frac{x_1}{x_2} = -\frac{b}{a} \quad (26.7)$$

A partire dalla (26.4), si può quindi giungere a scrivere, con  $a = \frac{-M_2}{I_{22}}$  e  $b = \frac{M_1}{I_{11}}$ :

$$\tan(nX_2) = \frac{M_1 I_{22}}{M_2 I_{11}} \quad (26.8)$$

Si osservi anche, che dalla relazione precedente, e dalla (26.1), si trae la relazione, dipendente solo dalle proprietà geometriche della sezione:

$$\tan(nX_2) \tan(sX_2) = \left( \frac{M_1 I_{22}}{M_2 I_{11}} \right) \left( -\frac{M_2}{M_1} \right) = -\frac{I_{22}}{I_{11}} \quad (26.9)$$

Il *piano di flessione* si può ottenere immediatamente, scrivendo gli spostamenti dei punti dell'asse, come:

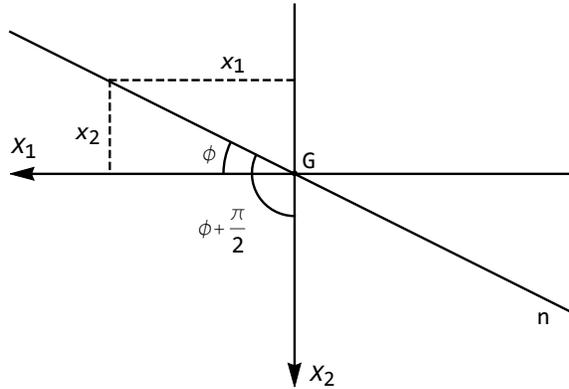
$$u_1 = \frac{M_2}{2EI_{22}} x_3^2 \quad (26.10)$$

$$u_2 = -\frac{M_1}{2EI_{11}} x_3^2 \quad (26.11)$$

$$u_3 = 0 \quad (26.12)$$

sicchè il piano di flessione ha equazione:

$$\begin{aligned} \xi_1 = x_1 + u_1 &= \frac{M_2}{2EI_{22}} \xi_3^2 \\ \xi_2 = x_2 + u_2 &= -\frac{M_1}{2EI_{11}} \xi_3^2 \end{aligned} \quad (26.13)$$

Figura 26.3: Calcolo dell'angolo tra l'asse neutro e l'asse  $X_1$ 

La traccia di tale piano sul piano della sezione retta è detta *asse di flessione*. Si ha il:

**Teorema 16.** *Asse neutro ed asse di flessione sono tra loro ortogonali*

*Dimostrazione.* Ed infatti, eliminando  $\xi_3$  dalle due relazioni precedenti si ottiene subito l'equazione dell'asse:

$$\frac{M_1}{I_{11}}\xi_1 + \frac{M_2}{I_{22}}\xi_2 = 0 \quad (26.14)$$

e quindi la relazione di ortogonalità tra la (26.13) e la (26.4) è soddisfatta. Basta, a dimostrare ciò, ricordare che due rette di equazione:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= 0 \\ cx_1 + dx_2 &= 0 \end{aligned} \quad (26.15)$$

sono tra loro ortogonali se:

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = -1 \quad (26.16)$$

Nel caso in esame si ha:

$$a = -\frac{M_2}{I_{22}} \quad b = \frac{M_1}{I_{11}} \quad c = \frac{M_1}{I_{11}} \quad d = \frac{M_2}{I_{22}} \quad (26.17)$$

e quindi:

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = -\frac{M_2}{I_{22}} \frac{I_{11}}{M_1} \frac{M_1}{I_{11}} \frac{I_{22}}{M_2} = -1 \quad (26.18)$$

□

## 26.2 Sforzo normale eccentrico

Un altro caso notevole di sollecitazione composta è costituita dalla sovrapposizione dello sforzo normale e delle due flessioni rette, o, equivalentemente, dalla sovrapposizione di uno sforzo assiale e da una flessione deviata.

Sulla base di destra, quindi, agiscono sollecitazioni le cui caratteristiche si riducono ad una forza  $F_3^{(2)}$  e due coppie flettenti  $\mathcal{M}_1^{(2)}$  e  $\mathcal{M}_2^{(2)}$ . Le coppie possono comporsi in un'unica coppia  $\mathcal{M}$  agente in un piano ortogonale a quello della base (piano di sollecitazione), come riportato in Figura 26.4. A loro volta,

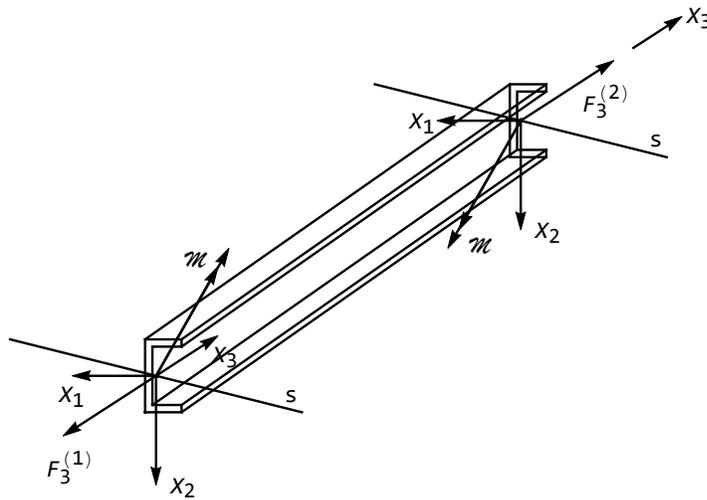


Figura 26.4: La composizione delle due coppie

la coppia  $\mathcal{M}$  e la forza  $F_3^{(2)}$  possono comporsi in un'unica forza  $F_3^{(2)}$  diretta secondo l'asse  $X_3$ , ed agente nel piano di sollecitazione ad una distanza:

$$e = \frac{\mathcal{M}}{F_3^{(2)}} \quad (26.19)$$

dall'asse  $X_3$ . Il punto  $C$  in cui questa forza incontra il piano della base si chiama *centro di sollecitazione*: esso si trova sull'asse di sollecitazione  $s$ , a distanza  $e$  dal baricentro  $G$ , e la distanza  $e$  si dice eccentricità della forza. (cfr. Figura 26.5). Per l'equilibrio, sulla base di sinistra agiscono solo sollecitazioni con caratteristiche pari ad  $F_3^{(1)} = -F_3^{(2)}$ ,  $\mathcal{M}_1^{(1)} = -\mathcal{M}_1^{(2)}$ , e  $\mathcal{M}_2^{(1)} = -\mathcal{M}_2^{(2)}$ , ed anch'esse possono comporsi in un'unica forza eccentrica pari a  $-F_3^{(2)}$ .

Le caratteristiche della sollecitazione interna in corrispondenza di ciascuna sezione retta si riducono ad uno sforzo normale  $N$  e due momenti flettenti  $M_1$  e  $M_2$ . Per il principio di sovrapposizione degli effetti si potrà scrivere subito la *formula trinomia*:

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}}x_2 - \frac{M_2}{I_{22}}x_1 \quad (26.20)$$

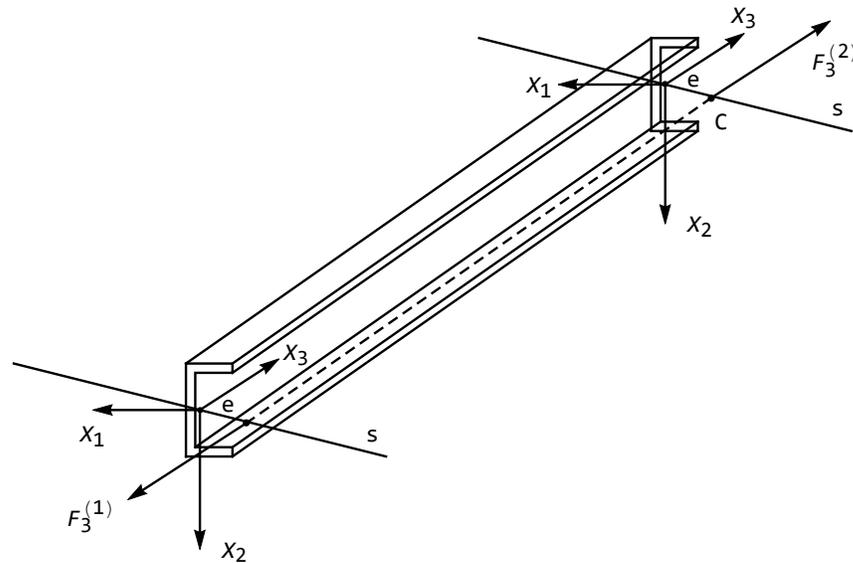


Figura 26.5: La composizione in un unico sforzo normale con eccentricità  $e$

Si noti subito che l'asse neutro, fornito dall'equazione:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}}x_2 - \frac{M_2}{I_{22}}x_1 = 0 \quad (26.21)$$

non è più baricentrico.

## 26.3 Il profilato ad L

Si consideri una trave con sezione retta fornita dal profilato a L, con lati uguali, di Figura 26.6, soggetta ad una coppia flettente con asse di sollecitazione verticale. La base e l'altezza del profilato siano pari a  $100 \text{ mm}$ , lo spessore sia pari ad  $8 \text{ mm}$ , l'intensità della coppia sia pari a  $8000 \text{ kgmm}$ .

### 26.3.1 Il calcolo delle caratteristiche di inerzia

Si studia preventivamente il profilato al fine di:

- calcolare il baricentro della sezione
- calcolare la matrice dei momenti di inerzia baricentrali
- calcolare i momenti di inerzia centrali, insieme alle direzioni centrali di inerzia

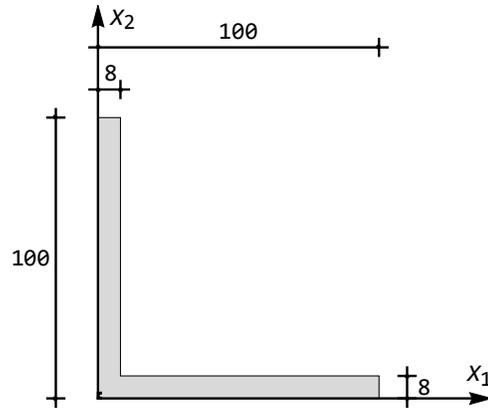


Figura 26.6: Il profilato ad L a lati uguali

### Il calcolo del baricentro

Si divida la sezione nei due rettangoli di Figura 26.7, e si definiscano — per speditezza di calcolo — quattro vettori:

- $b = \{8,92\}$  contenente le basi dei rettangoli
- $h = \{100,8\}$  contenente le altezze dei rettangoli
- $d_{x_1} = \{50,4\}$  contenente le distanze dei baricentri dei rettangoli dall'asse orizzontale  $X_1$
- $d_{x_2} = \{4,54\}$  contenente le distanze dei baricentri dei rettangoli dall'asse verticale  $X_2$

Con queste definizioni, si possono calcolare immediatamente l'area della sezione retta ed i due momenti statici rispetto agli assi  $x_1$  e  $x_2$ :

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{i=1}^2 b_i h_i = 1536 \text{ mm}^2 \\
 S_{x_1} &= \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_1 i} = 42944 \text{ mm}^3 \\
 S_{x_2} &= \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_2 i} = 42944 \text{ mm}^3
 \end{aligned} \tag{26.22}$$

Ne segue che le coordinate del baricentro saranno fornite dalle formule:

$$\begin{aligned}
 x_{G1} &= \frac{S_{x_2}}{A} = 27.9583 \text{ mm} \\
 x_{G2} &= \frac{S_{x_1}}{A} = 27.9583 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{26.23}$$

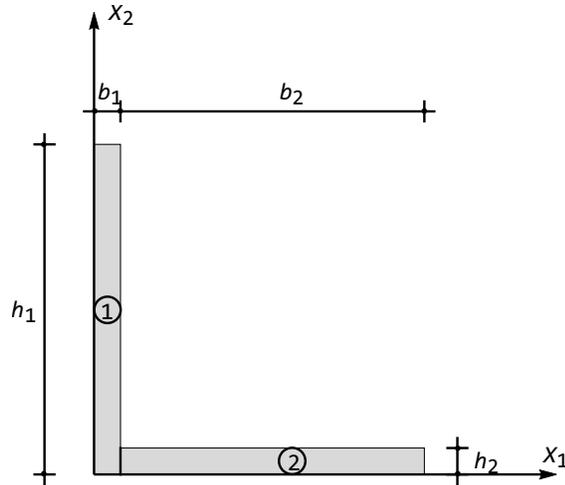


Figura 26.7: I due rettangoli in cui è scomposta la sezione, e gli assi di primo riferimento

### Il calcolo della matrice dei momenti di inerzia baricentrali

Si inizi a calcolare i momenti di inerzia rispetto agli assi di primo riferimento  $X_1$  ed  $X_2$ . A ciò fare, si calcolano — rettangolo per rettangolo — i momenti di inerzia rispetto ai propri assi baricentrali, aggiungendo poi il momento di trasporto:

$$\begin{aligned}
 I_{22} &= \sum_{i=1}^2 \frac{b_i h_i^3}{12} + \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_1 i}^2 = 2.68 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\
 I_{11} &= \sum_{i=1}^2 \frac{b_i^3 h_i}{12} + \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_2 i}^2 = 2.68 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\
 I_{12} &= \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_1 i} d_{x_2 i} = 318976 \text{ mm}^4
 \end{aligned} \tag{26.24}$$

Infine, si usa il teorema di Huyghens per calcolare i richiesti momenti di inerzia baricentrici:

$$\begin{aligned}
 I_{22}^G &= I_{22} - A x_{G2}^2 = 1.48173 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\
 I_{11}^G &= I_{11} - A x_{G1}^2 = 1.48173 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\
 I_{12}^G &= I_{12} - A x_{G1} x_{G2} = -881667 \text{ mm}^4
 \end{aligned} \tag{26.25}$$

**Il calcolo dei momenti di inerzia centrali e delle rispettive direzioni**

Assegnata la matrice dei momenti di inerzia baricentrali:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{22} & I_{12} \\ I_{12} & I_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.48173 \times 10^6 & -881667 \\ -881667 & 1.48173 \times 10^6 \end{pmatrix} \quad (26.26)$$

l'equazione secolare si scriverà:

$$\lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{I})\lambda + \text{Det}(\mathbf{I}) = 0 \quad (26.27)$$

ossia:

$$\lambda^2 - 2.96345 \times 10^6 \lambda + 1.41817 \times 10^{12} = 0 \quad (26.28)$$

con radici:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\equiv I_1 = 2.36339 \times 10^6 \\ \lambda_2 &\equiv I_2 = 600057 \end{aligned} \quad (26.29)$$

La matrice dei momenti di inerzia è allora divenuta:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600057 & 0 \\ 0 & 2.36339 \times 10^6 \end{pmatrix} \quad (26.30)$$

Le rispettive direzioni centrali si ottengono risolvendo i due sistemi:

$$\begin{aligned} (I_{22} - I_1)n_{11} + I_{12}n_{21} &= 0 \\ I_{21}n_{11} + (I_{11} - I_1)n_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (26.31)$$

e:

$$\begin{aligned} (I_{22} - I_2)n_{12} + I_{12}n_{22} &= 0 \\ I_{21}n_{12} + (I_{11} - I_2)n_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (26.32)$$

Il primo si traduce numericamente in:

$$\begin{aligned} -881667n_{11} - 881667n_{21} &= 0 \\ -881667n_{11} - 881667n_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (26.33)$$

con soluzione normalizzata  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Il secondo sistema diviene invece:

$$\begin{aligned} 881667n_{12} - 881667n_{22} &= 0 \\ -881667n_{12} + 881667n_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (26.34)$$

con soluzione normalizzata  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Ne segue che la prima direzione principale sarà inclinata, rispetto ad ambedue gli assi, di un angolo pari a 45 gradi, mentre l'altra direzione, ad essa ortogonale, sarà inclinata di 45 gradi rispetto ad  $X_1$  e di  $-45$  gradi rispetto ad  $X_2$ . Ciò esaurisce lo studio geometrico della sezione retta, portando al sistema di riferimento di Figura 26.8.

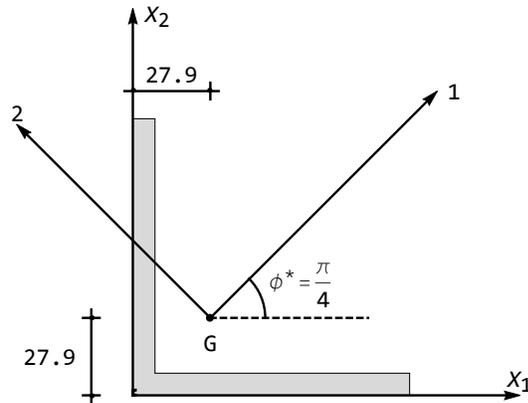


Figura 26.8: Gli assi centrali di inerzia

### 26.3.2 Il diagramma delle tensioni

Scomponendo la coppia  $M$  lungo i due assi centrali di inerzia si avranno le due coppie:

$$M_1 = M \cos(135^\circ) = -5656.85 \text{ kg mm} \quad (26.35)$$

$$M_2 = M \cos(45^\circ) = 5656.85 \text{ kg mm} \quad (26.36)$$

e potranno studiarsi separatamente le due flessioni rette secondo gli assi centrali 1 e 2

Nel primo caso si ottiene il diagramma di Figura 26.9. Un punto significativo in cui la tensione può calcolarsi con relativa facilità è il punto 6, col suo simmetrico 2. Ed infatti le coordinate di 6 nel riferimento originario erano  $(0,100)$ , sicchè nel riferimento traslato nel baricentro si hanno le coordinate  $(-x_{G1}, 100 - x_{G2}) = (-27.9583, 72.0417)$ , e nel riferimento ruotato di 45 gradi si avranno le coordinate:

$$\begin{pmatrix} \xi_{51} \\ \xi_{52} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -27.9583 \\ 72.0417 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.1717 \\ 70.7107 \end{pmatrix} \quad (26.37)$$

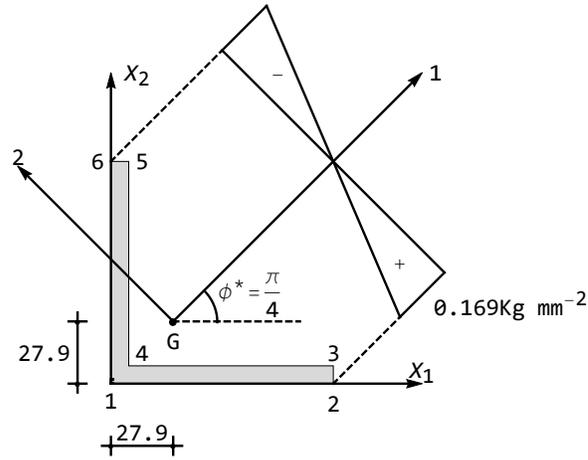
La formula di Navier:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_1} \xi_2 \quad (26.38)$$

fornisce allora nel punto 6 la tensione normale:

$$\sigma_{33}^{(6)} = \frac{-5656.85}{2.36339 \times 10^6} 70.7107 = -0.169248 \text{ kg mm}^{-2} \quad (26.39)$$

Nel punto simmetrico 2 si avrà ovviamente  $\sigma_{33}^{(2)} = 0.169248 \text{ kg mm}^{-2}$ . Nel punto 5 si avrà la tensione  $-0.15571$ , ottenibile sfruttando la linearità del diagramma.


 Figura 26.9: Il diagramma delle tensioni dovute alla coppia  $M_1$ 

Nel secondo caso si ha il diagramma della Figura 26.10. Servono ora le coordinate del punto 5, e del punto 1. Con lo stesso procedimento illustrato in precedenza si hanno le coordinate baricentriche del punto 1 come  $(0 - x_{G1}, 0 - x_{G2}) = (-27.9583, -27.9583)$ , e quindi le coordinate, nel sistema di riferimento centrale:

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -27.9583 \\ -27.9583 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39.539 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26.40)$$

mentre le coordinate baricentriche di 5 sono fornite da  $(8 - x_{G1}, 100 - x_{G2}) = (-19.9583, 72.0417)$  e quindi nel sistema di riferimento centrale:

$$\begin{pmatrix} \xi_{51} \\ \xi_{52} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -19.9583 \\ 72.0417 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.8285 \\ 65.0538 \end{pmatrix} \quad (26.41)$$

Seguono le tensioni fornite dalla formula di Navier:

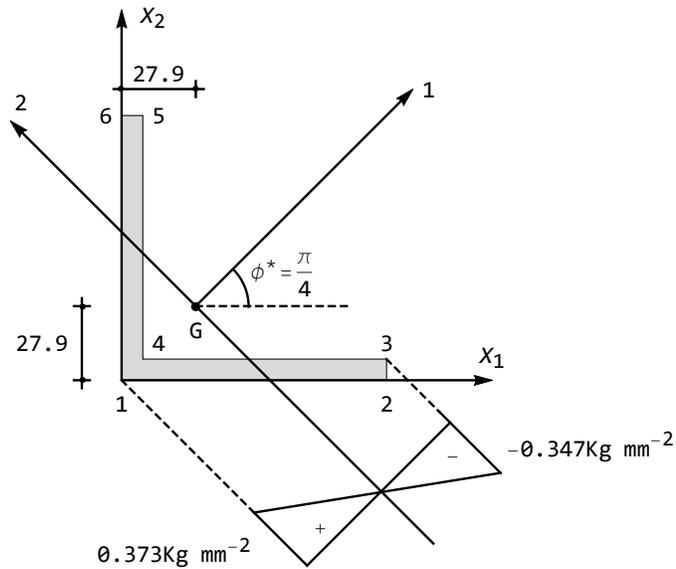
$$\sigma_{33} = -\frac{M_2}{I_2} \xi_1 \quad (26.42)$$

e quindi:

$$\sigma_{33}^5 = -\frac{5656.85}{600057} 36.8285 = -0.347189 \text{ kg mm}^{-2} \quad (26.43)$$

e:

$$\sigma_{33}^1 = -\frac{5656.85}{600057} (-39.539) = 0.372742 \text{ kg mm}^{-2} \quad (26.44)$$

Figura 26.10: Il diagramma delle tensioni dovute alla coppia  $M_2$ 

### L'equazione dell'asse neutro

Si ha, secondo la formula binomia:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_1} \xi_2 - \frac{M_2}{I_2} \xi_1 = 0 \quad (26.45)$$

e quindi:

$$\frac{-5656.85}{2.36339 \times 10^6} \xi_2 - \frac{5656.85}{600057} \xi_1 = 0 \quad (26.46)$$

ossia:

$$\xi_2 = -\frac{2.36339 \times 10^6}{600057} \xi_1 = -3.93861 \xi_1 \quad (26.47)$$

e quindi l'asse neutro forma con l'asse 2 l'angolo pari a:

$$\tan(nX_2) = \frac{\xi_1}{\xi_2} = -\frac{600057}{2.36339 \times 10^6} = -0.253897 \quad (26.48)$$

Infine sarà  $\phi = nX_2 = \arctan(-0.253897) = -0.248643$ , pari a  $-14.246$  gradi.

### Il diagramma finale delle tensioni

Disegnato l'asse neutro, si nota che i valori estremi delle tensioni si raggiungono nel punto 1 e nel punto 5. Per sovrapposizione degli effetti si avrà allora:

$$\sigma_{33}^5 = -0.15571 - 0.347189 = -0.5029 \text{ kg mm}^{-2} \quad (26.49)$$

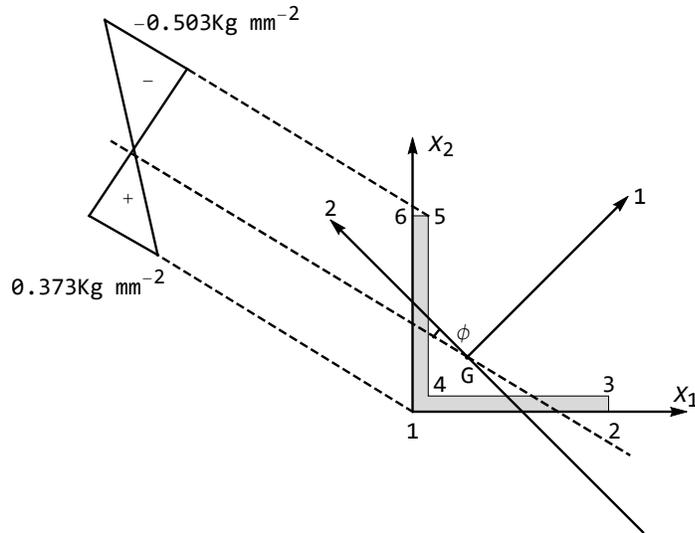


Figura 26.11: Il diagramma finale delle tensioni

$$\sigma_{33}^1 = 0 + 0.372742 = 0.372742 \text{ kg mm}^{-2} \quad (26.50)$$

come riportato in Figura 26.11.



# Capitolo 27

## Torsione

Si studia in questa lezione il caso di sollecitazione caratterizzato dall'assenza di tensioni normali, e quindi dalla presenza delle sole tensioni tangenziali  $\sigma_{13}$  e  $\sigma_{23}$ :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (27.1)$$

I primi studi sulla torsione rimontano a Coulomb, che a seguito dei suoi studi su elettricità e magnetismo ebbe la necessità di inventare uno strumento in grado di misurare piccole forze elettriche o magnetiche. A tal fine, inventò una precisissima bilancia torsionale, e contemporaneamente sviluppò una teoria sulle “forze torsionali”, illustrata in *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal*, Mem. acad. sci. (1784).

In questa memoria, Coulomb determina la rigidità torsionale di un filo metallico studiando le oscillazioni torsionali di un cilindro metallico appeso al filo, come illustrato in Figura 27.1, ipotizzando che la coppia torcente reattiva sia linearmente proporzionale all'angolo di torsione  $\theta$ . Più in particolare, la coppia torcente  $M_t$  sarà fornita dalla relazione:

$$M_t = \mu \frac{d^4}{l} \theta \quad (27.2)$$

dove  $l$  è la lunghezza del filo,  $d$  è il suo diametro, e  $\mu$  è una costante numerica caratteristica del materiale<sup>1</sup>. Alcuni anni dopo, nel 1820, A. Duleau presentò,

---

<sup>1</sup>Usando fili estremamente sottili, ed anche sufficientemente lunghi, la legge di Coulomb permette di misurare forze estremamente deboli. In particolare, Coulomb la utilizzò per misurare forze elettromagnetiche di repulsione, anche se recentemente si è messa in dubbio la correttezza dei suoi esperimenti. Una descrizione dettagliata della bilancia torsionale, insieme ad una replica moderna degli esperimenti di Coulomb può leggersi in A.A. Martinez, *Replication of Coulomb's Torsion Balance Experiment*, Arch. Hist.Exact Sci., **60** (2006), 517–563, da cui invece si evince che il lavoro originale di Coulomb costituisce una descrizione accurata dei componenti dell'esperimento, delle procedure sperimentali e dei risultati. Sia il lavoro originale di Coulomb, sia il lavoro di Martinez possono leggersi sul sito <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk>.

in *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, Paris, alcune sperimentazioni sul comportamento a torsione di travi prismatiche di acciaio. Assumendo, come Coulomb, che l'ipotesi di planeità della sezione retta potesse estendersi anche a questo tipo di sollecitazione, egli confermò la teoria di Coulomb sia per le travi a sezione circolare sia per quelle a sezione circolare cava. Viceversa, utilizzando travi a sezione rettangolare, egli mostrò che le ipotesi di base non reggono più. Ad esempio, le tensioni non sono più proporzionali alla distanza dall'asse della trave. Dopo un tentativo di Cauchy di modificare l'ipotesi di Coulomb per tener conto dell'ingobbimento delle sezioni rette (*Sur la torsion et le vibrations tournantes d'une verge rectangulaire*, Exercices de Mathématiques, 4, pagg. 47–64, 1829), la soluzione completa fu offerta da De Saint-Venant nella famosa memoria del 1853, *Mémoire sur la torsion des prismes*, il cui frontespizio è riprodotto in Figura 27.2. Utilizzando il suo metodo semi-inverso, De Saint-Venant deduce la forma degli spostamenti e pone correttamente il problema per il calcolo della funzione di torsione. Inoltre, il suddetto problema viene risolto per varie forme di sezione retta, ellittica, rettangolare, triangolare, etc. . .

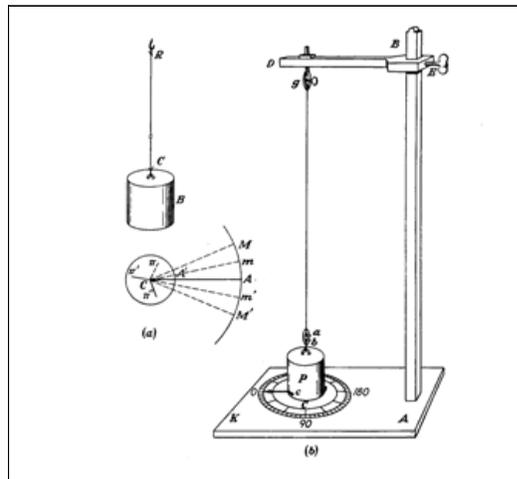


Figura 27.1: La bilancia torsionale di Coulomb

Nel presente Capitolo si parte dalla distribuzione di tensioni caratteristica della torsione, ossia da una matrice di tensioni puramente tangenziale. Utilizzando le equazioni indefinite dell'equilibrio, le leggi di Hooke, e le relazioni spostamenti–deformazioni si giunge a definire la terna di spostamenti. Tale terna, a differenza di quanto ottenuto per le precedenti sollecitazioni normali, varia al variare della forma della sezione retta, e la sua completa determinazione passa attraverso la soluzione di un classico problema di Dini–Neumann.

A partire dallo stato tensionale vengono poi dedotte le caratteristiche della sollecitazione, riconoscendo quindi a posteriori che si è in presenza di una sollecitazione semplice di torsione. Ciò fatto, l'analisi degli spostamenti conclude

l'esposizione generale della teoria della torsione: si deducono gli spostamenti da ingobbimento della generica sezione retta, e si puntualizza che, nelle usuali ipotesi di piccoli spostamenti, la generica fibra non si tramuta in un'elica cilindrica, ma in un'altra retta. Infine, è interessante caratterizzare il vettore delle tensioni tangenziali da torsione attraverso la deduzione della sua divergenza e del suo rotore, dedurre una espressione concisa dell'energia di deformazione, e disegnare i cerchi di Mohr principali.



Figura 27.2: Il frontespizio della memoria di De Saint-Venant sulla torsione

## 27.1 La deduzione degli spostamenti

Dalle prime due equazioni indefinite dell'equilibrio può trarsi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \tag{27.3}$$

da cui si deduce subito, come del resto già tratto in ambito generale, che le tensioni tangenziali non dipendono dall'ascissa  $x_3$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= \sigma_{13}(x_1, x_2) \\ \sigma_{23} &= \sigma_{23}(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{27.4}$$

Le leggi di Hooke permettono di ricavare le deformazioni:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{13} \\ 0 & 0 & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & 0 \end{pmatrix}\tag{27.5}$$

con:

$$\begin{aligned}e_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{2G} \\ e_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{2G}\end{aligned}\tag{27.6}$$

Poichè le deformazioni normali sono nulle, dovrà essere anche:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0\tag{27.7}$$

e quindi  $u_1$  non dipende dalla variabile  $x_1$ , la componente  $u_2$  non dipende dalla variabile  $x_2$ , e la componente  $u_3$  non dipende dalla variabile  $x_3$ :

$$\begin{aligned}u_1 &= u_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= u_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= u_3(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{27.8}$$

Poichè anche la deformazione tagliante  $e_{12}$  è nulla, ne segue:

$$\frac{\partial u_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2(x_1, x_3)}{\partial x_1}\tag{27.9}$$

Il secondo membro di questa uguaglianza non dipende da  $x_2$ , quindi  $u_1$  sarà una funzione lineare in  $x_2$ . D'altro canto, il primo membro della (27.9) non dipende da  $x_1$ , e quindi  $u_2$  dipende linearmente da  $x_1$ . Inoltre, alla luce della (27.9) si dovrà scrivere:

$$\begin{aligned}u_1 &= -\alpha(x_3)x_2 + \beta(x_3) \\ u_2 &= \alpha(x_3)x_1 + \gamma(x_3)\end{aligned}\tag{27.10}$$

con  $\alpha(x_3)$ ,  $\beta(x_3)$  e  $\gamma(x_3)$  funzioni di  $x_3$  ancora da determinare.

A tal fine, dalla definizione di  $e_{13}$  ed  $e_{23}$  si trae poi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= 2e_{13} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= 2e_{23} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\end{aligned}\tag{27.11}$$

Poichè sia  $e_{13}$  che  $e_{23}$  non dipendono da  $x_3$ , si nota che i secondi membri non dipendono da  $x_3$ , e quindi  $\alpha(x_3)$ ,  $\beta(x_3)$  e  $\gamma(x_3)$  devono essere al più funzioni lineari di  $x_3$ , per cui dovrà essere:

$$\begin{aligned}\alpha(x_3) &= \alpha_0 + \alpha_1 x_3 \\ \beta(x_3) &= \beta_0 + \beta_1 x_3 \\ \gamma(x_3) &= \gamma_0 + \gamma_1 x_3\end{aligned}\tag{27.12}$$

ed ancora:

$$\begin{aligned}u_1 &= -\alpha_1 x_2 x_3 + \beta_0 - \alpha_0 x_2 + \beta_1 x_3 \\ u_2 &= \alpha_1 x_1 x_3 + \gamma_0 + \alpha_0 x_1 + \gamma_1 x_3\end{aligned}\tag{27.13}$$

Posto infine:

$$u_3 = \alpha_1 \Psi(x_1, x_2) - \beta_1 x_1 - \gamma_1 x_2\tag{27.14}$$

è facile rendersi conto che il campo di spostamenti:

$$\phi = \begin{pmatrix} \beta_0 - \alpha_0 x_2 + \beta_1 x_3 \\ \gamma_0 + \alpha_0 x_1 + \gamma_1 x_3 \\ -\beta_1 x_1 - \gamma_1 x_2 \end{pmatrix}\tag{27.15}$$

non provoca deformazioni, e quindi, se il solido è propriamente vincolato, deve essere nullo. In definitiva, sarà:

$$\begin{aligned}u_1 &= -c x_2 x_3 \\ u_2 &= c x_1 x_3 \\ u_3 &= c \Psi(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{27.16}$$

lasciando per ora incognita la funzione  $\Psi$ .

## 27.2 La deduzione della funzione $\Psi$

Per come sono stati dedotti gli spostamenti, risulta chiaro che le prime due equazioni di Cauchy–Navier sono soddisfatte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0\end{aligned}\tag{27.17}$$

La terza, invece, conduce ad una equazione in  $\Psi$ :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} = \nabla_2 \Psi = 0\tag{27.18}$$

valida sulla sezione retta  $\Sigma$ , che impone alla funzione  $\Psi$  di essere *armonica*. Sul contorno  $\Gamma$ , poi, occorrerà imporre la condizione ai limiti:

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0\tag{27.19}$$

Utilizzando le (27.6) si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= 2Ge_{13} = G \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = Gc \left( -x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \\ \sigma_{23} &= 2Ge_{23} = G \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = Gc \left( x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)\end{aligned}\quad (27.20)$$

e quindi la (27.19) diviene:

$$\left( -x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) n_1 + \left( x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) n_2 = 0 \quad (27.21)$$

o anche:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} n_2 = -x_1 n_2 + x_2 n_1 \quad (27.22)$$

E' immediato realizzare (Figura 27.3) che i coseni direttori della normale uscente al contorno possono scriversi come:

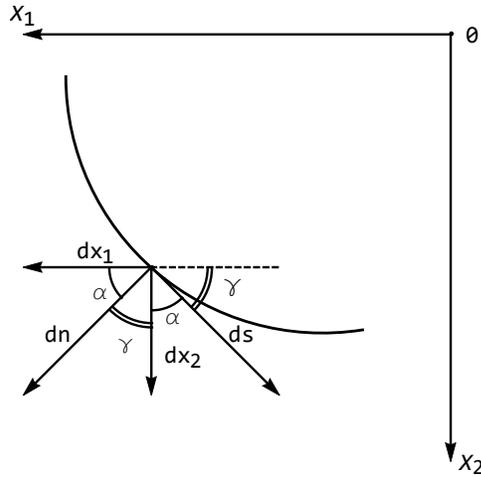


Figura 27.3: Il calcolo dei coseni direttori

$$\begin{aligned}n_1 &= \cos (dn, dx_1) = \cos \alpha = \frac{dx_1}{dn} = \frac{dx_2}{ds} \\ n_2 &= \cos (dn, dx_2) = \cos \gamma = \frac{dx_2}{dn} = -\frac{dx_1}{ds}\end{aligned}\quad (27.23)$$

sicchè il primo membro della relazione precedente diviene la derivata direzionale secondo la normale  $\mathbf{n}$  uscente dal contorno:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} n_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dn} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dn} = \frac{\partial \Psi}{\partial n} \quad (27.24)$$

e la condizione al contorno (27.22) diviene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = -x_1 \frac{dx_2}{dn} + x_2 \frac{dx_1}{dn} = x_1 \frac{dx_1}{ds} + x_2 \frac{dx_2}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (x_1^2 + x_2^2) \quad (27.25)$$

L'equazione (27.18) è la ben nota equazione di Laplace, ed una funzione che la soddisfa si dice *funzione armonica*. Il problema della determinazione di una funzione che soddisfa l'equazione di Laplace in un dominio piano, con le condizioni al contorno del tipo (27.25) va sotto il nome di *problema di Dini–Neumann*, e ben noti teoremi matematici garantiscono l'esistenza della funzione.

Ed infatti, può dimostrarsi che il problema di Dini–Neumann ha soluzione se l'integrale della derivata normale esteso a tutto il contorno  $\Gamma$  si annulla:

$$\oint_{\Gamma} \frac{d\Psi}{dn} ds = 0 \quad (27.26)$$

e questo, nel caso in esame, è certamente vero, come può provarsi utilizzando la (27.25):

$$\oint_{\Gamma} \frac{d\Psi}{dn} ds = \oint_{\Gamma} \left( x_1 \frac{dx_1}{ds} + x_2 \frac{dx_2}{ds} \right) ds = \oint_{\Gamma} (x_1 dx_1 + x_2 dx_2) = 0 \quad (27.27)$$

essendo  $x_1 dx_1 + x_2 dx_2$  un differenziale esatto, e quindi annullandosi il suo integrale esteso a qualunque curva chiusa.

### 27.3 La deduzione delle caratteristiche

Le definizioni di caratteristiche della sollecitazione esterna sulla base di destra portano a scrivere:

$$F_3^{(2)} = \mathcal{M}_1^{(2)} = \mathcal{M}_2^{(2)} = 0 \quad (27.28)$$

ed analogamente, sulla sezione di sinistra:

$$F_3^{(1)} = \mathcal{M}_1^{(1)} = \mathcal{M}_2^{(1)} = 0 \quad (27.29)$$

Poi, utilizzando le relazioni tra le caratteristiche della sollecitazione esterna, che qui si riscrivono per comodità:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{(2)} &= -\mathcal{M}_1^{(1)} + F_2^{(2)} L \\ \mathcal{M}_2^{(2)} &= -\mathcal{M}_2^{(1)} - F_1^{(2)} L \\ \mathcal{M}_3^{(2)} &= -\mathcal{M}_3^{(1)} \end{aligned} \quad (27.30)$$

si ricava subito:

$$F_1^{(2)} = F_2^{(2)} = 0 \quad (27.31)$$

L'annullarsi della forza risultante di taglio può anche dimostrarsi direttamente, utilizzando la formula di Green–Riemann (illustrata e dimostrata in

Appendice). Si parta dalla definizione, utilizzando poi le (27.20):

$$T_1 = \int_{\Sigma} \sigma_{13} \, dA = Gc \int_{\Sigma} \left( -x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \, dA = Gc \left[ \int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ x_1 \left( -x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ x_1 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + x_1 \right) \right] \right] \, dA \right] \quad (27.32)$$

ed utilizzando la formula di Green–Riemann si trasformi l'integrale d'area in un integrale di linea:

$$T_1 = Gc \left[ \int_{\Gamma} \left[ x_1 \left( -x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \right] \, dx_2 - \int_{\Gamma} \left[ x_1 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + x_1 \right) \right] \, dx_1 \right] \quad (27.33)$$

Infine, utilizzando la (27.21), in connessione con le (27.23), si giunge all'asserto.

Quindi, l'unica caratteristica della sollecitazione esterna agente sulle basi resta la coppia  $\mathcal{M}_3^{(2)}$  sulla faccia di destra e la coppia  $\mathcal{M}_3^{(1)}$  sulla faccia di sinistra. Si è in presenza della sollecitazione semplice di torsione, e l'unica caratteristica della sollecitazione interna presente è il momento torcente:

$$\begin{aligned} M_t &= \int_{\Sigma} (\sigma_{23}x_1 - \sigma_{13}x_2) \, dA = \\ &= Gc \left[ \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + x_1 \right) x_1 \, dA - \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} - x_2 \right) x_2 \, dA \right] = \\ &= Gc \left[ \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_1 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 \right) \, dA + I_{11} + I_{22} \right] = \\ &= Gc \left[ \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_1 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 \right) \, dA + I_p \right] = Gc [I_p - D(\Psi)] \end{aligned} \quad (27.34)$$

L'integrale:

$$D(\Psi) = \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_1 \right) \, dA \quad (27.35)$$

dipende solo da  $\Psi$ , ossia dalla forma della sezione retta, ed è noto come *integrale di Dirichlet*, mentre  $I_p$  è il momento di inerzia polare.

Si può dimostrare che l'integrale di Dirichlet (27.35) è una quantità non negativa. Ed infatti, partendo dalle ovvie uguaglianze:

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} (\Psi x_1) \\ x_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} (\Psi x_2) \end{aligned} \quad (27.36)$$

si ha, applicando il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} D(\Psi) &= \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_1 \right) \, dA = \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (\Psi x_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\Psi x_1) \right) \, dA = \\ &= \int_{\Gamma} \Psi (x_2 n_1 - x_1 n_2) \, ds \end{aligned} \quad (27.37)$$

e per la (27.22):

$$D(\Psi) = \int_{\Gamma} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = \int_{\Gamma} \left( \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} n_1 + \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} n_2 \right) ds \quad (27.38)$$

e riapplicando il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} D(\Psi) &= \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) \right) dA \\ &= \int_{\Sigma} \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \Psi \nabla_2 \Psi \right] dA \end{aligned} \quad (27.39)$$

ed infine, per la (27.18):

$$D(\Psi) = \int_{\Sigma} \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 \right] dA \geq 0 \quad (27.40)$$

Nelle applicazioni, si introduce un *fattore di torsione*  $q$ , in modo da poter scrivere:

$$M_t = \frac{GI_p}{q} c \quad (27.41)$$

e quindi:

$$q = \frac{I_p}{I_p - D(\Psi)} \geq 1 \quad (27.42)$$

Le tensioni, quindi, non saranno funzione del modulo di elasticità tangenziale, e si potranno scrivere come:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= q \frac{M_t}{I_p} \left( -x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \\ \sigma_{23} &= q \frac{M_t}{I_p} \left( x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (27.43)$$

## 27.4 Analisi degli spostamenti

Utilizzando la (27.41) si può scrivere la terna di spostamenti come:

$$\begin{aligned} u_1 &= -q \frac{M_t}{GI_p} x_2 x_3 \\ u_2 &= q \frac{M_t}{GI_p} x_1 x_3 \\ u_3 &= q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (27.44)$$

### 27.4.1 La sezione retta

Si consideri la sezione di equazione:

$$x_3 = k \quad (27.45)$$

Essa, a seguito della deformazione si porta nella superficie di equazione:

$$\xi_3 = x_3 + u_3 = k + q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_1, x_2) \approx k + q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(\xi_1, \xi_2) \quad (27.46)$$

dove:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + u_1 = x_1 - q \frac{M_t}{GI_p} k x_2 \\ \xi_2 &= x_2 + u_2 = x_2 + q \frac{M_t}{GI_p} k x_1 \end{aligned} \quad (27.47)$$

Ne segue che, in generale, le sezioni rette *non* si conservano piane, e poichè gli spostamenti  $u_3$  (cosiddetti da *ingobbimento*) sono indipendenti da  $x_3$ , la forma della sezione a deformazione avvenuta sarà la stessa per tutte le sezioni rette.

Dalle (27.47) si deduce che gli spostamenti secondo  $x_1$  ed  $x_2$  della sezione retta a distanza  $k$  dall'origine sono riconducibili alla rotazione rigida  $\theta(k)$  di centro  $O$  ed ampiezza  $q \frac{M_t}{GI_p} k$ . Ed infatti, dalle (27.47) si trae:

$$\frac{u_1}{u_2} = -\frac{x_2}{x_1} \quad (27.48)$$

e quindi, per la similitudine dei triangoli  $OCP$  e  $PAB$  si deduce che lo spostamento  $\mathbf{s}$  del generico punto  $P$  è ortogonale ad  $OP$ .

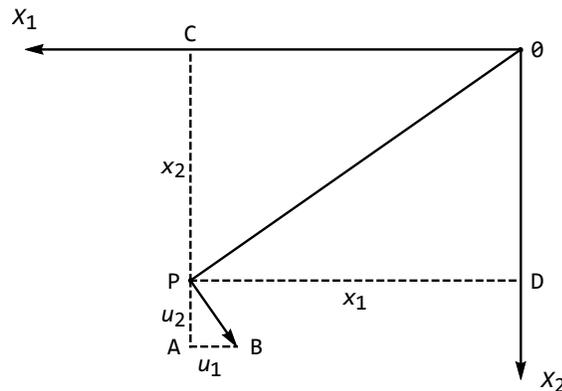


Figura 27.4: Lo spostamento dei punti nel piano della sezione retta

In particolare, due sezioni a distanza unitaria ruotano tra loro dell'angolo:

$$\theta' = q \frac{M_t}{GI_p} \quad (27.49)$$

detto *angolo specifico di torsione*. Il rapporto  $M_t/\theta'$  prende nome di *rigidità torsionale* della sezione  $C_t$ , ed è pari a:

$$C_t = \frac{M_t}{\theta'} = \frac{GI_p}{q} \quad (27.50)$$

### 27.4.2 Le fibre

Si consideri la generica retta parallela all'asse  $x_3$ , di equazione:

$$\begin{aligned} x_1 - x_{1c} &= 0 \\ x_2 - x_{2c} &= 0 \end{aligned} \quad (27.51)$$

i cui punti subiranno gli spostamenti :

$$\begin{aligned} u_1 &= -q \frac{M_t}{GI_p} x_{2c} x_3 \\ u_2 &= q \frac{M_t}{GI_p} x_{1c} x_3 \\ u_3 &= q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_{1c}, x_{2c}) \end{aligned} \quad (27.52)$$

A deformazione avvenuta, i punti di tale retta soddisfano le condizioni:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + u_1 = x_{1c} - q \frac{M_t}{GI_p} x_{2c} x_3 = x_{1c} - q \frac{M_t}{GI_p} x_{2c} (\xi_3 - u_3) \\ \xi_2 &= x_2 + u_2 = x_{2c} + q \frac{M_t}{GI_p} x_{1c} x_3 = x_{2c} + q \frac{M_t}{GI_p} x_{1c} (\xi_3 - u_3) \\ \xi_3 &= x_3 + u_3 = x_3 + q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_{1c}, x_{2c}) \end{aligned} \quad (27.53)$$

Tenendo conto della terza delle (27.52), la fibra (27.51) si sarà trasformata nella *retta* di equazione:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_{1c} - q \frac{M_t}{GI_p} x_{2c} \left( \xi_3 + q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_{1c}, x_{2c}) \right) \\ \xi_2 &= x_{2c} + q \frac{M_t}{GI_p} x_{1c} \left( \xi_3 + q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_{1c}, x_{2c}) \right) \end{aligned} \quad (27.54)$$

Ciò è valido in ipotesi di piccoli spostamenti, mentre in caso contrario è possibile dimostrare che le fibre si trasformano in eliche cilindriche, come illustrato in Figura 27.5

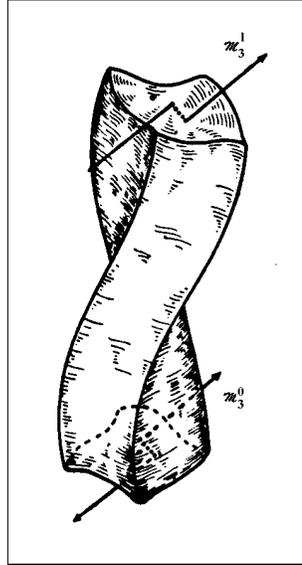


Figura 27.5: La sollecitazione di torsione, adattato da G. Fichera *Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica classica*

Dalle (27.20) si trae poi immediatamente che possono esistere delle fibre cui corrisponde stato tensionale nullo, dette *assi di torsione*. La loro equazione sarà data da:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \\ x_2 &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (27.55)$$

ed in base alla forma della sezione e della funzione di torsione potranno esserci travi senza assi di torsione, o travi con più assi di torsione.

## 27.5 Lo studio del vettore di tensione tangenziale

Si consideri il vettore bidimensionale  $\tau_n$  delle tensioni tangenziali, con componenti  $(\sigma_{13}, \sigma_{23})$ , e si voglia calcolare il suo *rotore* e la sua *divergenza*. Si ha, in genere:

$$\text{rot} \tau_n = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2} \right) \mathbf{k} \quad (27.56)$$

Inoltre, utilizzando l'espressione (27.43) delle tensioni tangenziali, in connessione con la (27.49), si ha che l'unica componente del vettore rotore di  $\tau_n$  è costante, e pari a:

$$(\operatorname{rot}\tau_n)_3 = 2G\theta' \quad (27.57)$$

La divergenza del vettore  $\tau_n$  delle tensioni tangenziali si calcola come:

$$\operatorname{div}\tau_n = \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} = q\frac{M_t}{I_p} \left( \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (27.58)$$

e quindi il campo vettoriale delle tensioni tangenziali di tensione è *solenoidale*. Si noti che la (27.58) è la terza equazione indefinita dell'equilibrio elastico, specializzata al caso in studio, e quindi essa è una condizione di equilibrio. La (27.57), viceversa, è una condizione di congruenza, che discende direttamente dalla specializzazione delle condizioni di compatibilità interne. Ed infatti, nel caso in esame si ha  $e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{12} = 0$ , sicchè le uniche due condizioni di compatibilità non identicamente nulle forniscono:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (27.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (27.60)$$

e poichè  $e_{13}$  ed  $e_{23}$  non dipendono dalla variabile  $x_3$  si ha anche, ovviamente:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (27.61)$$

e quindi, in definitiva:

$$\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} = \text{cost} \quad (27.62)$$

che non è altro che la (27.57).

## 27.6 L'energia di deformazione

Il potenziale elastico connesso alla sollecitazione di torsione è fornito da:

$$\phi = \frac{1}{2G} (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \quad (27.63)$$

e quindi l'energia di deformazione è:

$$L = \int_V \phi \, dV = q^2 \frac{M_t^2 l}{2GI_p^2} \int_{\Sigma} \left( \left( -x_2 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( x_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} \right)^2 \right) dA \quad (27.64)$$

Sviluppando i quadrati si ha:

$$L = q^2 \frac{M_t^2 l}{2GI_p^2} \left[ \int_{\Sigma} (x_1^2 + x_2^2) dA + \int \left( \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 \right) dA - 2 \int \left( x_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) dA \right] \quad (27.65)$$

Il primo integrale è ancora una volta il momento polare  $I_p$  rispetto al punto  $O$ , il secondo integrale è pari, per la (27.40), all'integrale di Dirichlet, il terzo integrale è ancora pari all'integrale di Dirichlet. Ne segue, in definitiva:

$$L = q^2 \frac{M_t^2 l}{2GI_p^2} [I_p - D(\Psi)] = q \frac{M_t^2 l}{2GI_p} \quad (27.66)$$

Identico risultato si ottiene attraverso l'applicazione del teorema di Clapeyron, uguagliando l'energia di deformazione al lavoro compiuto dalle caratteristiche di sollecitazione esterna. In questo caso, le coppie torcenti compiono lavoro per effetto della rotazione torsionale tra le due basi  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_l$ :

$$L = \frac{1}{2} M_3^{(2)} \theta(l) \quad (27.67)$$

ed utilizzando la (27.49) si ha:

$$L = \frac{1}{2} q \frac{M_t^2 l}{GI_p} \quad (27.68)$$

## 27.7 Le tensioni principali ed il Cerchio di Mohr

E' immediato calcolare le tensioni principali corrispondenti allo stato tensionale (27.1). Per esso infatti si ha l'equazione secolare:

$$-\sigma^3 + \sigma (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 0 \quad (27.69)$$

e quindi, ricordando che si è posto  $\tau_n^2 = \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2$ , le tre tensioni principali sono  $\sigma_1 = -\tau_n$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = \tau_n$ . Le due direzioni principali corrispondenti alle due tensioni estreme sono inclinate di  $\pi/4$  rispetto all'asse, come illustrato dal cerchio principale di Mohr, riportato in Figura 27.6.

## 27.8 Appendice

### La formula di Green–Riemann

Si consideri una curva chiusa  $\Gamma$ , delimitante un'area  $\Sigma$ , come illustrato in Figura 27.7. La formula di Green–Riemann permette di trasformare un integrale di linea esteso a  $\Gamma$  in un integrale di area esteso a  $\Sigma$ . La sua utilità in Scienza delle Costruzioni è quindi evidente.

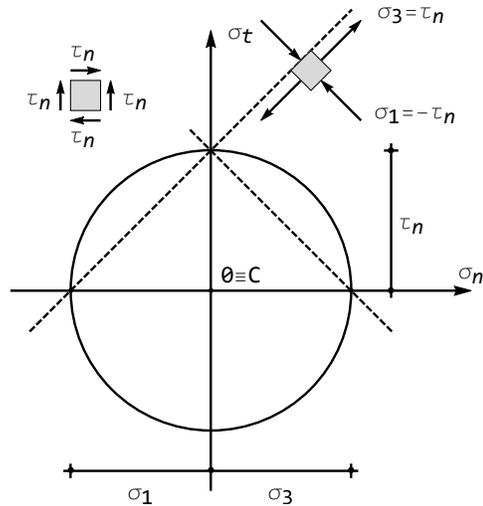


Figura 27.6: Il cerchio di Mohr per stati tensionali da torsione

Date due funzioni  $P(x_1, x_2)$  e  $Q(x_1, x_2)$ , essa si scrive:

$$\oint_{\Gamma} P(x_1, x_2) dx_1 + Q(x_1, x_2) dx_2 = \int_{\Sigma} \left( -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial Q}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 \quad (27.70)$$

Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} -\frac{\partial P}{\partial x_2} dx_1 dx_2 &= \\ - \int_a^b dx_1 \int_{x_2=f_1(x_1)}^{x_2=f_2(x_1)} \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_2 &= \int_a^b [P(x_1, f_1(x_2)) - P(x_1, f_2(x_2))] dx_1 \end{aligned} \quad (27.71)$$

ossia, cfr. Figura 27.7:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} -\frac{\partial P}{\partial x_2} dx_1 dx_2 &= \\ \int_{ADB} P(x_1, x_2) dx_1 - \int_{ACB} P(x_1, x_2) dx_1 &= \oint_{\Gamma} P(x_1, x_2) dx_1 \end{aligned} \quad (27.72)$$

Analogamente si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 dx_2 &= \\ \int_c^d dx_2 \int_{x_1=g_1(x_2)}^{x_1=g_2(x_2)} \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 &= \int_c^d [Q(g_2(x_2), x_2) - Q(g_1(x_2), x_2)] dx_2 \end{aligned} \quad (27.73)$$

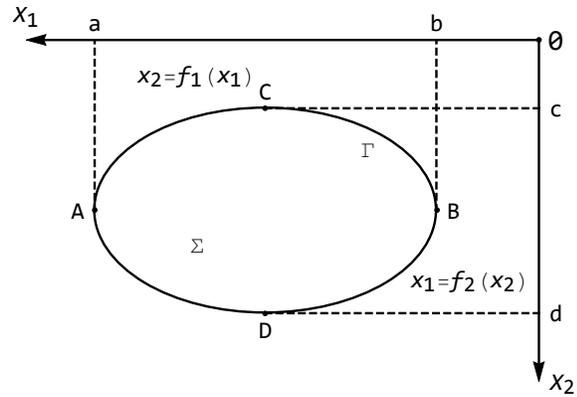


Figura 27.7: La formula di Green-Riemann

ed ancora:

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{DBC} Q(x_1, x_2) dx_2 - \int_{DAC} Q(x_1, x_2) dx_2 = \oint_{\Gamma} Q(x_1, x_2) dx_2 \quad (27.74)$$

## Capitolo 28

# Torsione nelle sezioni circolari ed ellittiche

In questo Capitolo si applicano i risultati del Capitolo precedente allo studio di alcune sezioni di forma geometrica semplice, a partire dalla sezione circolare. Per essa, come accennato nell'introduzione della lezione precedente, la teoria di Coulomb fornisce risultati corretti, poichè gli ingobbimenti sono nulli.

Si studia poi la sezione ellittica, la cui importanza deriva sia da motivi storici che dalla possibilità di ottenere semplici formule approssimate e valide per qualsiasi sezione.

### 28.1 La torsione nelle travi a sezione circolare

Si consideri una trave di lunghezza  $l$ , a sezione circolare di raggio  $R$ , e si ipotizzi di voler particolarizzare ad essa i risultati della lezione precedente. L'origine del sistema di riferimento, che finora è rimasto arbitrario, potrà essere convenientemente spostato nel baricentro della sezione retta, sicchè una semplice similitudine geometrica permette di scrivere (cfr. Figura 28.1):

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad (28.1)$$

e di conseguenza la derivata normale della funzione di torsione dovrà essere pari a:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dn} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dn} = -x_1 \frac{dx_2}{dn} + x_2 \frac{dx_1}{dn} = 0 \quad (28.2)$$

La funzione di torsione potrà quindi essere assunta pari ad una qualsiasi costante, e conseguentemente la sezione retta si manterrà piana, l'integrale di Dirichlet si annulla, e quindi il fattore di torsione sarà pari ad uno. Le tensioni

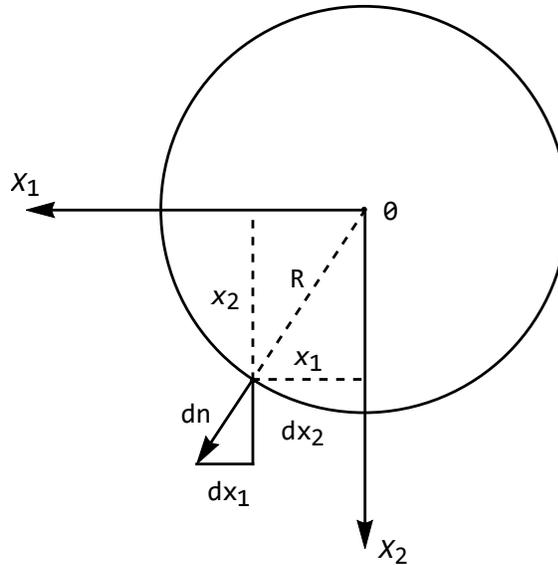


Figura 28.1: La sezione circolare

saranno fornite da:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= -\frac{M_t}{I_p} x_2 \\ \sigma_{23} &= \frac{M_t}{I_p} x_1\end{aligned}\quad (28.3)$$

ed il vettore  $\boldsymbol{\tau}_n$  delle tensioni tangenziali avrà intensità pari a:

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \frac{M_t}{I_p} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{M_t}{I_p} r = \frac{2M_t}{\pi R^4} r \quad (28.4)$$

Quindi la tensione tangenziale assume valore costante su ciascuna circonferenza concentrica al contorno, assumendo il suo valore massimo sul contorno esterno, dove si ha:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} R = \frac{2M_t}{\pi R^3} \quad (28.5)$$

Si consideri il generico punto  $P$ , di coordinate  $(x_1, x_2)$ , e si calcoli il prodotto scalare tra il vettore  $\boldsymbol{\tau}_n = (\sigma_{13}, \sigma_{23})$  ed il vettore  $\overrightarrow{OP} = (x_1, x_2)$ :

$$\boldsymbol{\tau}_n \cdot \overrightarrow{OP} = \sigma_{13}x_1 + \sigma_{23}x_2 = 0 \quad (28.6)$$

Ne segue che il vettore  $\boldsymbol{\tau}_n$  dello stato tensionale è ortogonale al vettore  $\overrightarrow{OP}$ , come illustrato in Figura 28.2.

Infine, l'angolo specifico di torsione può scriversi:

$$\theta' = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{2M_t}{G\pi R^4} \quad (28.7)$$

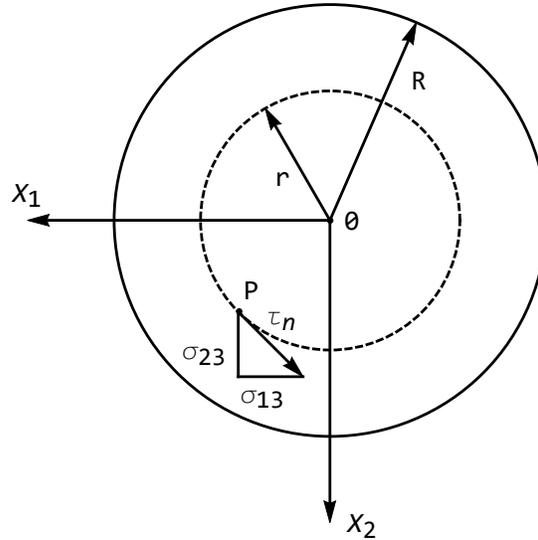


Figura 28.2: Lo stato tensionale su una sezione circolare soggetta a torsione

### 28.1.1 La sezione a corona circolare

Si consideri ora una sezione circolare cava, con raggio esterno  $R_e$  e raggio interno  $R_i$ , illustrata in Figura 28.3. Per ambedue i contorni vale ancora la condizione (28.2), e quindi anche in questo caso può scegliersi una funzione  $\Psi$  costante. Ne segue che il fattore di torsione resta unitario, e che resta valida l'ipotesi di planeità delle sezioni rette. Le tensioni sono fornite dalle (28.3), ed il vettore  $\tau_n$  avrà intensità:

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \frac{M_t}{I_p} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{M_t}{I_p} r = \frac{2M_t}{\pi (R_e^4 - R_i^4)} r \quad (28.8)$$

raggiungendo il suo valore massimo sul contorno esterno, dove vale:

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t R_e}{\pi (R_e^4 - R_i^4)} \quad (28.9)$$

Infine, l'angolo specifico di torsione vale:

$$\theta' = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{2M_t}{G\pi (R_e^4 - R_i^4)} \quad (28.10)$$

## 28.2 La sezione ellittica

Nello spirito del metodo semi-inverso si ipotizzi ora che la funzione di torsione  $\Psi$  sia fornita dalla funzione, sicuramente armonica:

$$\Psi(x_1, x_2) = Kx_1x_2 \quad (28.11)$$

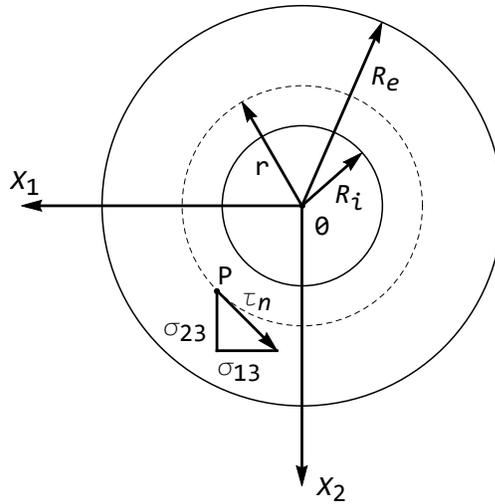


Figura 28.3: La sezione a corona circolare ed il suo stato tensionale

dove  $K$  è una costante da determinare. Con questa assunzione, le tensioni saranno fornite da:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= q \frac{M_t}{I_p} \left( -x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) = q \frac{M_t}{I_p} (Kx_2 - x_2) \\ \sigma_{23} &= q \frac{M_t}{I_p} \left( x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) = q \frac{M_t}{I_p} (Kx_1 + x_1)\end{aligned}\quad (28.12)$$

e la condizione al contorno sul mantello laterale  $\Gamma$ :

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0 \quad (28.13)$$

potrà essere scritta, utilizzando anche le  $n_1 = \frac{dx_2}{ds}$  ed  $n_2 = -\frac{dx_1}{ds}$ :

$$(Kx_2 - x_2) \frac{dx_2}{ds} - (Kx_1 + x_1) \frac{dx_1}{ds} = 0 \quad (28.14)$$

ossia:

$$x_1 \frac{dx_1}{ds} + \frac{1-K}{1+K} x_2 \frac{dx_2}{ds} = 0 \quad (28.15)$$

ed ancora:

$$\frac{d}{ds} \left( x_1^2 + \frac{1-K}{1+K} x_2^2 \right) = 0 \quad (28.16)$$

ed integrando, infine:

$$x_1^2 + \frac{1-K}{1+K} x_2^2 = \text{cost} \quad (28.17)$$

E' questa un'equazione che deve valere in ciascun punto del contorno, e come è immediato vedere, essa è l'equazione di una ellisse.

Ed infatti, un'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$  avrà equazione, in un riferimento con origine nel baricentro ed assi coordinati orientati secondo i semiassi:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad (28.18)$$

e dal paragone tra la (28.17) e la (28.18) puo' ricavarsi la costante  $K$ :

$$K = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \quad (28.19)$$

Si può allora concludere che la funzione di torsione per una trave a sezione ellittica, di semiassi  $a$  e  $b$ , è fornita da:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x_1 x_2 + \text{cost} \quad (28.20)$$

Si calcoli l'integrale di Dirichlet, come definito nel precedente Capitolo:

$$\begin{aligned} D(\Psi) &= \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_1 \right) dA = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \int_{\Sigma} (x_2^2 - x_1^2) dA = \\ &= \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} (I_{11} - I_{22}) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \frac{\pi}{4} ab (b^2 - a^2) \end{aligned} \quad (28.21)$$

Ne segue che il fattore di torsione è pari a:

$$\begin{aligned} q &= \frac{I_p}{I_p - D(\Psi)} = \frac{\frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2)}{\frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2) - \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \frac{\pi}{4} ab (b^2 - a^2)} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2b^2} = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (28.22)$$

avendo utilizzato l'espressione del momento di inerzia polare, come calcolato nel Capitolo 22:

$$I_p = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2) \quad (28.23)$$

L'angolo specifico di torsione è quindi fornito da:

$$\theta' = q \frac{M_t}{GI_p} = \frac{M_t}{G} \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \quad (28.24)$$

**Lo stato tensionale**

Lo stato tensionale è fornito, dopo brevi calcoli, da:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= q \frac{M_t}{I_p} \left( -x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) = -2 \frac{M_t}{ab^3 \pi} x_2 = -2 \frac{M_t}{Ab^2} x_2 \\ \sigma_{23} &= q \frac{M_t}{I_p} \left( x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) = 2 \frac{M_t}{a^3 b \pi} x_1 = 2 \frac{M_t}{Aa^2} x_1 \end{aligned} \quad (28.25)$$

con  $A = \pi ab$  area dell'ellisse. La tensione tangenziale avrà risultante:

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = 2 \frac{M_t}{A} \sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4}} \quad (28.26)$$

Si può dimostrare ora il seguente:

**Teorema 17.** Sia  $P = (x_1^P, x_2^P)$  un punto della sezione ellittica di equazione:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (28.27)$$

e sia  $AB$  il diametro contenente  $P$ . Sia  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  la normale al contorno in  $A$ . Il vettore  $\boldsymbol{\tau}_n$  delle tensioni tangenziali in  $P$  è diretto secondo la tangente  $t$  al contorno in  $A$ , come illustrato in Figura 28.4.

*Dimostrazione.* Basta dimostrare che il prodotto scalare tra il vettore  $\boldsymbol{\tau}_n$  delle tensioni tangenziali, valutato in  $P$ , ed il vettore  $\mathbf{n}$  della normale al contorno in  $A$  è nullo. Si ha allora:

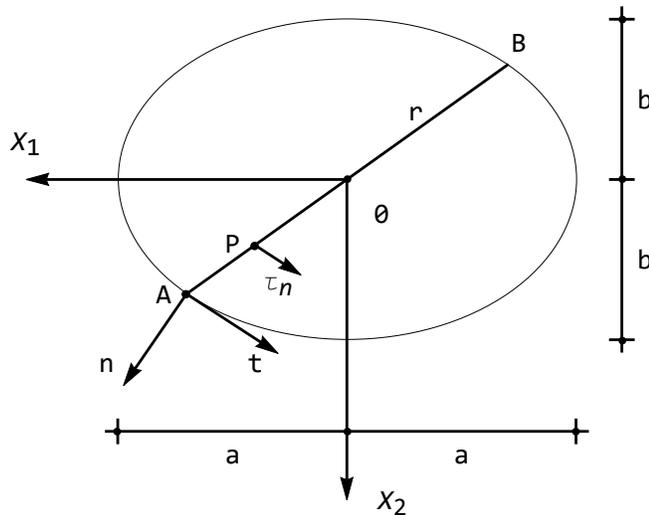


Figura 28.4: L'andamento della tensione tangenziale

$$\boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{n} = \sigma_{13}(x_1^P, x_2^P) n_1 + \sigma_{13}(x_1^P, x_2^P) n_2 \quad (28.28)$$

E' d'altro canto noto che i coseni direttori della normale  $\mathbf{n}$  al contorno in  $A$  sono proporzionali alle derivate della funzione  $f(x_1, x_2)$  in  $A$ , e quindi:

$$\begin{aligned} n_1 &= k \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_A = 2k \frac{x_1^A}{a^2} \\ n_2 &= k \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_A = 2k \frac{x_2^A}{b^2} \end{aligned} \quad (28.29)$$

e quindi la (28.28) diviene:

$$\boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{n} = -2 \frac{M_t}{ab^3\pi} x_2^P 2k \frac{x_1^A}{a^2} + 2 \frac{M_t}{a^3b\pi} x_1^P 2k \frac{x_2^A}{b^2} \quad (28.30)$$

e poichè (cfr. Figura 28.5):

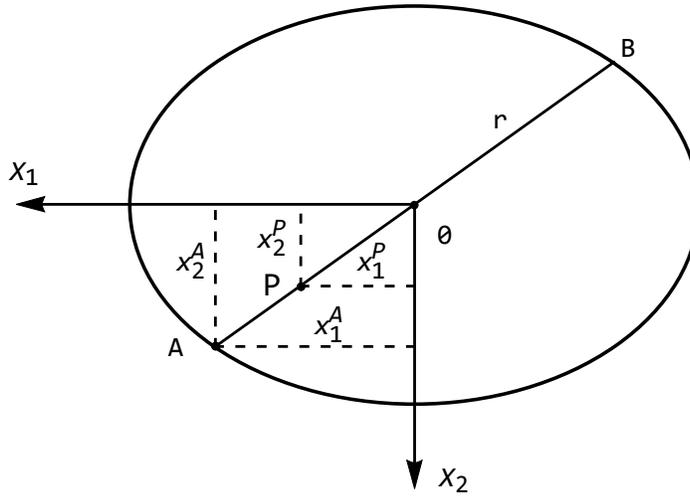


Figura 28.5: Similitudine geometrica per dimostrare la (28.30)

$$\frac{x_1^P}{x_2^P} = \frac{x_1^A}{x_2^A} \quad (28.31)$$

si ha l'asserto.  $\square$

Su tutti i punti del generico diametro  $AB$ , il vettore  $\boldsymbol{\tau}_n$  delle tensioni tangenziali è diretto secondo la tangente al contorno in  $A$ , o in  $B$ , ed ha andamento lineare lungo il diametro, annullandosi nel baricentro  $O$ , come schematizzato in Figura 28.6. Il valor massimo — relativamente al generico diametro  $AB$  — si attinge agli estremi del diametro stesso, ossia in  $A$  ed in  $B$ .

Ne segue ancora che la tensione tangenziale massima si ha agli estremi del diametro minore. Assumendo ad esempio che sia  $a > b$  si ha, dalla (28.26):

$$\tau_{\max} = 2 \frac{M_t}{A} \sqrt{\frac{0}{a^4} + \frac{b^2}{b^4}} = 2 \frac{M_t}{Ab} = 2 \frac{M_t}{\pi ab^2} \quad (28.32)$$

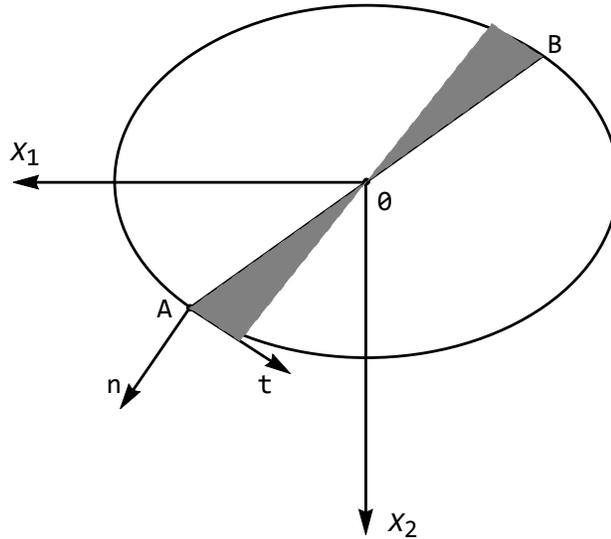


Figura 28.6: Lo stato tensionale lungo il generico diametro

### Gli spostamenti da ingobbimento

Il Capitolo precedente porge i seguenti spostamenti da ingobbimento:

$$u_3 = q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_1, x_2) = \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M_t}{G} x_1 x_2 \quad (28.33)$$

e quindi la sezione retta di equazione  $x_3 = k$  si tramuta nella superficie di equazione:

$$\xi_3 = k + \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M_t}{G} x_1 x_2 \approx k + \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M_t}{G} \xi_1 \xi_2 = k - \sigma M_t \xi_1 \xi_2 \quad (28.34)$$

dove  $\sigma$  è una costante positiva per  $a > b$ . E' questa la superficie di un paraboloido iperbolico, le cui curve di livello sono riportate in Figura 28.7. In presenza di un momento torcente positivo, e nell'ipotesi in cui  $a > b$ , gli spostamenti  $u_3$  sono positivi nei quadranti in cui  $x_1$  ed  $x_2$  sono di segno diverso, negativi altrove.

### 28.2.1 Alcune considerazioni pratiche

Partendo dall'espressione (28.24) dell'angolo specifico di torsione, e ricordando che l'area dell'ellisse è pari ad  $A = \pi ab$  e che il momento polare è  $I_p =$

$\frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2)$ , si potrà scrivere:

$$\theta' = 4\pi^2 \frac{I_p}{A^4} \frac{M_t}{G} \quad (28.35)$$

da cui subito potrà dedursi l'espressione della rigidità torsionale della sezione ellittica:

$$C_t = \frac{M_t}{\theta'} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{GA^4}{I_p} \approx 0.0253 \frac{GA^4}{I_p} \quad (28.36)$$

o, generalizzando ad altre forme di sezione retta:

$$C_t = k \frac{GA^4}{I_p} \quad (28.37)$$

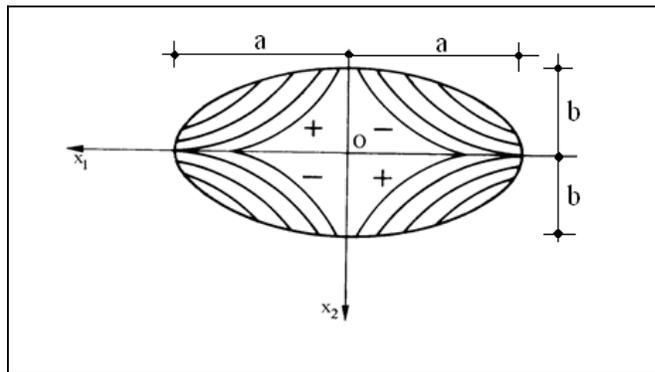


Figura 28.7: Gli spostamenti da ingobbimento della sezione ellittica

Il coefficiente numerico  $k$  varia, per le principali sezione compatte, in un intervallo abbastanza limitato. Secondo De Saint-Venant, infatti<sup>1</sup> si ha:

$$0.0228 \leq k \leq 0.0260 \quad (28.38)$$

e quindi può accettarsi la formula approssimata, valida per tutte le sezioni compatte:

$$C_t = 0.025 \frac{GA^4}{I_p} \quad (28.39)$$

Analogamente, moltiplicando e dividendo la (28.35) per il momento di inerzia polare, si ha:

$$\theta' = 4\pi^2 \frac{I_p^2}{A^4} \frac{M_t}{GI_p} = q \frac{M_t}{GI_p} \quad (28.40)$$

<sup>1</sup>Sur une formule donnant approximativement le moment de torsion, Comptes Rendus, 88, 142-147 (1879)

da cui subito l'espressione del fattore di torsione per la sezione ellittica:

$$q = 4\pi^2 \frac{I_p^2}{A^4} \quad (28.41)$$

Nello stesso ordine di idee che ha condotto alla formula approssimata (28.39), potrà accettarsi la formula approssimata del fattore di torsione, valida per qualsiasi sezione compatta:

$$q = 40 \frac{I_p^2}{A^4} \quad (28.42)$$

# Capitolo 29

## Taglio

Si studia in questo Capitolo l'ultimo caso di sollecitazione elementare, caratterizzata da una distribuzione di tensioni normali e tangenziali:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (29.1)$$

ipotizzando che la tensione normale sia funzione lineare in  $x_2$  sulla sezione di sinistra:

$$\sigma_{33}(x_3 = 0) = cx_2 \quad (29.2)$$

e che si annulli sulla sezione di destra:

$$\sigma_{33}(x_3 = L) = 0 \quad (29.3)$$

Assumendo infine una variazione lineare di  $\sigma_{33}$  lungo l'asse, si giunge alla ipotizzata forma della tensione normale:

$$\sigma_{33}(x_2, x_3) = cx_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \quad (29.4)$$

Le tensioni tangenziali, per rispettare le prime due equazioni indefinite dell'equilibrio elastico non dovranno dipendere dalla  $x_3$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \sigma_{13}(x_1, x_2) \\ \sigma_{23} &= \sigma_{23}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (29.5)$$

### 29.1 La deduzione degli spostamenti

Dalla distribuzione di tensioni (29.1) si trae lo stato deformativo:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} = -\frac{\nu}{E}cx_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} = -\frac{\nu}{E}cx_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ e_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{E} = \frac{c}{E}cx_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \end{aligned} \quad (29.6)$$

$$\begin{aligned} e_{12} &= 0 \\ e_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{2G} = e_{13}(x_1, x_2) \\ e_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{2G} = e_{23}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

I corrispondenti spostamenti potranno calcolarsi integrando le sei seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= -\frac{\nu}{E} c x_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\frac{\nu}{E} c x_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{c}{E} x_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= \frac{\sigma_{13}}{G} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= \frac{\sigma_{23}}{G} \end{aligned} \tag{29.7}$$

Dalle prime tre si trae subito:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \phi_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{2E} c x_2^2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \phi_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= \frac{c}{E} x_2 x_3 - \frac{c}{2EL} x_2 x_3^2 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{29.8}$$

Utilizzando le prime due delle (29.8), la quarta delle (29.7) porge:

$$-\frac{\nu}{E} c x_1 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = 0 \tag{29.9}$$

e quindi:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = \frac{\nu}{E} c x_1 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \tag{29.10}$$

Separando le funzioni di  $(x_1, x_3)$  dalle funzioni di  $x_2$  si giunge alle due condizioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} &= \frac{\nu}{E} c x_1 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) = 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \tag{29.11}$$

che possono integrarsi, a fornire:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{\nu}{2E} c x_1^2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \psi_2(x_3) \\ \phi_1 &= \phi_1(x_3) \end{aligned} \tag{29.12}$$

La seconda componente di spostamento subisce una prima correzione, divenendo:

$$u_2 = -\frac{\nu}{2E}c(x_2^2 - x_1^2)\left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \psi_2(x_3) \quad (29.13)$$

Dall'ultima delle (29.7) può trarsi ora:

$$\frac{\nu}{2EL}cx_2^2 - \frac{\nu}{2EL}cx_1^2 + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} + \frac{c}{E}x_3 - \frac{c}{2EL}x_3^2 + \frac{\partial\phi_3}{\partial x_2} = \frac{\sigma_{23}}{G} \quad (29.14)$$

Si dovranno separatamente uguagliare tra loro le funzioni di  $(x_1, x_2)$  e le funzioni di  $x_3$ . Si hanno pertanto le due condizioni:

$$\sigma_{23} = \frac{G\nu}{2EL}c(x_2^2 - x_1^2) + G\frac{\partial\phi_3}{\partial x_2} \quad (29.15)$$

e:

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} = -\frac{c}{E}x_3 + \frac{c}{2EL}x_3^2 \quad (29.16)$$

A sua volta, quest'ultima condizione permette di scrivere:

$$\psi_2 = -\frac{c}{2E}x_3^2 + \frac{c}{6EL}x_3^3 + \chi_2 \quad (29.17)$$

dove  $\chi_2$  è una costante. La seconda componente di spostamento subisce una seconda correzione, divenendo:

$$u_2 = -\frac{\nu}{2E}cx_2^2\left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \frac{\nu}{2E}cx_1^2\left(1 - \frac{x_3}{L}\right) - \frac{c}{2E}x_3^2 + \frac{c}{6EL}x_3^3 + \chi_2 \quad (29.18)$$

ossia, semplificando:

$$u_2 = -\frac{\nu}{2E}c\left(x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu}\right) + \frac{c}{E}\left(\frac{x_3^2}{6} + \nu\frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right)\frac{x_3}{L} + \chi_2 \quad (29.19)$$

Infine, dalla penultima delle (29.7) si deduce:

$$\frac{\nu}{EL}cx_1x_2 + \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1} = \frac{\sigma_{13}}{G} \quad (29.20)$$

ed uguagliando separatamente le funzioni di  $(x_1, x_2)$  e di  $x_3$  si giunge a scrivere:

$$\sigma_{13} = \frac{\nu G}{EL}cx_1x_2 + G\frac{\partial\phi_3}{\partial x_1} \quad (29.21)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} = 0 \longrightarrow \phi_1 = \text{cost} \quad (29.22)$$

La terna di spostamenti in esame potrà quindi esprimersi come:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{E}cx_1x_2\left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \phi_1 \\ u_2 &= -\frac{\nu}{2E}c\left(x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu}\right) + \frac{c}{E}\left(\frac{x_3^2}{6} + \nu\frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right)\frac{x_3}{L} + \chi_2 \\ u_3 &= \frac{c}{E}x_2x_3 - \frac{c}{2EL}x_2x_3^2 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (29.23)$$

Si può concludere che il campo di spostamenti  $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \chi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$  rappresenta una traslazione rigida, e può essere trascurato, e quindi la terna definitiva di spostamenti sarà:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{2E} c \left(x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu}\right) + \frac{c}{E} \left(\frac{x_3^2}{6} + \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right) \frac{x_3}{L} \\ u_3 &= \frac{c}{E} x_2 x_3 - \frac{c}{EL} \left(\frac{x_2 x_3^2}{2} + \Phi(x_1, x_2)\right) \end{aligned} \quad (29.24)$$

avendo definito per comodità una nuova funzione  $\Phi$ , detta *funzione di taglio*:

$$\Phi(x_1, x_2) = -\frac{EL}{c} \phi_3 \quad (29.25)$$

## 29.2 La deduzione della funzione $\Phi$

La terna di spostamenti (29.24) conduce, per il modo in cui è stata costruita, alle tensioni:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= G \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{Gc}{EL} \left( \nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \\ \sigma_{23} &= G \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{Gc}{EL} \left( \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \\ \sigma_{33} &= c x_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \end{aligned} \quad (29.26)$$

Le prime due equazioni dell'equilibrio elastico sono soddisfatte, in quanto le tensioni tangenziali non dipendono dalla variabile  $x_3$ . La terza equazione:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = 0 \quad (29.27)$$

si traduce in un'equazione da soddisfare nel dominio piano della sezione retta:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = -2x_2 \quad (29.28)$$

Sul contorno  $\Gamma$  occorrerà soddisfare l'unica condizione ai limiti non identicamente nulla:

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0 \quad (29.29)$$

che si traduce nello scrivere:

$$\left( \nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) n_1 + \left( \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) n_2 = 0 \quad (29.30)$$

ossia in una condizione sulla derivata normale al contorno della funzione  $\Phi$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nu x_1 x_2 \frac{dx_1}{dn} + \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \frac{dx_2}{dn} \quad (29.31)$$

Il risultante problema ai limiti per la funzione di taglio  $\Phi$  è simile al problema ai limiti già incontrato nell'esame della torsione, e per esso valgono analoghi teoremi.

### 29.3 La deduzione delle caratteristiche

Sulla base di destra  $\Sigma_2$  la tensione normale si annulla, e quindi si ha:

$$F_3^{(2)} = \mathcal{M}_1^{(2)} = \mathcal{M}_2^{(2)} = 0 \quad (29.32)$$

e poi ancora, secondo le definizioni:

$$\begin{aligned} F_1^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} \sigma_{13} dA = \frac{Gc}{EL} \int_{\Sigma_2} \left( \nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) dA \\ F_2^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} \sigma_{23} dA = \frac{Gc}{EL} \int_{\Sigma_2} \left( \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) dA \\ \mathcal{M}_3^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) dA \\ &= \frac{Gc}{EL} \int_{\Sigma_2} \left[ \left( \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) x_1 - \left( \nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) x_2 \right] dA \end{aligned} \quad (29.33)$$

ossia, semplificando:

$$\mathcal{M}_3^{(2)} = \frac{Gc}{EL} \int_{\Sigma_2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} x_1 \right) dA - \frac{Gc\nu}{2EL} \int_{\Sigma_2} (x_1^3 + x_1 x_2^2) dA \quad (29.34)$$

Sulla base di sinistra, invece, la tensione normale assume il valore  $\sigma_{33} = cx_2$  e di conseguenza sorgono le caratteristiche:

$$F_3^{(1)} = - \int_{\Sigma_1} \sigma_{33} dA = -c \int_{\Sigma_1} x_2 dA = 0 \quad (29.35)$$

se l'origine degli assi si assume coincidente con il baricentro della sezione,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{(1)} &= - \int_{\Sigma_1} \sigma_{33} x_2 dA = -c \int_{\Sigma_1} x_2^2 dA = -cI_{11} \\ \mathcal{M}_2^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} \sigma_{33} x_1 dA = c \int_{\Sigma_1} x_1 x_2 dA = cI_{12} \end{aligned} \quad (29.36)$$

Per l'equilibrio dell'intera trave, poi, dovrà essere:

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} &= -F_1^{(2)} \\ F_2^{(1)} &= -F_2^{(2)} \\ \mathcal{M}_3^{(1)} &= -\mathcal{M}_3^{(2)} \end{aligned} \quad (29.37)$$

ed anche:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{(1)} &= F_2^{(2)} L \\ \mathcal{M}_2^{(1)} &= -F_1^{(2)} L \end{aligned} \quad (29.38)$$

Le caratteristiche della sollecitazione esterna sono quindi quelle di Figura 29.1: sulla base di destra agiscono due forze secondo gli assi  $X_1$  ed  $X_2$  ed una coppia torcente, mentre sulla base di sinistra agiscono due forze secondo gli assi  $X_1$  ed  $X_2$ , uguali e contrarie a quelle agenti sulla sezione di sinistra, una coppia torcente uguale e contraria a quella agente su  $\Sigma_2$ , e due coppie flettenti secondo gli assi  $X_1$  ed  $X_2$ .

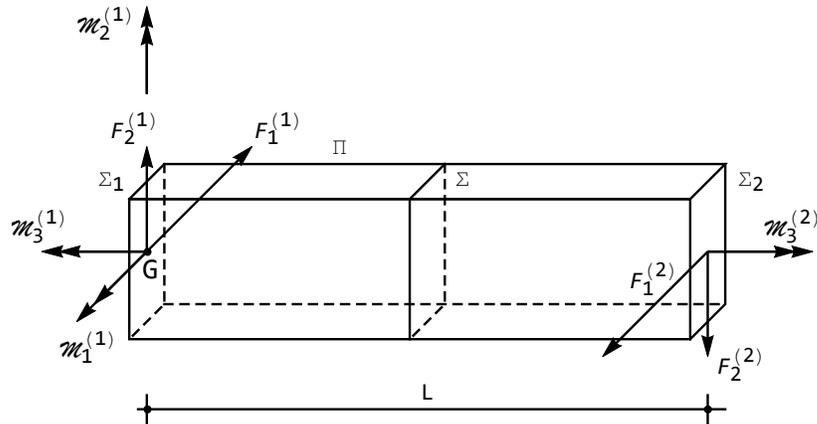


Figura 29.1: Le caratteristiche della sollecitazione esterna per il quinto caso di De Saint-Venant

Le corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna, sulla generica sezione retta  $\Sigma$ , sono fornite da:

- uno sforzo di taglio  $T_1 = F_1^{(2)}$ , costante lungo la trave
- uno sforzo di taglio  $T_2 = F_2^{(2)}$ , costante lungo la trave
- un momento torcente  $M_t = M_3^{(2)}$ , costante lungo la trave
- un momento flettente  $M_1 = -T_2 (L - x_3)$  linearmente variabile lungo l'asse

- un momento flettente  $M_2 = T_1 (L - x_3)$  linearmente variabile lungo l'asse

Le due forze di taglio possono comporsi in una singola forza di intensità  $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$  agente secondo una retta  $\pi$  e le due coppie flettenti possono ridursi ad una singola coppia  $M$  flettente di modulo  $T (L - x_3)$  il cui asse è normale al piano passante per  $\pi$  e parallelo all'asse della trave. Si giunge così alla situazione di Figura 29.2b). Un'ulteriore riduzione può operarsi facendo agire la forza  $T$  a distanza  $d_t$  dal baricentro, con  $d_t$  tale che risulti  $M_t = T d_t$ , giungendo alla situazione di Figura 29.2c). Si noti che l'asse di sollecitazione flessionale  $s$ , per quanto detto, è parallelo alla retta d'azione dello sforzo di taglio.

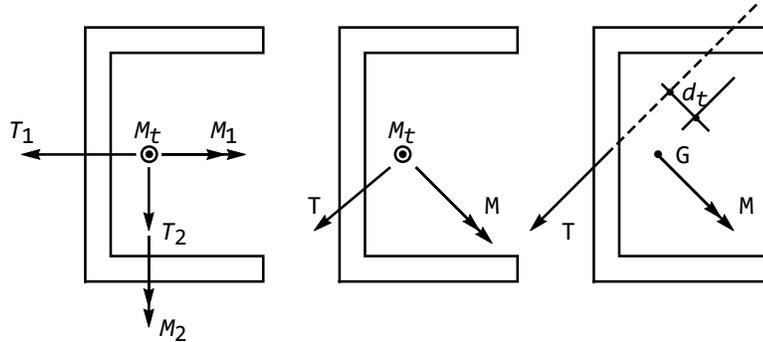


Figura 29.2: Le caratteristiche della sollecitazione interna su una generica sezione retta

Talvolta questa sollecitazione prende il nome, per ovvi motivi, di *sollecitazione di flessione, taglio e torsione*, e talvolta anche di *sollecitazione di flessione non uniforme*.

## 29.4 La forma finale di spostamenti e tensioni

Dalla (29.36) si trae un'espressione della costante  $c$ :

$$c = -\frac{\mathcal{M}_1^{(1)}}{I_{11}} \quad (29.39)$$

e poichè, come noto,  $\mathcal{M}_1^{(1)} = -M_1(x_3 = 0)$ , si ottiene anche:

$$c = \frac{M_1(x_3 = 0)}{I_{11}} = -\frac{T_2 l}{I_{11}} \quad (29.40)$$

Sostituendo il valore di questa costante nell'espressione degli spostamenti (29.24), ed operando qualche semplificazione si ottiene la forma finale degli spostamenti:

$$\begin{aligned} u_1 &= \nu \frac{T_2}{EI_{11}} x_1 x_2 (l - x_3) \\ u_2 &= \nu \frac{T_2}{2EI_{11}} \left( x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu} \right) (l - x_3) + \frac{T_2}{EI_{11}} \frac{x_3^3}{3} \\ u_3 &= -\frac{T_2}{EI_{11}} x_2 x_3 \left( l - \frac{x_3}{2} \right) + \frac{T_2}{EI_{11}} \Phi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (29.41)$$

Le tensioni, infine, saranno fornite da:

$$\sigma_{13} = -\frac{G}{E} \frac{T_2}{I_{11}} \left( \nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left( \nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{23} &= -\frac{G}{E} \frac{T_2}{I_{11}} \left( \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left( \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \\ \sigma_{33} &= -\frac{T_2}{I_{11}} x_2 (l - x_3)\end{aligned}\tag{29.42}$$

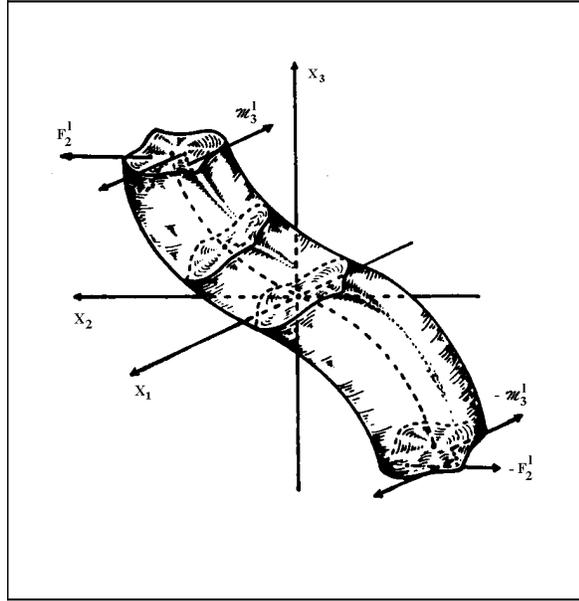


Figura 29.3: La sollecitazione da taglio, adattata da G.Fichera, *Metodi matematici nuovi nella Fisica Matematica classica*

## 29.5 L'energia di deformazione

In base alla definizione, può calcolarsi l'energia di deformazione connessa alla sollecitazione da taglio:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{33} e_{33} + 2\sigma_{13} e_{13} + 2\sigma_{23} e_{23}) dV = L_f + L_t \tag{29.43}$$

Si è suddivisa l'energia di deformazione in una aliquota flessione, in termini di tensioni normali, ed in una aliquota tagliante, in termini di tensioni tangenziali. Per la prima si ha agevolmente:

$$\begin{aligned}L_f &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dV = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 dV = \frac{T_2^2}{2EI_{11}^2} \int_0^L (L - x_3)^2 \int_{\Sigma} x_2^2 dA dx_3 \\ &= \frac{T_2^2}{6EI_{11}} L^3\end{aligned}\tag{29.44}$$

mentre la seconda può esprimersi come:

$$L_t = \frac{1}{2} \int_V (2\sigma_{13}e_{13} + 2\sigma_{23}e_{23}) \, dV = \frac{1}{2G} \int_V (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \, dV =$$

$$\frac{G}{2E^2} \frac{T_2^2 L}{I_{11}^2} \int_{\Sigma} \left( \left( \nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right) \, dA \quad (29.45)$$

ed utilizzando la nota relazione  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  si potrà infine scrivere:

$$L_t = \frac{1}{2EI_{11}^2} \frac{T_2^2 L}{2(1+\nu)} \int_{\Sigma} \left( \left( \nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right) \, dA \quad (29.46)$$

Volendo scrivere l'energia di deformazione tagliante nella forma:

$$L_t = \frac{\kappa}{2} \frac{T_2^2 L}{GA} \quad (29.47)$$

occorrerà introdurre un *fattore di taglio*, fornito da:

$$\kappa = \frac{GA}{2EI_{11}^2(1+\nu)} \int_{\Sigma} \left( \left( \nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right) \, dA \quad (29.48)$$

Si noti che l'energia di deformazione flessionale è proporzionale alla luce della trave elevata al cubo, mentre l'energia di deformazione da taglio è proporzionale alla luce della trave. Ne segue che per travi snelle l'energia flessionale predomina nettamente, mentre per travi tozze l'energia tagliante diviene non trascurabile.

## 29.6 Lo studio delle tensioni tangenziali

A somiglianza di quanto indicato per la sollecitazione di torsione, è utile calcolare la divergenza ed il rotore del campo vettoriale delle tensioni tangenziali  $\boldsymbol{\tau}_n = (\sigma_{13}, \sigma_{23})$ . Si ha, a partire dalle definizioni delle tensioni tangenziali:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_n &= \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left( \nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left( \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \right) = \\ &= -\frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} x_2 + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} x_2 + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \end{aligned} \quad (29.49)$$

ed infine, tenendo conto della condizione (29.31):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_n = -\frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} x_2 - \frac{1}{(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} x_2 = -\frac{T_2}{I_{11}} x_2 \quad (29.50)$$

Allo stesso risultato si può giungere attraverso la terza equazione indefinita dell'equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (29.51)$$

che fornisce:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_n = -\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = -\frac{\partial}{\partial x_3} \left( -\frac{T_2}{I_{11}} x_2 (L - x_3) \right) = -\frac{T_2}{I_{11}} x_2 \quad (29.52)$$

Le tre componenti del rotore di  $\boldsymbol{\tau}_n$  si possono calcolare in base alla definizione:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_n)_1 &= -\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ (\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_n)_2 &= \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ (\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_n)_3 &= \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2} = \\ &= -\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left( -\nu x_1 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} - \nu x_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \\ &= \frac{\nu}{1+\nu} \frac{T_2}{I_{11}} x_1 \end{aligned} \quad (29.53)$$

Alternativamente, la terza delle (29.53) può ottenersi attraverso l'utilizzo delle equazioni di congruenza interna, e più precisamente dal secondo gruppo di esse. Ed infatti, dalle tre equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left( -\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (29.54)$$

si osserva subito che l'ultima è identicamente soddisfatta, mentre le altre due si semplificano in:

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} \right) \quad (29.55)$$

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} \right) \quad (29.56)$$

e poichè:

$$e_{11} = e_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} = \nu\frac{T_2}{EI_{11}}x_2(l - x_3) \quad (29.57)$$

le (29.54) divengono:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_2}\right) &= -\nu\frac{T_2}{EI_{11}} \\ \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_1}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (29.58)$$

ed anche, ovviamente:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_1}\right) = 0 \quad (29.59)$$

Ne segue che la terza componente del rotore di  $\boldsymbol{\tau}_n$  non dipende da  $x_2$  e da  $x_3$ , mentre dipende linearmente da  $x_1$ . Si potrà quindi scrivere:

$$(\text{rot } \boldsymbol{\tau}_n)_3 = 2G\nu\frac{T_2}{EI_{11}}x_1 + k = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{T_2}{I_{11}}x_1 + k \quad (29.60)$$

Alla costante di integrazione  $k$  può darsi un significato fisico osservando che l'equazione precedente è stata tratta — a partire dalle equazioni di congruenza interna — senza specificare la posizione dello sforzo di taglio  $T_2$ , ma solo la sua direzione. Se quindi la distanza tra la retta d'azione di  $T_2$  ed il baricentro è pari proprio a  $d_t$ , allora sono valide le (29.53), e  $k = 0$ , mentre se la retta di azione di  $T_2$  viene spostata, sorge una sollecitazione aggiuntiva di torsione, caratterizzata da una coppia torcente:

$$\mathcal{M}_3^{(2)} = T_2(d - d_t) \quad (29.61)$$

Tale sollecitazione *aggiuntiva* corrisponde ad uno stato tensionale tangenziale a rotore costante, e pari proprio a  $k = 2G\theta'$ . Ricordando poi che  $\theta' = \frac{M_t}{C_t}$ , si potrà scrivere:

$$k = 2\frac{G}{C_t}T_2(d - d_t) \quad (29.62)$$

e quindi la terza delle (29.53) diviene:

$$(\text{rot } \boldsymbol{\tau})_3 = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{T_2}{I_{11}}x_1 + 2\frac{G}{C_t}T_2(d - d_t) \quad (29.63)$$



## Capitolo 30

# La teoria di Jourawsky

Nel Capitolo precedente si è illustrata la trattazione del quinto e sesto caso di sollecitazione semplice di De Saint–Venant, giungendo a definire uno stato tensionale caratterizzato da una tensione normale variabile linearmente lungo l’asse della trave e da un campo vettoriale piano di tensioni tangenziali. Tuttavia, la determinazione effettiva di tale campo vettoriale richiede la conoscenza della funzione di taglio  $\Phi(x_1, x_2)$ , soluzione di un problema di Dini-Neumann definito sulla sezione retta, e tale strada risulta poco agevole, conducendo a formule troppo complesse da poter essere utilizzate nella pratica tecnica.

Si illustra pertanto in questo Capitolo una trattazione approssimata per la ricerca delle tensioni tangenziali<sup>1</sup>, che rinuncia a soddisfare la condizione di congruenza, sulla terza componente del rotore, limitandosi a soddisfare le condizioni di equilibrio. Tale teoria, precedente la soluzione esatta di De Saint–Venant, è dovuta all’ingegnere russo D.J. Jourawski, ed è anche talvolta attribuita al tedesco Bredt<sup>2</sup>.

### 30.1 La trattazione di Jourawski

Si consideri un solido del tipo trave, soggetto a momento flettente e taglio, e si isoli un elemento di trave  $dV$ , identificato da due sezioni rette qualsiasi a distanza  $x_3$  ed  $x_3 + dx_3$  dalla base di sinistra. Poi si identifichi la porzione  $dV'$  di

---

<sup>1</sup>Jourawski, D. J., “Sur la résistance d’un corps prismatique...” *Annales des Ponts et Chaussées, Mémoires et Documents*, 32 serie, vol. 12, parte 2, 1856, págs. 328–351

<sup>2</sup>Traggo queste notizie da S.P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Company 1953, pagg. 141–142:

Jourawsky [1821-1891] si diplomò nel 1842 presso l’Istituto di Ingegneria delle Comunicazioni di S.Pietroburgo, dove ebbe per professori M.V. Ostrogradsky (matematica) e A.T. Kupffer (resistenza dei materiali). Sviluppò la teoria degli sforzi da taglio nelle sezioni rettangolari durante la progettazione dei ponti in legno per la ferrovia Mosca-S.Pietroburgo, negli anni 1844-50, presentandola all’Accademia russa delle scienze nel 1854. Per essa, ottenne il premio Demidoff.



Figura 30.1: Dmitrij Ivanovič Jouravskij

$dV$ , ottenuta segnando  $dV$  con un piano  $ABCD$  parallelo al piano  $(X_1, X_3)$  che divide la sezione retta  $\Sigma$  mediante una corda  $b$ , come illustrato in Figura 30.2.

Come illustrato in Figura 30.3, l'elemento di volume  $dV'$  è soggetto alle tensioni normali  $\sigma_{33}$ , positive se di trazione, agenti sulle due facce verticali del volume, ad una distribuzione di tensioni tangenziali  $\sigma_{23}$  agenti sul piano  $ABCD$ , positive se dirette in senso contrario all'asse della trave (atteso che la normale uscente dal piano è orientata in senso contrario all'asse  $X_2$ ), e ad una distribuzione di tensioni tangenziali  $\sigma_{32}$  agenti sui piani verticali e dirette — secondo la convenzione sui segni — verso l'alto sulla sezione a distanza  $x_3$  dalla base, e verso il basso sulla sezione a distanza  $x_3 + dx_3$  dalla base di sinistra. Imponendo l'equilibrio del volume  $dV'$  alla traslazione lungo l'asse  $X_3$  della trave si ha:

$$-\int_{\Sigma'} \sigma_{33}(x_3) dA + \int_{\Sigma'} \sigma_{33}(x_3 + dx_3) dA - \int_{ABCD} \sigma_{23} dA = 0 \quad (30.1)$$

dove  $\Sigma'$  è l'area della sezione retta sottostante la corda  $b$ . Si potrà poi sfruttare l'arbitrarietà di  $dx_3$  per scrivere:

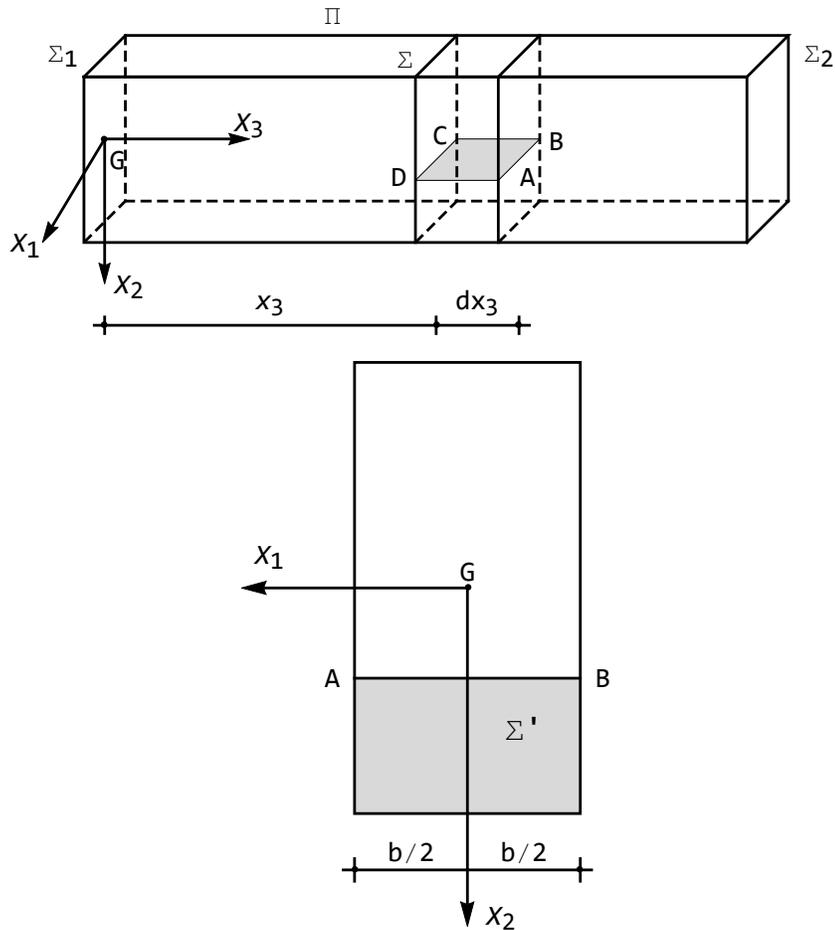
$$\sigma_{33}(x_3 + dx_3) = \sigma_{33}(x_3) + \frac{\partial \sigma_{33}(x_3)}{\partial x_3} dx_3 \quad (30.2)$$

trascurando i contributi di ordine superiore. Ne segue che la (30.1) potrà scriversi:

$$\int_{\Sigma'} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3 dA - \int_{ABCD} \sigma_{23} dA = 0 \quad (30.3)$$

e poichè, come è noto dal Capitolo precedente:

$$\sigma_{33} = -\frac{T_2}{I_{11}} x_2 (l - x_3) \quad (30.4)$$


 Figura 30.2: Il volume  $dV'$ , e la corrispondente sezione  $\Sigma'$ 

si ha:

$$\frac{T_2}{I_{11}} dx_3 \int_{\Sigma'} x_2 dA - \int_{ABCD} \sigma_{23} dA = 0 \quad (30.5)$$

Indicando con  $S'_1$  il momento statico della parte di sezione retta  $\Sigma'$  rispetto all'asse  $X_1$  baricentrico si ha poi:

$$\frac{T_2 S'_1}{I_{11}} dx_3 - \int_{ABCD} \sigma_{23} dA = 0 \quad (30.6)$$

Infine, si utilizza la fondamentale:

**Ipotesi di Jourawsky** - La tensione tangenziale  $\sigma_{23}$  si può supporre costante sul piano  $ABCD$

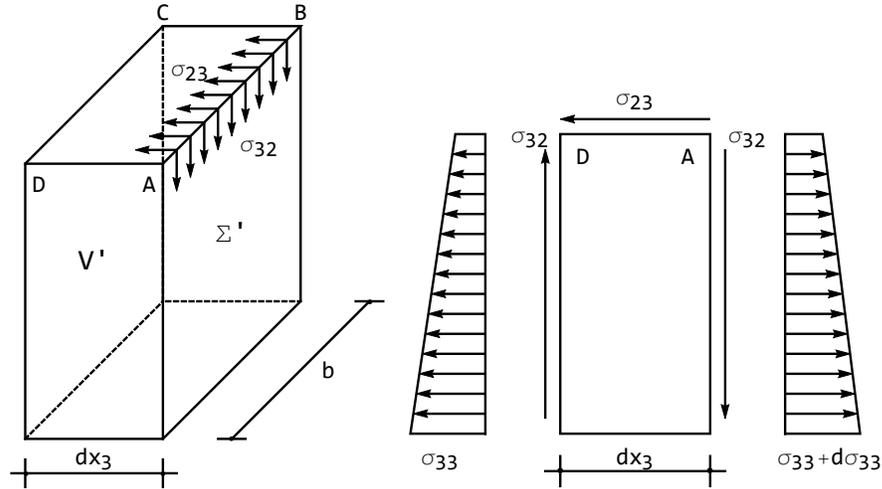


Figura 30.3: L'elemento di trave da equilibrare alla Jourawski e le tensioni su di esso agenti

In questa ipotesi, l'integrale è facilmente risolvibile, ottenendo:

$$\frac{T_2 S_1'}{I_{11}} dx_3 - \sigma_{23} b dx_3 = 0 \quad (30.7)$$

Data l'arbitrarietà di  $dx_3$  si giunge infine alla *formula di Jourawski*:

$$\sigma_{23} = \frac{T_2 S_1'}{I_{11} b} \quad (30.8)$$

che permette il calcolo approssimato della componente tangenziale di tensione  $\sigma_{23}$  senza conoscere la funzione di taglio  $\Phi$ .

L'altra componente di tensione,  $\sigma_{13}$ , può calcolarsi in base alla terza equazione indefinita dell'equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (30.9)$$

Utilizzando le (30.4) e le (30.8) si ha quindi:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = \frac{T_2}{I_{11}} x_2 - \frac{T_2}{I_{11}} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{S_1'}{b} \right) = \frac{T_2}{I_{11}} x_2 - \frac{T_2}{I_{11} b} \frac{\partial S_1'}{\partial x_2} + \frac{T_2 S_1'}{I_{11} b^2} \frac{\partial b}{\partial x_2} \quad (30.10)$$

D'altro canto sarà possibile calcolare la derivata del momento statico  $S_1'$  rispetto ad  $x_2$ :

$$\frac{\partial S_1'}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^b \int_{x_2}^{h_1} \xi_2 dA = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{x_2}^{h_1} b(\xi_2) \xi_2 d\xi_2 = -bx_2 \quad (30.11)$$

dove  $h_1$  è la distanza tra l'intradosso e l'asse neutro. Ne segue che la (30.10) si semplifica in:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = \frac{T_2 S'_1}{I_{11} b^2} \frac{\partial b}{\partial x_2} \quad (30.12)$$

da cui, integrando:

$$\sigma_{13} = \frac{T_2 S'_1}{I_{11} b} \frac{\partial b}{\partial x_2} \frac{x_1}{b} + C \quad (30.13)$$

La costante di integrazione rappresenta l'eventuale valore della tensione sull'asse  $x_2$ , ed è spesso — per ragioni di simmetria — nulla. In tal caso si giunge, utilizzando la (30.8), alla formula di Kharlab<sup>3</sup>:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} \frac{\partial b}{\partial x_2} \frac{x_1}{b} \quad (30.14)$$

Una formula analoga si ottiene considerando che la  $\sigma_{13}$  deve variare linearmente lungo  $x_1$ , come può riconoscersi derivando opportunamente la terza equazione indefinita dell'equilibrio:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1^2} = 0 \quad (30.15)$$

Conoscendo quindi due valori di  $\sigma_{13}$  lungo la corda  $b$ , di conseguenza, si può ricavare la  $\sigma_{13}$  in qualsiasi altro punto. Ma nei punti estremi  $A$  e  $B$  della corda  $b$ , (cfr. Figura 30.4) occorre che sia verificata la condizione di equilibrio:

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0 \quad (30.16)$$

e quindi la tensione  $\sigma_t$  risultante di  $\sigma_{13}$  e  $\sigma_{23}$  dovrà essere tangente al contorno, come già noto dalla teoria generale di De Saint-Venant. Questo risultato permette di ricavare l'andamento di  $\sigma_{13}$ . Se infatti le tangenti al contorno in  $A$  ed in  $B$  si incontrano nel punto  $Q$ , la  $\sigma_{13}$  in un qualsiasi altro punto  $R$  di  $AB$  può esser determinata dalla conoscenza della direzione del vettore  $\sigma_t$ , e del valore della sua componente verticale  $\sigma_{23}$ . Se  $\alpha$  è l'angolo formato tra  $RQ$  e l'asse  $x_2$ , si ha:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} \tan \alpha \quad (30.17)$$

## Il caso generale

La teoria fin qui discussa è caratterizzata dall'aver scelto la corda  $b = AB$  parallelamente all'asse neutro  $X_1$ , e quindi un piano  $ABCD$  parallelo al piano coordinato  $(X_1, X_3)$ . Tuttavia l'ipotesi di Jourawski può ritenersi valida su qualunque piano (Figura 30.5), come si illustrerà in questo paragrafo.

<sup>3</sup>La formula é dedotta in Karlab V.D., *On tangential stresses in the elementary theory of planar bending* (in Russian) in: *Researches in mechanics of structural constructions and materials*, Proceedings of Leningrad Institute of Civil Engineering, pp.92–95 (1991), ma la trattazione qui presentata segue V.Slivker, "Mechanics of Structural Elements", Springer (2007), pp. 715–728

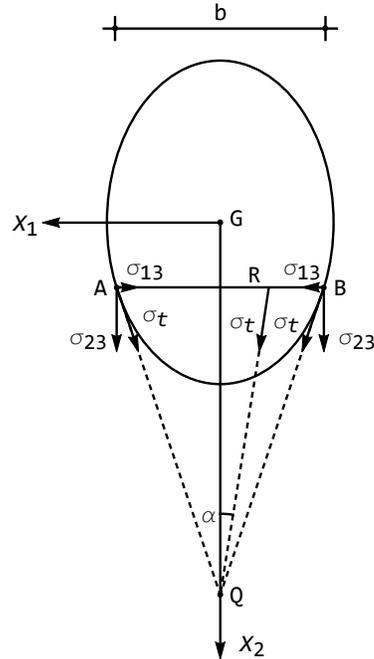


Figura 30.4: Il calcolo della componente  $\sigma_{13}$  di tensione

Scelta infatti una corda  $AB$  generica, atta ad identificare il volume di trave  $dV'$ , si fissi un sistema di riferimento locale  $(O, l, m, x_3)$ , con asse  $l$  lungo la corda, e l'asse  $m$  ad esso ortogonale, ed in modo che la terna  $(l, m, x_3)$  sia levogira. Ne segue che le componenti di tensione che ora entreranno in gioco per l'equilibrio del volume  $dV'$  lungo l'asse  $X_3$  sono la tensione normale  $\sigma_{33}$  e la componente tangenziale  $\sigma_{m3}$ , come illustrato in Figura 30.6. La formula di Jourawsky si scrive ora:

$$\sigma_{m3} = \frac{T_2 S'_1}{I_{11} b} \quad (30.18)$$

Le componenti tangenziali  $\sigma_{l3}$  lungo la corda possono calcolarsi, a somiglianza di quanto detto nel caso particolare, partendo dalla terza equazione indefinita dell'equilibrio, che ora si scrive:

$$\frac{\partial \sigma_{l3}}{\partial l} + \frac{\partial \sigma_{m3}}{\partial m} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (30.19)$$

Si dovrà ora derivare due volte rispetto ad  $l$ , ottenendo:

$$\frac{\partial^3 \sigma_{l3}}{\partial l^3} + \frac{\partial^3 \sigma_{m3}}{\partial l^2 \partial m} + \frac{\partial^3 \sigma_{33}}{\partial l^2 \partial x_3} = 0 \quad (30.20)$$

Il secondo termine è nullo, in quanto  $\sigma_{m3}$  è per ipotesi costante lungo la corda, mentre il terzo termine è nullo perchè  $\sigma_{33}$  varia linearmente lungo la

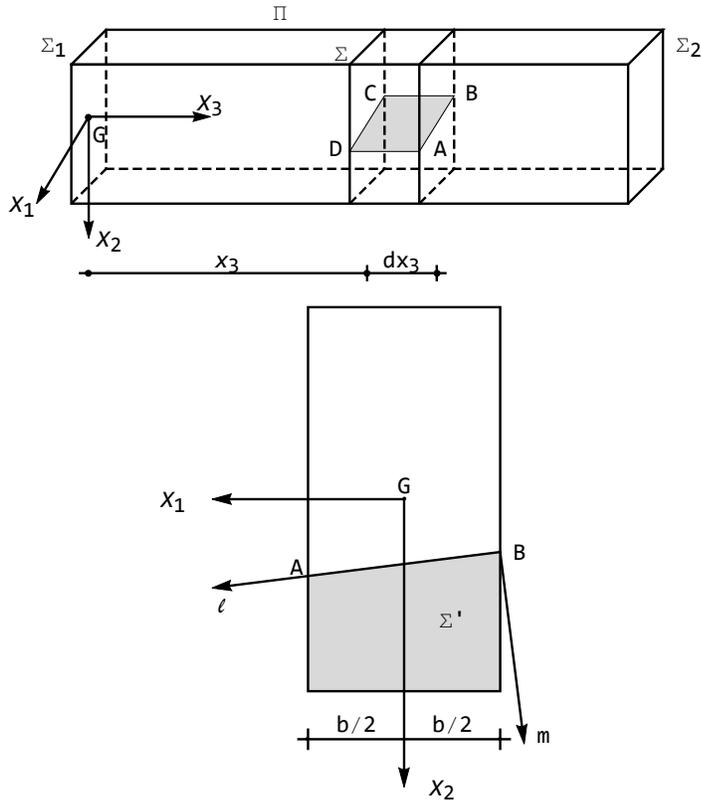


Figura 30.5: Il caso della corda generica

corda stessa. Ne segue che dovrà essere:

$$\frac{\partial^3 \sigma_{l3}}{\partial l^3} = 0 \quad (30.21)$$

e quindi l'andamento di  $\sigma_{l3}$  lungo la corda sarà parabolico:

$$\sigma_{l3} = al^2 + bl + c \quad (30.22)$$

Come già discusso, è possibile conoscere i due valori della  $\sigma_{l3}$  agli estremi della corda, sfruttando la conoscenza della direzione del vettore  $\sigma_t$ . Occorre ora un terzo valore, che potrà essere fornito dalla pendenza del diagramma in un punto qualsiasi. Tale pendenza si calcola, a partire dalla (30.19), come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{l3}}{\partial l} &= -\frac{\partial \sigma_{m3}}{\partial m} - \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = -\frac{T_2}{I_{11}} \left( \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{S'_1}{b} \right) - x_2 \right) \\ &= -\frac{T_2}{I_{11}} \left( \frac{1}{b} \frac{\partial S'_1}{\partial m} - \frac{S'_1}{b^2} \frac{\partial b}{\partial m} - x_2 \right) \end{aligned} \quad (30.23)$$

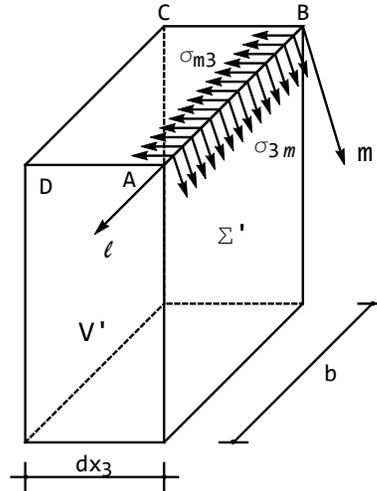


Figura 30.6: Le tensioni tangenziali nel caso della corda non parallela all'asse neutro

### 30.2 Il fattore di taglio

L'energia di deformazione tagliante si scriverà, adottando le espressioni approssimate di Jourawski:

$$L_t = \frac{1}{2} \int_V (2\sigma_{13}e_{13} + 2\sigma_{23}e_{23}) dV = \frac{1}{2G} \int_V (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) dV = \frac{T_2^2 l}{2GI_{11}^2} \int_{\Sigma} \frac{S_1'^2}{b^2} (1 + \tan^2 \alpha) dA \quad (30.24)$$

Volendo scrivere l'energia di deformazione tagliante nella forma:

$$L_t = \frac{\kappa T_2^2 l}{2 GA} \quad (30.25)$$

occorrerà introdurre un *fattore di taglio*, fornito da:

$$\kappa = \frac{A}{I_{11}^2} \int_{\Sigma} \frac{S_1'^2}{b^2} (1 + \tan^2 \alpha) dA \quad (30.26)$$

### 30.3 La sezione rettangolare

Si consideri una trave a sezione rettangolare, e sia essa soggetta ad uno sforzo di taglio diretto secondo una delle direzioni centrali di inerzia, ad esempio la verticale, come illustrato in Figura 30.7. Ne segue che la flessione che sempre si accompagna allo sforzo di taglio sarà una flessione retta con asse di sollecitazione verticale,  $s = X_2$  ed asse neutro  $X_1$ .

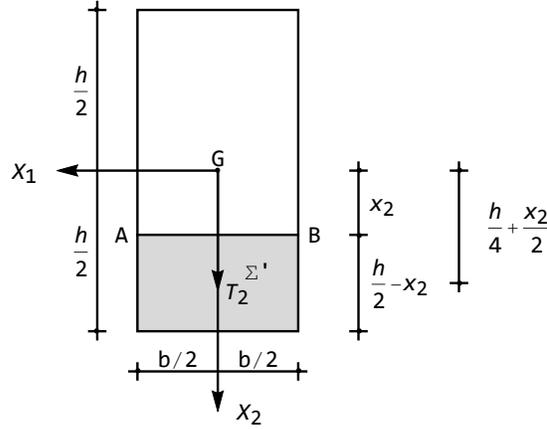


Figura 30.7: La sezione rettangolare soggetta a taglio

Identificata la generica corda parallela all'asse neutro, a distanza  $x_2$  da esso, il momento statico dell'area ombreggiata rispetto all'asse  $X_1$  è fornito da:

$$S'_1 = b \left( \frac{h}{2} - x_2 \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - x_2 \right) + x_2 \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (30.27)$$

e poichè il momento di inerzia baricentrico  $I_{11}$  dell'intera sezione rispetto all'asse  $X_1$  è pari a:

$$I_{11} = \frac{bh^3}{12} \quad (30.28)$$

si ha subito, per la formula di Jourawski:

$$\sigma_{23} = \frac{T_2 S'_1}{I_{11} b} = \frac{6T_2}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (30.29)$$

La componente di tensione  $\sigma_{23}$  varia quindi con legge quadratica lungo l'altezza, si annulla agli estremi, dove  $x_2 = \pm h/2$ , e raggiunge il valore massimo in mezzeria, ossia in corrispondenza dell'asse neutro, dove  $x_2 = 0$  (cfr Figura 30.8):

$$\sigma_{23 \max} = \frac{3T_2}{2bh} \quad (30.30)$$

La risultante delle tensioni  $\sigma_{23}$  è una forza  $T_r$  pari allo sforzo  $T_2$ , baricentrale e diretta verso il basso:

$$T_r = \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_1 dx_2 = \frac{6T_2}{bh^3} \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) dx_1 dx_2 = T_2 \quad (30.31)$$

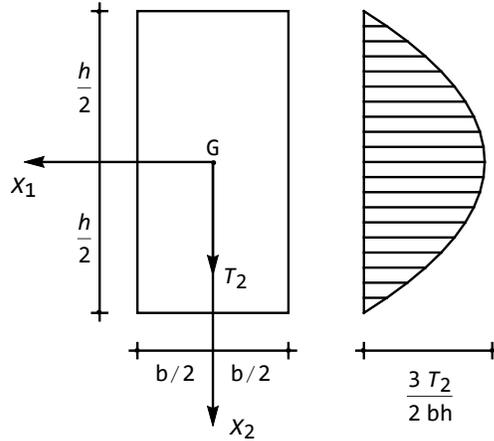


Figura 30.8: Il diagramma delle tensioni per la sezione rettangolare

La componente  $\sigma_{13}$  è ovunque nulla, poichè è ovunque  $\alpha = 0$ , mentre il fattore di taglio può calcolarsi come:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{A}{I_{11}^2} \int_{\Sigma} \frac{S_1'^2}{b^2} (1 + \tan^2 \alpha) dA = 12^2 \frac{bh}{b^2 h^6} \frac{1}{b^2} \int_{\Sigma} \frac{b^2}{4} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right)^2 dA \\ &= 12^2 \frac{1}{4h^5} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right)^2 dx_2 \end{aligned} \quad (30.32)$$

e svolgendo l'integrale si ha, in definitiva:

$$\kappa = \frac{6}{5} \quad (30.33)$$

## Capitolo 31

# La teoria di Eulero per la trave snella

In questa parte del corso si particolarizzano i risultati della teoria dell'elasticità e della teoria della trave di De Saint–Venant, studiando un solido monodimensionale piano ad asse rettilineo (trave piana). Dopo aver definito la geometria del solido, si specificano le possibili condizioni di carico, in modo da annullare identicamente le componenti di spostamento lungo un asse, e si pongono alcune ipotesi cinematiche, che costituiscono la base per la cosiddetta *teoria di Eulero–Bernoulli* per la trave. Infine, si particolarizzano le equazioni dell'equilibrio elastico giungendo a due equazioni differenziali disaccoppiate, con le corrispondenti condizioni ai limiti. A far ciò, si utilizza sia il principio degli spostamenti virtuali che il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, identificando così i vincoli che la teoria permette di utilizzare. Infine, si applica il metodo geometrico, o metodo diretto, illustrando in dettaglio i meccanismi di vincolo (incastro, appoggio e bipendolo).

Le due vie esposte in questa lezione sono ambedue antichissime, come può dedursi dalla seguente citazione di Eulero:

Poichè la fabbrica dell'Universo è perfetta, ed è il lavoro del più saggio Creatore, nulla accade nell'universo per cui non si manifesti qualche relazione di massimo o minimo.

Non c'è quindi alcun dubbio che qualunque cosa nell'universo possa spiegarsi in modo soddisfacente a partire dalle cause finali, con l'ausilio del metodo dei massimi e minimi, così come con l'ausilio delle stesse cause effettive.

Perciò, si aprono due vie per studiare i fenomeni naturali, uno tramite l'analisi delle cause effettive, comunemente chiamato metodo diretto, e l'altro per mezzo delle cause finali<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>L.Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausannae et Genevae, 1744



Figura 31.1: L. Eulero

### 31.1 Le ipotesi geometriche di base

Si consideri (Figura 31.2) un solido del tipo trave, di luce  $L$ , con una sezione retta caratterizzata da un asse di simmetria rispetto all'asse  $X_2$ , e si ipotizzi anche che i carichi su di essa agenti non abbiano componenti lungo l'asse  $X_1$ , mentre le altre due componenti siano simmetricamente disposte rispetto all'asse  $X_2$ .

Sono quindi ammessi:

— carichi distribuiti secondo l'asse della trave  $X_3$ , (*carichi assiali*), che possono ricondursi — considerando una striscia di trave di larghezza unitaria — a stese di carico di intensità  $t(x_3)$  con dimensione fisica  $[FL^{-1}]$

— carichi distribuiti secondo l'asse verticale  $X_2$ , (*carichi trasversali*) che possono ricondursi — considerando una striscia di trave di larghezza unitaria — a stese di carico di intensità  $p(x_3)$  con dimensione fisica  $[FL^{-1}]$

— distribuzioni di coppie con asse momento coincidente con l'asse  $X_1$ , che possono ricondursi — considerando una striscia di trave di larghezza unitaria — a stese di coppie di intensità  $m(x_3)$  con dimensione fisica  $[F]$ . Di esse si terrà raramente conto.

— forze concentrate dirette secondo l'asse della trave (forze assiali), o secondo l'asse verticale (forze trasversali), e coppie concentrate con asse momento coincidente con l'asse  $X_1$ . Da queste ipotesi sulla geometria e sui carichi segue che i punti della trave potranno subire spostamenti in senso assiale e trasversale, mentre saranno necessariamente nulle le componenti di spostamento secondo l'asse  $X_1$ . Ci si può quindi limitare a studiare i punti del piano  $X_2, X_3$ , ridu-

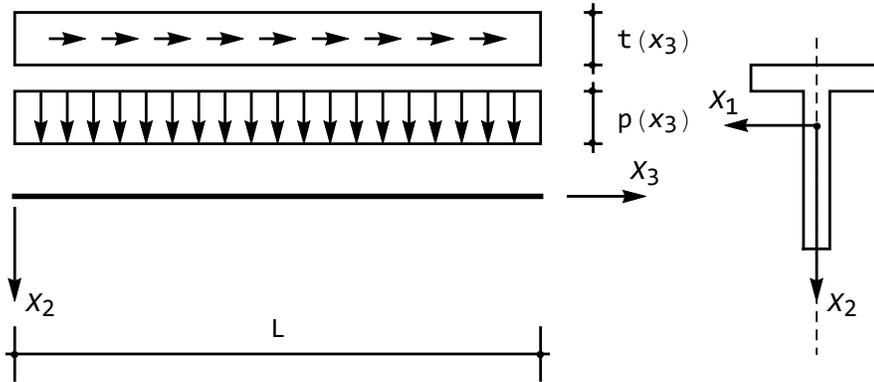


Figura 31.2: La trave da studiare

cendo il problema spaziale di De Saint–Venant ad un più semplice problema bidimensionale, in cui la terna di spostamenti si è semplificata in:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(x_2, x_3) \\ u_3(x_2, x_3) \end{pmatrix} \quad (31.1)$$

## 31.2 Le ipotesi cinematiche di base

Tutti i modelli strutturali di trave piana possono ricondursi ad una terna di spostamenti del tipo (31.1), in cui le due componenti  $u_2$  ed  $u_3$  andranno ulteriormente specificate attraverso opportune ipotesi cinematiche. La più semplice teoria rimonta a Bernoulli ed Eulero, ed è basata sulle seguenti ipotesi:

1. gli spostamenti verticali ed assiali dei punti dell'asse dipendono solo dalla variabile  $x_3$ . Indicando con l'apice  $a$  i punti dell'asse, si ha allora:

$$\begin{aligned} u_2^a &= u_2^a(x_3) \\ u_3^a &= u_3^a(x_3) \end{aligned} \quad (31.2)$$

2. segmenti normali all'asse si conservano segmenti a seguito della deformazione (*ipotesi di planeità delle sezioni rette*). Ad esempio, il segmento  $A - A$ , situato in Figura 31.3 a distanza  $x_3$  dalla base di sinistra, si trasformerà in un segmento  $A' - A'$ .
3. segmenti normali all'asse si conservano normali all'asse deformato. Quindi il segmento  $A - A$  subisce la rotazione  $\phi(x_3)$  pari alla rotazione dell'asse neutro alla stessa ascissa.

Segue dalle tre ipotesi appena formulate, che una sezione retta a distanza  $x_3$  dalla base di sinistra subisce un abbassamento  $u_2(x_3) = u_2^a(x_3)$ , uguale per

tutti i punti della sezione, uno spostamento assiale  $u_3(x_2, x_3)$ , ed una rotazione di ampiezza  $\phi(x_3)$ , uguale alla rotazione dell'asse. Pertanto, tale angolo è fornito da:

$$\phi(x_3) = -\frac{du_2}{dx_3} = -u_2'(x_3) \quad (31.3)$$

indicando con l'apice la derivazione rispetto ad  $x_3$ . Ne segue che lo spostamento assiale  $u_3(x_2, x_3)$  di un punto generico  $P$  della sezione retta, situato a distanza  $x_2$  dal baricentro, è pari a:

$$u_3(x_2, x_3) = u_3^a(x_3) + x_2\phi(x_3) = u_3^a(x_3) - x_2u_2'(x_3) \quad (31.4)$$

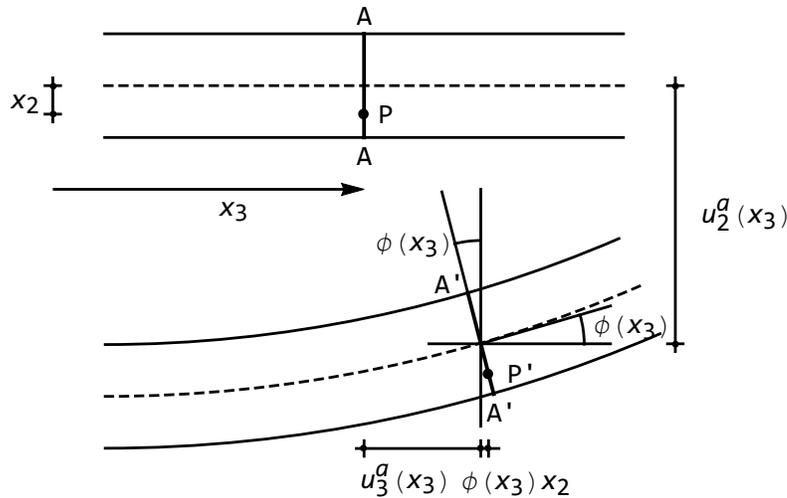


Figura 31.3: Le ipotesi di Eulero-Bernoulli

Il vettore  $\mathbf{s}$  della terna di spostamenti è fornito pertanto da:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(x_2, x_3) \\ u_3(x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(x_3) \\ u_3(x_3) - x_2u_2'(x_3) \end{pmatrix} \quad (31.5)$$

dove, per semplicità, d'ora in poi si trascurerà l'apice  $a$ .

Le deformazioni corrispondenti a questa terna di spostamenti sono deducibili a partire dalle ben note leggi che legano le deformazioni alle derivate prime degli spostamenti:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (31.6)$$

$$\begin{aligned}
 e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\
 e_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (u_2'(x_3) - u_2'(x_3)) = 0 \\
 e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{du_3}{dx_3} - x_2 \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = u_3'(x_3) - x_2 u_2''(x_3)
 \end{aligned}$$

Le precedenti relazioni si conciliano con la relazione generale di De Saint-Venant, (cfr. eqn.(24.13) del Capitolo 24):

$$e_{11} = e_{22} = -\nu e_{33} \quad (31.7)$$

solo nel caso  $\nu = 0$ , ossia di solido a contrazione laterale impedita. Nella stessa ipotesi, la legge di Hooke porta alla sola tensione normale  $\sigma_{33}$ , pari a:

$$\sigma_{33} = E (u_3'(x_3) - x_2 u_2''(x_3)) \quad (31.8)$$

Ne segue che le caratteristiche sforzo normale  $N(x_3)$  e momento flettente  $M_1(x_3)$  sono fornite da:

$$N(x_3) = \int_{\Sigma} E (u_3'(x_3) - x_2 u_2''(x_3)) \, dA = EA u_3'(x_3) \quad (31.9)$$

$$M_1(x_3) = \int_{\Sigma} E (x_2 u_3'(x_3) - x_2^2 u_2''(x_3)) \, dA = -EI_{11} u_2''(x_3) \quad (31.10)$$

coincidenti con i risultati ottenuti nel Capitolo 25.

## Il calcolo dello sforzo di taglio

Una notevole incongruenza della teoria di Eulero-Bernoulli risiede nella impossibilità di calcolare lo sforzo di taglio  $T_2$  come risultante delle tensioni tangenziali, secondo la definizione del Capitolo 23. Ed infatti, essendo nulla la componente tangenziale di tensione  $\sigma_{23}$  si avrà senz'altro:

$$T_2(x_3) = \int_{\Sigma} \sigma_{23} \, dA = 0 \quad (31.11)$$

D'altro canto, banali considerazioni di equilibrio mostrano che uno sforzo di taglio dovrà essere necessariamente presente. Ed infatti, si consideri un concio di trave di larghezza  $dx_3$ , situato all'ascissa  $x_3$ , come riportato in Figura 31.4. Perché esso sia in equilibrio, occorrerà che siano soddisfatte le tre equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale, alla traslazione verticale, ed alla rotazione intorno ad una sezione generica, ed è immediato realizzare che l'assenza di forze taglianti verticali impedisce di soddisfare l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale. Si può giungere però ad una definizione soddisfacente dello sforzo

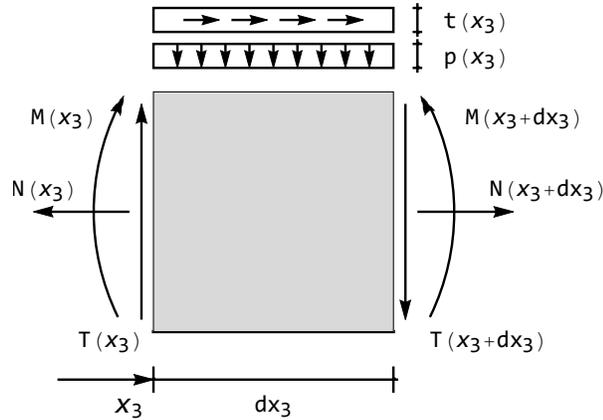


Figura 31.4: Il concio elementare e le forze su di esso agenti

di taglio imponendo l'equilibrio delle forze presenti alla rotazione intorno alla faccia di destra:

$$-M_1(x_3) + M_1(x_3 + dx_3) - T_2(x_3) dx_3 + p(x_3) dx_3 \frac{dx_3}{2} = 0 \quad (31.12)$$

Se  $dx_3$  è abbastanza piccolo, si può approssimare  $M_1(x_3 + dx_3)$  con i primi termini di un suo sviluppo in serie:

$$M_1(x_3 + dx_3) = M_1(x_3) + \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} dx_3 \quad (31.13)$$

ed inoltre l'ultimo termine della (31.12) può trascurarsi. Se ne trae:

$$-M_1(x_3) + M_1(x_3) + \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} dx_3 - T_2(x_3) dx_3 = 0 \quad (31.14)$$

ed infine si giunge alla *definizione* di taglio secondo la teoria di Eulero-Bernoulli:

$$T_2(x_3) = \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} = -EI_{11}u_2'''(x_3) \quad (31.15)$$

La (31.15) è in netta contraddizione con la (31.11), ma è il prezzo da pagare per l'estrema semplicità della teoria di Eulero-Bernoulli per travi snelle.

### 31.3 Lo studio della linea elastica col principio degli spostamenti virtuali

Si scriva il principio degli spostamenti virtuali, come dedotto nel Capitolo 21. In base a quanto finora assunto, il lavoro interno si limita al solo contributo

delle tensioni normali  $\sigma_{33}$ , mentre si ipotizza che insistano sulla trave solo stese di carico distribuito di tipo assiale e di tipo trasversale. Inoltre, si ipotizza che tali carichi agiscano su tutta la trave. Si avrà quindi:

$$\int_B \sigma_{33} \delta e_{33} dV = \int_0^L p(x_3) \delta u_2 dx_3 + \int_0^L t(x_3) \delta u_3 dx_3 \quad (31.16)$$

Altri esempi di carichi distribuiti, estesi ad una luce parziale, e di carichi concentrati, possono essere facilmente trattati modificando l'espressione del lavoro esterno.

Si introduca ora la legge di Hooke, esprimendo la tensione  $\sigma_{33}$  in termini di deformazione  $e_{33}$ , e poi si utilizzi l'ultima delle (31.6) per esprimere la deformazione in termini di spostamento. Si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{\Sigma} E (u_3'(x_3) - x_2 u_2''(x_3)) (\delta u_3'(x_3) - x_2 \delta u_2''(x_3)) dA dx_3 \\ = \int_0^L p(x_3) \delta u_2 dx_3 + \int_0^L t(x_3) \delta u_3 dx_3 \end{aligned} \quad (31.17)$$

Svolgendo i prodotti, si ha, eliminando per semplicità la dipendenza funzionale da  $x_3$ :

$$\int_0^L (EA u_3' \delta u_3' + EI_{11} u_2'' \delta u_2'' - p \delta u_2 - t \delta u_3) dx_3 \quad (31.18)$$

tenendo conto che:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} dA &= A \\ \int_{\Sigma} x_2 dA &= 0 \\ \int_{\Sigma} x_2^2 dA &= I_{11} \end{aligned} \quad (31.19)$$

dove  $A$  è l'area della sezione retta, ed  $I_{11}$  è il suo momento di inerzia rispetto all'asse  $X_1$ .

Ipotizzando da ora in poi che la trave sia omogenea ed a sezione costante, e che quindi il modulo di Young, l'area ed il momento di inerzia possano considerarsi costanti, il primo integrale della (31.18) può integrarsi per parti una volta, ottenendo:

$$\int_0^L u_3' \delta u_3' dx_3 = [u_3' \delta u_3]_0^L - \int_0^L u_3'' \delta u_3 dx_3 \quad (31.20)$$

mentre il secondo integrale va integrato per parti due volte:

$$\begin{aligned} \int_0^L u_2'' \delta u_2'' dx_3 &= [u_2'' \delta u_2']_0^L - \int_0^L u_2''' \delta u_2' dx_3 = [u_2'' \delta u_2']_0^L - [u_2''' \delta u_2]_0^L + \\ &\int_0^L u_2'''' \delta u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (31.21)$$

Inserendo ambedue questi risultati nella (31.18) si giunge a scrivere:

$$\int_0^L [(-EAu_3'' - t)\delta u_3 + (EI_{11}u_2'''' - p)\delta u_2] dx_3 + [EAu_3'\delta u_3]_0^L + [EI_{11}u_2''\delta u_2]_0^L - [EI_{11}u_2'''\delta u_2]_0^L = 0 \quad (31.22)$$

Le variazioni  $\delta u_3$  e  $\delta u_2$  sono arbitrarie, e quindi dovranno annullarsi le quantità in parentesi, conducendo alle due equazioni differenziali disaccoppiate in  $u_3$  ed in  $u_2$ :

$$\begin{aligned} EAu_3'' &= -t \\ EI_{11}u_2'''' &= p \end{aligned} \quad (31.23)$$

Le restanti quantità dovranno annullarsi ai due estremi della trave. Per lo spostamento  $u_3$  dovrà quindi essere:

$$\begin{aligned} EAu_3'(0)\delta u_3(0) &= 0 \\ EAu_3'(L)\delta u_3(L) &= 0 \end{aligned} \quad (31.24)$$

mentre per lo spostamento  $u_2$  sarà necessariamente:

$$\begin{aligned} EI_{11}u_2''(0)\delta u_2'(0) &= 0 \\ EI_{11}u_2''(L)\delta u_2'(L) &= 0 \\ EI_{11}u_2'''(0)\delta u_2(0) &= 0 \\ EI_{11}u_2'''(L)\delta u_2(L) &= 0 \end{aligned} \quad (31.25)$$

Lo studio della funzione  $u_3(x_3)$  degli spostamenti assiali è quindi completamente separato dallo studio della funzione  $u_2(x_3)$  degli spostamenti trasversali. Inoltre, gli spostamenti assiali sono governati da un problema ai limiti differenziale del secondo ordine, mentre quelli trasversali da un problema ai limiti differenziale del quarto ordine. Occorre quindi risolvere le equazioni differenziali (31.23), e determinare le costanti di integrazione imponendo le condizioni ai limiti (31.24) per lo spostamento assiale, e le condizioni (31.25) per lo spostamento trasversale.

### La soluzione delle equazioni differenziali della linea elastica

La soluzione delle (31.23) può scriversi come somma di un integrale generale, soluzione dell'omogenea associata, e di un integrale particolare, che dipende dalla particolare forma delle funzioni  $t(x_3)$  e  $p(x_3)$ . Riscritte le equazioni nella forma più conveniente:

$$\begin{aligned} u_3'' &= -\frac{t}{EA} \\ u_2'''' &= \frac{p}{EI} \end{aligned} \quad (31.26)$$

si ha:

$$\begin{aligned} u_3(x_3) &= A_0 + A_1x_3 + I_w \\ u_2(x_3) &= C_0 + C_1x_3 + C_2x_3^2 + C_3x_3^3 + I_v \end{aligned} \quad (31.27)$$

con  $I_w$  e  $I_v$  integrali particolari, mentre  $A_0, A_1, C_0, C_1, C_2$  e  $C_3$  rappresentano costanti di integrazione da specificare imponendo le opportune condizioni ai limiti, in  $x_3 = 0$  ed in  $x_3 = L$ . Tali condizioni, da ricavare in base alle (31.24) ed alle (31.25), rispettivamente, riflettono le condizioni con cui è vincolata la trave, secondo la classificazione riportata nel prossimo paragrafo

### Le condizioni di vincolo

E' conveniente separare lo studio del problema assiale dallo studio del problema flessionale.

#### Il problema assiale

In base alla (31.9), le condizioni (31.24) si possono scrivere:

$$\begin{aligned} N(0)\delta u_3(0) &= 0 \\ N(L)\delta u_3(L) &= 0 \end{aligned} \quad (31.28)$$

Agli estremi della trave, pertanto, si può avere questa duplice alternativa:

- Estremo fisso  $\longrightarrow u_3 = 0$
- Estremo libero  $\longrightarrow N = 0$  ossia  $u_3' = 0$

#### Il problema flessionale

In base alla (31.10) ed alla (31.15) le condizioni (31.25) si possono scrivere:

$$\begin{aligned} M_1(0)\delta\phi(0) &= 0 \\ M_1(L)\delta\phi(L) &= 0 \\ T_2(0)\delta u_2(0) &= 0 \\ T_2(L)\delta u_2(L) &= 0 \end{aligned} \quad (31.29)$$

Agli estremi della trave, pertanto, si possono simulare queste condizioni di vincolo:

- Estremo fisso  $\longrightarrow u_2 = 0$  e  $\phi = 0$
- Estremo appoggiato  $\longrightarrow u_2 = 0$  e  $M_1 = 0$ , ossia  $u_2'' = 0$
- Estremo con bipendolo  $\longrightarrow \phi = 0$  e  $T_2 = 0$ , ossia  $u_2''' = 0$
- Estremo libero  $\longrightarrow M_1 = 0$ , ossia  $u_2'' = 0$  e  $T_2 = 0$ , ossia  $u_2''' = 0$

## 31.4 Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale

Come si è visto, il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale discende dal principio degli spostamenti virtuali. Nessuna sorpresa, quindi, se utilizzando questo principio si giungerà alle stesse equazioni del paragrafo precedente.

Si parte dalla definizione dell'energia potenziale totale, somma dell'energia elastica e dell'energia potenziale dei carichi:

$$E_t = \frac{1}{2} \int_B E e_{33}^2 dV - \int_0^L p(x_3) u_2(x_3) dx_3 - \int_0^L t(x_3) u_3(x_3) dx_3 \quad (31.30)$$

ed utilizzando l'ultima delle (31.6), si può scrivere l'energia elastica come un funzionale delle due componenti di spostamento  $u_2$  ed  $u_3$ :

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{1}{2} \int_0^L EA u_3'^2(x_3) dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} u_2''^2(x_3) dx_3 \\ &\quad - \int_0^L p(x_3) u_2(x_3) dx_3 - \int_0^L t(x_3) u_3(x_3) dx_3 \end{aligned} \quad (31.31)$$

Si scriva ora la *variazione* di  $E_t$  rispetto alle due variabili  $u_3$  ed  $u_2$ , ottenendo:

$$\begin{aligned} \delta E_t &= E_t(u_3 + \delta u_3, u_2 + \delta u_2) - E_t(u_3, u_2) = \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^L EA (u_3' + \delta u_3')^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} (u_2'' + \delta u_2'')^2 dx_3 - \\ &\quad \int_0^L p(u_2 + \delta u_2) dx_3 - \int_0^L t(u_3 + \delta u_3) dx_3 - \frac{1}{2} \int_0^L EA u_3'^2 dx_3 - \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} u_2''^2 dx_3 + \int_0^L p u_2 dx_3 + \int_0^L t u_3 dx_3 \end{aligned} \quad (31.32)$$

Svolgendo i quadrati e semplificando si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta E_t &= \int_0^L EA u_3' \delta u_3' dx_3 + \int_0^L EI_{11} u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^L EA \delta u_3'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} \delta u_2''^2 dx_3 \end{aligned} \quad (31.33)$$

Ne segue che la variazione dell'energia potenziale totale si esaurisce in due aliquote: la prima, lineare, e la seconda quadratica:

$$\delta_1 E_t = \int_0^L EA u_3' \delta u_3' dx_3 + \int_0^L EI_{11} u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 \quad (31.34)$$

$$\delta_2 E_t = \frac{1}{2} \int_0^L EA \delta u_3'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} \delta u_2''^2 dx_3 \quad (31.35)$$

Per il principio di stazionarietà, dovrà essere:

$$\delta_1 E_t = \int_0^L EA u_3' \delta u_3' dx_3 + \int_0^L EI_{11} u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 = 0 \quad (31.36)$$

coincidente con la (31.18).

### 31.5 L'approccio geometrico

Talvolta è utile impiegare il metodo geometrico, o diretto, per dedurre le equazioni differenziali della linea elastica. Si tratta di imporre l'equilibrio del concio di Figura 31.4, oltre che alla rotazione, anche rispetto alla traslazione orizzontale ed alla traslazione verticale. Si ha:

**Equilibrio alla traslazione orizzontale :**

$$-N(x_3) + N(x_3 + dx_3) + t(x_3) dx_3 = 0 \quad (31.37)$$

ossia:

$$-N(x_3) + N(x_3) + \frac{dN(x_3)}{dx_3} dx_3 + t(x_3) dx_3 = 0 \quad (31.38)$$

ed infine:

$$\frac{dN(x_3)}{dx_3} + t(x_3) = 0 \quad (31.39)$$

**Equilibrio alla traslazione verticale :**

$$-T_2(x_3) + T_2(x_3 + dx_3) + p(x_3) dx_3 = 0 \quad (31.40)$$

ossia:

$$-T_2(x_3) + T_2(x_3) + \frac{dT_2(x_3)}{dx_3} dx_3 + p(x_3) dx_3 = 0 \quad (31.41)$$

ed infine:

$$\frac{dT_2(x_3)}{dx_3} + p(x_3) = 0 \quad (31.42)$$

**Equilibrio alla rotazione :**

$$\frac{dM_1(x_3)}{dx_3} = T_2(x_3) \quad (31.43)$$

come già visto.

Ciò fatto, occorre utilizzare i legami tra le caratteristiche e gli spostamenti, ossia occorre introdurre nella (31.39) l'espressione dello sforzo normale (31.9) mentre nelle (31.42) e (31.43) bisognerà utilizzare la (31.10) e la (31.15). Nel primo caso, se la trave è omogenea, e quindi se  $E$  ed  $A$  sono costanti, si ritrova la prima equazione differenziale (31.23):

$$EA \frac{d^2 u_3(x_3)}{dx_3^2} + t(x_3) = 0 \quad (31.44)$$

Nel secondo caso si ottiene, derivando la (31.43) ed utilizzando la (31.42), una fondamentale relazione tra momento e carico applicato:

$$\frac{d^2 M_1(x_3)}{dx_3^2} + p(x_3) = 0 \quad (31.45)$$

Infine, utilizzando l'equazione (31.10), che lega il momento alla curvatura, si riottiene la seconda equazione differenziale (31.23):

$$EI_{11} \frac{d^4 u_2(x_3)}{dx_3^4} = p(x_3) \quad (31.46)$$

## Le condizioni ai limiti

Proseguendo nello spirito dell'approccio diretto, è opportuno suddividere le condizioni ai limiti che è possibile imporre in due distinte categorie: *condizioni di congruenza*, che coinvolgono spostamenti e rotazioni, e *condizioni di equilibrio*, che coinvolgono i momenti flettenti, gli sforzi di taglio e gli sforzi normali. Limitandosi all'esame del problema flesso-tagliante, le condizioni di congruenza vanno imposte *a priori*, in base al tipo di vincolo che si vuole realizzare. Se quindi si prevede che un estremo della trave debba essere *incastato*, si dovrà imporre che in quell'estremo siano nulli sia gli spostamenti che le rotazioni, se invece l'estremo è solo *appoggiato*, allora le rotazioni saranno libere, e dovrà annullarsi solo lo spostamento. Dualmente, un *bipendolo* prevede rotazioni nulle e spostamenti liberi, mentre un *estremo* lasciato *libero* può spostarsi e può ruotare.

Tali condizioni possono essere realizzate predisponendo opportuni dispositivi di vincolo, in grado di annullare gli spostamenti e/o le rotazioni sviluppando opportune *forze reattive*. Da questo punto di vista, l'appoggio può essere considerato equivalente ad una forza verticale *incognita*  $R$ , in grado di annullare il corrispondente spostamento, il bipendolo è equivalente ad una coppia reattiva *incognita*  $\mathcal{M}_R$ , in grado di annullare la rotazione della sezione retta cui il bipendolo è applicato, e l'incastro può essere sostituito con una forza reattiva  $R$  ed una coppia reattiva  $\mathcal{M}_R$ , in grado di annullare sia lo spostamento che la rotazione.

Imposte le condizioni di congruenza, possono *dedursi* le ulteriori condizioni di equilibrio, imponendo l'equilibrio del concio vincolato, sia nei confronti di

una eventuale traslazione verticale che di una rotazione. Le due condizioni che in tal modo si ottengono andranno considerate condizioni di vincolo se non coinvolgono reazioni incognite, oppure equazioni in grado di far conoscere le reazioni, *dopo* aver risolto il problema ai limiti.

In Figura 31.5 è offerta una panoramica dettagliata delle condizioni di vincolo possibili ai due estremi di una trave di Eulero–Bernoulli. La prima riga si riferisce all'estremo di sinistra, la riga inferiore invece all'estremo di destra. Per ciascuno di questi due estremi sono illustrati i quattro vincoli possibili, nell'ordine a) incastro, b) appoggio, c) bipendolo, d) estremo libero.

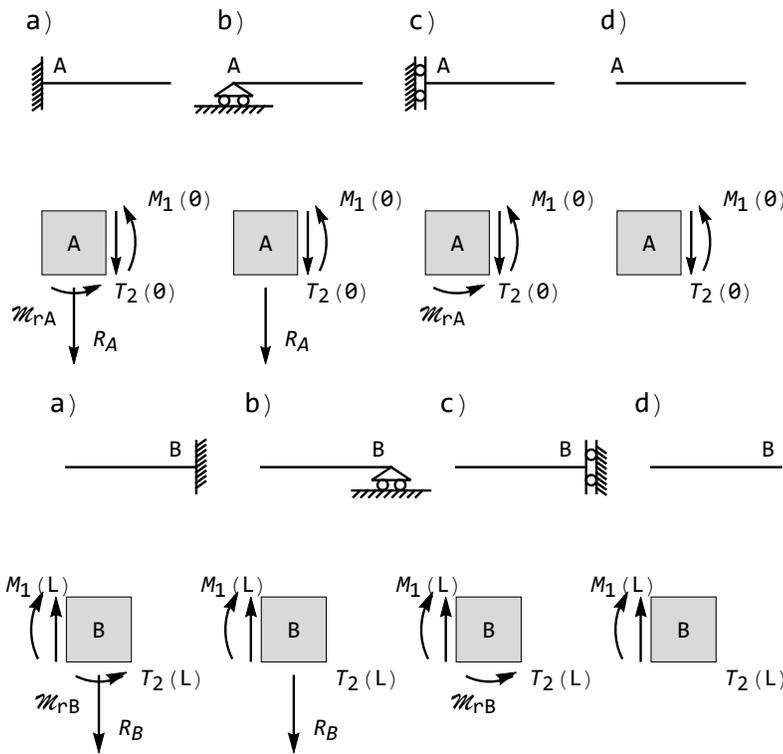


Figura 31.5: Le condizioni di vincolo previste dalla teoria di Eulero–Bernoulli - a) incastro, b) appoggio, c) bipendolo, d) estremo libero

**a) incastro**

Le due condizioni di congruenza che definiscono l'incastro esprimono l'annullarsi di spostamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2(\xi) &= 0 \\ \phi(\xi) &= 0 \rightarrow u'_2(\xi) = 0 \end{aligned} \tag{31.47}$$

dove  $\xi = 0$  se l'incastro è a sinistra, e  $\xi = L$  se l'incastro è a destra.

Esse definiscono completamente l'incastro, ai fini delle condizioni ai limiti da introdurre nel corrispondente problema ai limiti.

Come detto, per annullare spostamenti e rotazioni l'incastro svilupperà una forza reattiva  $R_\xi$  ed una coppia reattiva  $\mathcal{M}_{R\xi}$ , di cui occorrerà tener conto nell'imposizione delle condizioni di equilibrio del concio elementare. Se l'incastro è situato a sinistra, in  $\xi = 0$ , allora le forze agenti sul concio elementare sono quelle indicate in Figura 31.5a), in prima riga: la reazione verticale  $R_A$ , positiva se equivversa all'asse  $X_2$ , e quindi positiva se verso il basso, la coppia reattiva  $\mathcal{M}_{rA}$ , positiva se antioraria, il taglio  $T_2(0)$ , positivo se induce rotazioni *orarie* del concio elementare, il momento flettente  $M_1(0)$ , positivo se tende le fibre inferiori del concio. Si noti che le caratteristiche della sollecitazione interna, ossia il taglio ed il momento, sono state applicate solo sulla faccia di destra del concio, in quanto la faccia di sinistra coincide con la faccia esterna della trave. Tutto ciò premesso, l'equilibrio del concio è garantito dalle due condizioni:

$$\begin{aligned} R_A + T_2(0) &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + M_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (31.48)$$

Tali condizioni possono essere utilizzate, dopo aver risolto il problema ai limiti, per calcolare le reazioni dell'incastro.

Se l'incastro è situato a destra, in  $\xi = L$ , allora le forze agenti sul concio elementare sono quelle indicate in Figura 31.5a), in seconda riga: la reazione verticale  $R_B$ , positiva se equivversa all'asse  $X_2$ , e quindi sempre positiva se verso il basso, la coppia reattiva  $\mathcal{M}_{rB}$ , positiva se antioraria, il taglio  $T_2(L)$ , positivo se induce rotazioni *orarie* del concio elementare, il momento flettente  $M_1(L)$ , positivo se tende le fibre inferiori del concio. Si noti che le caratteristiche della sollecitazione interna, ossia il taglio ed il momento, sono state applicate solo sulla faccia di sinistra del concio, in quanto la faccia di destra coincide con la faccia esterna della trave, e che quindi ora il taglio positivo è diretto verso l'alto, mentre il momento flettente è positivo se orario. Tutto ciò premesso, l'equilibrio del concio è garantito dalle due condizioni:

$$\begin{aligned} R_B - T_2(L) &= 0 \\ \mathcal{M}_{rB} - M_1(L) &= 0 \end{aligned} \quad (31.49)$$

Le (31.48) e (31.49) esprimono una conclusione di carattere generale:  
*- nell'estremo di sinistra, le reazioni sono uguali e contrarie alle corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna, mentre nell'estremo di destra le reazioni sono uguali alle corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna.*

### b) appoggio

L'unica condizione di congruenza che definisce l'appoggio esprime l'annullarsi dello spostamento:

$$u_2(\xi) = 0 \quad (31.50)$$

Ad essa deve essere affiancata una condizione di equilibrio, da introdurre nel corrispondente problema ai limiti.

A ciò fare, si consideri che l'appoggio sviluppa una forza reattiva  $R_\xi$ , di cui occorrerà tener conto nell'imposizione delle condizioni di equilibrio del concio elementare. Se l'appoggio è situato a sinistra, in  $\xi = 0$ , allora le forze agenti sul concio elementare sono quelle indicate in Figura 31.5b), in prima riga: la reazione verticale  $R_A$ , positiva se equiversa all'asse  $X_2$ , e quindi positiva se verso il basso, il taglio  $T_2(0)$ , positivo se induce rotazioni *orarie* del concio elementare, il momento flettente  $M_1(0)$ , positivo se tende le fibre inferiori del concio. Ne segue che l'equilibrio del concio è garantito dalle due condizioni:

$$\begin{aligned} R_A + T_2(0) &= 0 \\ M_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (31.51)$$

La seconda condizione, esprime l'annullarsi del momento flettente, può e deve essere utilizzata come condizione ai limiti, per cui le condizioni che definiscono completamente l'appoggio, saranno:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ M_1(0) = 0 &\longrightarrow u_2''(0) = 0 \end{aligned} \quad (31.52)$$

La prima delle (31.51), invece, può essere utilizzata, dopo aver risolto il problema ai limiti, per conoscere la reazione dell'appoggio.

Infine, se l'appoggio è situato a destra, è immediato analizzare la situazione di Figura 31.5b), seconda riga, e dedurre che le due condizioni ai limiti da imporre sono:

$$\begin{aligned} u_2(L) &= 0 \\ M_1(L) = 0 &\longrightarrow u_2''(L) = 0 \end{aligned} \quad (31.53)$$

mentre la restante condizione di equilibrio serve a calcolare la reazione:

$$R_B - T_2(L) = 0 \longrightarrow R_B = T_2(L) \quad (31.54)$$

### c) bipendolo

Il bipendolo è un vincolo che può essere considerato duale all'appoggio: la condizione di congruenza che lo definisce esprime infatti l'annullarsi della rotazione:

$$\phi(\xi) = u_2'(\xi) = 0 \quad (31.55)$$

e di conseguenza esso svilupperà una coppia reattiva incognita. Alla (31.55) bisognerà affiancare una condizione di equilibrio, ottenibile come usuale esaminando il concio elementare dove agisce il bipendolo stesso.

Se il bipendolo è situato a sinistra, in  $\xi = 0$ , allora le forze agenti sul concio elementare sono quelle indicate in Figura 31.5c), in prima riga: la coppia reattiva  $\mathcal{M}_{rA}$ , positiva se antioraria, il taglio  $T_2(0)$ , positivo se induce rotazioni *orarie*

del concio elementare, il momento flettente  $M_1(0)$ , positivo se tende le fibre inferiori del concio. Ne segue che l'equilibrio del concio è garantito dalle due condizioni:

$$\begin{aligned} T_2(0) &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + M_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (31.56)$$

La prima condizione, esprime l'annullarsi del taglio, può e deve essere utilizzata come condizione ai limiti, per cui le condizioni che definiscono completamente il bipendolo, saranno:

$$\begin{aligned} \phi(0) = 0 &\longrightarrow u_2'(0) = 0 \\ T_2(0) = 0 &\longrightarrow u_2'''(0) = 0 \end{aligned} \quad (31.57)$$

La seconda delle (31.56), invece, può essere utilizzata, dopo aver risolto il problema ai limiti, per conoscere la coppia reattiva del bipendolo.

Infine, se il bipendolo è situato a destra, è immediato analizzare la situazione di Figura 31.5c), seconda riga, e dedurre che le due condizioni ai limiti da imporre sono:

$$\begin{aligned} \phi(L) = 0 &\longrightarrow u_2'(L) = 0 \\ T_2(L) = 0 &\longrightarrow u_2'''(L) = 0 \end{aligned} \quad (31.58)$$

mentre la restante condizione di equilibrio serve a calcolare la reazione:

$$\mathcal{M}_{rB} - M_1(L) = 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{rB} = M_1(L) \quad (31.59)$$

#### d) estremo libero

Se un estremo della trave è libero sia di spostarsi che di ruotare, non sarà possibile in esso scrivere alcuna equazione di congruenza, mentre imponendo l'equilibrio del concio di Figura 31.5d) verranno scritte due equazioni di equilibrio, esprimenti l'annullarsi del momento e del taglio:

$$\begin{aligned} M_1(\xi) = 0 &\longrightarrow u_2''(\xi) = 0 \\ T_2(\xi) = 0 &\longrightarrow u_2'''(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (31.60)$$

## Problemi

Problema n.1 - Utilizzando il principio degli spostamenti virtuali, dedurre i due problemi ai limiti della teoria della trave presupponendo che il modulo di Young, l'area ed il momento di inerzia della sezione retta siano arbitrarie funzioni continue di  $x_3$  (trave non omogenea a sezione variabile)

Problema n.2 - Dedurre per via geometrica le condizioni ai limiti del problema ai limiti assiale

## Capitolo 32

# Il problema ai limiti assiale

In questo Capitolo si applicano i risultati del Capitolo precedente, calcolando spostamenti e caratteristiche di alcune travi ad una sola campata soggette a carichi di tipo assiale. Si imposta quindi e si risolve il problema ai limiti del secondo ordine, illustrando alcuni semplici condizioni di carico. Nel seguito si intenderà con il termine *asta* una trave soggetta a soli carichi assiali, mentre il termine *trave* sarà riservato ai casi di forze trasversali.

### 32.1 L'asta soggetta a carico uniformemente distribuito

Il caso di carico più semplice è quello per cui  $t(x_3) = t_0 = \text{costante}$ . In questo caso l'equazione differenziale che regge il problema ai limiti si scrive:

$$u_3'' = -\frac{t_0}{EA} \quad (32.1)$$

ed è immediato constatare, per integrazioni successive, che il suo integrale è pari a:

$$u_3(x_3) = A_0 + A_1 x_3 - t_0 \frac{x_3^2}{2EA} \quad (32.2)$$

Per ottenere le due costanti di integrazione  $A_0$  ed  $A_1$  occorre specificare le condizioni di vincolo. Si hanno due casi di interesse pratico.

#### 32.1.1 Asta fissa agli estremi

Per un'asta i cui due estremi sono impediti a muoversi, occorrerà che sia:

$$u_3(0) = u_3(L) = 0 \quad (32.3)$$

ossia, dalla (32.2):

$$\begin{aligned} A_0 &= 0 \\ A_0 + A_1 L - t_0 \frac{L^2}{2EA} &= 0 \end{aligned} \quad (32.4)$$

e quindi la linea elastica è data da:

$$u_3(x_3) = \frac{t_0 x_3}{2EA} (L - x_3) \quad (32.5)$$

mentre lo sforzo normale è dato da:

$$N(x_3) = EAu_3'(x_3) = t_0 \left( \frac{L}{2} - x_3 \right) \quad (32.6)$$

In Figura 32.1 è riportato l'andamento dei grafici degli spostamenti e degli sforzi normali. Come può osservarsi, e come deducibile dalle formule, lo sforzo normale è distribuito con legge lineare, mentre lo spostamento assiale varia con legge quadratica lungo l'asse, raggiungendo il suo massimo in mezzeria.

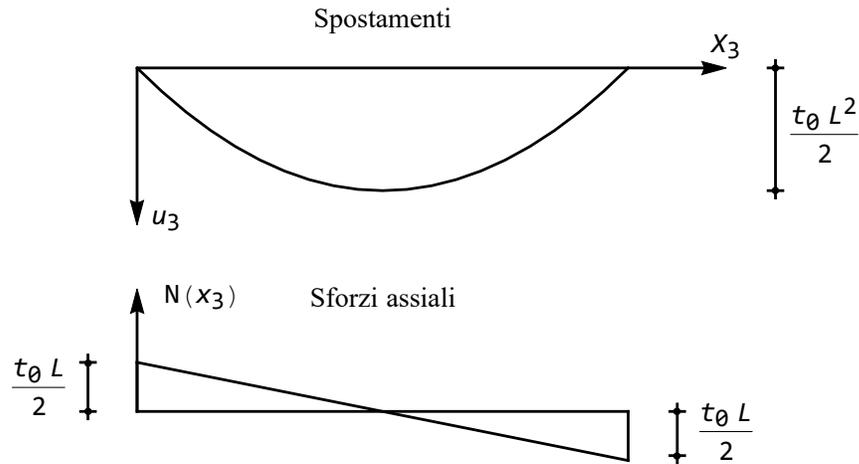


Figura 32.1: Asta fissa agli estremi soggetta a carico distribuito uniforme: diagramma degli spostamenti e degli sforzi assiali

Le reazioni dei due vincoli agli estremi sono facilmente calcolabili con considerazioni di equilibrio. A sinistra si avrà, come deducibile dalla Figura 32.2:

$$H_0 + N(0) = 0 \longrightarrow H_0 = -N(0) = -t_0 \frac{L}{2} \quad (32.7)$$

ed a destra:

$$H_L - N(L) = 0 \longrightarrow H_L = N(L) = -t_0 \frac{L}{2} \quad (32.8)$$

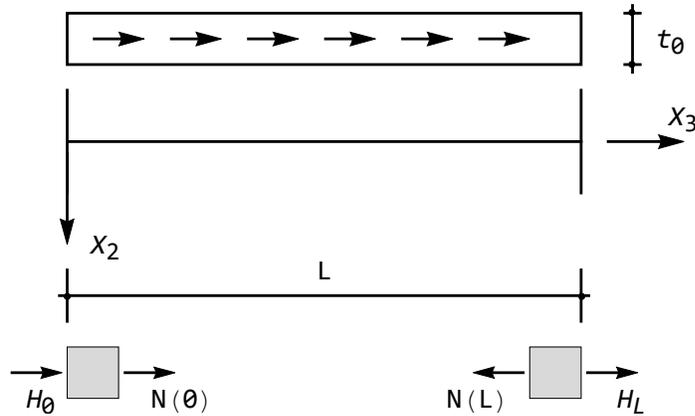


Figura 32.2: Le reazioni assiali per l'asta soggetta a carico uniformemente distribuita

### 32.1.2 Asta fissa a sinistra e libera a destra

In questo caso dovrà essere:

$$u_3(0) = u_3'(L) = 0 \quad (32.9)$$

ossia, dalla (32.2):

$$\begin{aligned} A_0 &= 0 \\ A_1 - \frac{t_0 L}{EA} &= 0 \end{aligned} \quad (32.10)$$

e quindi la linea elastica è data da:

$$u_3(x_3) = \frac{t_0 x_3}{EA} \left( L - \frac{x_3}{2} \right) \quad (32.11)$$

mentre lo sforzo normale è dato da:

$$N(x_3) = EA u_3'(x_3) = t_0 (L - x_3) \quad (32.12)$$

In Figura 32.3 sono riportati i grafici degli spostamenti e degli sforzi normali. Calcolare le reazioni vincolari.

## 32.2 L'asta soggetta a forza concentrata all'estremo

Si consideri ora un'asta fissa a sinistra, libera a destra, e soggetta ad una forza concentrata  $F$  all'estremo libero. Utilizzando il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, al fine di stabilire le condizioni al contorno all'estremo

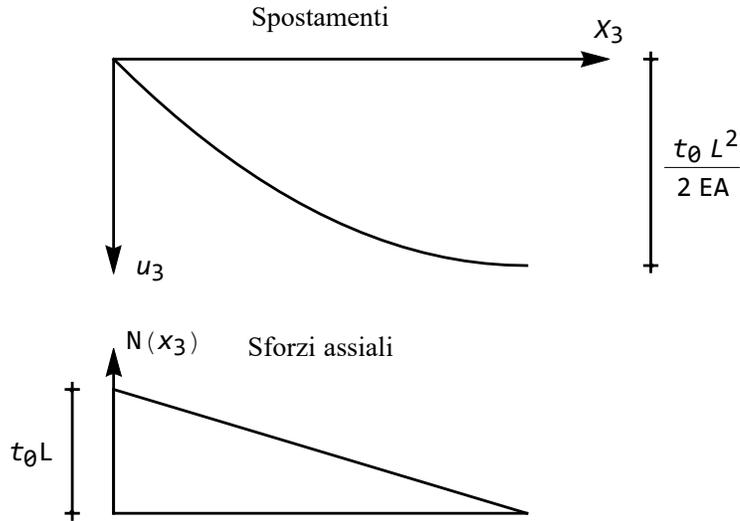


Figura 32.3: Asta fissa a sinistra e libera a destra : diagramma degli spostamenti e degli sforzi assiali

libero, si scrive l'energia potenziale totale come:

$$E_t = \frac{1}{2} \int_0^L EAu_3'^2(x_3) dx_3 - Fu_3(L) \quad (32.13)$$

e quindi la variazione prima di  $E_t$  è fornita da:

$$\delta_1 E_t = \int_0^L EAu_3''\delta u_3' dx_3 - F\delta u_3(L) = 0 \quad (32.14)$$

Integrando per parti si giunge alla solita equazione differenziale, con  $t_0 = 0$ , ed alle condizioni ai limiti:

$$EAu_3'(0)\delta u_3(0) = 0 \quad (32.15)$$

$$(EAu_3'(L) - F)\delta u_3(L) = 0 \quad (32.16)$$

Nell'estremo di sinistra, fisso, dovrà essere  $u_3(0) = 0$ , mentre a destra, nell'estremo libero, sarà:

$$EAu_3'(L) = F \quad (32.17)$$

Nota - La (32.17) esprime l'equilibrio tra sforzo normale e forza applicata, come può facilmente evincersi enucleando il concio elementare all'ascissa  $x_3 = L$ , ed esprimendo la condizione di equilibrio nei riguardi delle possibili traslazioni orizzontali (cfr.Figura 32.4)

Gli spostamenti saranno allora dati da:

$$u_3(x_3) = \frac{F}{EA}x_3 \quad (32.18)$$



Figura 32.4: L'asta soggetta a carico concentrato nell'estremo libero

mentre lo sforzo normale è costante, e pari ad  $F$ . Si noti che non è necessario, in questo caso, risolvere il problema ai limiti per ottenere la (32.18). Ed infatti, in assenza di carichi distribuiti, la relazione:

$$\frac{dN(x_3)}{dx_3} + t(x_3) = 0 \quad (32.19)$$

implica che lo sforzo normale sia costante lungo l'asse  $x_3$ . Di conseguenza, per la (32.17), esso sarà pari ovunque ad  $F$ , e poichè:

$$N(x_3) = EAu'_3(x_3) \quad (32.20)$$

sarà subito:

$$u'_3(x_3) = \frac{F}{EA} \longrightarrow u_3(x_3) = \frac{F}{EA}x_3 + C \quad (32.21)$$

Infine, la costante di integrazione  $C$  si annulla, in base alla condizione a sinistra, dove  $u_3(0) = 0$ .



## Capitolo 33

# Le travi ad una campata

In questo Capitolo si studiano le travi ad una sola campata con i più comuni tipi di vincolo. La classificazione completa è abbastanza agevole, e porta ad identificare sedici schemi, come riportato nella tabella 33.1.

inc-inc	inc-app	inc-bip	inc-lib
app-inc	app-app	app-bip	app-lib
bip-inc	bip-app	bip-bip	bip-lib
lib-inc	lib-app	lib-bip	lib-lib

Tabella 33.1: La classificazione delle travi ad una campata di Eulero–Bernoulli

I sei schemi del triangolo inferiore possono ricondursi ai corrispondenti casi del triangolo superiore, sicchè si può limitare l'esame a dieci schemi strutturali. Una prima classificazione si può ottenere in base alla possibilità di calcolare le reazioni vincolari con le sole equazioni di equilibrio della statica del corpo rigido. E' infatti immediato realizzare che per le travi in esame si hanno a disposizione due equazioni di equilibrio indipendenti, e precisamente un'equazione di equilibrio nei riguardi delle possibili traslazioni verticali, ed una equazione di equilibrio nei confronti delle rotazioni intorno ad un punto arbitrario (polo).

Nel caso di travi iperstatiche, non sarà possibile calcolare le reazioni vincolari in base a sole considerazioni di equilibrio, ma occorrerà affiancare ad esse ulteriori equazioni. Ad esempio, si potrà risolvere il problema ai limiti, calcolare i momenti ed i tagli, e da essi dedurre le reazioni.

Nel caso di travi isostatiche, si potranno usualmente ricavare le reazioni vincolari semplicemente risolvendo le equazioni di equilibrio. Nel caso di travi labili, invece, la trave non possiede abbastanza vincoli da eliminare i moti rigidi, e quindi subirà traslazioni e/o rotazioni. E' evidente la limitata utilità di simili schemi, almeno in ingegneria strutturale.

Si controlli la classificazione seguente:

- travi due volte iperstatiche: trave doppiamente incastrata

- travi una volta iperstatiche: trave incastro–appoggio, trave incastro–bipendolo
- travi isostatiche: trave incastro–libera (mensola), trave appoggio–appoggio, trave appoggio–bipendolo
- travi una volta labili: trave bipendolo–bipendolo, trave appoggio–libera, trave bipendolo–libera
- travi due volte labili: trave libera–libera

Nel seguito si esamineranno in un certo dettaglio i dieci schemi strutturali appena dedotti, supponendo inizialmente che siano assenti carichi concentrati.

### 33.1 La trave incastrata agli estremi

Il caso di carico più semplice è quello per cui  $p(x_3) = p_0 = \text{costante}$ . In questo caso l'equazione differenziale che regge il problema si scrive:

$$u_2''''(x_3) = \frac{p_0}{EI_{11}} \quad (33.1)$$

e la sua soluzione può ottenersi per integrazioni successive:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 + \frac{p_0}{24EI_{11}}x_3^4 \quad (33.2)$$

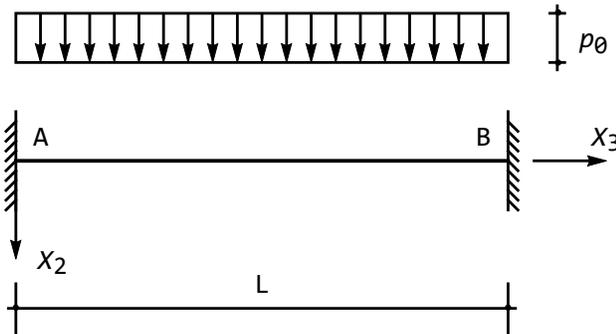


Figura 33.1: La trave doppiamente incastrata soggetta ad un carico uniformemente distribuito

Per ottenere le quattro costanti di integrazione  $C_i$ , occorre specificare le condizioni di vincolo. Si osservi comunque, in via preliminare, che poiché il carico è distribuito con legge costante, il taglio sarà necessariamente una funzione lineare, il momento una funzione quadratica, la rotazione una funzione cubica, e lo spostamento — come confermato dalla (33.2) — sarà un polinomio del quarto ordine.

Per una trave i cui due estremi sono impediti sia di muoversi che di ruotare, come in Figura 33.1, occorrerà che sia:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) = 0 &\longrightarrow C_1 = 0 \\
 u_2'(0) = 0 &\longrightarrow C_2 = 0 \\
 u_2(L) = 0 &\longrightarrow C_1 + C_2L + C_3L^2 + C_4L^3 + p_0 \frac{L^4}{24EI_{11}} = 0 \\
 u_2'(L) = 0 &\longrightarrow C_2 + 2C_3L + 3C_4L^2 + p_0 \frac{L^3}{6EI_{11}} = 0
 \end{aligned} \tag{33.3}$$

Le ultime due delle (33.3) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$\begin{aligned}
 C_3 &= \frac{p_0L^2}{24EI_{11}} \\
 C_4 &= -\frac{p_0L}{12EI_{11}}
 \end{aligned} \tag{33.4}$$

sicchè gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0x_3^2(L-x_3)^2}{24EI_{11}} \tag{33.5}$$

Conosciuti gli spostamenti, si possono facilmente ricavare rotazioni, momenti e tagli:

$$\begin{aligned}
 \phi(x_3) &= -\frac{p_0x_3}{12EI_{11}}(L^2 - 3Lx_3 + 2x_3^2) \\
 M_1(x_3) &= -\frac{p_0}{12}(L^2 - 6Lx_3 + 6x_3^2) \\
 T_2(x_3) &= \frac{p_0}{2}(L - 2x_3)
 \end{aligned} \tag{33.6}$$

Si noti che il taglio varia con legge lineare, e, per la simmetria geometrica e di carico dello schema, si annulla in mezzeria ed assume valori uguali ed opposti agli estremi, mentre il momento varia con legge parabolica, assumendo valori uguali agli estremi ed attingendo il suo massimo in mezzeria. Sarà:

$$\begin{aligned}
 T_2(0) &= p_0 \frac{L}{2} \\
 T_2(L) &= -p_0 \frac{L}{2} \\
 M_1(0) = M_1(L) &= -p_0 \frac{L^2}{12}
 \end{aligned} \tag{33.7}$$

mentre in mezzeria si ha:

$$M_1\left(\frac{L}{2}\right) = p_0 \frac{L^2}{24} \tag{33.8}$$

I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 33.2. Dal loro esame possono trarsi alcune conclusioni di carattere generale, che spesso possono aiutare sia nel tracciamento approssimato dei grafici, sia nel controllo di eventuali errori. Si noti allora:

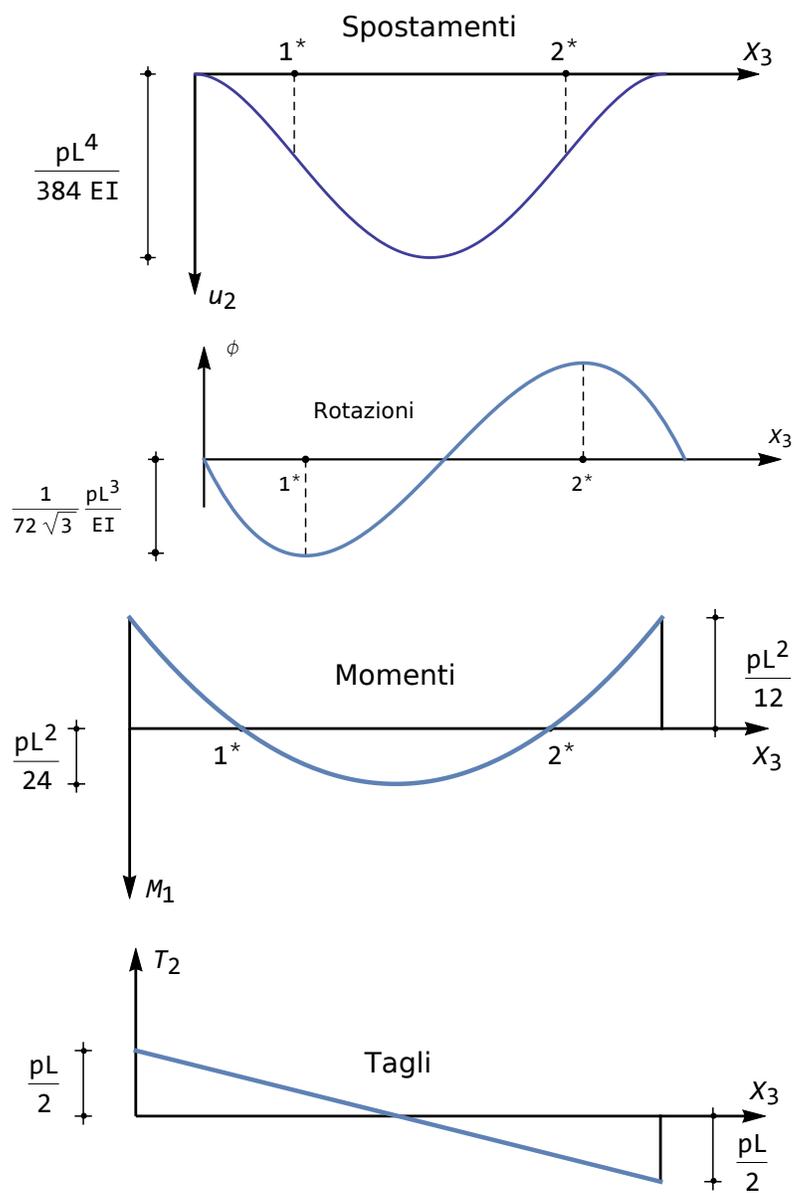


Figura 33.2: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave doppiamente incastrata

1. la relazione che lega momenti e tagli garantisce che il diagramma del taglio rappresenta la derivata del momento flettente. Ne segue che il taglio fornisce informazioni sulla pendenza del diagramma del momento, sicchè — ad esempio — dove il taglio si annulla il momento avrà pendenza orizzontale, attingendo un minimo, un massimo o un punto di flesso. Nella fattispecie, il taglio si annulla in mezzeria, dove il momento è massimo.
2. la relazione che lega rotazioni e spostamenti garantisce che il diagramma delle rotazioni rappresenta, a meno del segno, la derivata dell'abbassamento. Ne segue che le rotazioni forniscono informazioni sulla pendenza del diagramma dell'abbassamento, a somiglianza di quanto detto prima per la coppia taglio–momento flettente. Nella fattispecie, le rotazioni sono nulle in mezzeria, dove si verifica l'abbassamento massimo.
3. la relazione che lega momenti flettenti e rotazioni garantisce che il diagramma del momento è proporzionale alla derivata delle rotazioni. Ne segue che esso fornisce informazioni sulla pendenza del diagramma delle rotazioni. Se ad esempio si vuol conoscere le ascisse di rotazione massima e minima, occorre calcolare le ascisse dove il momento flettente viene ad annullarsi. Dalla (6) si ha:

$$L^2 - 6Lx_3 + 6x_3^2 = 0 \quad (33.9)$$

e quindi i momenti si annullano in  $1^*$  e  $2^*$ , di ascissa

$$\begin{aligned} x_3^{*1} &= \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) L \approx 0.211325L \\ x_3^{*2} &= \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) L \approx 0.788675L \end{aligned} \quad (33.10)$$

In corrispondenza di tali ascisse le rotazioni raggiungono i loro valori minimi e massimi, pari a:

$$\begin{aligned} \phi(x_3^{1*}) &= \phi_{min} = -\frac{1}{72\sqrt{3}} p_0 \frac{L^3}{EI} \\ \phi(x_3^{2*}) &= \phi_{max} = \frac{1}{72\sqrt{3}} p_0 \frac{L^3}{EI} \end{aligned} \quad (33.11)$$

4. la relazione che lega il momento all'abbassamento fornisce utili indicazioni sulla *curvatura* del diagramma degli abbassamenti. Ed infatti può notarsi che la curvatura cambia di segno in  $1^*$  e  $2^*$ .
5. Lo spostamento massimo è attinto in mezzeria, dove sono nulle le rotazioni, e vale:

$$u_{2\max} = u_2 \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{384} p_0 \frac{L^4}{EI} \quad (33.12)$$

6. Infine, è necessario che i diagrammi soddisfino le condizioni ai limiti. Nel caso in esame, ad esempio, nel diagramma delle rotazioni può controllarsi che esse si annullino agli estremi, mentre il diagramma degli spostamenti dovrà annullarsi agli estremi, e dovrà partire in questi punti con tangente orizzontale.

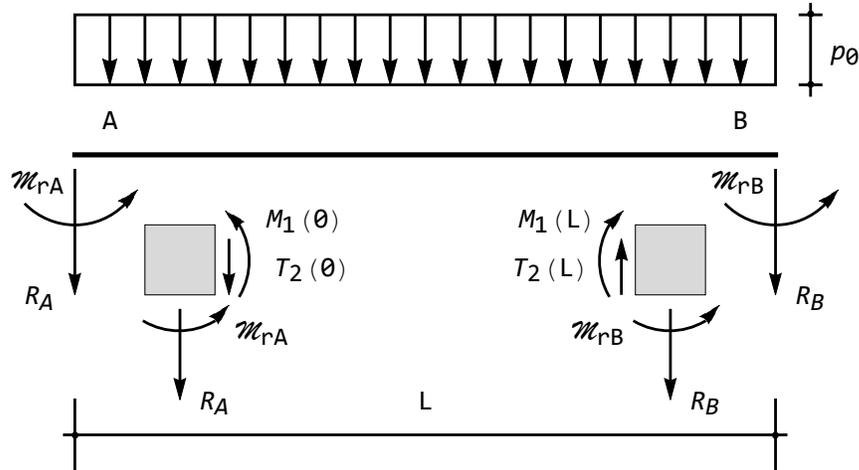


Figura 33.3: Le reazioni per la trave incastrata agli estremi

Come si è detto, la trave incastrata agli estremi è doppiamente iperstatica, e vano sarebbe il tentativo di calcolare le quattro reazioni vincolari attraverso le due equazioni di equilibrio della statica (cfr. Figura 33.3):

$$\begin{aligned} R_A + R_B + p_0 L &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + \mathcal{M}_{rB} + R_A L + p_0 \frac{L^2}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (33.13)$$

Le reazioni quindi dovranno ricavarsi dalla conoscenza delle c.s.i. agli estremi, come illustrato in Figura 33.3:

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2(0) = -p_0 \frac{L}{2} \\ \mathcal{M}_{rA} &= -M_1(0) = p_0 \frac{L^2}{12} \\ R_B &= T_2(L) = -p_0 \frac{L}{2} \\ \mathcal{M}_{rB} &= M_1(L) = -p_0 \frac{L^2}{12} \end{aligned} \quad (33.14)$$

Ne segue che le due reazioni verticali sono dirette verso l'alto, che la coppia reattiva a sinistra è antioraria, mentre la coppia reattiva a destra è oraria.

### 33.1.1 Una digressione storica : l'errore di Weisbach

Come riportato da Karl-Eugen Kurrer (*The History of the Theory of Structures*, Wiley 2009, pag.173), il primo ad utilizzare i diagrammi del momento per illustrarne la distribuzione lungo l'asse è stato Julius Weisbach nel suo trattato enciclopedico *Lehrbuch der Ingenieur-und Maschinen-Mechanik* (1845). Ad esempio, per la trave doppiamente incastrata, soggetta ad un carico uniformemente distribuito, viene riportata l'immagine qui riprodotta come Figura 33.4.

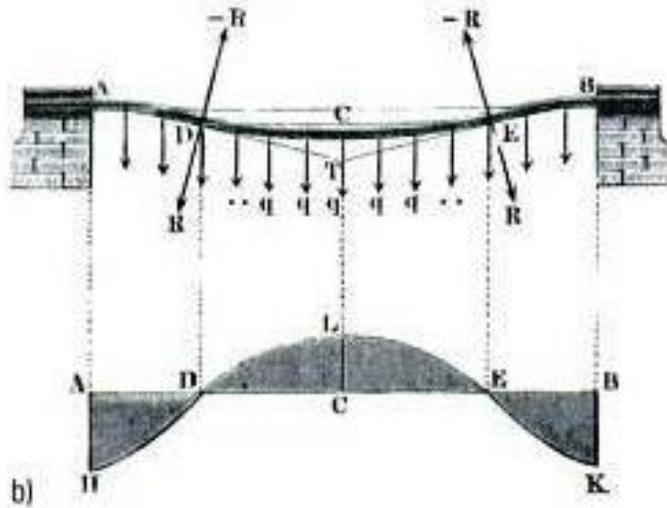


Figura 33.4: Il diagramma del momento flettente per trave doppiamente incastrata, secondo Weisbach

Nella parte superiore della Figura, è schematizzata la deformata della trave, e sono ben evidenziati i due punti di flesso in  $D$  ed  $E$ . Nel diagramma inferiore è riportato il diagramma del momento flettente (con l'asse verticale diretto verso l'alto), con i due punti di nullo in  $D$  ed  $E$ : la correlazione tra il diagramma del momento flettente, e la curvatura del diagramma dello spostamento è quindi correttamente osservata.

Tuttavia, il diagramma del momento non è corretto, in quanto nei punti  $D$  ed  $E$  il momento non cambia curvatura, come invece implicito nel disegno di Weisbach. In realtà, la relazione tra momento e carico distribuito:

$$\frac{d^2 M_1}{dx_3^2} = -p \quad (33.15)$$

implica, in questo caso, una curvatura costante del diagramma del momento.

### 33.2 La trave appoggiata agli estremi

Per una trave i cui due estremi sono impediti di muoversi, ma possono ruotare, come riportato in Figura 33.5, occorrerà che sia:

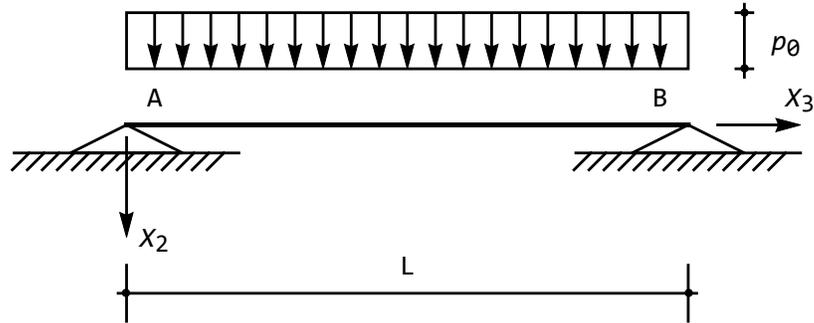


Figura 33.5: La trave semplicemente appoggiata

$$\begin{aligned}
 u_2(0) = 0 &\longrightarrow C_1 = 0 \\
 M_1(0) = 0 &\longrightarrow u_2''(0) = 0 \longrightarrow 2C_3 = 0 \\
 u_2(L) = 0 &\longrightarrow C_1 + C_2L + C_3L^2 + C_4L^3 + p_0 \frac{L^4}{24EI_{11}} = 0 \\
 M_1(L) = 0 &\longrightarrow u_2''(L) = 0 \longrightarrow 2C_3 + 6C_4L + p_0 \frac{L^2}{2EI_{11}} = 0
 \end{aligned} \tag{33.16}$$

Le ultime due delle (33.16) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{p_0 L^3}{24EI_{11}} \\
 C_4 &= -\frac{p_0 L}{12EI_{11}}
 \end{aligned} \tag{33.17}$$

sicchè gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0 x_3}{24EI_{11}} (L^3 - 2Lx_3^2 + x_3^3) \tag{33.18}$$

Conosciuti gli spostamenti, si possono facilmente ricavare rotazioni, momenti e tagli:

$$\begin{aligned}
 \phi(x_3) &= -\frac{p_0}{24EI_{11}} (L^3 - 6Lx_3^2 + 4x_3^3) \\
 M_1(x_3) &= \frac{p_0}{2} (L - x_3) x_3 \\
 T_2(x_3) &= \frac{p_0}{2} (L - 2x_3)
 \end{aligned} \tag{33.19}$$

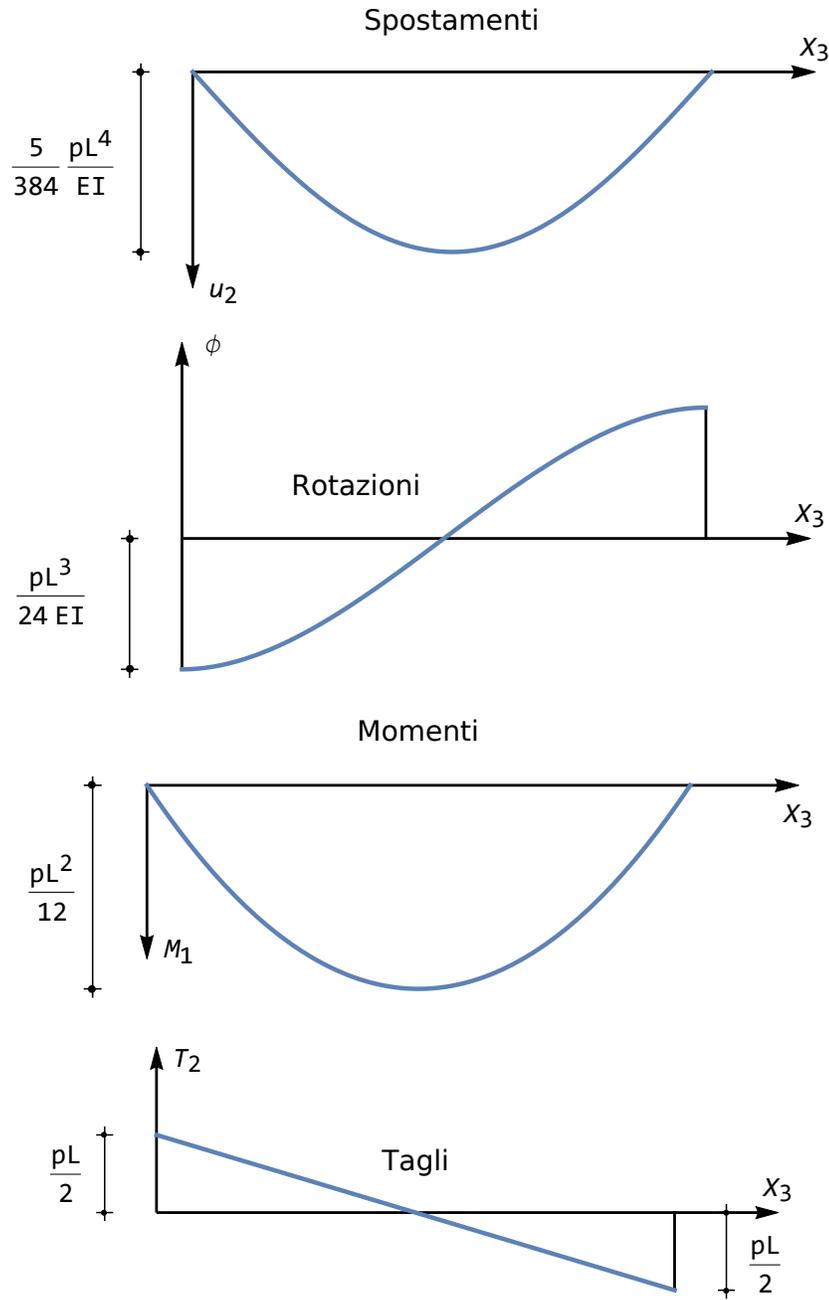


Figura 33.6: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave doppiamente appoggiata

Si noti che il taglio varia con la stessa legge lineare della trave doppiamente incastrata, mentre il momento varia con legge parabolica, assumendo valori nulli agli estremi. Ciò basta per garantire che il diagramma delle rotazioni partirà, nei due estremi, con tangente orizzontale, come riportato in Figura 33.6, dove sono anche definiti alcuni valori significativi:

$$\begin{aligned}\phi_{\min} &= \phi(0) = -\frac{1}{24} \frac{p_0 L^3}{EI} \\ \phi_{\max} &= \phi(L) = \frac{1}{24} \frac{p_0 L^3}{EI}\end{aligned}\tag{33.20}$$

mentre in mezzeria si hanno i valori massimi di momenti e spostamenti:

$$\begin{aligned}M_{1\max} &= M\left(\frac{L}{2}\right) = p_0 \frac{L^2}{8} \\ u_{2\max} &= u_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384} p_0 \frac{L^4}{EI}\end{aligned}\tag{33.21}$$

Nota - Rispetto alla trave doppiamente incastrata, il momento in mezzeria è triplicato, e l'abbassamento massimo è quintuplicato.

Le due reazioni verticali degli appoggi possono calcolarsi — stante l'isostaticità della struttura — attraverso la scrittura delle due equazioni di equilibrio della statica:

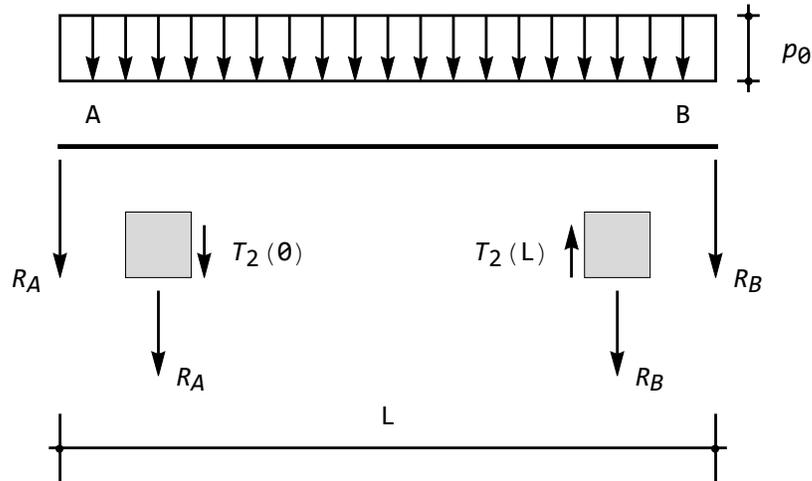


Figura 33.7: Le reazioni per la trave appoggiata agli estremi

$$\begin{aligned}R_A + R_B + p_0 L &= 0 \\ R_A L + p_0 \frac{L^2}{2} &= 0\end{aligned}\tag{33.22}$$

da cui:

$$R_A = R_B = -p_0 \frac{L}{2} \quad (33.23)$$

Alternativamente, si può leggere dallo schema di Figura 33.7:

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2(0) = -p_0 \frac{L}{2} \\ R_B &= T_2(L) = -p_0 \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (33.24)$$

E' interessante osservare che nel caso di strutture isostatiche è spesso possibile ottenere i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione interna, senza dover risolvere il problema ai limiti. Ed infatti, in questo caso si conoscono le reazioni, attraverso le (33.22), da cui possono ricavarsi i tagli agli estremi, e poichè l'andamento del diagramma è lineare, non resta che congiungere i due valori di  $T_2(0)$  e di  $T_2(L)$ . Inoltre, il diagramma del momento ha andamento parabolico, e quindi per il suo tracciamento basta conoscere il valore in due punti (agli estremi, dove esso è nullo) e la pendenza in mezzeria (nulla, perchè nullo è il taglio in mezzeria).

### 33.3 La trave a mensola

Si consideri ora una trave il cui estremo sinistro sia incastrato, mentre il destro sia libero, soggetta al solito carico uniformemente distribuito su tutta la luce (cfr. Figura 33.8). A sinistra occorre quindi imporre le due condizioni di congruenza, annullando spostamenti e rotazioni, mentre nell'estremo libero dovranno essere soddisfatte le condizioni di equilibrio che annullano le caratteristiche delle sollecitazione interna. Sarà allora:

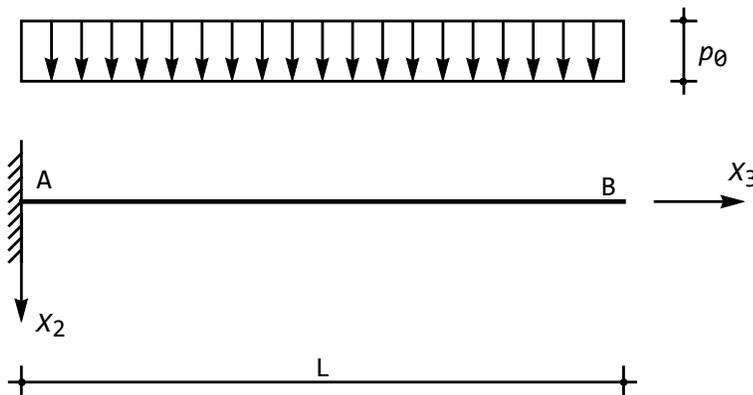


Figura 33.8: La trave a mensola

$$\begin{aligned}
u_2(0) = 0 &\longrightarrow C_1 = 0 \\
u_2'(0) = 0 &\longrightarrow C_2 = 0 \\
M_1(L) = 0 &\longrightarrow u_2''(L) = 0 \longrightarrow 2C_3 + 6C_4L + p_0 \frac{L^2}{2EI_{11}} = 0 \\
T_2(L) = 0 &\longrightarrow u_2'''(L) = 0 \longrightarrow 6C_4 + p_0 \frac{L}{EI_{11}} = 0
\end{aligned} \tag{33.25}$$

Le ultime due delle (33.25) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$\begin{aligned}
C_3 &= p_0 \frac{L^2}{4EI_{11}} \\
C_4 &= -p_0 \frac{L}{6EI_{11}}
\end{aligned} \tag{33.26}$$

sicchè gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0 x_3^2}{24EI_{11}} (6L^2 - 4Lx_3 + x_3^3) \tag{33.27}$$

da cui, per derivazioni successive:

$$\begin{aligned}
\phi(x_3) &= -\frac{p_0 x_3}{6EI_{11}} (3L^2 - 3Lx_3 + x_3^2) \\
M_1(x_3) &= -\frac{p_0}{2} (L - x_3)^2 \\
T_2(x_3) &= p_0 (L - x_3)
\end{aligned} \tag{33.28}$$

I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 33.9.

Partendo dal diagramma del taglio, esso è lineare, si annulla in corrispondenza dell'estremo libero (quarta condizione ai limiti), ed ha pendenza pari a  $-p_0$ . Ne segue univocamente il diagramma di Figura.

Il diagramma del momento flettente è parabolico, si annulla nell'estremo libero (terza condizione ai limiti), e in questo stesso estremo presenta una tangente orizzontale. Le rotazioni, invece, sono nulle nell'incastro (seconda condizione ai limiti), ed assumono il loro valore massimo nell'estremo libero, dove il diagramma presenta una tangente orizzontale, dovuta all'annullarsi del momento in tale punto. Infine, gli spostamenti sono nulli nell'incastro, ed il relativo diagramma parte con tangente orizzontale, fino ad arrivare ad un valore massimo all'estremo libero.

I valori significativi per le caratteristiche della sollecitazione interna si raggiungono in corrispondenza dell'incastro:

$$\begin{aligned}
M_{1min} = M_1(0) &= -\frac{p_0}{2} L^2 \\
T_{2max} = T_2(0) &= p_0 L
\end{aligned} \tag{33.29}$$

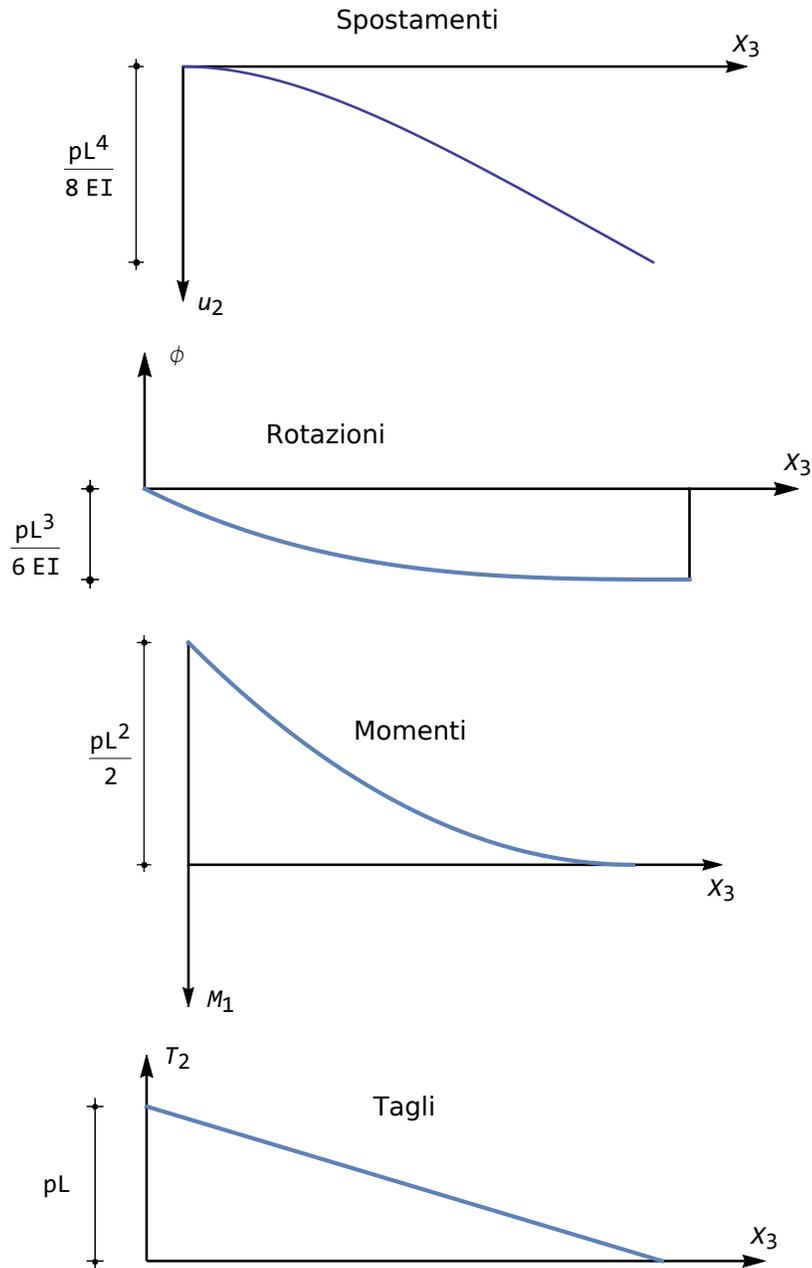


Figura 33.9: La trave a mensola soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

mentre rotazioni e spostamenti massimi si attingono nell'estremo libero:

$$\begin{aligned}\phi_{min} &= \phi(L) = -\frac{p_0 L^3}{6EI_{11}} \\ u_{2max} &= u_2(L) = \frac{p_0 L^4}{8EI_{11}}\end{aligned}\quad (33.30)$$

Anche la trave a mensola è isostatica, sicchè la reazione e la coppia reattiva dell'incastro possono calcolarsi dalle due equazioni di equilibrio della statica, come evidente dalla Figura 33.10:

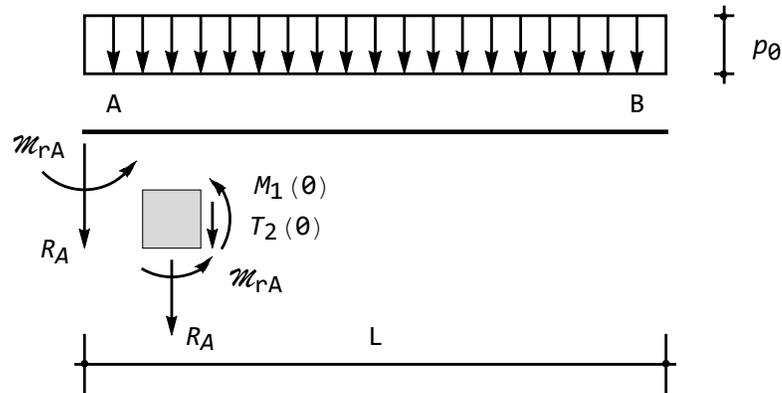


Figura 33.10: Le reazioni per la trave a mensola

$$\begin{aligned}R_A + p_0 L &= 0 \longrightarrow R_A = -p_0 L \\ \mathcal{M}_{rA} + R_A L + p_0 \frac{L^2}{2} &= 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{rA} = p_0 \frac{L^2}{2}\end{aligned}\quad (33.31)$$

Alternativamente, esse possono calcolarsi dall'equilibrio del concio elementare, e come sempre sono uguali e contrarie alle corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna.

## La trave incastrata–appoggiata

Si consideri ora una trave il cui estremo sinistro sia incastrato, mentre il destro sia appoggiato, soggetta al solito carico uniformemente distribuito su tutta la luce (cfr. Figura 33.11). A sinistra occorre quindi imporre le due condizioni di congruenza, annullando spostamenti e rotazioni, mentre nell'appoggio di destra alla condizione di congruenza, che annulla lo spostamento, occorre affiancare la condizione di equilibrio, secondo cui dovrà essere nullo il momento flettente.

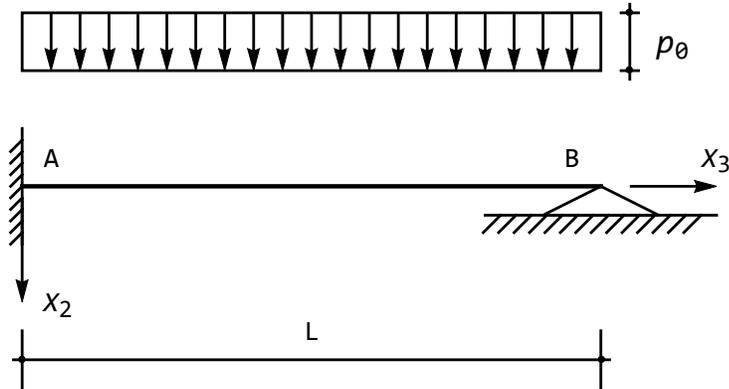


Figura 33.11: La trave incastrata-appoggiata

Sarà allora:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \longrightarrow C_1 = 0 \\
 u_2'(0) &= 0 \longrightarrow C_2 = 0 \\
 u_2(L) &= 0 \longrightarrow C_1 + C_2L + C_3L^2 + C_4L^3 + p_0 \frac{L^4}{24EI_{11}} = 0 \\
 M_1(L) &= 0 \longrightarrow u_2''(L) = 0 \longrightarrow 2C_3 + 6C_4L + p_0 \frac{L^2}{2EI_{11}} = 0
 \end{aligned} \tag{33.32}$$

Le ultime due delle (33.32) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$\begin{aligned}
 C_3 &= p_0 \frac{L^2}{16EI_{11}} \\
 C_4 &= -\frac{5}{48} p_0 \frac{L}{EI_{11}}
 \end{aligned} \tag{33.33}$$

sicchè gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0}{48EI_{11}} x_3^2 (3L^2 - 5Lx_3 + 2x_3^2) \tag{33.34}$$

da cui, per derivazioni successive:

$$\begin{aligned}
 \phi(x_3) &= -\frac{p_0}{48EI_{11}} x_3 (6L^2 - 15Lx_3 + 8x_3^2) \\
 M_1(x_3) &= -\frac{p_0}{8} (L^2 - 5Lx_3 + 4x_3^2) \\
 T_2(x_3) &= p_0 \left( \frac{5}{8}L - x_3 \right)
 \end{aligned} \tag{33.35}$$

I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 33.12. Il diagramma del taglio è — come sempre finora — lineare, si

annulla in corrispondenza dei  $5/8$  della luce, ed attinge i due valori estremi sull'appoggio e nell'incastro:

$$\begin{aligned} T_{2\max} &= T_2(0) = \frac{5}{8}p_0L \\ T_{2\min} &= T_2(L) = -\frac{3}{8}p_0L \end{aligned} \quad (33.36)$$

Il momento flettente varierà con legge parabolica, annullandosi sull'appoggio e ad  $1/4$  della luce. Inoltre esso raggiungerà il suo valore massimo laddove il taglio si annulla, ossia a  $5/8$  della luce, ed il suo valore minimo nell'incastro:

$$\begin{aligned} M_{1\min} &= M(0) = -\frac{p_0L^2}{8} \\ M_{1\max} &= M\left(\frac{5}{8}L\right) = \frac{9}{128}p_0L^2 \end{aligned} \quad (33.37)$$

Le rotazioni si annulleranno di sicuro in corrispondenza dell'incastro, e sicuramente presenteranno una tangente orizzontale sull'appoggio, dove il momento è nullo. Inoltre raggiungeranno un altro valore estremo (di minimo) ad  $1/4$  della luce, in corrispondenza dell'altro punto di nullo del momento. Infine, la curvatura del diagramma, proporzionale alla derivata seconda della funzione — ossia proporzionale al taglio — si annullerà ai  $5/8$  della luce. I valori massimi e minimi sono forniti da:

$$\begin{aligned} \phi_{\min} &= \phi\left(\frac{L}{4}\right) = -\frac{11}{768}p_0\frac{L^3}{EI_{11}} \\ \phi_{\max} &= \phi(L) = p_0\frac{L^3}{48EI_{11}} \end{aligned} \quad (33.38)$$

L'ascissa della trave in cui le rotazioni si annullano può trovarsi risolvendo l'equazione:

$$x_3(6L^2 - 15Lx_3 + 8x_3^2) = 0 \quad (33.39)$$

ed ottenendo quindi la soluzione  $x_3 = 0$ , corrispondente all'incastro, e le due soluzioni:

$$x_3^{1,2} = \frac{L}{16}(15 \pm \sqrt{33}) \quad (33.40)$$

La soluzione col segno positivo ricade al di fuori dell'intervallo  $[0, L]$ , e quindi non ha significato fisico, mentre la soluzione col segno negativo identifica una ascissa  $\alpha L$ , con  $\alpha \approx 0.578$ .

Per tracciare il diagramma degli abbassamenti si hanno i seguenti dati: esso deve annullarsi agli estremi, e nell'incastro deve avere tangente orizzontale. Inoltre, deve avere tangente orizzontale in corrispondenza dell'ascissa  $\alpha L$ , e la sua curvatura deve cambiare di segno ad  $1/4$  della luce, dove si annulla il momento flettente. L'abbassamento massimo si verifica in  $\alpha L$ , e vale:

$$u_{2\max} = u_2(\alpha L) = \gamma p_0 \frac{L^4}{EI_{11}} \quad (33.41)$$

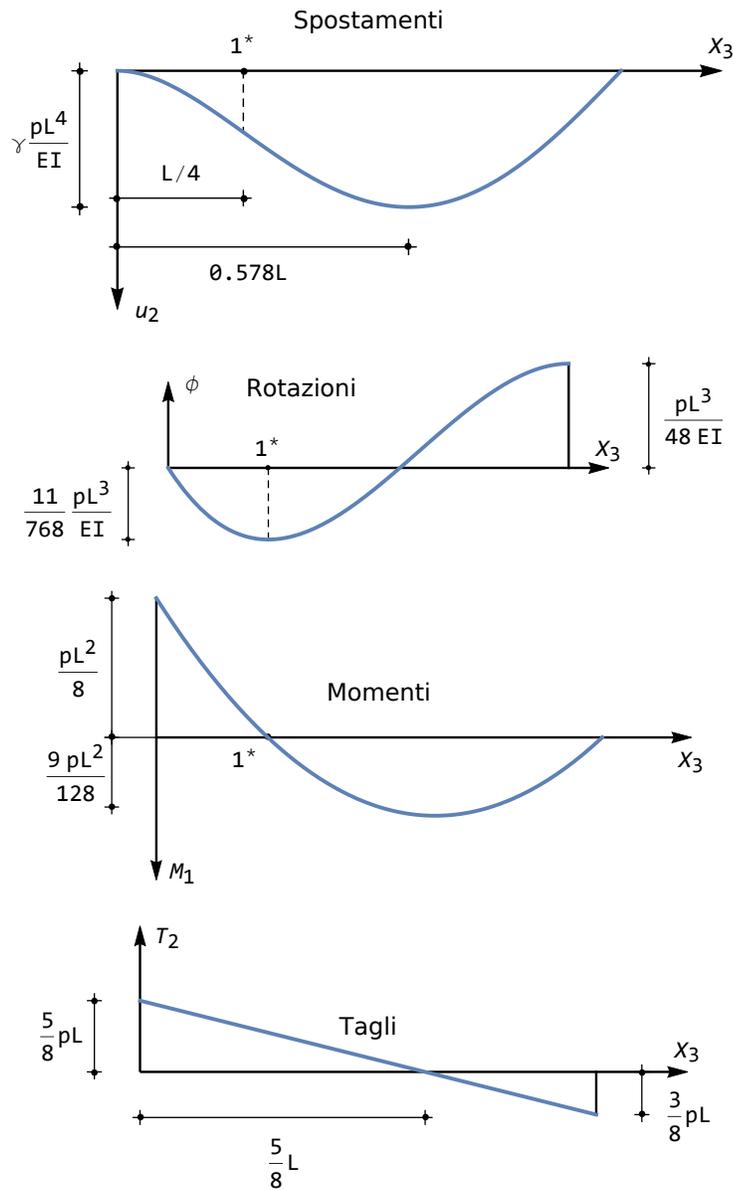


Figura 33.12: La trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

ed il coefficiente  $\gamma$  è valutabile come:

$$\gamma = \frac{39 + 55\sqrt{33}}{65536} \approx 0.00541612 \quad (33.42)$$

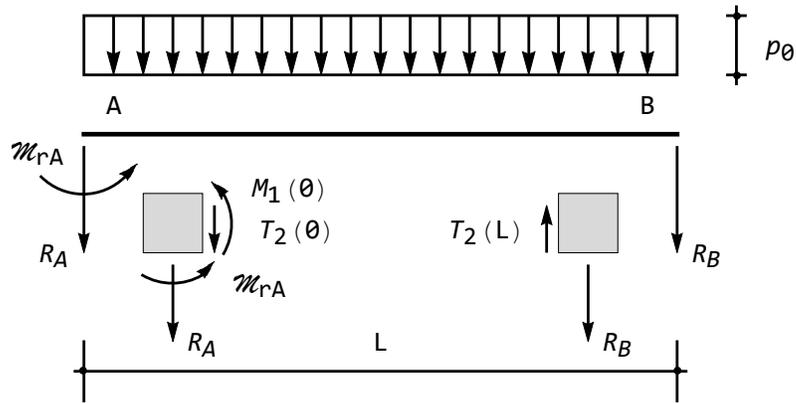


Figura 33.13: Le reazioni per la trave incastrata ed appoggiata

Le tre reazioni non possono calcolarsi in base alle sole equazioni della statica, poichè la trave è una volta iperstatica. Ne segue che esse dovranno dedursi *a posteriori*, in base ai valori delle caratteristiche della sollecitazione interna agli estremi, come illustrato in Figura 33.13.

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2(0) = -\frac{5}{8}p_0L \\ \mathcal{M}_{rA} &= -M_1(0) = \frac{p_0L^2}{8} \\ R_B &= T_2(L) = -\frac{3}{8}p_0L \end{aligned} \quad (33.43)$$

### 33.4 La trave con incastro e bipendolo

Si consideri ora una trave il cui estremo sinistro sia incastrato, mentre il destro sia libero di abbassarsi ma non di ruotare (bipendolo), soggetta al solito carico uniformemente distribuito su tutta la luce (cfr. Figura 33.14). A sinistra occorre quindi imporre le due condizioni di congruenza, annullando spostamenti e rotazioni, mentre nel bipendolo di destra alla condizione di congruenza, che annulla la rotazione, occorre affiancare la condizione di equilibrio, secondo cui

dovrà essere nullo lo sforzo di taglio. Sarà allora:

$$u_2(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$u_2'(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\phi(L) = 0 \rightarrow u_2'(L) = 0 \rightarrow C_2 + 2C_3L + 3C_4L^2 + p_0 \frac{L^3}{6EI_{11}} = 0 \quad (33.44)$$

$$T_2(L) = 0 \rightarrow u_2'''(L) = 0 \rightarrow 6C_4 + p_0 \frac{L}{EI_{11}} = 0$$

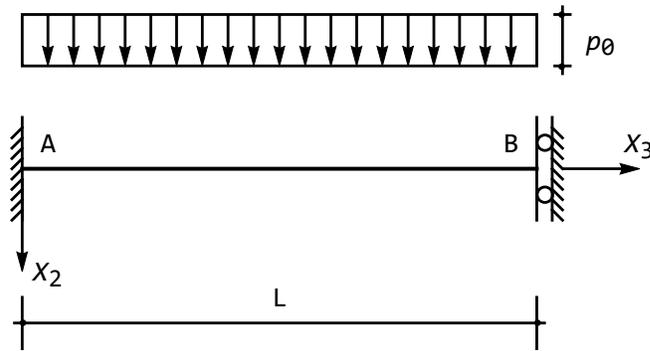


Figura 33.14: La trave con incastro e bipendolo

Le ultime due delle (33.44) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$C_3 = p_0 \frac{L^2}{6EI_{11}} \quad (33.45)$$

$$C_4 = -p_0 \frac{L}{6EI_{11}}$$

sicchè gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0}{24EI_{11}} x_3^2 (x_3 - 2L)^2 \quad (33.46)$$

da cui, per derivazioni successive:

$$\begin{aligned} \phi(x_3) &= -\frac{p_0}{6EI_{11}} x_3 (2L^2 - 3Lx_3 + x_3^2) \\ M_1(x_3) &= -\frac{p_0}{6} (2L^2 - 6Lx_3 + 3x_3^2) \\ T_2(x_3) &= p_0 (L - x_3) \end{aligned} \quad (33.47)$$

I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 33.15. Il diagramma del taglio è — come sempre finora — lineare, si annulla in corrispondenza del bipendolo, ed avendo pendenza pari a  $-p_0$  attinge

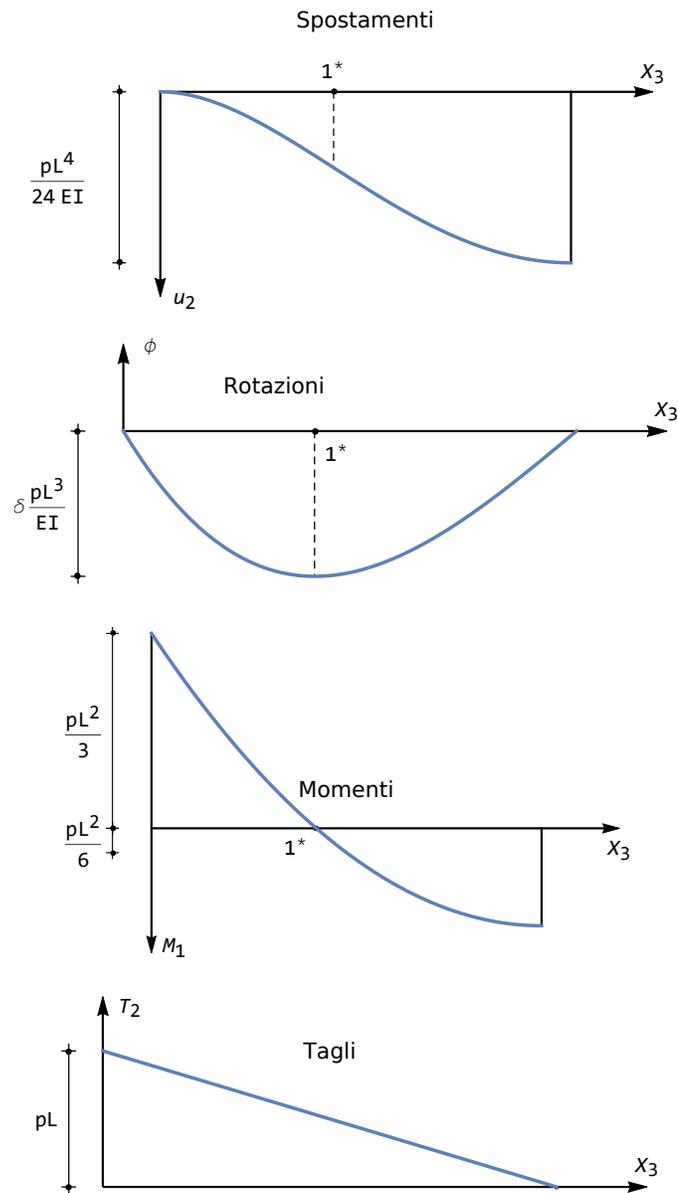


Figura 33.15: La trave con incastro a sinistra e con bipendolo a destra, soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

il valore  $-p_0L$  nell'incastro. Il momento flettente varierà con legge parabolica, giungendo sul bipendolo con tangente orizzontale. I valori estremi si verificano in corrispondenza dei vincoli, e valgono:

$$\begin{aligned} M_{1min} &= M_1(0) = -\frac{p_0L^2}{3} \\ M_{1max} &= M_1(L) = \frac{p_0L^2}{6} \end{aligned} \quad (33.48)$$

Infine, esso si annulla nel punto  $1^*$  di ascissa  $L - \frac{L}{\sqrt{3}} \approx 0.422L$ . Le rotazioni si annulleranno di sicuro in corrispondenza dell'incastro e del bipendolo, e sicuramente presenteranno una tangente orizzontale in  $1^*$ , dove i momenti sono nulli. In tale punto si avrà il valore massimo, pari a:

$$\phi_{min} = \phi(1^*) = -\frac{1}{9\sqrt{3}}p_0 \frac{L^3}{EI_{11}} = \delta p_0 \frac{L^3}{EI_{11}} \quad (33.49)$$

Il diagramma delle rotazioni non presenta punti di nullo interni all'intervallo  $[0, L]$ , e di conseguenza il diagramma degli abbassamenti non avrà punti di estremo. Comunque, l'abbassamento sarà nullo nell'incastro, ed il diagramma avrà tangente orizzontale nel bipendolo. Infine, la curvatura sarà nulla in  $1^*$ . L'abbassamento massimo si avrà nel bipendolo, e vale:

$$u_{2max} = u_2(L) = p_0 \frac{L^4}{24EI_{11}} \quad (33.50)$$

Anche in questo le tre reazioni non possono calcolarsi in base alle sole equazioni

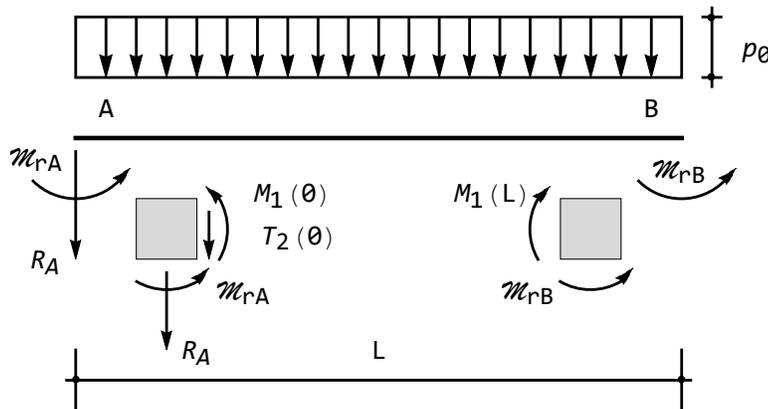


Figura 33.16: Le reazioni per la trave con incastro e bipendolo

della statica, poichè la trave è una volta iperstatica. Ne segue che esse dovranno

dedursi *a posteriori*, in base ai valori delle caratteristiche della sollecitazione interna agli estremi, come riportato in Figura 33.16:

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2(0) = -p_0L \\ \mathcal{M}_{rA} &= -M_1(0) = p_0\frac{L^2}{3} \\ \mathcal{M}_{rB} &= M_1(L) = p_0\frac{L^2}{6} \end{aligned} \quad (33.51)$$

### 33.5 La trave con appoggio e bipendolo

Concludiamo questa rassegna con il caso più semplice, in cui la trave è semplicemente appoggiata a sinistra, mentre l'estremo di destra è vincolato con un bipendolo (cfr. Figura 33.17). La risultante struttura è isostatica, e le due reazioni possono calcolarsi in base alle due equazioni della statica, così come indicato in Figura 33.18:

$$\begin{aligned} R_A + p_0L &= 0 \longrightarrow R_A = -p_0L \\ -p_0\frac{L^2}{2} + \mathcal{M}_{rB} &= 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{rB} = p_0\frac{L^2}{2} \end{aligned} \quad (33.52)$$

Si noti che la seconda equazione esprime l'equilibrio alla rotazione intorno al punto  $A$ .

Il diagramma del taglio segue immediatamente, in quanto se ne conosce l'andamento (lineare) e due valori, in corrispondenza dell'appoggio, dove sarà  $T_2(0) = -R_A = p_0L$ , ed in corrispondenza del bipendolo, dove  $T_2(L) = 0$ . Sarà quindi:

$$T_2(x_3) = p_0(L - x_3) \quad (33.53)$$

Il diagramma del momento è altrettanto semplice, in quanto si conosce il suo valore a sinistra  $M_1(0) = 0$  e a destra  $M_1(L) = \mathcal{M}_{rB} = p_0\frac{L^2}{2}$ , ed inoltre esso avrà tangente orizzontale in corrispondenza del bipendolo. Assegnato un generico andamento quadratico:

$$M_1(x_3) = a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 \quad (33.54)$$

le tre condizioni suddette permettono il calcolo delle tre costanti:

$$\begin{aligned} M_1(0) &= 0 \longrightarrow a_0 = 0 \\ M_1(L) &= p_0\frac{L^2}{2} \longrightarrow a_0 + a_1L + a_2L^2 = p_0\frac{L^2}{2} \\ \frac{dM_1}{dx_3}(L) &= 0 \longrightarrow a_1 + 2a_2L = 0 \end{aligned} \quad (33.55)$$

Ne segue:

$$M_1(x_3) = p_0Lx_3 - \frac{p_0}{2}x_3^2 = p_0x_3\left(L - \frac{x_3}{2}\right) \quad (33.56)$$

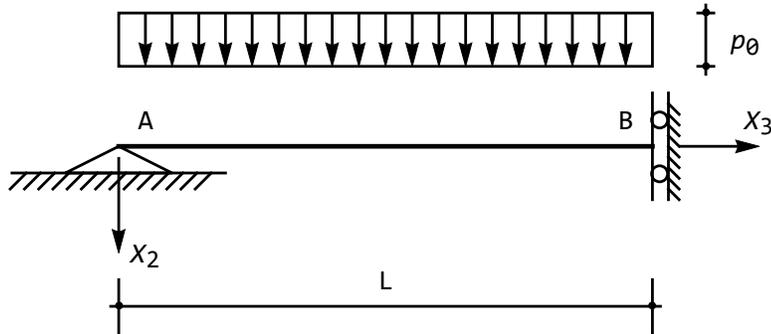


Figura 33.17: La trave con appoggio e bipendolo

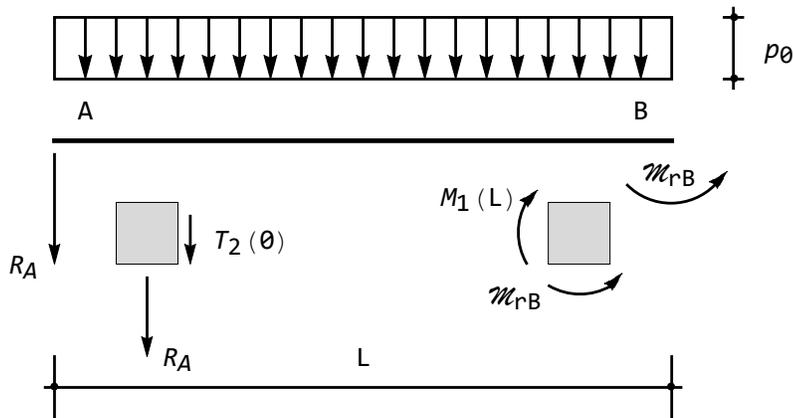


Figura 33.18: Le reazioni per la trave con appoggio e bipendolo

Per conoscere il diagramma delle rotazioni, si può utilizzare la relazione:

$$\phi'(x_3) = \frac{M_1(x_3)}{EI_{11}} \quad (33.57)$$

che integrata fornisce:

$$\phi(x_3) = \frac{p_0}{EI_{11}} \left( \frac{x_3^2}{2} L - \frac{x_3^3}{6} \right) + c_0 \quad (33.58)$$

La costante di integrazione  $c_0$  può calcolarsi imponendo che la rotazione sia nulla in corrispondenza del bipendolo:

$$\phi(L) = \frac{p_0 L^3}{3EI_{11}} + c_0 = 0 \longrightarrow c_0 = -\frac{p_0 L^3}{3EI_{11}} \quad (33.59)$$

Infine, le rotazioni sono fornite da:

$$\phi(x_3) = \frac{p_0}{EI_{11}} \left( \frac{x_3^2}{2} L - \frac{x_3^3}{6} - \frac{L^3}{3} \right) \quad (33.60)$$

Gli abbassamenti si deducono dalla relazione:

$$u_2'(x_3) = -\phi(x_3) \quad (33.61)$$

che conduce, utilizzando la (33.60), a:

$$u_2(x_3) = -\frac{p_0}{EI_{11}} \left( \frac{x_3^3}{6} L - \frac{x_3^4}{24} - \frac{L^3 x_3}{3} \right) + c_0 \quad (33.62)$$

In questo caso, la costante di integrazione  $c_0$  si annulla, in quanto occorre imporre che l'abbassamento sia nullo sull'appoggio, ossia in  $x_3 = 0$ . I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 33.19, dove sono anche indicati alcuni valori notevoli.

Si confermi attraverso la via usuale quanto ottenuto in questa sezione.

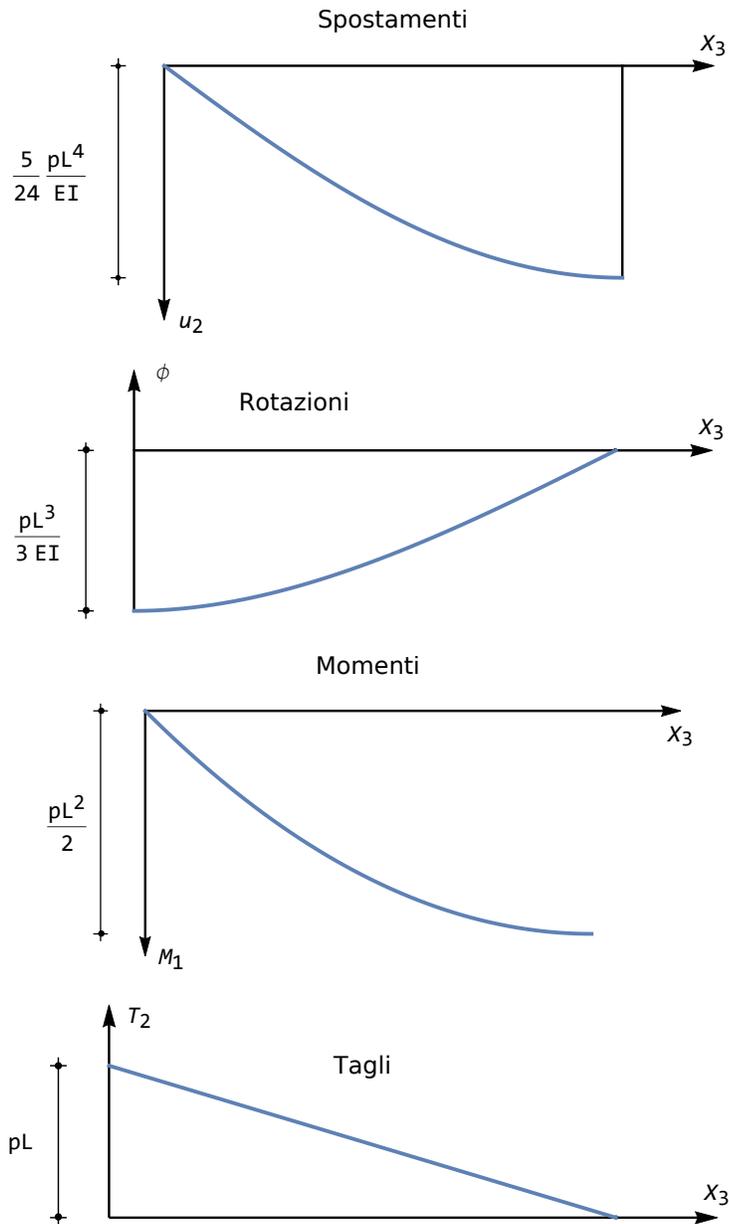


Figura 33.19: La trave con appoggio a sinistra e con bipendolo a destra, soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli



## Capitolo 34

# Ancora sulle travi ad una campata

In questo Capitolo si studiano le travi ad una sola campata con i più comuni tipi di vincolo e soggetti ai più comuni tipi di carico concentrato.

### 34.1 Introduzione

Si consideri una trave soggetta al carico distribuito  $p_0(x_3)$ , alla forza  $F_s$  ed alla coppia  $\mathcal{M}_s$  agenti ambedue all'estremo di sinistra, ed alla forza  $F_d$  ed alla coppia  $\mathcal{M}_d$  agenti ambedue all'estremo di destra, come illustrato in Figura 34.1.

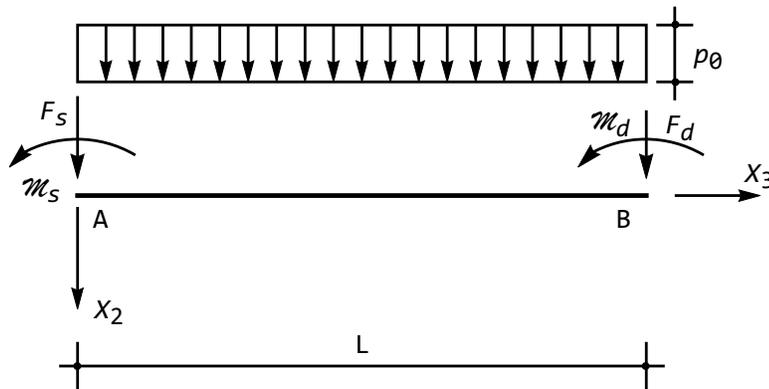


Figura 34.1: La trave ad una campata soggetta a carichi concentrati agli estremi

L'energia potenziale totale di questa trave è pari alla somma dell'energia elastica, che per le travi di Eulero–Bernoulli si riduce alla sola aliquota

flessionale:

$$L_f = \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} u_2''^2(x_3) dx_3 \quad (34.1)$$

e dell'energia potenziale dei carichi applicati, uguale e contraria al lavoro da essi svolto:

$$P = - \int_0^L p_0(x_3) u_2(x_3) dx_3 - F_s u_2(0) - F_d u_2(L) - \mathcal{M}_s \phi(0) - \mathcal{M}_d \phi(L) \quad (34.2)$$

Per il principio di stazionarietà, dovrà essere:

$$\begin{aligned} \delta_1 E_t &= \int_0^L EI_{11} u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p_0 \delta u_2 dx_3 \\ &\quad - F_s \delta u_2(0) - F_d \delta u_2(L) + \mathcal{M}_s \delta u_2'(0) + \mathcal{M}_d \delta u_2'(L) = 0 \end{aligned} \quad (34.3)$$

Integrando due volte per parti il primo integrale, si ha l'usuale equazione differenziale della linea elastica, con le relative condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} (-EI_{11} u_2''(0) + \mathcal{M}_s) \delta u_2'(0) = 0 &\longrightarrow (M_1(0) + \mathcal{M}_s) \delta u_2'(0) = 0 \\ (EI_{11} u_2''(L) + \mathcal{M}_d) \delta u_2'(L) = 0 &\longrightarrow (-M_1(L) + \mathcal{M}_d) \delta u_2'(L) = 0 \end{aligned} \quad (34.4)$$

$$\begin{aligned} (EI_{11} u_2'''(0) - F_s) \delta u_2(0) = 0 &\longrightarrow (T_2(0) + F_s) \delta u_2(0) = 0 \\ (-EI_{11} u_2'''(L) - F_d) \delta u_2(L) = 0 &\longrightarrow (T_2(L) - F_d) \delta u_2(L) = 0 \end{aligned} \quad (34.5)$$

In un estremo incastrato, le due condizioni di congruenza, che annullano spostamenti e rotazioni, restano inalterate, e d'altro canto l'eventuale presenza di forze o coppie concentrate verrebbe bilanciata dalle reazioni vincolari.

In un estremo appoggiato, invece, la condizione di congruenza che vieta l'abbassamento resta inalterata, mentre la condizione di equilibrio non esprimerà più l'annullarsi del momento flettente, bensì, dalle (34.4). Per un appoggio di sinistra il momento sarà pari alla coppia applicata, cambiata di segno, mentre in un appoggio di destra il momento verrà a coincidere con la coppia applicata anche in segno.

Analogamente, in un bipendolo andrà modificata la condizione di equilibrio, che non vedrà più l'annullarsi del taglio. Dalle (34.5) si trae che per un bipendolo di sinistra il taglio sarà pari alla forza applicata, cambiata di segno, mentre in un bipendolo di destra il taglio verrà a coincidere con la forza applicata anche in segno.

In corrispondenza di un appoggio, una eventuale forza verticale verrebbe assorbita dalla reazione dell'appoggio, mentre una coppia agente in un bipendolo viene assorbita dalla coppia reattiva. Infine, in un estremo libero ambedue le condizioni di equilibrio vanno modificate in base alle (34.4–34.5), per cui a sinistra le caratteristiche sono uguali alle corrispondenti forze applicate, ma cambiate di segno, mentre a destra si ha concordanza di segno.

In definitiva, gli unici casi significativi di forze concentrate in corrispondenza dei vincoli sono:

1. trave a mensola soggetta a forza nell'estremo libero
2. trave a mensola soggetta a coppia nell'estremo libero
3. trave con incastro–appoggio soggetta a coppia sull'appoggio
4. trave con incastro–bipendolo soggetta a forza sul bipendolo
5. trave appoggiata con coppia sull'appoggio
6. trave con appoggio–bipendolo con forza sul bipendolo

## 34.2 La trave a mensola

Si abbia una trave a mensola, ossia incastrata a sinistra e libera a destra, soggetta ad una forza  $F$  nell'estremo libero (cfr. Figura 34.2). In assenza di carico distribuito, l'equazione differenziale sarà omogenea:

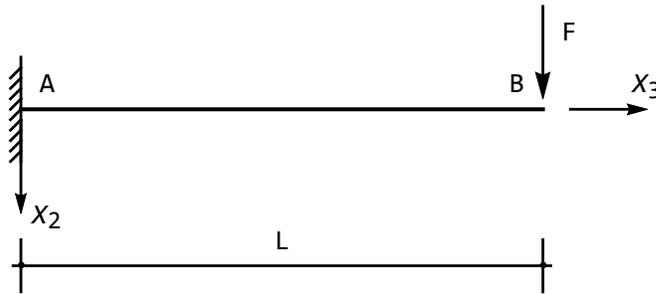


Figura 34.2: La trave a mensola soggetta a forza nell'estremo libero

$$EI_{11}u_2'''' = 0 \quad (34.6)$$

con soluzione:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 \quad (34.7)$$

Ne segue immediatamente che in questo caso, ed in tutti i casi in cui sono assenti carichi distribuiti, lo spostamento varia secondo un polinomio cubico, e conseguentemente la rotazione varierà con legge quadratica, il momento sarà una funzione lineare, ed il taglio sarà costante.

Le condizioni ai limiti possono trarsi dalle (34.4–34.5). Alternativamente, possono fissarsi *a priori* le condizioni di congruenza, ossia l'annullarsi dello spostamento e della rotazione nell'incastro, e dedurre *a posteriori* le altre due condizioni nell'estremo libero, equilibrando il concio elementare all'ascissa  $x_3 = L$ . Si ha, come può dedursi dalla Figura 34.3:

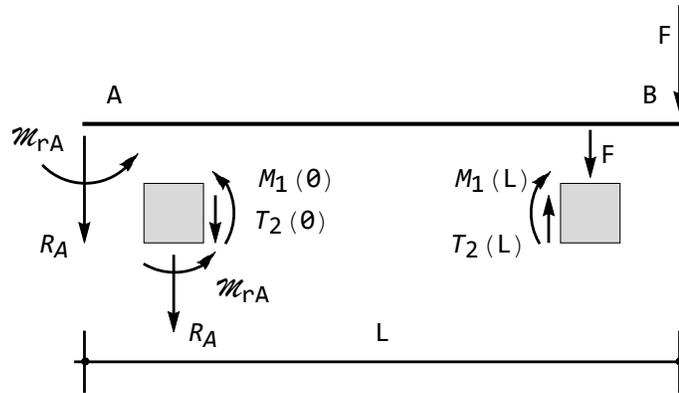


Figura 34.3: Lo schema per la scrittura geometrica delle condizioni ai limiti

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 \phi(0) &= 0 \longrightarrow u_2'(0) = 0 \\
 M_1(L) &= 0 \longrightarrow EI_{11}u_2''(L) = 0 \\
 -T_2(L) + F &= 0 \longrightarrow EI_{11}u_2'''(L) + F = 0
 \end{aligned} \tag{34.8}$$

Queste quattro condizioni possono tramutarsi in un sistema di quattro equazioni algebriche e lineari nelle quattro costanti di integrazione, che quindi possono essere calcolate come:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_2 = 0 \\
 C_3 &= \frac{FL}{2EI_{11}} \\
 C_4 &= -\frac{F}{6EI_{11}}
 \end{aligned} \tag{34.9}$$

La linea elastica sarà quindi fornita da:

$$u_2(x_3) = \frac{Fx_3^2}{EI_{11}} \left( \frac{L}{2} - \frac{x_3}{6} \right) \tag{34.10}$$

e, conseguentemente:

$$\begin{aligned}
 \phi(x_3) &= \frac{Fx_3}{EI_{11}} \left( \frac{x_3}{2} - L \right) \\
 M_1(x_3) &= F(x_3 - L) \\
 T_2(x_3) &= F
 \end{aligned} \tag{34.11}$$

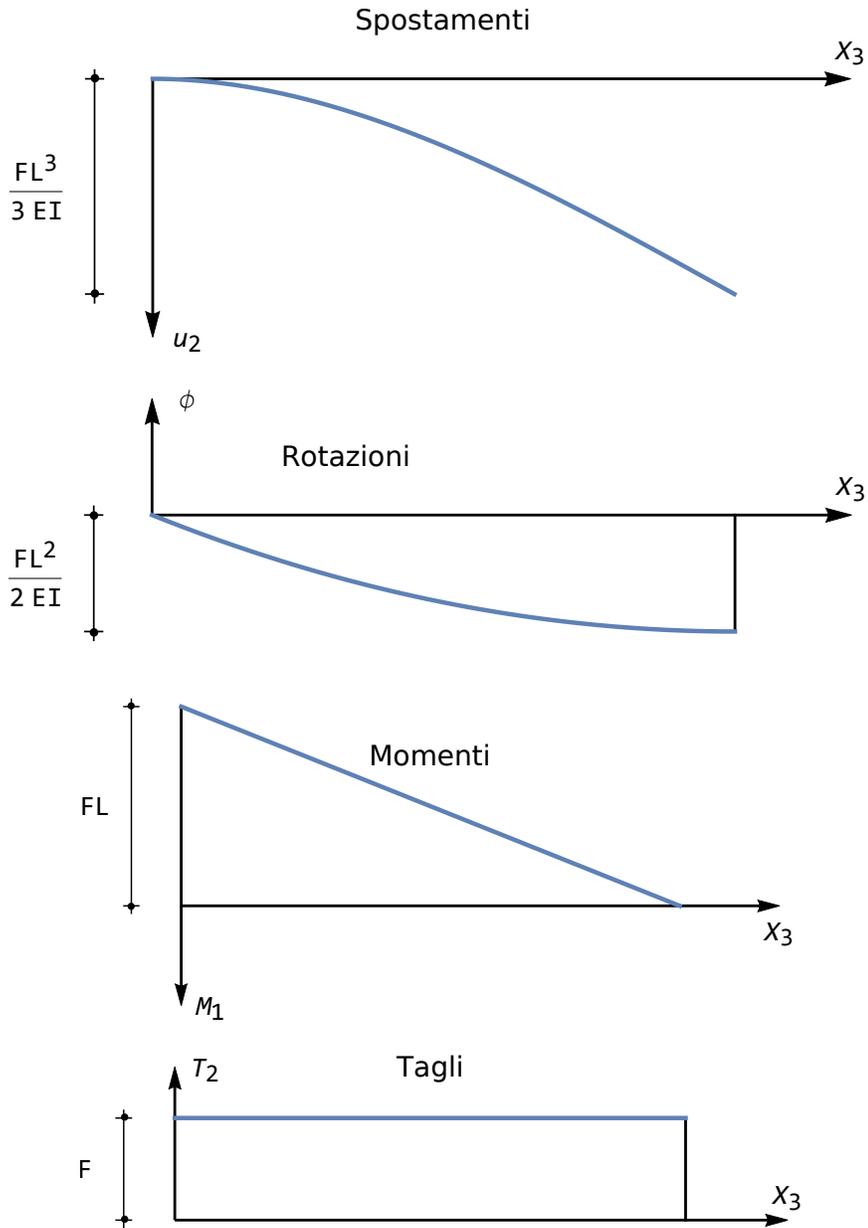


Figura 34.4: Il caso della mensola soggetta a forza concentrata nell'estremo libero

Di interesse sono i valori degli spostamenti all'estremo libero, e delle caratteristiche all'incastro:

$$\begin{aligned} u_{2max} &= u_2(L) = \frac{FL^3}{3EI_{11}} \\ \phi_{min} &= \phi(L) = -\frac{FL^2}{2EI_{11}} \\ M_{1min} &= M_1(0) = FL \end{aligned} \quad (34.12)$$

Il tracciamento dei diagrammi (cfr. Figura 34.4 può convenientemente partire dal taglio, che è banale, e dal momento flettente, che è lineare, si annulla in corrispondenza dell'estremo nullo, ed ha pendenza pari a  $F$ . Le rotazioni, che variano con legge quadratica, si annullano nell'incastro, e nell'estremo libero il relativo diagramma deve avere pendenza nulla, in quanto il momento si annulla in quella sezione. Infine, gli abbassamenti si annullano nell'incastro e la pendenza deve essere nulla nello stesso incastro.

Si abbia ora la stessa trave a mensola, soggetta ad una coppia  $\mathcal{M}$  nell'estremo libero (cfr. Figura 34.5). Le condizioni ai limiti, analogamente a quanto detto per la mensola soggetta a forza concentrata, sono:

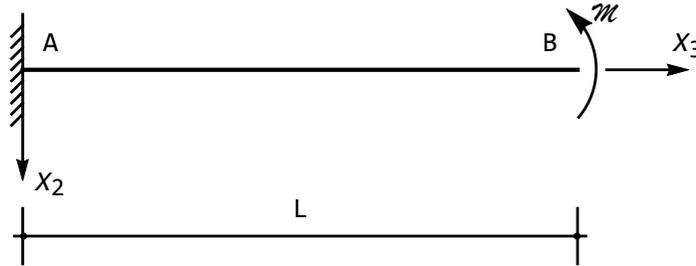


Figura 34.5: La trave a mensola soggetta a coppia nell'estremo libero

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \rightarrow u_2'(0) = 0 \\ -M_1(L) + \mathcal{M} &= 0 \rightarrow EI_{11}u_2''(L) + \mathcal{M} = 0 \\ T_2(L) &= 0 \rightarrow u_2'''(L) = 0 \end{aligned} \quad (34.13)$$

ossia, in questo caso:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 = C_4 = 0 \\ C_3 &= -\frac{\mathcal{M}}{2EI_{11}} \end{aligned} \quad (34.14)$$

La linea elastica sarà quindi fornita da:

$$u_2(x_3) = -\frac{\mathcal{M}}{2EI_{11}}x_3^2 \quad (34.15)$$

e, conseguentemente:

$$\begin{aligned}\phi(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} x_3 \\ M_1(x_3) &= \mathcal{M} \\ T_2(x_3) &= 0\end{aligned}\quad (34.16)$$

Di interesse sono i valori degli spostamenti all'estremo libero:

$$\begin{aligned}u_{2min} = u_2(L) &= -\frac{\mathcal{M}L^2}{2EI} \\ \phi_{max} = \phi(L) &= \frac{\mathcal{M}L}{EI}\end{aligned}\quad (34.17)$$

Il tracciamento dei diagrammi non presenta difficoltà, ed è riportato in Figura 34.6.

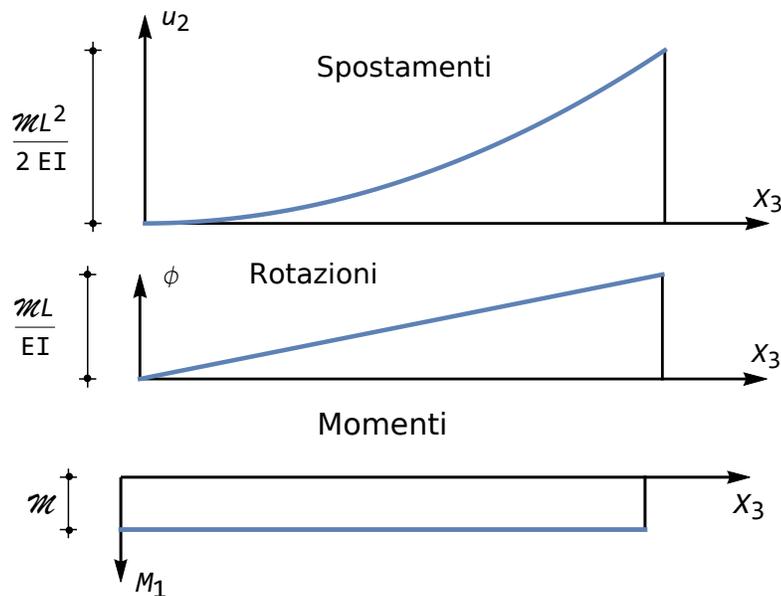


Figura 34.6: Il caso della mensola soggetta a coppia concentrata nell'estremo libero

### 34.3 La trave appoggiata

Si abbia ora una trave appoggiata ad ambedue gli estremi, soggetta ad una coppia  $\mathcal{M}$  agente all'estremo di destra (cfr. Figura 34.7). In assenza di carico distribuito, l'equazione differenziale sarà omogenea:

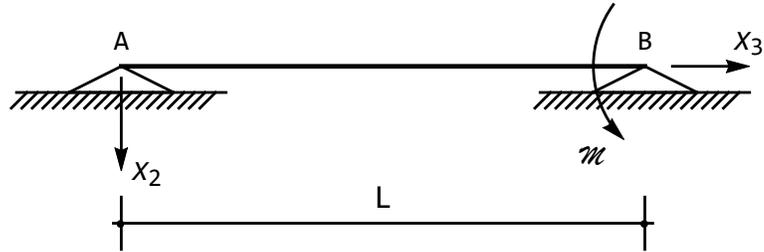


Figura 34.7: La trave appoggiata soggetta a coppia nell'estremo di destra

$$EI_{11}u_2'''' = 0 \quad (34.18)$$

con soluzione:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 \quad (34.19)$$

Le condizioni ai limiti di congruenza impongono l'annullarsi dell'abbassamento in ambedue gli estremi, mentre equilibrando i concetti elementari in  $x_3 = 0$  ed in  $x_3 = L$  si hanno le altre due condizioni:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ M(0) &= 0 \rightarrow u_2''(0) = 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ -M(L) + M &= 0 \rightarrow EI_{11}u_2''(L) + M = 0 \end{aligned} \quad (34.20)$$

da cui le quattro costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_3 = 0 \\ C_2 &= \frac{ML}{6EI_{11}} \\ C_4 &= -\frac{M}{6EI_{11}L} \end{aligned} \quad (34.21)$$

La linea elastica sarà quindi fornita da:

$$u_2(x_3) = M \frac{x_3(L-x_3)(L+x_3)}{6EI_{11}L} \quad (34.22)$$

e, conseguentemente:

$$\begin{aligned} \phi(x_3) &= -\frac{M}{6EI_{11}} \left( L - 3\frac{x_3^2}{L} \right) \\ M_1(x_3) &= M \frac{x_3}{L} \\ T_2(x_3) &= \frac{M}{L} \end{aligned} \quad (34.23)$$

Le reazioni degli appoggi hanno valore assoluto pari a  $\frac{\mathcal{M}}{L}$ , la reazione di sinistra è negativa, quindi diretta verso l'alto, mentre la reazione di destra è positiva, e quindi diretta verso il basso. In tal modo esse formano una coppia di braccio  $L$ , che equilibra la coppia esterna. I diagrammi del taglio, del momento, delle rotazioni e degli spostamenti sono riportati in Figura 34.8. Si noti che il diagramma delle rotazioni porta a sinistra con tangente orizzontale, e si annulla all'ascissa  $x_3 = \frac{L}{\sqrt{3}}$ . In tale ascissa si verifica l'abbassamento massimo, pari a:

$$u_{2max} = \frac{1}{9\sqrt{3}} \frac{\mathcal{M}L^2}{EI_{11}} \quad (34.24)$$

Di notevole interesse sono poi le rotazioni negli appoggi:

$$\begin{aligned} \phi_{min} = \phi(0) &= -\frac{\mathcal{M}L}{6EI_{11}} \\ \phi_{max} = \phi(L) &= \frac{\mathcal{M}L}{3EI_{11}} \end{aligned} \quad (34.25)$$

### 34.4 La trave incastrata ed appoggiata

Un ulteriore esempio di trave ad una sola campata soggetta a carichi concentrati è la trave incastrata ad un estremo, appoggiata all'altro estremo, e soggetta ad una coppia sull'appoggio (Figura 34.9).

Ferma restando la distribuzione cubica degli spostamenti, e quindi quella quadratica delle rotazioni, lineare dei momenti e costante dei tagli, le condizioni ai limiti di congruenza saranno ora tre, esprimenti l'annullarsi dello spostamento in ambedue gli estremi, e della rotazione nell'incastro. La restante condizione deriva dall'equilibrio alla rotazione del concio elementare sull'appoggio:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ \phi(0) = 0 &\longrightarrow u_2'(0) = 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ -M(L) + \mathcal{M} &= 0 \longrightarrow EI_{11}u_2''(L) + \mathcal{M} = 0 \end{aligned} \quad (34.26)$$

ossia:

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 &= 0 \\ C_3 &= \frac{\mathcal{M}}{4EI_{11}} \\ C_4 &= -\frac{\mathcal{M}}{4EI_{11}L} \end{aligned} \quad (34.27)$$

La linea elastica sarà quindi fornita da:

$$u_2(x_3) = \mathcal{M} \frac{x_3^2(L - x_3)}{4EI_{11}L} \quad (34.28)$$

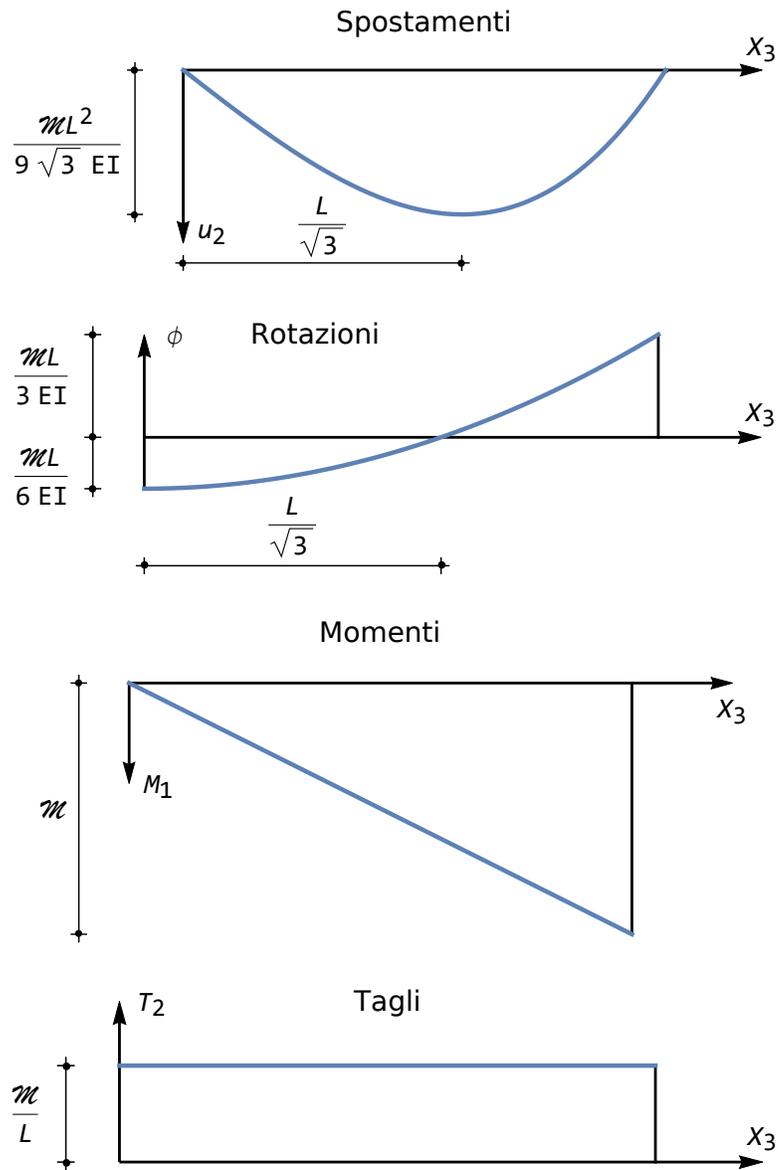


Figura 34.8: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per trave appoggiata soggetta ad una coppia su un appoggio

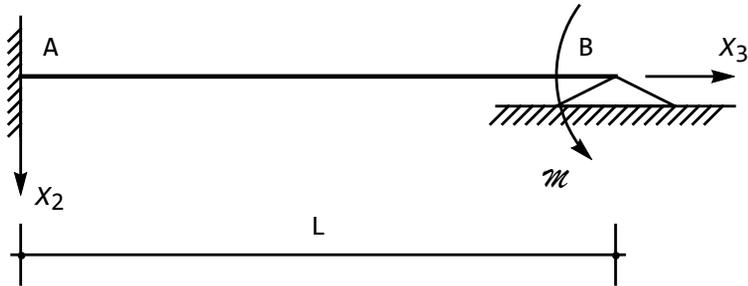


Figura 34.9: La trave incastrata-appoggiata soggetta a coppia nell'estremo di destra

e, conseguentemente, per derivazioni successive:

$$\begin{aligned}\phi(x_3) &= \frac{\mathcal{M}x_3(3x_3 - 2L)}{4EI_{11}L} \\ M_1(x_3) &= \mathcal{M}\frac{3x_3 - L}{2L} \\ T_2(x_3) &= \frac{3}{2}\frac{\mathcal{M}}{L}\end{aligned}\quad (34.29)$$

I diagrammi delle caratteristiche sono facilmente tracciabili: il taglio è costante, il momento si annulla ad un terzo della luce, assume il valore  $\mathcal{M}$  nell'appoggio (come da condizione ai limiti) ed il valore  $\mathcal{M}/2$  nell'incastro. Le rotazioni, nulle nell'incastro, si annullano a  $2/3$  della luce, ed il relativo diagramma ha tangente orizzontale ad un terzo della luce, dove il momento è nullo. Infine, gli spostamenti sono nulli ad ambedue gli estremi, ed il diagramma avrà tangente orizzontale in corrispondenza dell'incastro, ed ai  $2/3$  della luce, dove le rotazioni sono nulle. Si ha quindi la situazione di Figura 34.10, dove sono anche riportati alcuni valori significativi.

Le reazioni non sono calcolabili con sole considerazioni di equilibrio, in quanto la trave è una volta iperstatica, ma possono essere dedotte dalla conoscenza delle caratteristiche della sollecitazione interna:

$$\begin{aligned}R_A &= -T_2(0) = -\frac{3}{2}\frac{\mathcal{M}}{L} \\ R_B &= T_2(L) = \frac{3}{2}\frac{\mathcal{M}}{L} \\ \mathcal{M}_{rA} &= -M_1(0) = \frac{\mathcal{M}}{2}\end{aligned}\quad (34.30)$$

E' utile verificare che questi valori soddisfano le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione.

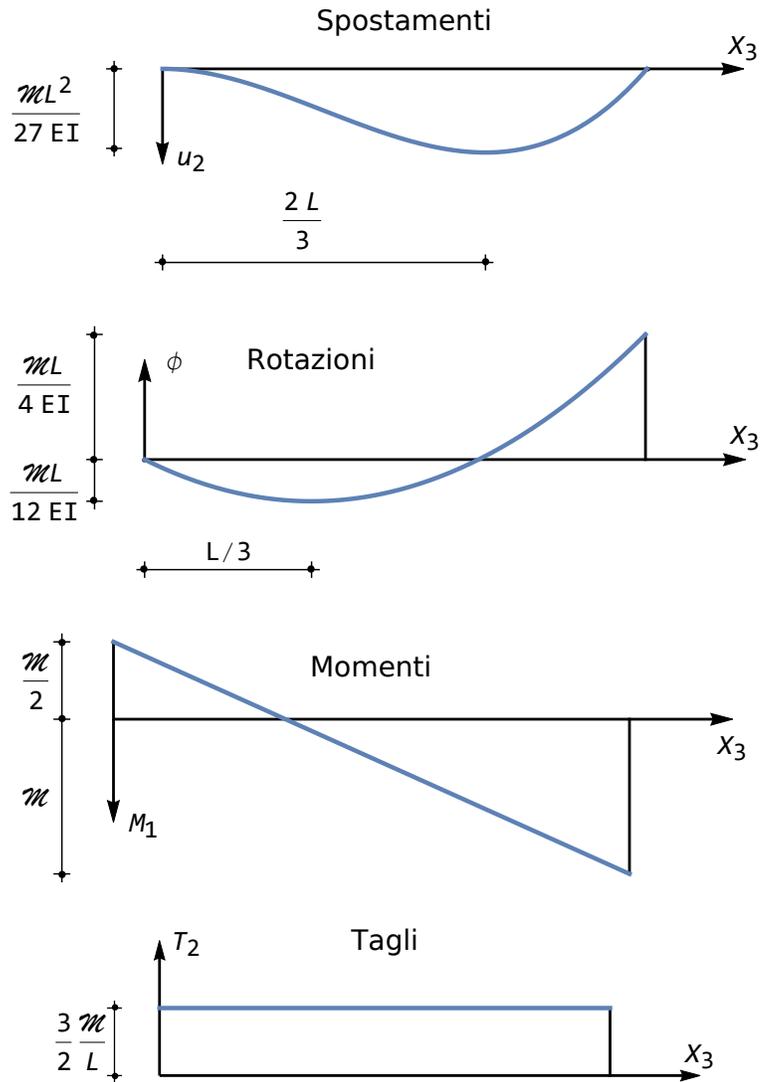


Figura 34.10: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per trave incastrata ed appoggiata, soggetta ad una coppia su un appoggio

### 34.5 La trave con incastro e bipendolo

L'unico carico concentrato agli estremi che sia ipotizzabile su una trave incastrata e con bipendolo è una forza  $F$  agente in corrispondenza del bipendolo (Figura 34.11). Tre condizioni ai limiti sono di congruenza, e devono esprimere l'annullarsi dell'abbassamento nell'incastro, e della rotazione sia nell'incastro che nel bipendolo, mentre l'ultima condizione dovrà garantire l'equilibrio del bipendolo alla traslazione verticale:



Figura 34.11: La trave con incastro a sinistra e bipendolo a destra, soggetta a forza sul bipendolo

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 \phi(0) &= 0 \longrightarrow u_2'(0) = 0 \\
 \phi(L) &= 0 \longrightarrow u_2'(L) = 0 \\
 -T_2(L) + F &= 0 \longrightarrow EI_{11}u_2'''(L) + F = 0
 \end{aligned} \tag{34.31}$$

Assunta l'usuale soluzione cubica dell'equazione della linea elastica, le precedenti condizioni ai limiti si tramutano in quattro equazioni nelle quattro costanti di integrazione, che possono essere quindi calcolate come:

$$\begin{aligned}
 C_1 C_2 &= 0 \\
 C_3 &= \frac{FL}{4EI_{11}} \\
 C_4 &= -\frac{F}{6EI_{11}}
 \end{aligned} \tag{34.32}$$

La linea elastica sarà quindi fornita da:

$$u_2(x_3) = F \frac{x_3^2(3L - 2x_3)}{12EI_{11}} \tag{34.33}$$

e, conseguentemente, per derivazioni successive:

$$\begin{aligned}\phi(x_3) &= \frac{Fx_3(x_3 - L)}{2EI_{11}} \\ M_1(x_3) &= F\left(x_3 - \frac{L}{2}\right) \\ T_2(x_3) &= F\end{aligned}\tag{34.34}$$

L'andamento dei diagrammi, riportati in Figura 34.12, è banale, ed il suo studio è lasciato come esercizio, così come la deduzione delle reazioni vincolari.

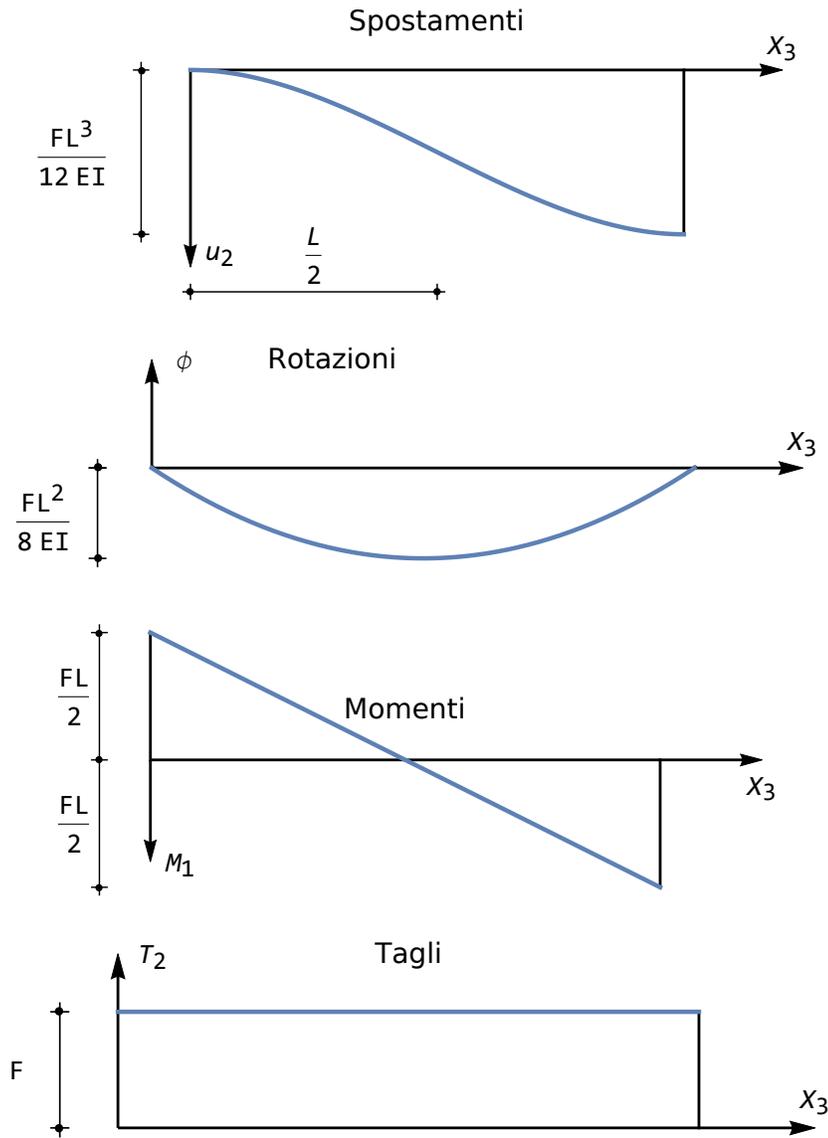


Figura 34.12: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per trave con incastro e bipendolo, soggetta ad una forza sul bipendolo



## Capitolo 35

# I vincoli imperfetti

In quanto si è detto finora, si è sempre ipotizzato che il vincolo sia in grado di svolgere perfettamente la sua funzione, annullando completamente l'abbassamento e/o la rotazione. Nella realtà, un simile vincolo è difficilmente costruibile, ed occorre prevedere in qualche modo uno schema teorico agli estremi che possa riprodurre più fedelmente ciò che accade nella pratica tecnica.

A questi casi è dedicata il presente Capitolo.

### 35.1 I cedimenti anelastici

Si incontrano frequentemente vincoli che semplicemente non sono in grado di annullare totalmente lo spostamento e/o la rotazione, nel senso che, all'atto della costruzione, essi *cedono*, subendo un ben quantificato spostamento (o rotazione), che poi resta fisso nel tempo. Si può quindi avere, ad esempio, un appoggio imperfetto, che abbia subito un cedimento di  $v_0$  centimetri, e di esso andrà tenuto debitamente conto nel calcolo della deformata.

In generale, questi cedimenti sono detti cedimenti *anelastici*, e possono dar luogo ai seguenti vincoli imperfetti:

- appoggio imperfetto, per cui  $u_2 = v_0$
- bipendolo imperfetto, per cui  $\phi = \phi_0$
- incastro imperfetto, per cui  $u_2 = v_0$  e/o  $\phi = \phi_0$

Non vi è alcuna difficoltà a tenere in conto questa generalizzazione, nello studio di una trave così come condotto nelle lezioni precedenti: le condizioni ai limiti di congruenza dovranno essere modificate, divenendo non omogenee, mentre le condizioni di equilibrio non subiranno modifiche.

#### 35.1.1 Le travi isostatiche

Gli schemi isostatici finora studiati, e quelli più complessi che si studieranno in seguito, hanno la proprietà di non veder sorgere caratteristiche della sollecitazione interna, a seguito di cedimenti anelastici dei loro vincoli. Si consideri

infatti la trave a mensola di Figura 35.1, il cui incastro subisce un cedimento verticale di  $v_0$  ed un cedimento rotazionale di  $\phi_0$ . Il problema ai limiti relativo a questo schema strutturale vedrà la solita equazione differenziale del quarto ordine, omogenea:

$$EIu_2''''(x_3) = 0 \quad (35.1)$$

insieme alle condizioni ai limiti

$$\begin{aligned} u_2(0) &= v_0 \\ u_2'(0) &= -\phi_0 \\ u_2''(L) &= 0 \\ u_2'''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (35.2)$$

dove già si tenuto conto che  $\phi(x_3) = -u_2'(x_3)$ .

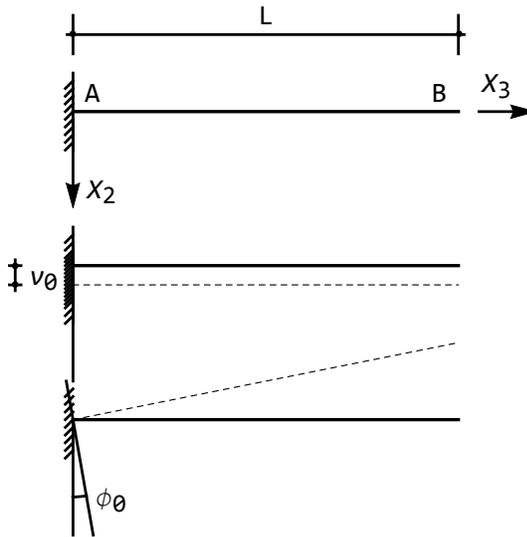


Figura 35.1: Trave a mensola soggetta ad un cedimento anelastico verticale ed un cedimento anelastico rotazionale

L'usuale soluzione cubica dell'equazione differenziale (35.1):

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 \quad (35.3)$$

conduce a trasformare le condizioni ai limiti in quattro equazioni nelle quattro incognite  $C_i$ :

$$\begin{aligned} C_1 &= v_0 \\ C_2 &= -\phi_0 \\ 2C_3 + 6C_4L &= 0 \\ 6C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (35.4)$$

Ne segue facilmente che la linea elastica può essere espressa come:

$$u_2(x_3) = v_0 - \phi_0 x_3 \quad (35.5)$$

ed è quindi interpretabile come sovrapposizione di una traslazione rigida di ampiezza  $v_0$  e di una rotazione rigida di ampiezza  $\phi_0$ . Le caratteristiche, come anticipato, sono identicamente nulle. Analoghi risultati si ottengono dall'analisi di una trave appoggiata soggetta ai cedimenti verticali anelastici di ampiezza  $v_A$  e  $v_B$  degli appoggi, o dall'analisi di una trave con appoggio e bipendolo soggetta al cedimento verticale  $v_0$  dell'appoggio, ed al cedimento rotazionale  $\phi_0$  del bipendolo.

### 35.1.2 Le travi iperstatiche

In una trave iperstatica, la presenza di un cedimento anelastico provoca l'insorgere di caratteristiche della sollecitazione interna, ed esse risultano proporzionali alla rigidezza flessionale  $EI_{11}$ , a differenza di quanto accade nei casi finora studiati di travi a vincoli perfetti. A titolo di esempio, si consideri una trave doppiamente incastrata, il cui incastro di destra subisca un cedimento verticale anelastico di ampiezza  $v_L$  ed un cedimento rotazionale  $\phi_L$ . Il relativo problema ai limiti è definito dalle condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \\ u_2(L) &= v_L \\ u_2'(L) &= -\phi_L \end{aligned} \quad (35.6)$$

ed ha soluzione:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \frac{x_3^2(3L-2x_3)}{L^3}v_L + \frac{x_3^2(L-x_3)}{L^2}\phi_L \\ \phi(x_3) &= \frac{6x_3(x_3-L)}{L^3}v_L + \frac{x_3(3x_3-2L)}{L^2}\phi_L \\ M_1(x_3) &= -6\frac{EI_{11}}{L^3}(L-2x_3)v_L - 2\frac{EI_{11}}{L^2}(L-3x_3)\phi_L \\ T_2(x_3) &= \frac{12EI_{11}}{L^3}v_L + \frac{6EI_{11}}{L^2}\phi_L \end{aligned} \quad (35.7)$$

I relativi diagrammi sono presentati in Figura 35.2. Si noti che nell'incastro di destra si dovrà avere un abbassamento pari al cedimento imposto  $v_L$ , ed una pendenza pari a  $-\phi_L$ .

## 35.2 I cedimenti elastici

Nella sezione precedente si sono trattati i casi in cui un vincolo cedeva, per difetto di fabbricazione, per eccesso di carico, per colpa del terreno di fondazione,

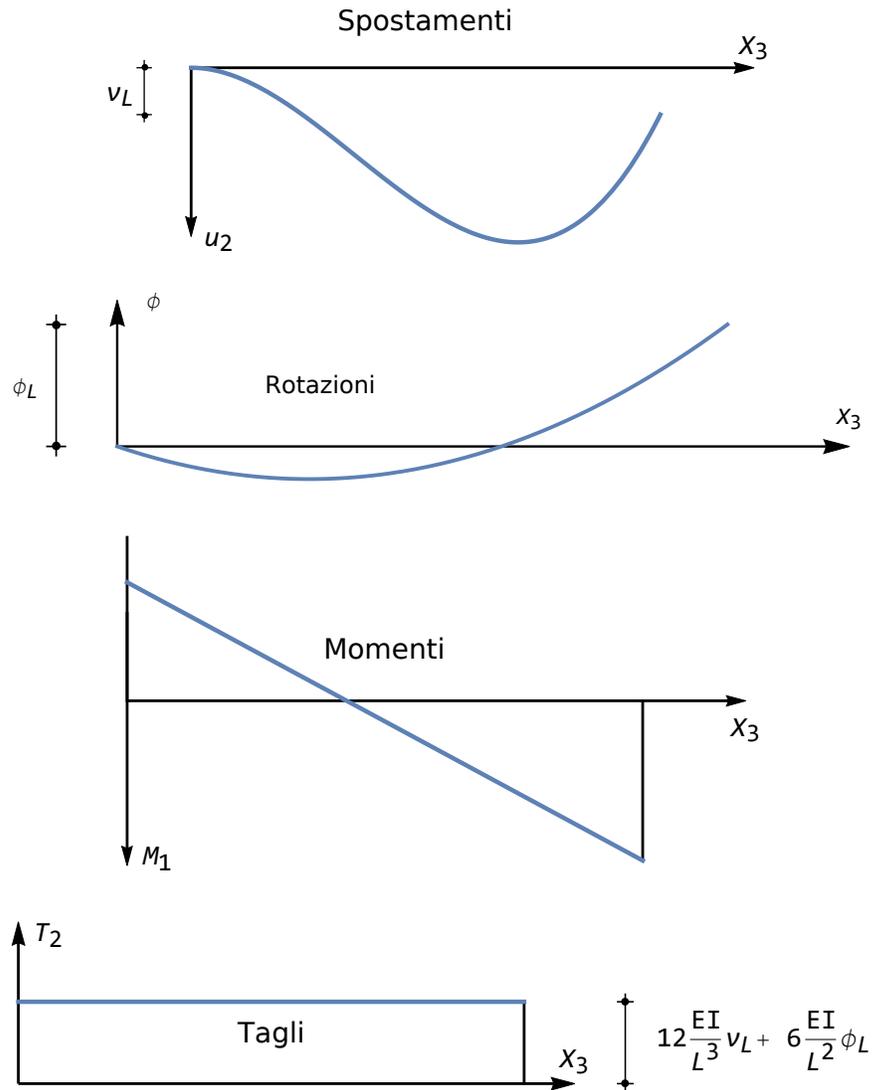


Figura 35.2: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave doppiamente incastrata soggetta a cedimenti anelastici nell'incastro di destra

o per qualsiasi altro motivo. Il risultato era uno spostamento, o una rotazione, non più nulla, ma costante.

In altri casi, invece, il vincolo è costituito da materiale elastico, che permette spostamenti e/o rotazioni in funzione dei carichi, o meglio, delle reazioni ad esso applicate. In tal caso, il vincolo possiede una sua energia di deformazione, che andrà calcolata ed aggiunta all'energia di deformazione inerente alla struttura.

### 35.2.1 L'energia elastica del vincolo cedevole

Per semplicità, ed anche per ovvie ragioni di coerenza, si ipotizza un legame elastico lineare tra le reazioni ed i corrispondenti spostamenti, in modo da minimizzare le inevitabili complicazioni computazionali.

Se quindi si suppone che ambedue gli estremi della trave possano abbassarsi e ruotare elasticamente, come illustrato schematicamente in Figura 35.3, potranno scriversi le relazioni:

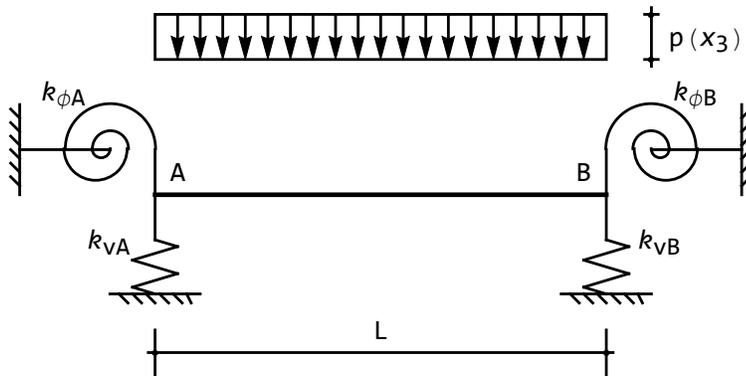


Figura 35.3: La trave su vincoli elasticamente cedevoli

$$\begin{aligned} R_A &= -k_{vA}u_2(0) \\ \mathcal{M}_{rA} &= -k_{\phi A}\phi(0) \end{aligned} \quad (35.8)$$

nell'estremo di sinistra, e:

$$\begin{aligned} R_B &= -k_{vB}u_2(L) \\ \mathcal{M}_{rB} &= -k_{\phi B}\phi(L) \end{aligned} \quad (35.9)$$

nell'estremo di destra, dove  $R_A$  ed  $R_B$  sono le reazioni verticali agli estremi, e  $\mathcal{M}_{rA}$  ed  $\mathcal{M}_{rB}$  sono le coppie reattive agli estremi.

Le quattro costanti  $k_{vA}$ ,  $k_{vB}$ ,  $k_{\phi A}$  e  $k_{\phi B}$  sono costanti di *rigidezza*, assiale o rotazionale, rispettivamente, ed hanno dimensione fisica di  $FL^{-1}$  nel caso assiale, e di  $FL$  nel caso rotazionale.

L'energia di deformazione domiciliata in ciascuno di questi vincoli cedevoli potrà essere calcolata, a partire dalla (35.8) e dalla (35.9). Per i vincoli assialmente cedevoli si avrà:

$$\begin{aligned} L_{vA} &= \frac{1}{2}k_{vA}u_2^2(0) \\ L_{vB} &= \frac{1}{2}k_{vB}u_2^2(L) \end{aligned} \quad (35.10)$$

rispettivamente a sinistra ed a destra, mentre nel caso dei vincoli rotazionali si avrà:

$$\begin{aligned} L_{\phi A} &= \frac{1}{2}k_{\phi A}\phi^2(0) \\ L_{\phi B} &= \frac{1}{2}k_{\phi B}\phi^2(L) \end{aligned} \quad (35.11)$$

nell'estremo di sinistra e, rispettivamente, nell'estremo di destra.

### 35.2.2 Le condizioni ai limiti in corrispondenza di un vincolo elasticamente cedevole

L'energia potenziale totale di un tronco di trave di luce  $L$ , soggetta ad un carico trasversale  $p(x_3)$ , e vincolata elasticamente come in Figura 35.3, può scriversi come:

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{EI_{11}}{2} \int_0^L u_2''(x_3) dx_3 + \frac{1}{2}k_{vA}u_2^2(0) + \frac{1}{2}k_{vB}u_2^2(L) + \frac{1}{2}k_{\phi A}\phi^2(0) + \\ &\quad \frac{1}{2}k_{\phi B}\phi^2(L) - \int_0^L p(x_3)u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (35.12)$$

o anche, ricordando il legame tra rotazione e derivata prima dell'abbassamento, come:

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{EI_{11}}{2} \int_0^L u_2''(x_3) dx_3 + \frac{1}{2}k_{vA}u_2^2(0) + \frac{1}{2}k_{vB}u_2^2(L) + \frac{1}{2}k_{\phi A}u_2'^2(0) + \\ &\quad \frac{1}{2}k_{\phi B}u_2'^2(L) - \int_0^L p(x_3)u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (35.13)$$

La variazione prima dell'energia potenziale (35.13) si calcola facilmente come:

$$\begin{aligned} \delta_1 E_t &= EI_{11} \int_0^L u_2''\delta u_2'' dx_3 + k_{vA}u_2(0)\delta u_2(0) + k_{vB}u_2(L)\delta u_2(L) + \\ &\quad k_{\phi A}u_2'(0)\delta u_2'(0) + k_{\phi B}u_2'(L)\delta u_2'(L) - \int_0^L p\delta u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (35.14)$$

ed integrando per parti due volte il primo integrale si ha, come già illustrato in precedenza:

$$\begin{aligned} \delta_1 E_t = & [EI_{11}u_2''\delta u_2']_0^L - [EI_{11}u_2'''\delta u_2]_0^L + EI_{11} \int_0^L u_2''''\delta u_2 dx_3 + \\ & k_{vA}u_2(0)\delta u_2(0) + k_{vB}u_2(L)\delta u_2(L) + k_{\phi A}u_2'(0)\delta u_2'(0) + k_{\phi B}u_2'(L)\delta u_2'(L) - \\ & \int_0^L p\delta u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (35.15)$$

Per il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale, allora, dovrà essere, come usuale:

$$EI_{11}u_2'''' = p \quad (35.16)$$

con le condizioni ai limiti che possono leggersi dalla (35.15), annullando le parti finite:

$$\begin{aligned} [EI_{11}u_2''(L) + k_{\phi B}u_2'(L)]\delta u_2'(L) + [-EI_{11}u_2''(0) + k_{\phi A}u_2'(0)]\delta u_2'(0) + \\ [-EI_{11}u_2'''(L) + k_{vB}u_2(L)]\delta u_2(L) + [EI_{11}u_2'''(0) + k_{vA}u_2(0)]\delta u_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (35.17)$$

Nell'estremo di sinistra, quindi, in  $x_3 = 0$ , dovrà aversi:

$$\begin{aligned} -EI_{11}u_2''(0) + k_{\phi A}u_2'(0) &= 0 \\ EI_{11}u_2'''(0) + k_{vA}u_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (35.18)$$

mentre in  $x_3 = L$ , nell'estremo di destra:

$$\begin{aligned} EI_{11}u_2''(L) + k_{\phi B}u_2'(L) &= 0 \\ -EI_{11}u_2'''(L) + k_{vB}u_2(L) &= 0 \end{aligned} \quad (35.19)$$

Ad analoghe conclusioni si arriva per via geometrica, equilibrando i concetti elementari enucleati in corrispondenza degli estremi. Ad esempio, a sinistra si ha, come può leggersi dalla Figura 35.4:

$$\begin{aligned} R_A + T_2(0) &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + M_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (35.20)$$

ed utilizzando le (35.8–35.9) e le relazioni che legano le caratteristiche alle derivate degli spostamenti si giunge a scrivere le (35.18).

## La trave con incastro ed appoggio imperfetto

Si consideri la trave di Figura 35.5, incastrata perfettamente a sinistra, ed appoggiata a destra su un appoggio elasticamente cedevole, di rigidezza  $k_{vB}$ . Poiché il carico si suppone costante su tutta la luce,  $p(x_3) = p_0$ , la deformata sarà data, come ormai noto, da:

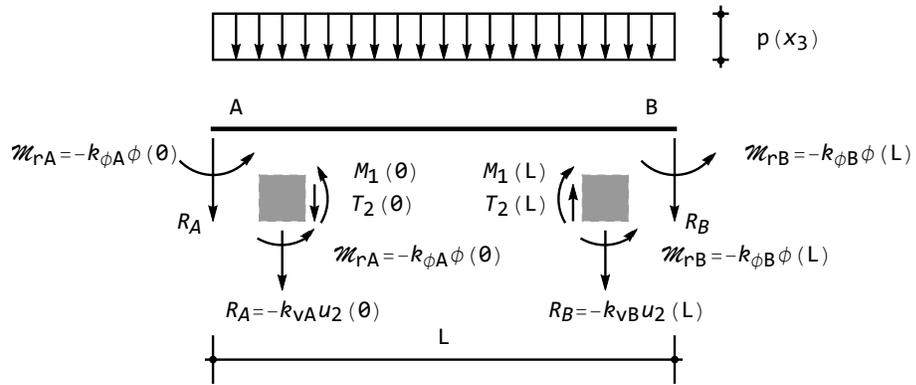


Figura 35.4: Lo schema per la deduzione delle condizioni ai limiti per via geometrica

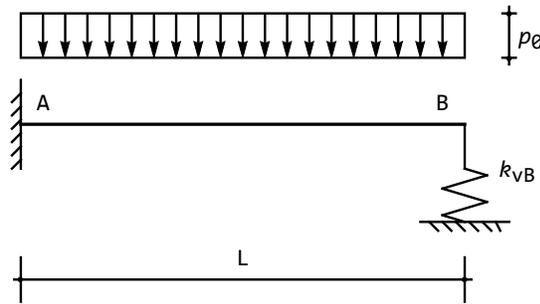


Figura 35.5: Trave con incastro ed appoggio elasticamente cedevole

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 + \frac{p_0x_3^4}{24EI_{11}} \quad (35.21)$$

mentre le quattro costanti di integrazione si calcolano in base all'imposizione delle seguenti condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \\ u_2''(L) &= 0 \\ -EI_{11}u_2'''(L) + k_{vB}u_2(L) &= 0 \end{aligned} \quad (35.22)$$

Utilizzando la (35.21) e le sue successive derivate, si ottiene il seguente

sistema di quattro equazioni algebriche nelle quattro costanti di integrazione:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 0 \\
 C_2 &= 0 \\
 6C_4 + \frac{p_0 L}{EI_{11}} - \frac{k_{vB}}{EI_{11}} \left( C_1 + C_2 L + C_3 L^2 + C_4 L^3 + \frac{p_0 L^4}{24EI_{11}} \right) &= 0 \quad (35.23) \\
 2C_3 + 6C_4 L + \frac{p_0 L^2}{2EI_{11}} &= 0
 \end{aligned}$$

Risolvendo, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_2 = 0 \\
 C_3 &= -\frac{-12EI_{11}L^2 - k_{vB}L^5}{16EI_{11}(3EI_{11} + k_{vB}L^3)} p_0 \\
 C_4 &= -\frac{24EI_{11}L + 5k_{vB}L^4}{48EI_{11}(3EI_{11} + k_{vB}L^3)} p_0
 \end{aligned} \quad (35.24)$$

Lo spostamento, quindi, si potrà scrivere:

$$v(x_3) = \frac{6EI_{11}(6L^2 - 4Lx_3 + x_3^2) + L^3(3L^2 - 5Lx_3 + 2x_3^2)k_{vB}}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} \frac{p_0 x_3^2}{48EI_{11}} \quad (35.25)$$

da cui, in cascata, rotazioni, momenti e tagli:

$$\begin{aligned}
 \phi(x_3) &= -\frac{24EI_{11}(3L^2 - 3Lx_3 + x_3^2) + (6L^2 - 15Lx_3 + 8x_3^2)k_{vB}L^3}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} \frac{p_0 x_3}{48EI_{11}} \\
 M_1(x_3) &= -\frac{12EI_{11}(L - x_3) + (L - 4x_3)k_{vB}L^3}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} \frac{p_0}{8} (L - x_3) \\
 T_2(x_3) &= \frac{24EI_{11}(L - x_3) + (5L - 8x_3)k_{vB}L^3}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} \frac{p_0}{8}
 \end{aligned} \quad (35.26)$$

Ponendo  $k_{vB} = 0$ , si ritrovano i risultati della trave a mensola, mentre il limite per  $k_{vB}$  che va all'infinito riproduce l'altro caso limite di trave con incastro ed appoggio.

Le reazioni vincolari possono calcolarsi a partire dallo schema in Figura 35.4:

$$\begin{aligned}
 R_A = -T_2(0) &= -\frac{24EI_{11}L + 5k_{vB}L^4}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} \frac{p_0}{8} \\
 \mathcal{M}_{rA} = -M_1(0) &= \frac{12EI_{11}L + k_{vB}L^4}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} p_0 \frac{L}{8} \\
 R_B = -k_{vB}u_2(L) = T_2(L) &= -\frac{3k_{vB}L^4}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} \frac{p_0}{8}
 \end{aligned} \quad (35.27)$$

ed è possibile verificare a posteriori che sono rispettate le equazioni della statica:

$$\begin{aligned}
 R_A + R_B + p_0 L &= 0 \\
 \mathcal{M}_{rA} + R_A L + p_0 \frac{L^2}{2} &= 0
 \end{aligned} \quad (35.28)$$



## Capitolo 36

# Le travi a più campate

L'analisi delle travi a più campate, in linea di principio, non presenta difficoltà insormontabili. Si consideri infatti una trave suddivisa in  $t$  tratti, identificando quindi  $t-1$  sezioni intermedie in cui una, o più, delle quattro quantità spostamento, rotazione, momento e taglio, subisce una discontinuità. Ciò può essere dovuto alla presenza di un vincolo esterno, oppure di un vincolo interno, oppure ancora di una forza o coppia concentrata, o ancora di una distorsione concentrata.

Per ciascuno dei  $t$  tratti si può scrivere una equazione differenziale della linea elastica, la cui soluzione dipende da quattro parametri incognite, ed in questo modo si hanno, in totale,  $4t$  parametri da determinare. Per la loro determinazione si possono però scrivere due condizioni ai limiti in ciascuno dei due estremi, e quattro condizioni in ciascuna delle  $t-1$  sezioni intermedie di discontinuità. Si giunge in tal modo ad un sistema di  $4t$  equazioni in  $4t$  incognite, la cui soluzione definisce univocamente la funzione spostamento.

Tuttavia la complessità computazionale di un simile approccio cresce rapidamente all'aumentare del numero di tratti, e pertanto, se non si dispone di un programma di calcolo simbolico, solo le più semplici situazioni possono essere affrontate secondo questa via.

In questo Capitolo si fornisce un catalogo di possibili vincoli intermedi e si danno alcuni esempi che per la loro semplicità possono svolgersi manualmente.

### 36.1 I vincoli intermedi esterni

Si intende per *vincolo intermedio esterno* un dispositivo di vincolo agente in corrispondenza di una sezione retta non di estremità, e che sia tale da non interrompere la continuità fisica della trave. Nell'ambito delle strutture considerate, sono ipotizzabili due diversi vincoli, in grado rispettivamente di annullare l'abbassamento (appoggio) o la rotazione (bipendolo esterno) della sezione retta cui essi sono applicati. Per far ciò essi esplicheranno sulla trave una reazione verticale — nel caso dell'appoggio — o una coppia reattiva, nel caso del bipendolo.

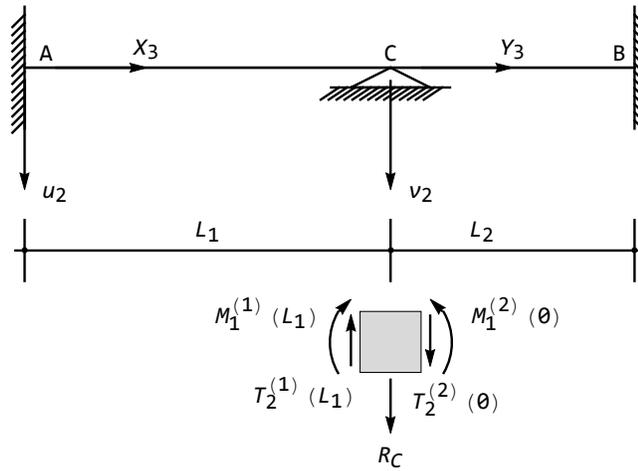


Figura 36.1: Il caso dell'appoggio intermedio

### 36.1.1 Il caso dell'appoggio

Si consideri una situazione come quella di Figura 36.1, in cui esiste un appoggio intermedio posto a distanza  $L_1$  dalla sezione di sinistra. La trave è quindi suddivisa in due tratti, di luce  $L_1$  ed  $L_2$ , rispettivamente, e conviene definire due sistemi di riferimento locali, ciascuno con origine nel suo estremo di sinistra, così come illustrato in Figura. Il primo sistema,  $(O_1, x_2, x_3)$ , ha origine in  $A$  ed è definito in  $[0, L_1]$ , il secondo sistema  $(O_2, y_2, y_3)$  ha origine in  $C$  ed è definito in  $[0, L_2]$ .

Si indicheranno con  $u_2(x_3)$  e  $v_2(y_3)$  le due linee elastiche relative alla prima ed alla seconda luce, rispettivamente, mentre  $\phi^{(1)}(x_3)$  e  $\phi^{(2)}(y_3)$  saranno le due rotazioni,  $M_1^{(1)}(x_3)$  ed  $M_1^{(2)}(y_3)$  saranno i due momenti flettenti e  $T_2^{(1)}(x_3)$  e  $T_2^{(2)}(y_3)$  saranno i due tagli.

Se il prodotto  $EI_{11}$  è costante lungo tutta la trave, si possono scrivere le due equazioni della linea elastica:

$$EI_{11}u_2''''(x_3) = p_1(x_3) \quad (36.1)$$

valida in  $[0, L_1]$ , e:

$$EI_{11}v_2''''(y_3) = p_2(y_3) \quad (36.2)$$

valida in  $[0, L_2]$ .

Le soluzioni generali di queste equazioni differenziali possono scriversi come:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 + I_1(x_3) \\ v_2(y_3) &= C_5 + C_6y_3 + C_7y_3^2 + C_8y_3^3 + I_2(y_3) \end{aligned} \quad (36.3)$$

con  $I_1$  ed  $I_2$  integrali particolari da calcolare in base al particolare carico agente sulla trave. Le otto costanti di integrazione  $C_i$  andranno determinate imponendo

otto condizioni, di congruenza o di equilibrio, nelle tre sezioni  $A$ ,  $B$  e  $C$ , e più in dettaglio, scrivendo le usuali condizioni ai limiti nei due estremi  $A$  e  $B$ , e quattro condizioni nella sezione intermedia  $C$ , dove agisce il vincolo.

In corrispondenza di un appoggio intermedio, in particolare, occorre riprodurre analiticamente quanto avviene nella realtà fisica: l'appoggio sicuramente impone che lo spostamento del punto  $C$  sia nullo, sia che esso venga considerato come ultimo punto del primo tratto, sia che esso venga considerato il primo punto del secondo tratto. Sarà pertanto:

$$\begin{aligned} u_2(L_1) &= 0 \\ v_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (36.4)$$

Poichè poi l'appoggio non interrompe in alcun modo la continuità della trave, la rotazione in  $C$  dovrà essere continua, e quindi:

$$u'_2(L_1) = v'_2(0) \quad (36.5)$$

Queste tre condizioni sono di tipo esclusivamente geometrico, ed esprimono la *congruenza* degli spostamenti e delle rotazioni con il vincolo presente.

Passando all'esame delle caratteristiche, l'appoggio intermedio in  $C$  introduce una reazione verticale, incognita, che impedisce di affermare che il taglio in  $C$  è unico. Viceversa, il momento in  $C$  sarà sicuramente unico, e quindi la quarta ed ultima condizione impone l'uguaglianza dei momenti:

$$-EI_{11}u''_2(L_1) = -EI_{11}v''_2(0) \quad (36.6)$$

Quest'ultima condizione esprime l'*equilibrio* rotazionale della sezione retta in  $C$ , come illustrato in Figura 36.1. Dalla stessa Figura si può dedurre che la reazione dell'appoggio sarà data da:

$$R_C = T_2^{(1)}(L_1) - T_2^{(2)}(0) \quad (36.7)$$

### 36.1.2 Il caso del bipendolo

E' concettualmente possibile introdurre un secondo tipo di vincolo esterno intermedio, duale dell'appoggio, che imponga che la rotazione sia nulla:

$$\begin{aligned} u'_2(L_1) &= 0 \\ v'_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (36.8)$$

mentre la continuità degli abbassamenti è garantita dalla ulteriore condizione:

$$u_2(L_1) = v_2(0) \quad (36.9)$$

Un tal tipo di vincolo, per bloccare la rotazione, dovrà reagire con una coppia, incognita, e quindi il momento sarà discontinuo in  $C$ . Viceversa, il taglio non subirà discontinuità, e quindi l'ultima condizione (di *equilibrio*) sarà:

$$-EI_{11}u'''_2(L_1) = -EI_{11}v'''_2(0) \quad (36.10)$$

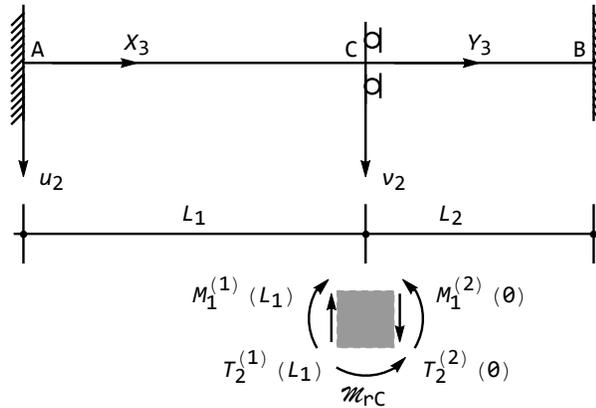


Figura 36.2: Il caso del bipendolo esterno intermedio

Quest'ultima condizione esprime l'*equilibrio* traslazionale della sezione retta in  $C$ , come illustrato in Figura 36.2. Dalla stessa figura si può dedurre che la coppia reattiva del bipendolo sarà data da:

$$\mathcal{M}_{rC} = M_1^{(1)}(L_1) - M_1^{(2)}(0) \quad (36.11)$$

## 36.2 Esempi

Si consideri, quale primo esempio, la trave di Figura 36.3, incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, con un ulteriore appoggio intermedio situato ad un terzo della luce complessiva della trave. Ipotizzando che essa sia soggetta al carico uniformemente distribuito di intensità  $p_0$ , l'abbassamento potrà esprimersi come:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2 x_3 + C_3 x_3^2 + C_4 x_3^3 + p_0 \frac{x_3^4}{24EI_{11}} \quad (36.12)$$

lungo il primo terzo di trave, e come:

$$v_2(y_3) = C_5 + C_6 y_3 + C_7 y_3^2 + C_8 y_3^3 + p_0 \frac{y_3^4}{24EI_{11}} \quad (36.13)$$

lungo la restante porzione di trave. Le otto costanti di integrazione si calcolano imponendo le seguenti condizioni ai limiti:

— nell'incastro di sinistra si impongono le due condizioni di congruenza, annullando spostamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (36.14)$$

— sull'appoggio intermedio le condizioni di congruenza impongono l'annullarsi dello spostamento e l'uguaglianza delle rotazioni, mentre per l'equilibrio del

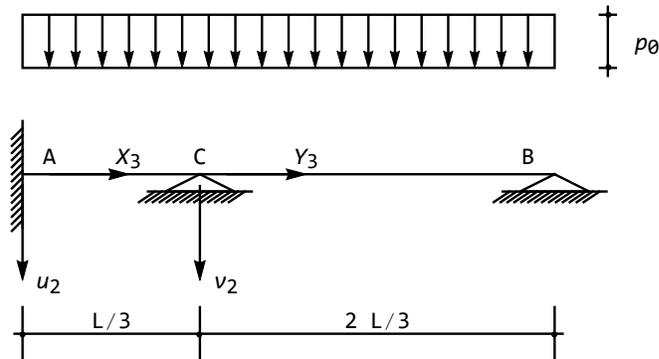


Figura 36.3: La trave incastrata con appoggio ad un terzo della luce, soggetta a carico uniformemente distribuito

concio i momenti flettenti dovranno essere uguali. Se, come in questo caso, la rigidezza flessionale risulta costante, l'ultima condizione equivale ad uguagliare le derivate seconde dell'abbassamento:

$$\begin{aligned}
 u_2\left(\frac{L}{3}\right) &= 0 \\
 v_2(0) &= 0 \\
 u_2'\left(\frac{L}{3}\right) &= v_2'(0) \\
 u_2''\left(\frac{L}{3}\right) &= v_2''(0)
 \end{aligned} \tag{36.15}$$

— sull'appoggio di destra la congruenza impone l'annullarsi dello spostamento, e l'equilibrio alla rotazione implica l'annullarsi del momento flettente (ossia della derivata seconda dell'abbassamento):

$$\begin{aligned}
 v_2\left(2\frac{L}{3}\right) &= 0 \\
 v_2''\left(2\frac{L}{3}\right) &= 0
 \end{aligned} \tag{36.16}$$

Derivando le (36.12) e (36.13), e valutando nei punti opportuni si giunge così ad una sistema di otto equazioni algebriche nelle otto incognite:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 0 \\
 C_2 &= 0 \\
 C_1 + \frac{L}{3}C_2 + \frac{L^2}{9}C_3 + \frac{L^3}{27}C_4 + \frac{p_0L^4}{1944EI_{11}} &= 0 \\
 C_5 &= 0
 \end{aligned} \tag{36.17}$$

$$\begin{aligned}
C_2 + \frac{2L}{3}C_3 + \frac{L^2}{3}C_4 + \frac{p_0L^3}{162EI_{11}} &= C_6 \\
2C_3 + 2LC_4 + \frac{p_0L^2}{18EI_{11}} &= 2C_7 \\
C_5 + \frac{2L}{3}C_6 + \frac{4L^2}{9}C_7 + \frac{8L^3}{27}C_8 + \frac{2p_0L^4}{243EI_{11}} &= 0 \\
2C_7 + 4LC_8 + \frac{2p_0L^2}{9EI_{11}} &= 0
\end{aligned}$$

la cui soluzione può ottenersi con un qualsiasi metodo di calcolo numerico, per sostituzione, con la regola di Cramer, tramite riduzione alla Gauss, etc . . . :

$$\begin{aligned}
C_1 = C_2 = C_5 &= 0 \\
C_3 &= -\frac{p_0L^2}{264EI_{11}} \\
C_4 &= -\frac{p_0L}{396EI_{11}} \\
C_6 &= \frac{5p_0L^3}{1782EI_{11}} \\
C_7 &= \frac{17p_0L^2}{792EI_{11}} \\
C_8 &= -\frac{35p_0L}{528EI_{11}}
\end{aligned} \tag{36.18}$$

Gli spostamenti possono infine scriversi come:

$$\begin{aligned}
u_2(x_3) &= \frac{x_3^2(33x_3^2 - 2Lx_3 - 3L^2)}{792} \frac{p_0}{EI_{11}} \\
v_2(y_3) &= \frac{y_3(40L^3 + 306L^2y_3 - 945Ly_3^2 + 594y_3^3)}{14256} \frac{p_0}{EI_{11}}
\end{aligned} \tag{36.19}$$

da cui, derivando, si possono ottenere rotazioni, momenti e tagli:

$$\begin{aligned}
\phi^{(1)}(x_3) &= -\frac{x_3(22x_3^2 - Lx_3 - L^2)}{132} \frac{p_0}{EI_{11}} \\
\phi^{(2)}(y_3) &= -\frac{(2376y_3^3 - 2835Ly_3^2 + 612L^2y_3 + 40L^3)}{14256} \frac{p_0}{EI_{11}}
\end{aligned} \tag{36.20}$$

$$\begin{aligned}
M_1^{(1)}(x_3) &= -(66x_3^2 - 2Lx_3 - L^2) \frac{p_0}{132} \\
M_1^{(2)}(y_3) &= -(396y_3^2 - 315Ly_3 + 34L^2) \frac{p_0}{792}
\end{aligned} \tag{36.21}$$

$$\begin{aligned}
T_2^{(1)}(x_3) &= (L - 66x_3) \frac{p_0}{66} \\
T_2^{(2)}(y_3) &= (35L - 88y_3) \frac{p_0}{88}
\end{aligned} \tag{36.22}$$

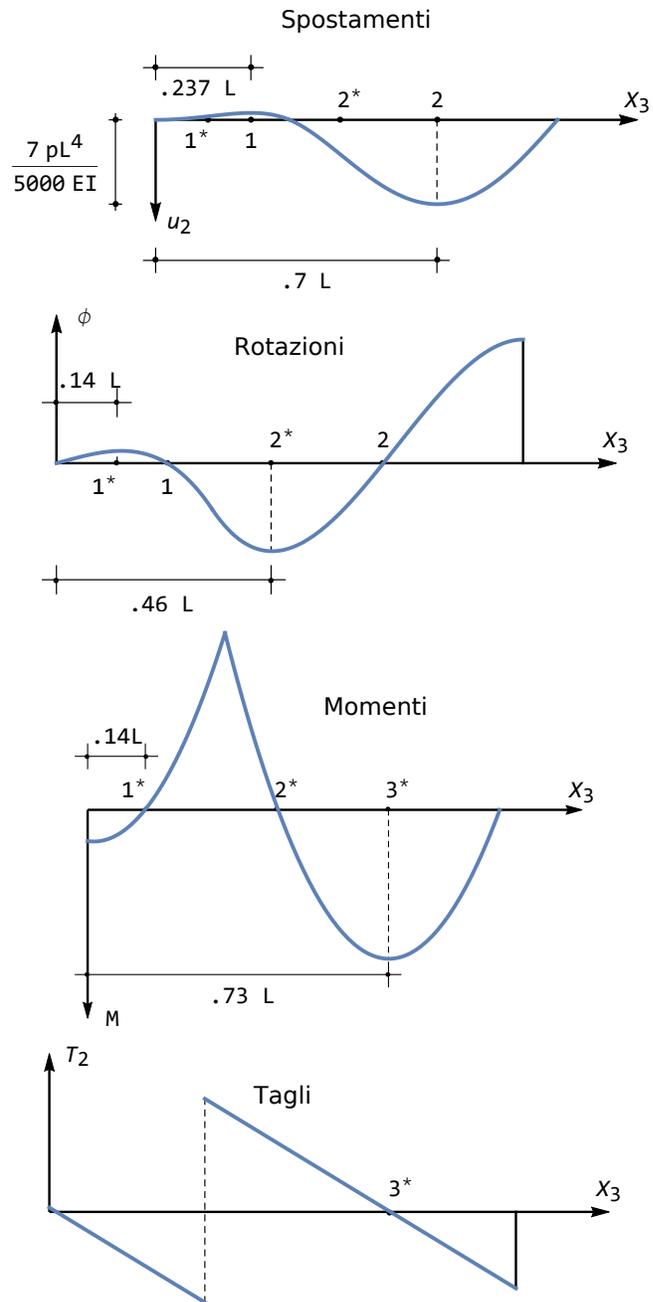


Figura 36.4: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per la trave di Figura 36.3

I relativi diagrammi sono presentati in Figura 36.4, e per il loro tracciamento qualitativo valgono le stesse raccomandazioni valide per le travi ad una sola campata. Si noti solo che i due punti di nullo del diagramma delle rotazioni, 1 e 2, posti rispettivamente alle ascisse  $0.237L$  e  $0.7L$ , corrispondono ai minimi e massimi valori dello spostamento, mentre i punti di nullo del diagramma del momento,  $1^*$  e  $2^*$ , posti rispettivamente a  $0.14L$  e  $0.46L$ , corrispondono a punti di massimo e minimo delle rotazioni, ed a punti di flesso per il diagramma degli spostamenti. Infine, il punto  $3^*$  di nullo del taglio, situato a  $0.73L$ , corrisponde all'ascissa di massimo momento flettente.

Nella trave in esame sono presenti quattro reazioni vincolari, le tre reazioni verticali in  $A$ ,  $B$  e  $C$ , e la coppia reattiva in  $A$ , mentre potranno scriversi solo due equazioni di equilibrio, poichè la trave è costituita da un singolo tratto. Ne segue che essa è doppiamente iperstatica, e le reazioni andranno calcolate *a posteriori*:

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2^{(1)}(0) = -\frac{p_0L}{66} \\ \mathcal{M}_{rA} &= -M_1^{(1)}(0) = -\frac{p_0L^2}{132} \\ R_B &= T_2^{(2)}\left(\frac{2}{3}L\right) = -\frac{71p_0L}{264} \\ R_C &= T_2^{(1)}\left(\frac{L}{3}\right) - T_2^{(2)}(0) = -\frac{63p_0L}{88} \end{aligned} \quad (36.23)$$

### 36.3 I vincoli interni

Si intende per *vincolo intermedio interno*, o *sconnessione*, un dispositivo di vincolo agente in corrispondenza di una sezione retta non di estremità, e che sia tale da interrompere la continuità fisica della trave. Nell'ambito delle strutture considerate, è ipotizzabile una *sconnessione doppia*, che suddivide la trave in due tronchi indipendenti tra di loro, e due *sconnessioni semplici*: la prima, detta *cerniera*, permette ai due tronchi di trave di ruotare intorno ad essa indipendentemente l'uno dall'altro, mentre impone che i due tronchi conservino lo stesso spostamento trasversale. In altri termini, è ammessa una rotazione relativa  $\Delta\phi$  tra le due facce del vincolo. La seconda scconnessione semplice, detta *bipendolo interno*, permette ai due tronchi di trave di subire spostamenti trasversali indipendenti l'uno dall'altro, mentre la rotazione dovrà essere la stessa. Equivalentemente, potrà dirsi che il bipendolo interno permette una traslazione relativa  $\Delta u_2$  tra le sue due facce. Le convenzioni sui segni per gli spostamenti relativi si possono stabilire riconducendo tali spostamenti a spostamenti assoluti, pensando bloccata la parte di sinistra della trave. In tal caso lo spostamento relativo coincide con lo spostamento assoluto della parte di destra, e come tale sarà positivo se antiorario, nel caso della rotazione, e positivo se verso il basso, nel caso dello spostamento. Tutto ciò è riportato nelle Figure 36.5–36.6.

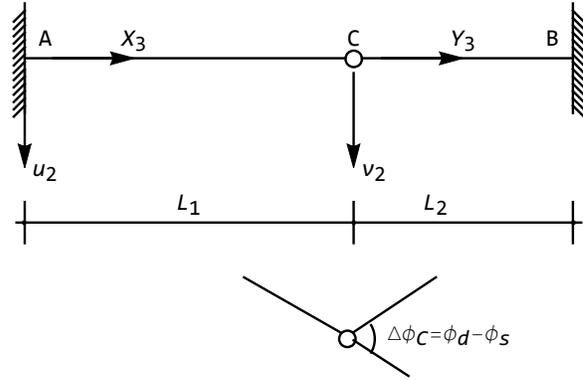


Figura 36.5: La sconnessione semplice del tipo cerniera

### 36.3.1 Il caso della cerniera

Si consideri il caso della Figura 36.5. Una *cerniera intermedia* a distanza  $L_1$  dall'estremo di sinistra permette ai due tratti adiacenti di ruotare in modo indipendente l'uno dall'altro. Viceversa, lo spostamento in corrispondenza della cerniera è unico, e quindi la prima (ed unica) condizione di congruenza è:

$$u_2(L_1) = v_2(0) \quad (36.24)$$

L'equilibrio della stessa cerniera impone poi che i momenti flettenti siano nulli, e che il taglio abbia valore unico:

$$\begin{aligned} -EI_{11}u_2''(L_1) &= 0 \\ -EI_{11}v_2''(0) &= 0 \\ -EI_{11}u_2'''(L_1) &= -EI_{11}v_2'''(0) \end{aligned} \quad (36.25)$$

### 36.3.2 Il caso del bipendolo

Duale della cerniera è il *bipendolo interno*, illustrato in Figura 36.6, che permette ai due tratti adiacenti di muoversi verticalmente in modo indipendente l'uno dall'altro. Viceversa, la rotazione in corrispondenza del bipendolo è unica, e quindi la prima (ed unica) condizione di congruenza è:

$$u_2'(L_1) = v_2'(0) \quad (36.26)$$

L'equilibrio impone poi che il momento flettente sia unico, e che il taglio sia nullo:

$$\begin{aligned} -EI_{11}u_2''(L_1) &= -EI_{11}v_2''(0) \\ -EI_{11}u_2'''(L_1) &= 0 \\ -EI_{11}v_2'''(0) &= 0 \end{aligned} \quad (36.27)$$

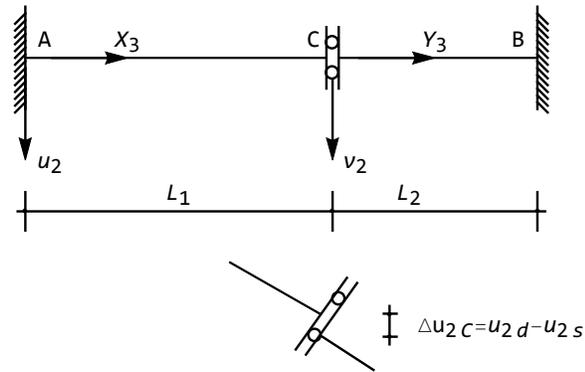


Figura 36.6: La sconnessione semplice del tipo bipendolo

## 36.4 Esempi

Si consideri la trave di Figura 36.7, incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, con una cerniera in mezzeria, soggetta al carico uniformemente distribuito di intensità  $p_0$ . Introdotti i due soliti sistemi di riferimento, gli spostamenti saranno esprimibili, lungo le due semiluci, dalle (36.12–36.13). Le otto condizioni ai limiti che permettono la determinazione delle otto costanti di integrazione si scrivono:

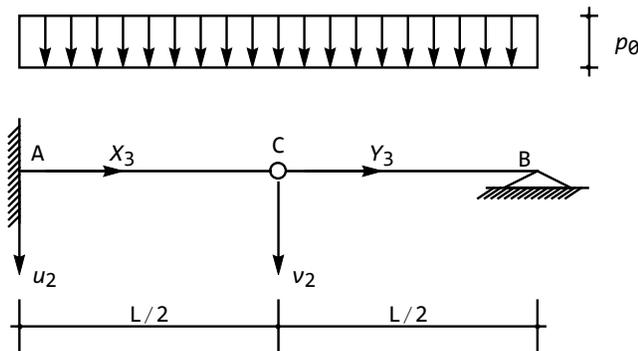


Figura 36.7: Trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, con una cerniera in mezzeria, soggetta al carico uniformemente distribuito

— nell’incastro a sinistra, come usuale, si impongono le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (36.28)$$

— nella cerniera intermedia si scrive la singola equazione di congruenza, che impone la continuità degli spostamenti, e le tre condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 u_2 \left( \frac{L}{2} \right) &= v_2(0) \\
 u_2'' \left( \frac{L}{2} \right) &= 0 \\
 v_2''(0) &= 0 \\
 u_2''' \left( \frac{L}{2} \right) &= v_2'''(0)
 \end{aligned} \tag{36.29}$$

— sull'appoggio di destra, ancora una volta, si annulla lo spostamento ed il momento flettente:

$$\begin{aligned}
 v_2 \left( \frac{L}{2} \right) &= 0 \\
 v_2'' \left( \frac{L}{2} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{36.30}$$

Derivando le (36.12–36.13), e valutando nei punti opportuni si giunge così alle otto equazioni algebriche nelle otto incognite:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 0 \\
 C_2 &= 0 \\
 C_1 + \frac{L}{2}C_2 + \frac{L^2}{4}C_3 + \frac{L^3}{8}C_4 + \frac{p_0L^4}{384EI_{11}} &= C_5 \\
 2C_3 + 3LC_4 + \frac{p_0L^2}{8EI_{11}} &= 0 \\
 C_6 &= 0 \\
 6C_4 + \frac{p_0L}{2EI_{11}} &= 6C_8 \\
 C_5 + \frac{L}{2}C_6 + \frac{L^2}{4}C_7 + \frac{L^3}{8}C_8 + \frac{p_0L^4}{384EI_{11}} &= 0 \\
 2C_7 + 3LC_8 + \frac{p_0L^2}{8EI_{11}} &= 0
 \end{aligned} \tag{36.31}$$

La soluzione del sistema porta alle costanti di integrazione:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_2 = C_7 = 0 \\
 C_3 &= -\frac{p_0L^2}{8EI_{11}} \\
 C_4 &= -\frac{p_0L}{8EI_{11}} \\
 C_5 &= \frac{7}{384} \frac{p_0L^4}{EI_{11}}
 \end{aligned} \tag{36.32}$$

$$C_6 = -\frac{p_0 L^3}{32EI_{11}} \quad (36.33)$$

$$C_8 = -\frac{p_0 L}{24EI_{11}}$$

e ciò permette di esplicitare gli spostamenti come:

$$u_2(x_3) = \frac{x_3^2(x_3^2 - 3Lx_3 + 3L^2)}{24} \frac{p_0}{EI_{11}} \quad (36.34)$$

$$v_2(y_3) = \frac{(7L^4 - 12L^3y_3^2 - 16Ly_3^3 + 16y_3^4)}{384} \frac{p_0}{EI_{11}} \quad (36.35)$$

da cui, derivando, si possono ottenere rotazioni, momenti e tagli:

$$\phi^{(1)}(x_3) = -\frac{x_3(4x_3^2 - 9Lx_3 + 6L^2)}{24} \frac{p_0}{EI_{11}} \quad (36.36)$$

$$\phi^{(2)}(y_3) = -\frac{(16y_3^3 - 12Ly_3^2 - 3L^3)}{96} \frac{p_0}{EI_{11}}$$

$$M_1^{(1)}(x_3) = -(2x_3^2 - 3Lx_3 + L^2) \frac{p_0}{4} \quad (36.37)$$

$$M_1^{(2)}(y_3) = -(2y_3^2 - Ly_3) \frac{p_0}{4}$$

$$T_2^{(1)}(x_3) = (3L - 4x_3) \frac{p_0}{4} \quad (36.38)$$

$$T_2^{(2)}(y_3) = (L - 4y_3) \frac{p_0}{4}$$

I relativi diagrammi sono presentati in Figura 36.8. Il taglio varia con legge lineare, annullandosi a tre quarti della luce, sicchè in questa sezione il diagramma del momento avrà tangente orizzontale, raggiungendo il suo valore massimo:

$$M_{1max} = M_1\left(\frac{3}{4}L\right) = \frac{p_0 L^2}{32} \quad (36.39)$$

Il minimo momento, invece, è raggiunto sull'incastro, e vale:

$$M_{1min} = M_1(0) = -\frac{p_0 L^2}{4} \quad (36.40)$$

Le rotazioni saranno nulle nell'incastro, ed il relativo diagramma presenterà tangente orizzontale laddove il momento è nullo, ossia in mezzeria (dove è presente la cerniera) e sull'appoggio. Inoltre, in corrispondenza della cerniera il diagramma sarà discontinuo, indicando con la discontinuità la presenza di una rotazione relativa  $\Delta\phi$  tra le due facce della cerniera. Si avrà:

$$\Delta\phi = \phi^{(2)}(0) - \phi^{(1)}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{p_0 L^3}{EI_{11}} \left(\frac{1}{32} + \frac{5}{96}\right) = \frac{p_0 L^3}{12EI_{11}} \quad (36.41)$$

Infine, gli abbassamenti saranno nulli agli estremi, il relativo diagramma presenterà tangente orizzontale nell'incastro, la sua curvatura cambierà di segno in

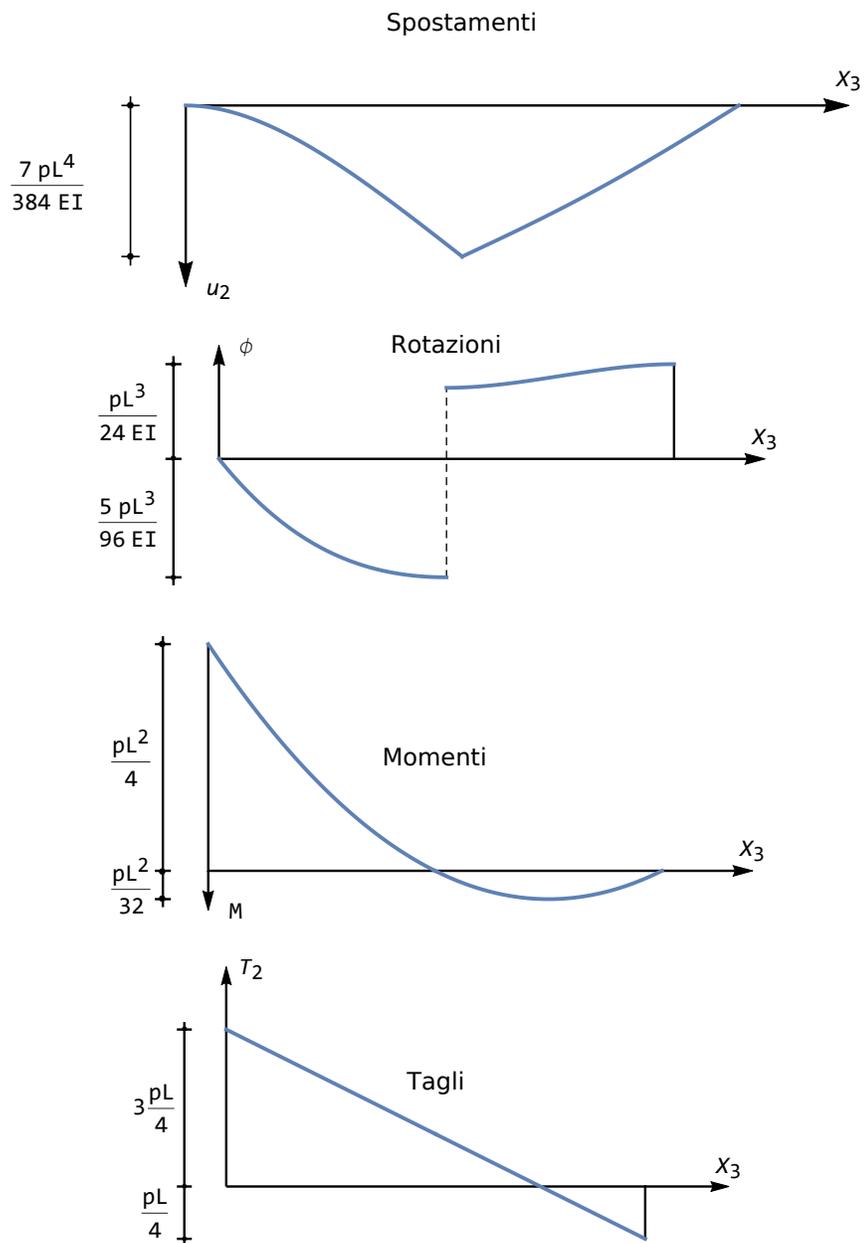


Figura 36.8: Trave incastrata ed appoggiata con cerniera in mezzeria. Diagrammi degli spostamenti, delle rotazioni, dei momenti e dei tagli

mezzeria. L'abbassamento della cerniera coincide con l'abbassamento massimo, e vale:

$$u_{2 \max} = u_2 \left( \frac{L}{2} \right) = v_2(0) = \frac{7}{384} \frac{p_0 L^4}{EI_{11}} \quad (36.42)$$

Le reazioni vincolari possono dedursi dalla conoscenza delle caratteristiche della sollecitazione interna (cfr. 36.9):

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2^{(1)}(0) = -\frac{3}{4} p_0 L \\ R_B &= T_2^{(2)} \left( \frac{L}{2} \right) = -\frac{1}{4} p_0 L \\ \mathcal{M}_{rA} &= -M_1^{(1)}(0) = \frac{p_0 L^2}{4} \end{aligned} \quad (36.43)$$

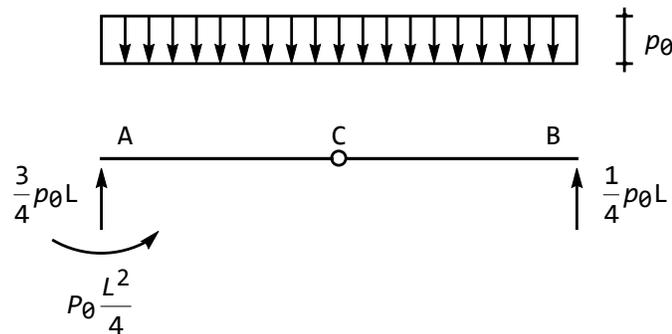


Figura 36.9: Le reazioni per una trave incastrata ed appoggiata con cerniera in mezzeria.

Alternativamente, si consideri che la cerniera spezza la continuità fisica della trave, che può essere vista come un assemblaggio di due travi di luce  $L/2$ , a patto di applicare al punto  $C$  lo sforzo di taglio; per ciascuno dei due tratti devono valere le equazioni di equilibrio per la traslazione verticale e per la rotazione. Si hanno quindi quattro equazioni nelle quattro incognite  $R_A$  ed  $\mathcal{M}_{rA}$ ,  $T_{2C}$  ed  $R_B$ , e la trave risulta isostatica. Le equazioni di equilibrio (cfr. Figura 36.10) sono:

$$\begin{aligned} R_A + T_{2C} + p_0 \frac{L}{2} &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + R_A \frac{L}{2} + p_0 \frac{L^2}{8} &= 0 \\ -T_{2C} + R_B + p_0 \frac{L}{2} &= 0 \\ -T_{2C} \frac{L}{2} + p_0 \frac{L^2}{8} &= 0 \end{aligned} \quad (36.44)$$

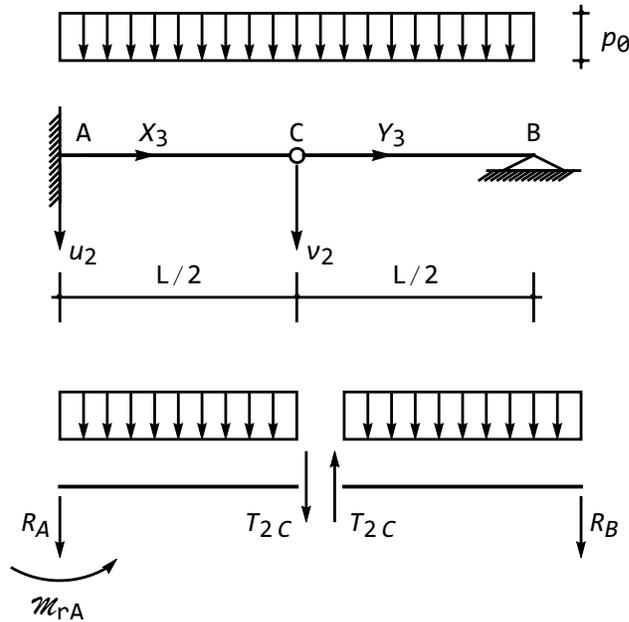


Figura 36.10: Lo schema per il calcolo delle reazioni in una trave incastrata ed appoggiata con cerniera intermedia

e risolvendole si ritrovano i valori (36.43).

Come ulteriore esempio, si consideri la trave di Figura 36.11, appoggiata a sinistra ed incastrata a destra, con un bipendolo interno situato ad un terzo della luce, e soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensità  $p_0$ , agente dall'appoggio fino al bipendolo. Per essa, l'equazione differenziale della linea elastica ha soluzione:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 + p_0 \frac{x_3^4}{24EI_{11}} \quad (36.45)$$

lungo il primo terzo di trave, e:

$$v_2(y_3) = C_5 + C_6y_3 + C_7y_3^2 + C_8y_3^3 \quad (36.46)$$

lungo la restante porzione di trave. Le otto costanti di integrazione si calcolano imponendo le seguenti condizioni ai limiti:

— sull'appoggio di sinistra sono nulli sia gli spostamenti che i momenti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2''(0) &= 0 \end{aligned} \quad (36.47)$$

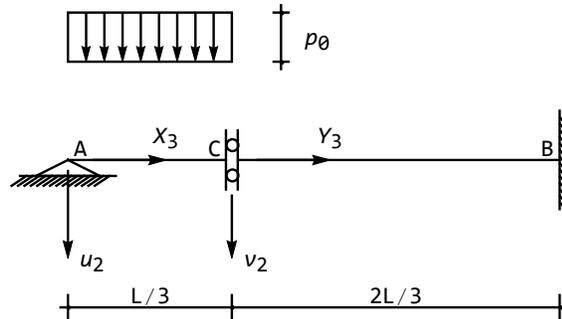


Figura 36.11: Trave appoggiata ed incastrata con bipendolo interno ad un terzo della luce, soggetta a carico uniformemente distribuito sulla sola luce di sinistra

— nel bipendolo interno la rotazione è unica, il momento è unico, ed il taglio è nullo:

$$\begin{aligned}
 u_2' \left( \frac{L}{3} \right) &= v_2'(0) \\
 u_2'' \left( \frac{L}{3} \right) &= v_2''(0) \\
 u_2''' \left( \frac{L}{3} \right) &= 0 \\
 v_2'''(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{36.48}$$

— nell'incastro di destra sono nulli sia gli spostamenti che la rotazione:

$$\begin{aligned}
 v_2 \left( \frac{2L}{3} \right) &= 0 \\
 v_2' \left( \frac{2L}{3} \right) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{36.49}$$

Come sempre, queste otto condizioni si traducono in un sistema di otto equazioni algebriche nelle otto costanti di integrazione con soluzione:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_3 = C_8 = 0 \\
 C_2 &= \frac{4L^3}{81EI_{11}} p_0 \\
 C_4 &= -\frac{L}{18EI_{11}} p_0 \\
 C_5 &= -\frac{L^4}{81EI_{11}} p_0 \\
 C_6 &= \frac{L^3}{27EI_{11}} p_0
 \end{aligned}
 \tag{36.50}$$

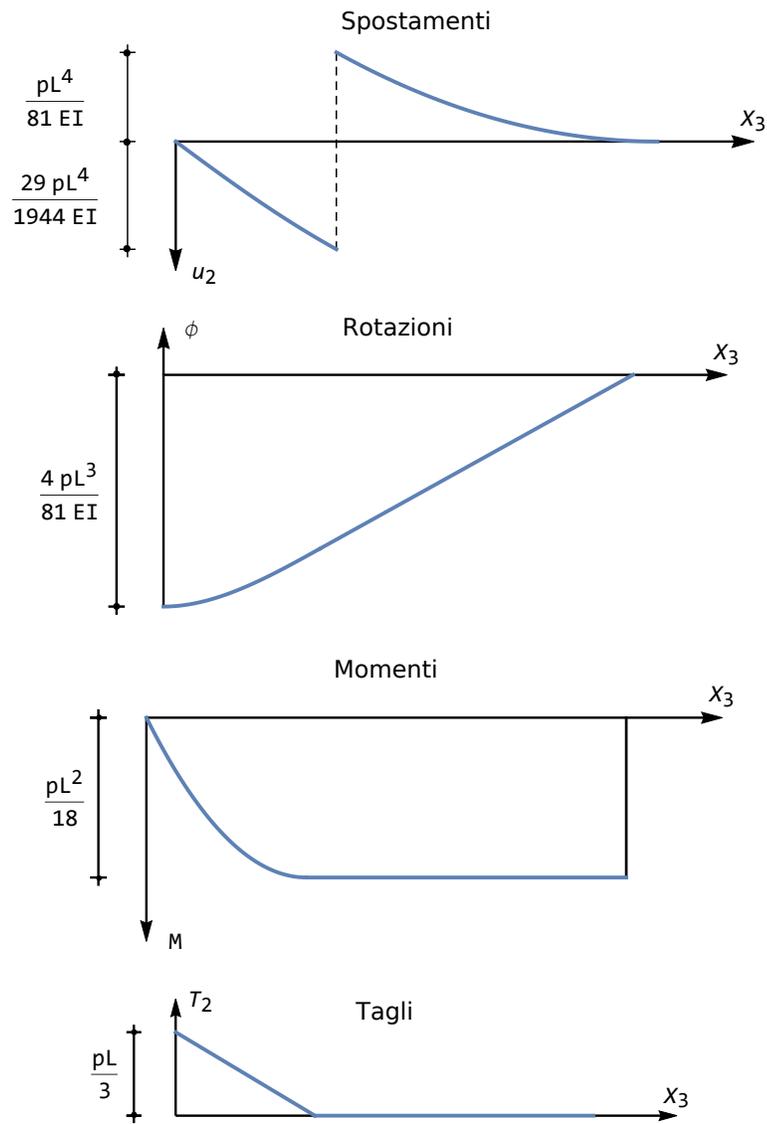


Figura 36.12: Diagrammi degli spostamenti, delle rotazioni, dei momenti e dei tagli per la trave di Figura 36.11

$$C_7 = -\frac{L^2}{36EI_{11}}p_0$$

Gli spostamenti possono allora scriversi:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \frac{x_3(32L^3 - 36Lx_3^2 + 27x_3^3)}{648} \frac{p_0}{EI_{11}} \\ u_2^{(2)}(y_3) &= -\frac{L^2(2L - 3y_3^2)^2}{324} \frac{p_0}{EI_{11}} \end{aligned} \quad (36.51)$$

da cui, derivando, si possono ottenere rotazioni, momenti e tagli:

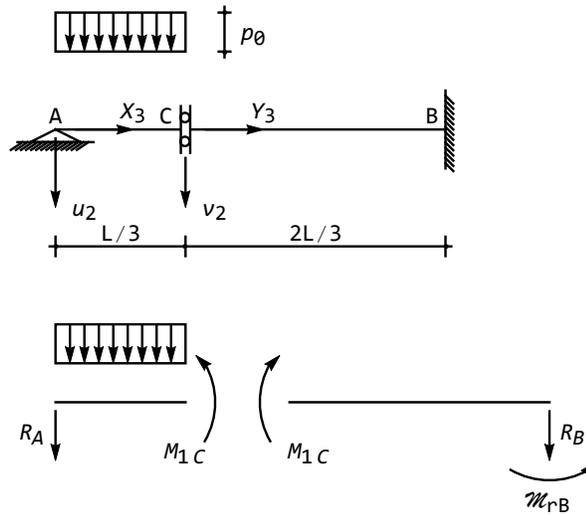


Figura 36.13: Lo schema per il calcolo delle reazioni in una trave appoggiata ed incastrata con un bipendolo interno ad un terzo della luce

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x_3) &= -\frac{(8L^3 - 27Lx_3^2 + 27x_3^3)}{162} \frac{p_0}{EI_{11}} \\ \phi^{(2)}(y_3) &= -\frac{L^2(2L - 3y_3)}{54} \frac{p_0}{EI_{11}} \\ M_1^{(1)}(x_3) &= \frac{p_0}{6}(2L - 3x_3)x_3 \\ M_1^{(2)}(y_3) &= \frac{p_0L^2}{18} \\ T_2^{(1)}(x_3) &= \frac{p_0}{3}(L - 3x_3) \\ T_2^{(2)}(y_3) &= 0 \end{aligned} \quad (36.52)$$

I grafici risultanti sono riprodotti in Figura 36.12, insieme ad alcuni valori notevoli, quali il taglio massimo e la rotazione massima (nell'appoggio), il mo-

mento massimo (lungo il tratto di destra) ed i due valori dello spostamento nelle due facce del bipendolo.

Anche in questo caso la trave risulta isostatica, in quanto essa è composta da due tratti, e quindi si possono scrivere quattro equazioni della statica, necessarie a calcolare la reazione verticale dell'appoggio di sinistra, la reazione verticale e la coppia reattiva dell'incastro a destra, ed il momento agente in  $C$ . Si ha quindi la situazione di Figura 36.13, da cui si possono trarre le quattro reazioni:

$$\begin{aligned}R_A + p_0 \frac{L}{3} &= 0 \longrightarrow R_A = -p_0 \frac{L}{3} \\M_{1C} - p_0 \frac{L}{3} \frac{L}{6} &= 0 \longrightarrow M_{1C} = p_0 \frac{L^2}{18} \\R_B &= 0 \\ \mathcal{M}_{rB} - M_{1C} &= 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{rB} = p_0 \frac{L^2}{18}\end{aligned}\tag{36.53}$$



## Capitolo 37

# Ancora sulle travi a più campate

Nel Capitolo precedente si sono introdotti i vincoli intermedi, suddividendoli in vincoli esterni, che non interrompono la continuità fisica della trave, ma provocano discontinuità nelle caratteristiche della sollecitazione interna, e vincoli interni, che interrompono la continuità fisica della trave, generando quindi discontinuità nelle rotazioni o negli spostamenti.

In questo Capitolo si studieranno invece schemi strutturali caratterizzati dalla presenza di *forze e/o coppie* concentrate, che causano discontinuità nei diagrammi del taglio e/o del momento flettente, mentre un Capitolo successivo sarà dedicato alla presenza di *distorsioni* concentrate, che causano discontinuità nei diagrammi di rotazioni e/o spostamenti, e possono riguardarsi come cedimenti anelastici intermedi.

### 37.1 Le forze concentrate intermedie

La presenza di una forza o di una coppia concentrate agenti in una ascissa intermedia a distanza  $L_1$  dalla sezione di sinistra induce — come detto — una discontinuità nei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione interna, e quindi risulta opportuno anche in questo caso suddividere l'esame della linea elastica nei due tratti  $[0, L_1]$  ed  $[L_1, L]$ . In corrispondenza della sezione retta su cui agisce la forza e/o la coppia, bisognerà scrivere due condizioni di congruenza, esprimenti il fatto che la continuità fisica della trave non è interrotta, e due condizioni di equilibrio, che dovranno garantire l'equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione tra le forze esterne e le caratteristiche della sollecitazione interna.

Le due condizioni di congruenza si scriveranno quindi:

$$\begin{aligned}u_2(L_1) &= v_2(0) \\ u_2'(L_1) &= v_2'(0)\end{aligned}\tag{37.1}$$

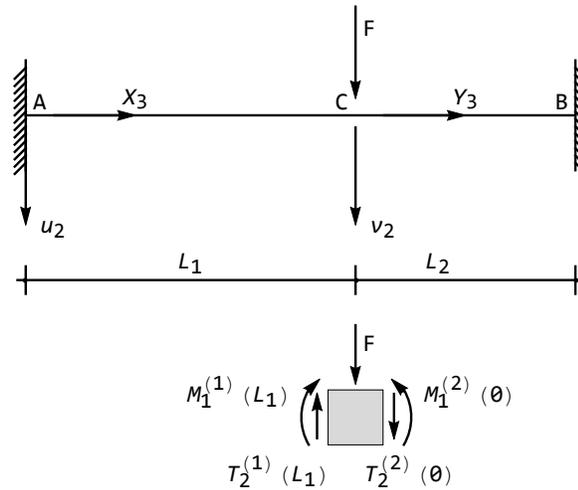


Figura 37.1: La trave in presenza di forza concentrata in una sezione intermedia

mentre le due condizioni di equilibrio possono dedursi dal diagramma di Figura 37.1. Nel caso della forza occorrerà imporre che i momenti non subiscano variazioni, mentre il taglio di sinistra dovrà equilibrare la somma della forza e del taglio di destra:

$$\begin{aligned} M_1^{(1)}(L_1) &= M_1^{(2)}(0) \\ T_2^{(1)}(L_1) - T_2^{(2)}(0) - F &= 0 \end{aligned} \quad (37.2)$$

Se invece agisce una coppia, come in Figura 37.2, il taglio non dovrà subire variazioni, mentre il momento flettente a sinistra dovrà essere pari alla somma della coppia applicata e del momento flettente a destra:

$$M_1^{(1)}(L_1) - M_1^{(2)}(0) - M = 0 \quad (37.3)$$

$$T_2^{(1)}(L_1) = T_2^{(2)}(0) \quad (37.4)$$

## 37.2 Alcuni esempi

Si consideri una trave doppiamente incastrata di luce  $L$ , soggetta ad una forza verticale  $F$  agente nella sezione posta a distanza  $\alpha L$  dalla sezione di sinistra, con  $\alpha \in ]0, 1[$ .

Come usuale, si definiscono due sistemi di riferimento locali, ciascuno con origine nel suo estremo di sinistra, così come illustrato in Figura 37.3. Il primo sistema,  $(O_1, X_2, X_3)$ , ha origine in  $A$  ed è definito in  $[0, \alpha L]$ , il secondo sistema  $(O_2, Y_2, Y_3)$  ha origine in  $C$  ed è definito in  $[0, (1 - \alpha)L]$ .

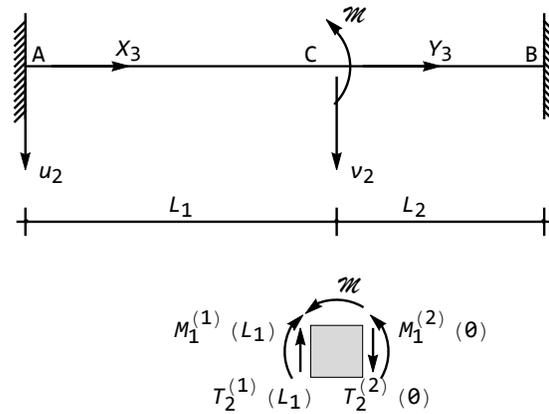


Figura 37.2: La trave in presenza di coppia concentrata in una sezione intermedia

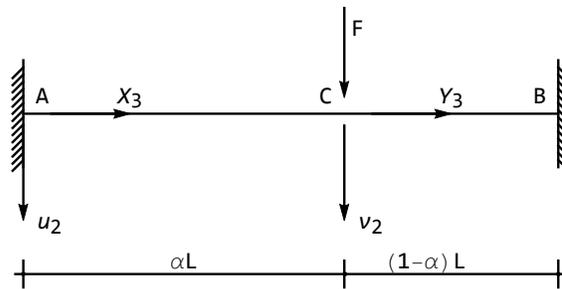


Figura 37.3: Trave doppiamente incastrata con forza concentrata ad una ascissa generica

Se il prodotto  $EI_{11}$  è costante lungo tutta la trave, si possono scrivere le due equazioni della linea elastica:

$$EI_{11}u_2''''(x_3) = 0 \quad (37.5)$$

valida in  $[0, \alpha L]$ , e:

$$EI_{11}v_2''''(y_3) = 0 \quad (37.6)$$

valida in  $[0, (1 - \alpha)L]$ .

Gli integrali generali rappresenteranno due polinomi cubici, stante l'assenza di carichi distribuiti:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 \\ v_2(y_3) &= C_5 + C_6y_3 + C_7y_3^2 + C_8y_3^3 \end{aligned} \quad (37.7)$$

Le otto costanti di integrazione si calcolano imponendo le seguenti condizioni ai limiti:

— nell'incastro di sinistra:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (37.8)$$

— in corrispondenza della forza le due condizioni di congruenza impongono che spostamenti e rotazioni siano uguali, mentre l'equilibrio del concio impone l'uguaglianza dei momenti, ed una discontinuità nel taglio pari all'intensità della forza applicata:

$$\begin{aligned} u_2(\alpha L) &= v_2(0) \\ u_2'(\alpha L) &= v_2'(0) \\ M_1^{(1)}(\alpha L) &= M_1^{(2)}(0) \longrightarrow u_2''(\alpha L) = v_2''(0) \\ T_2^{(1)}(\alpha L) - T_2^{(2)}(0) - F &= 0 \longrightarrow -u_2'''(\alpha L) + v_2'''(0) - \frac{F}{EI_{11}} = 0 \end{aligned} \quad (37.9)$$

— nell'incastro di destra:

$$\begin{aligned} v_2((1-\alpha)L) &= 0 \\ v_2'((1-\alpha)L) &= 0 \end{aligned} \quad (37.10)$$

Derivando le (37.7), e valutando nei punti opportuni si giunge alle otto equazioni algebriche non omogenee nelle otto incognite:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_1 + L\alpha C_2 + L^2\alpha^2 C_3 + L^3\alpha^3 C_4 &= C_5 \\ C_2 + 2L\alpha C_3 + 3L^2\alpha^2 C_4 &= C_6 \\ 2C_3 + 6L\alpha C_4 &= 2C_7 \\ C_4 - C_8 &= -\frac{F}{6EI_{11}} \\ C_5 + L(1-\alpha)C_6 + L^2(1-\alpha)^2 C_7 + L^3(1-\alpha)^3 C_8 &= 0 \\ C_6 + 2L(1-\alpha)C_7 + 3L^2(1-\alpha)^2 C_8 &= 0 \end{aligned} \quad (37.11)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= \frac{FL(-1+\alpha)^2\alpha}{2EI_{11}} \\ C_4 &= -\frac{F(-1+\alpha)^2(1+2\alpha)}{6EI_{11}} \\ C_5 &= -\frac{FL^3(-1+\alpha)^3\alpha^3}{3EI_{11}} \\ C_6 &= -\frac{FL^2(-1+\alpha)^2\alpha^2(-1+2\alpha)}{2EI_{11}} \end{aligned} \quad (37.12)$$

$$C_7 = -\frac{FL(-1+\alpha)^2\alpha^2}{EI_{11}}$$

$$C_8 = \frac{F(3-2\alpha)\alpha^2}{6EI}$$

Gli spostamenti sono allora deducibili inserendo questi valori nelle (37.7):

$$u_2(x_3) = -\frac{Fx_3^2(-1+\alpha)^2(x_3-3L\alpha+2x_3\alpha)}{6EI_{11}}$$

$$v_2(y_3) = -\frac{F(y_3+L(-1+\alpha))^2\alpha^2(2L(-1+\alpha)\alpha+y_3(-3+2\alpha))}{6EI_{11}} \quad (37.13)$$

con le successive derivate a fornire rotazioni, momenti e tagli:

$$\phi^{(1)}(x_3) = \frac{Fx_3(-1+\alpha)^2(x_3-2L\alpha+2x_3\alpha)}{2EI_{11}}$$

$$\phi^{(2)}(y_3) = \frac{F\alpha^2(4Ly_3(-1+\alpha)^2+y_3^2(-3+2\alpha)+L^2(-1+\alpha)^2(-1+2\alpha))}{2EI_{11}}$$

$$M_1^{(1)}(x_3) = F(-1+\alpha)^2(x_3-L\alpha+2x_3\alpha)$$

$$M_1^{(2)}(y_3) = F\alpha^2(2L(-1+\alpha)^2+y_3(-3+2\alpha))$$

$$T_2^{(1)}(x_3) = F(-1+\alpha)^2(1+2\alpha)$$

$$T_2^{(2)}(y_3) = F\alpha^2(-3+2\alpha) \quad (37.14)$$

Un caso particolarmente interessante si ottiene per  $\alpha = \frac{1}{2}$ , ossia quando la forza agisce in mezzzeria. In questo caso l'abbassamento massimo si raggiunge al di sotto della forza, e vale:

$$u_{2max} = \frac{FL^3}{192EI_{11}} = \frac{2}{384} \frac{FL^3}{EI_{11}} \quad (37.15)$$

mentre i momenti massimi e minimi si raggiungono in corrispondenza degli incastri e della mezzzeria:

$$M_{1min} = M_1(0) = M_1(L) = -\frac{FL}{8}$$

$$M_{1max} = M_1\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL}{8} \quad (37.16)$$

I diagrammi si presentano come in Figura 37.4. Si noti che le rotazioni massime e minime vengono attinte ad un quarto ed a tre quarti della luce, laddove i momenti flettenti si annullano. La trave è doppiamente iperstatica, e le reazioni possono facilmente calcolarsi a partire dai valori delle caratteristiche della sollecitazione interna agli estremi.

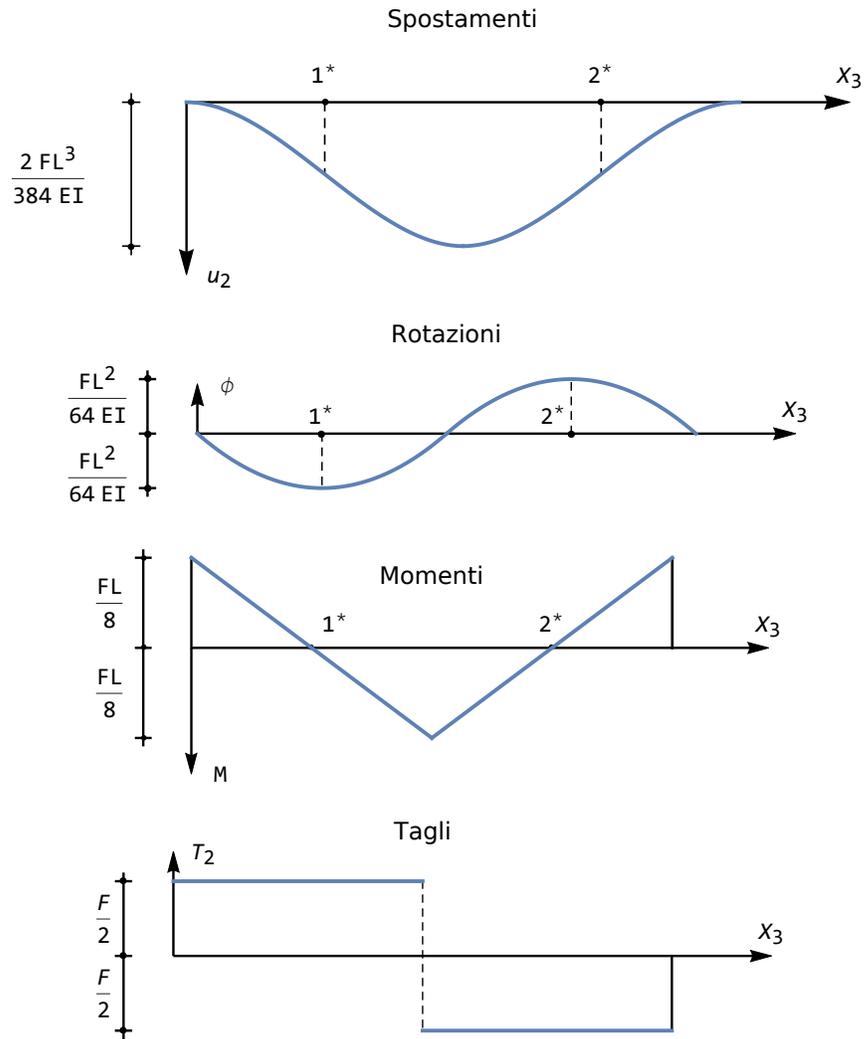


Figura 37.4: La trave doppiamente incastrata in presenza di una forza concentrata in mezziera: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

## Capitolo 38

# La teoria di Timoshenko

Quali sono i limiti della teoria di Eulero–Bernoulli? Come è possibile migliorare la teoria, senza rinunciare alla semplicità analitica ed alla rapidità computazionale? Per rispondere alla prima domanda, conviene ripensare alla incongruenza di base della teoria di Eulero–Bernoulli, già evidenziata nel Capitolo 31: l'impossibilità di definire lo sforzo di taglio come risultante delle azioni elementari  $\sigma_{23}$ , nulle per ipotesi, e la conseguente necessità di definire il taglio tramite considerazioni di equilibrio.

Affrontando il problema da un'altra ottica, può partirsi dalla definizione del taglio come derivata del momento flettente, e poi applicare la *definizione* di taglio come risultante delle azioni elementari:

$$T_2 = \int_{\Sigma} \sigma_{23} \, dA \quad (38.1)$$

Ipotizzando una distribuzione costante di tensione, ed introducendo un *coefficiente correttivo*  $\kappa^1$ , si ha:

$$T_2 = \kappa \sigma_{23} A \quad (38.2)$$

e quindi la tensione tangenziale è:

$$\sigma_{23} = \frac{T_2}{\kappa A} \quad (38.3)$$

A questo punto non può evitarsi la contraddizione insita nella legge tensioni–deformazioni, che porterebbe alla deformazione tagliante:

$$e_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \quad (38.4)$$

che invece è nulla per costruzione. Se però il modulo  $G$  assume valori molto elevati (materiale poco deformabile a taglio), allora si può ragionevolmente tra-

---

<sup>1</sup> “mi pare che è questa l'espressione, di cui evidentemente ignoro il senso esatto, con la quale l'ingegneria designa il trattamento a cui è sottoposta la matematica affinché essa possa applicarsi alla vita” Fernando Pessoa, *Il libro dell'inquietudine* pag.133)

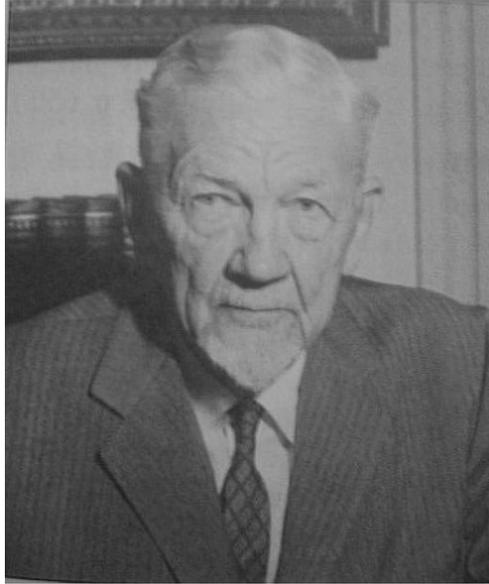


Figura 38.1: S.P. Timoshenko

scurare la deformazione tagliante  $e_{23}$  anche in presenza di un valore finito della tensione e del taglio<sup>2</sup>.

Inoltre, una distribuzione costante di tensioni contraddice l'ipotesi di mantello laterale scarico.

Un miglioramento della teoria di Eulero–Bernoulli è stato proposto da Timoshenko, e coniuga semplicità e vantaggi analitici in modo talmente soddisfacente da essere ormai utilizzato in quasi tutti i codici di calcolo agli elementi finiti.

### 38.1 Le ipotesi di base per la trave di Timoshenko

Si consideri un solido del tipo trave, di lunghezza  $L$ , con una sezione retta caratterizzata da un asse di simmetria rispetto all'asse  $X_1$ , soggetto ai carichi distribuiti  $p(x_3)$  diretti trasversalmente all'asse della trave, ai carichi distribuiti  $t(x_3)$  diretti lungo l'asse, ed alle coppie distribuite  $m(x_3)$ .

<sup>2</sup>In realtà,  $G$  ha dimensioni fisiche di forza per unità di superficie, e quindi parlare di valori “elevati” non ha molto significato. Più preciso risulta introdurre il fattore adimensionale:

$$\alpha = \frac{GAL^2}{EI_{11}} \quad (38.5)$$

e dire che la teoria di Eulero–Bernoulli è tanto più affidabile quanto più elevato risulta il valore di  $\alpha$ .

In generale, seguendo la teoria di De Saint-Venant, si può dire che, per problemi di simmetria e di carico, gli spostamenti  $u_1(x_1, x_2, x_3)$  secondo l'asse  $X_1$  sono nulli. Per quanto riguarda le altre due componenti  $u_2(x_1, x_2, x_3)$  e  $u_3(x_1, x_2, x_3)$ , conviene introdurre ipotesi *ad hoc*, che caratterizzano la particolare teoria utilizzata.

Le ipotesi a base della teoria di Timoshenko sono:

1. gli spostamenti verticali ed assiali dei punti dell'asse dipendono solo dalla variabile  $x_3$ :  $u_2^a = u_2^a(x_3)$ ,  $u_3^a = u_3^a(x_3)$
2. segmenti normali all'asse si conservano segmenti a seguito della deformazione
3. segmenti normali all'asse *non* si conservano normali all'asse deformato, ma ruotano rispetto ad esso di un angolo aggiuntivo  $\psi$ , come illustrato in Figura 38.2.

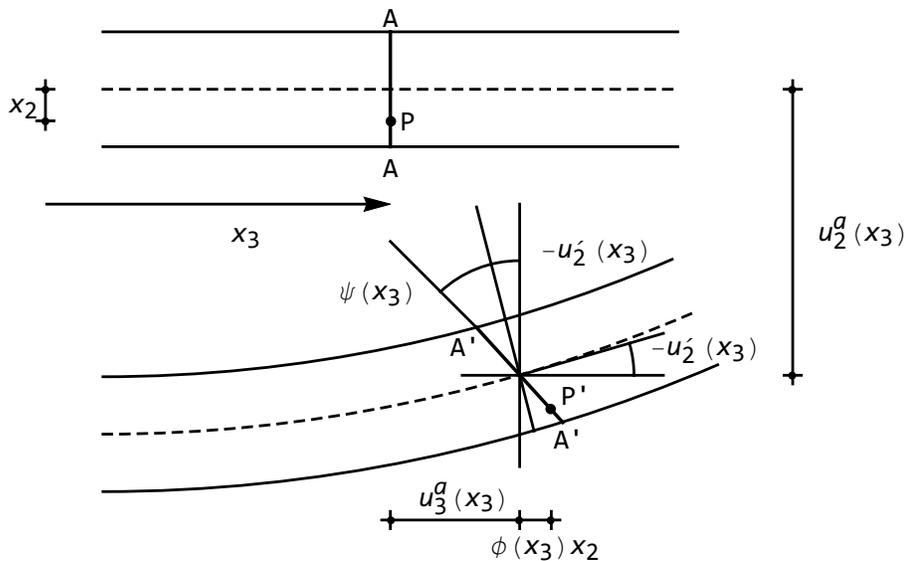


Figura 38.2: Le ipotesi di Timoshenko:  $\phi(x_3) = -u_2'(x_3) + \psi$

Segue dalle tre ipotesi appena formulate, che una sezione retta a distanza  $x_3$  dalla base di sinistra subisce un abbassamento  $u_2(x_3) = u_2^a(x_3)$ , uguale per tutti i punti della sezione, uno spostamento assiale  $u_3(x_2, x_3)$ , ed una rotazione  $\phi(x_3)$  fornita da:

$$\phi(x_3) = -u_2'(x_3) + \psi \quad (38.6)$$

Ne segue che lo spostamento assiale  $u_3(x_2, x_3)$  di un punto generico della sezione retta, situato a distanza  $x_2$  dal baricentro, è pari a:

$$u_3(x_2, x_3) = u_3^a(x_3) + \phi(x_3) x_2 \quad (38.7)$$

dove  $u_3(x_3)$  denota lo spostamento assiale dei punti dell'asse della trave.

Il vettore  $\mathbf{u}$  della terna di spostamenti è fornito pertanto da:

$$\mathbf{u}^T = \{u_1, u_2, u_3\} = \{0, u_2(x_3), u_3(x_3) + \phi(x_3)x_2\} \quad (38.8)$$

Le corrispondenti deformazioni sono deducibili a partire dalle ben note leggi che legano le deformazioni alle derivate prime degli spostamenti:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\ e_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (u_2'(x_3) + \phi(x_3)) = \frac{1}{2} \psi(x_3) \\ e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{du_3}{dx_3} + x_2 \frac{d\phi}{dx_3} = u_3'(x_3) + x_2 \phi'(x_3) \end{aligned} \quad (38.9)$$

Le componenti di tensione  $\sigma_{23}$  e  $\sigma_{33}$ , in ipotesi di validità della legge di Hooke, sono fornite da:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= E (u_3'(x_3) + x_2 \phi'(x_3)) \\ \sigma_{23} &= G (u_2'(x_3) + \phi(x_3)) \end{aligned} \quad (38.10)$$

Ne segue che le caratteristiche sforzo normale  $N(x_3)$ , momento flettente  $M_1(x_3)$  e taglio  $T_2(x_3)$  possono calcolarsi come:

$$N = \int_{\Sigma} E (u_3'(x_3) + x_2 \phi'(x_3)) \, dA = EA u_3'(x_3) \quad (38.11)$$

$$M_1 = \int_{\Sigma} E (x_2 u_3'(x_3) + x_2^2 \phi'(x_3)) \, dA = EI_{11} \phi'(x_3) \quad (38.12)$$

$$T_2 = \int_{\Sigma} G (u_2'(x_3) + \phi(x_3)) \, dA \quad (38.13)$$

Nota - Lo sforzo normale non è influenzato dalla ipotesi di Timoshenko, e la sua trattazione resta disaccoppiata da quella dello sforzo di taglio-momento flettente.

Nota - La seconda delle (38.10) indica che la tensione tangenziale non dipende dalla variabile  $x_2$ , e quindi è in contraddizione con l'ipotesi di De Saint-Venant sulla superficie laterale scarica. Per tener conto della effettiva distribuzione

delle tensioni tangenziali lungo  $x_2$ , si introduce, secondo Timoshenko, un fattore correttivo  $\kappa$ , detto *fattore di taglio*, scrivendo, al posto della (38.13):

$$T_2 = \int_{\Sigma} G(u_2'(x_3) + \phi(x_3)) \, dA = GA\kappa\psi(x_3) \quad (38.14)$$

Si può dimostrare che  $\kappa$  è minore di uno, e spesso si introduce l'area ridotta della sezione retta  $A_s = \kappa A$ , detta *area efficace a taglio*.

Nota - L'incongruenza della teoria di Eulero–Bernoulli è stata superata, e la condizione di equilibrio:

$$T_2(x_3) = \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} \quad (38.15)$$

non deve più essere utilizzata come definizione, ma si traduce nella relazione:

$$GA\kappa(u_2'(x_3) + \phi(x_3)) = EI_{11}\phi''(x_3) \quad (38.16)$$

## 38.2 Lo studio della linea elastica

Si parte dalla definizione dell'energia potenziale totale, somma dell'energia elastica e dell'energia potenziale dei carichi. Ipotizzando la presenza di carichi trasversali  $p$ , di carichi assiali  $t$  e di coppie flettenti distribuite  $m$  si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{1}{2} \int_B Ee_{33}^2 \, dV + \frac{1}{2} \int_B 4Ge_{23}^2 \, dV \\ &\quad - \int_0^L p(x_3) u_2(x_3) \, dx_3 - \int_0^L t(x_3) u_3(x_3) \, dx_3 - \int_0^L m(x_3) \phi(x_3) \, dx_3 \end{aligned} \quad (38.17)$$

Utilizzando la (??) e la (38.9), si può esprimere l'energia elastica come:

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{1}{2} \int_0^L EAu_3'^2(x_3) \, dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI\phi'^2(x_3) \, dx_3 + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^L GA_s(u_2'(x_3) + \phi(x_3))^2 \, dV - \int_0^L p(x_3) u_2(x_3) \, dx_3 - \\ &\quad \int_0^L t(x_3) u_3(x_3) \, dx_3 - \int_0^L m(x_3) \phi(x_3) \, dx_3 \end{aligned} \quad (38.18)$$

ed ora la variazione di  $E_t$  rispetto alle variabili  $u_3$ ,  $u_3'$ ,  $u_2$ ,  $u_2'$ ,  $\phi$  e  $\phi'$  può

agevolmente essere dedotta, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 \delta E_t &= E_t (u_3 + \delta u_3, u'_3 + \delta u'_3, u_2 + \delta u_2, u'_2 + \delta u'_2, \phi + \delta \phi, \phi' + \delta \phi') \\
 &\quad - E_t (u_3, u'_3, u_2, u'_2, \phi, \phi') = \\
 &\quad \frac{1}{2} \int_0^L EA (u'_3 + \delta u'_3)^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} (\phi' + \delta \phi')^2 dx_3 + \\
 &\quad \frac{1}{2} \int_0^L GA_s (u'_2 + \delta u'_2 + \phi + \delta \phi)^2 dx_3 - \\
 &\quad \int_0^L p (u_2 + \delta u_2) dx_3 - \int_0^L t (u_3 + \delta u_3) dx_3 - \int_0^L m (\phi + \delta \phi) dx_3 - \\
 &\quad \frac{1}{2} \int_0^L EA u_3'^2 dx_3 - \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} \phi'^2 dx_3 - \frac{1}{2} \int_0^L GA_s (u'_2 + \phi)^2 dx_3 + \\
 &\quad \int_0^L p u_2 dx_3 + \int_0^L t u_3 dx_3 + \int_0^L m \phi dx_3
 \end{aligned} \tag{38.19}$$

Svolgendo i quadrati e semplificando si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \delta E_t &= \int_0^L EA u_3' \delta u_3' dx_3 + \int_0^L EI_{11} \phi' \delta \phi' dx_3 + \int_0^L GA_s (u'_2 + \phi) \delta u_2' dx_3 + \\
 &\quad \int_0^L GA_s (u'_2 + \phi) \delta \phi dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 - \int_0^L m \delta \phi dx_3 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L EA \delta u_3'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} \delta \phi'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L GA_s (\delta u_2' + \delta \phi)^2 dx_3
 \end{aligned} \tag{38.20}$$

Ne segue che la variazione dell'energia potenziale totale si esaurisce in due alquote: la prima, lineare, e la seconda quadratica:

$$\begin{aligned}
 \delta_1 E_t &= \int_0^L EA u_3' \delta u_3' dx_3 + \int_0^L EI_{11} \phi' \delta \phi' dx_3 + \int_0^L GA_s (u'_2 + \phi) \delta u_2' dx_3 + \\
 &\quad \int_0^L GA_s (u'_2 + \phi) \delta \phi dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 - \int_0^L m \delta \phi dx_3
 \end{aligned} \tag{38.21}$$

$$\delta_2 E_t = \frac{1}{2} \int_0^L EA \delta u_3'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} \delta \phi'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L GA_s (\delta u_2' + \delta \phi)^2 dx_3 \tag{38.22}$$

Per il principio di stazionarietà, la parte lineare si annulla in corrispondenza della soluzione del problema dell'equilibrio elastico, e quindi:

$$\begin{aligned} \delta_1 E_t = & \int_0^L EAu'_3 \delta u'_3 dx_3 + \int_0^L EI_{11} \phi' \delta \phi' dx_3 + \int_0^L GA_s (u'_2 + \phi) \delta u'_2 dx_3 + \\ & \int_0^L GA_s (u'_2 + \phi) \delta \phi dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 - \int_0^L m \delta \phi dx_3 = 0 \end{aligned} \quad (38.23)$$

I primi tre integrali della (38.23) possono integrarsi per parti una volta, ottenendo:

$$\begin{aligned} \int_0^L u'_3 \delta u'_3 dx_3 &= [u'_3 \delta u_3]_0^L - \int_0^L u''_3 \delta u_3 dx_3 \\ \int_0^L \phi' \delta \phi' dx_3 &= [\phi' \delta \phi]_0^L - \int_0^L \phi'' \delta \phi dx_3 \\ \int_0^L (u'_2 + \phi) \delta u'_2 dx_3 &= [(u'_2 + \phi) \delta u_2]_0^L - \int_0^L (u''_2 + \phi') \delta u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (38.24)$$

Inserendo queste relazioni nella (38.23) si giunge a scrivere:

$$\begin{aligned} \int_0^L [(EAu''_3 + t) \delta u_3 + (EI_{11} \phi'' + m - GA_s (u'_2 + \phi)) \delta \phi + \\ (GA_s (u''_2 + \phi') + t) \delta u_2] dx_3 + \\ + [EAu'_3 \delta u_3]_0^L + [EI_{11} \phi' \delta \phi]_0^L + [GA_s (u'_2 + \phi) \delta u_2]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (38.25)$$

Le variazioni  $\delta u_3$ ,  $\delta \phi$ , e  $\delta u_2$  sono arbitrarie, e quindi dovranno annullarsi le tre quantità in parentesi, conducendo alle tre equazioni differenziali in  $u_3$ ,  $\phi$ , ed  $u_2$ :

$$\begin{aligned} EAu''_3 &= -t \\ EI_{11} \phi'' - GA_s (u'_2 + \phi) &= -m \\ GA_s (u''_2 + \phi') &= -p \end{aligned} \quad (38.26)$$

Le restanti quantità dovranno annullarsi ai due estremi della trave. Per lo spostamento  $u_3$  dovrà quindi essere:

$$\begin{aligned} EAu'_3(0) \delta u_3(0) &= 0 \\ EAu'_3(L) \delta u_3(L) &= 0 \end{aligned} \quad (38.27)$$

mentre per lo spostamento  $u_2$  e la rotazione  $\phi$  sarà necessariamente:

$$\begin{aligned} EI_{11} \phi'(0) \delta \phi(0) &= 0 \\ EI_{11} \phi'(L) \delta \phi(L) &= 0 \end{aligned} \quad (38.28)$$

$$\begin{aligned} GA_s (\phi(0) + u'_2(0)) \delta u_2(0) &= 0 \\ GA_s (\phi(L) + u'_2(L)) \delta u_2(L) &= 0 \end{aligned} \quad (38.29)$$

Nota Lo studio della funzione  $u_3$  degli spostamenti assiali è completamente separato dallo studio delle altre due funzioni, come già detto. Invece le ultime due equazioni delle (38.26) rappresentano un sistema accoppiato di due equazioni differenziali del secondo ordine.

Esercizio 1 - Generalizzare le equazioni (38.26) al caso di trave a sezione variabile.

Esercizio 2 - Utilizzare il principio degli spostamenti virtuali per riottenere le equazioni della linea elastica e le corrispondenti condizioni ai limiti

Esercizio 3 - Utilizzare l'approccio geometrico per riottenere le equazioni della linea elastica

### 38.2.1 Le condizioni di vincolo

E' inutile studiare il problema assiale, non modificato rispetto al caso di Eulero-Bernoulli. Per quanto riguarda il problema flessionale, invece, in base alla (38.12) ed alla (38.14) le condizioni (38.28) e (38.29) si possono scrivere:

$$\begin{aligned} M_1(0)\delta\phi(0) &= 0 \\ M_1(L)\delta\phi(L) &= 0 \\ T_2(0)\delta u_2(0) &= 0 \\ T_2(L)\delta u_2(L) &= 0 \end{aligned} \tag{38.30}$$

Agli estremi della trave, pertanto, si possono simulare queste condizioni di vincolo:

- Estremo incastrato  $\rightarrow u_2 = 0$  e  $\phi = 0$
- Estremo appoggiato  $\rightarrow u_2 = 0$  e  $M_1 = 0$ , ossia  $\phi' = 0$
- Estremo con bipendolo  $\rightarrow \phi = 0$  e  $T_2 = 0$ , ossia  $u_2' + \phi = 0$
- Estremo libero  $\rightarrow M_1 = 0$ , ossia  $\phi' = 0$  e  $T_2 = 0$ , ossia  $u_2' + \phi = 0$

## 38.3 La trave a mensola con forza all'estremo libero

Le equazioni da risolvere per il caso illustrato nel titolo sono:

$$\begin{aligned} EI\phi'' - GA_s(u_2' + \phi) &= 0 \\ GA_s(u_2'' + \phi') &= 0 \end{aligned} \tag{38.31}$$

con le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \\ M(L) = EI\phi'(L) &= 0 \\ T(L) = GA_s(\phi(L) + u_2'(L)) &= F \end{aligned} \tag{38.32}$$

dove  $F$  è il valore della forza applicata nell'estremo libero. (cfr. Figura 38.3)

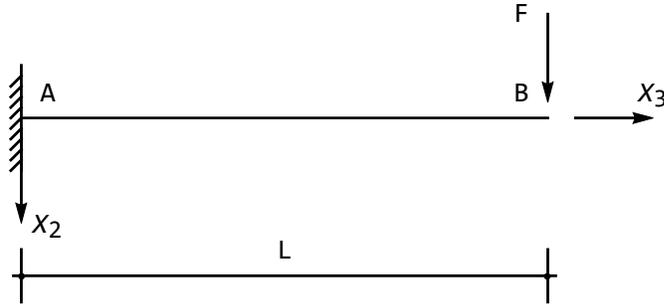


Figura 38.3: Trave a mensola con forza all'estremo

Per affrontare questo problema, si inizi ad integrare la seconda delle (38.31):

$$GA_s (u'_2 + \phi) = C_1 \quad (38.33)$$

e per la quarta condizione ai limiti si ha subito  $C_1 = F$ . Ne segue che la relazione precedente diviene:

$$GA_s (u'_2 + \phi) = F \quad (38.34)$$

Sostituendo questa relazione nella prima delle (38.31) si ha:

$$EI\phi'' = F \quad (38.35)$$

e quindi subito:

$$\phi' = \frac{Fx_3}{EI} + C_2 \quad (38.36)$$

$$\phi = \frac{Fx_3^2}{2EI} + C_2x_3 + C_3 \quad (38.37)$$

La seconda e terza condizione ai limiti permettono di calcolare le due costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} \phi(0) = 0 &\longrightarrow C_3 = 0 \\ \phi'(L) = 0 &\longrightarrow C_2 = -\frac{FL}{EI} \end{aligned} \quad (38.38)$$

e quindi la rotazione è data da:

$$\phi(x_3) = \frac{Fx_3}{EI} \left( \frac{x_3}{2} - L \right) \quad (38.39)$$

Infine, dalla (38.34) si può scrivere:

$$u'_2 = \frac{F}{GA_s} - \phi = \frac{F}{GA_s} + \frac{Fx_3}{EI} \left( L - \frac{x_3}{2} \right) \quad (38.40)$$

e quindi l'abbassamento è dato da:

$$u_2 = \frac{Fx_3}{GA_s} + \frac{Fx_3^2}{2EI} \left( L - \frac{x_3}{3} \right) + C_4 \quad (38.41)$$

La costante di integrazione, comunque, si annulla per la prima condizione ai limiti, giungendo a:

$$u_2(x_3) = \frac{Fx_3}{GA_s} + \frac{Fx_3^2}{2EI} \left( L - \frac{x_3}{3} \right) \quad (38.42)$$

### 38.3.1 Discussione dei risultati

La rotazione all'estremo libero è:

$$\phi(L) = -\frac{FL^2}{2EI} \quad (38.43)$$

e quindi coincide con quanto predetto dalla teoria di Eulero–Bernoulli.

L'abbassamento nell'estremo libero è invece fornito da:

$$u_2(L) = \frac{FL}{GA_s} + \frac{FL^3}{3EI} \quad (38.44)$$

Si ha quindi una aliquota flessionale, uguale a quella predetta da Eulero–Bernoulli, ed una aliquota addizionale tagliante, che si viene a sommare alla aliquota classica. Si vede subito che all'aumentare della luce, l'influenza del termine flessionale diviene dominante. Per evidenziare l'influenza del taglio, è opportuno riscrivere l'abbassamento come:

$$u_2(L) = \frac{FL^3}{3EI} \left( 1 + \frac{3}{L^2} \frac{EI}{GA_s} \right) = \frac{FL^3}{3EI} \left( 1 + \frac{3}{\alpha} \right) \quad (38.45)$$

Si è introdotto il parametro adimensionale:

$$\alpha = \frac{GA_s L^2}{EI} \quad (38.46)$$

che ben misura l'importanza relativa delle deformazioni da taglio rispetto agli effetti flessionali. Per  $\alpha \rightarrow \infty$  si ritrovano i risultati classici di Eulero–Bernoulli.

### 38.3.2 Esempio numerico

Si consideri una trave di luce  $L = 5$  metri, a sezione retta rettangolare di base  $b = 50$  centimetri ed altezza  $h = 80$  centimetri, e quindi con area  $A = bh$  ed inerzia  $I = b h^3 / 12$ . Inoltre, il modulo di Young sia pari a  $300.000 \text{ Kg/cm}^2$ , il coefficiente  $\nu$  di Poisson sia pari a  $0.25$ , ed il fattore di taglio sia pari a  $\kappa = 0.85$ .

Per studiare l'influenza relativa del taglio si calcola la parte flessionale dello spostamento all'estremo libero, dovuto ad una forza unitaria:

$$u_f = \frac{L^3}{3EI} = 0.0000651042 \text{ cm} \quad (38.47)$$

ed analogamente la parte tagliante dello stesso spostamento:

$$u_t = \frac{L}{\kappa GA} = 1.2255 \times 10^{-6} \text{ cm} \quad (38.48)$$

L'influenza relativa delle deformazioni taglianti è quindi calcolabile come  $\frac{u_t}{u_t + u_f}$ , ed è in questo caso pari a circa 1.8 per cento.

### 38.4 La trave a mensola con carico distribuito

Le equazioni da risolvere per il caso illustrato nel titolo sono:

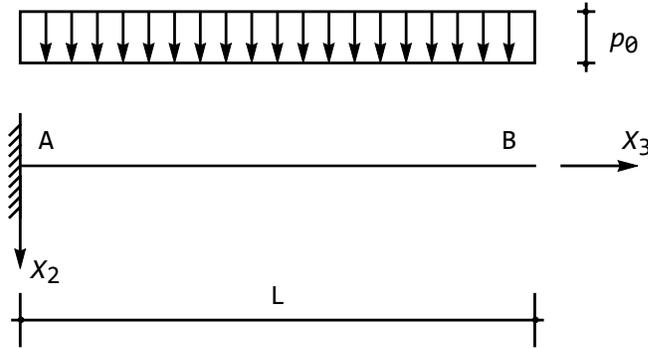


Figura 38.4: Trave a mensola soggetta a carico distribuito

$$\begin{aligned} EI\phi'' - GA_s(u_2' + \phi) &= 0 \\ GA_s(u_2'' + \phi') &= -p \end{aligned} \quad (38.49)$$

con le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \\ M(L) = EI\phi'(L) &= 0 \\ T(L) = GA_s(\phi(L) + u_2'(L)) &= 0 \end{aligned} \quad (38.50)$$

dove  $p$  è il valore del carico distribuito. (cfr. Figura 38.4)

Per affrontare questo problema, si inizi ad integrare la seconda delle (38.49):

$$GA_s(u_2' + \phi) = -px_3 + C_1 \quad (38.51)$$

e per la quarta condizione ai limiti si ha subito  $C_1 = pL$ . Ne segue che l'espressione precedente diviene:

$$GA_s(u_2' + \phi) = p(L - x_3) \quad (38.52)$$

Sostituendo questa relazione nella prima delle (38.49) si ha:

$$EI\phi'' = p(L - x_3) \quad (38.53)$$

e quindi subito:

$$\phi' = \frac{px_3}{EI} \left( L - \frac{x_3}{2} \right) + C_2 \quad (38.54)$$

$$\phi = \frac{px_3^2}{2EI} \left( L - \frac{x_3}{3} \right) + C_2x_3 + C_3 \quad (38.55)$$

La seconda e terza condizione ai limiti permettono di calcolare le due costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} \phi(0) = 0 &\longrightarrow C_3 = 0 \\ \phi'(L) = 0 &\longrightarrow C_2 = -\frac{pL^2}{2EI} \end{aligned} \quad (38.56)$$

e quindi la rotazione è data da:

$$\phi(x_3) = -\frac{px_3}{2EI} \left( L^2 - Lx_3 + \frac{x_3^2}{3} \right) \quad (38.57)$$

Infine, dalla (38.52) si può scrivere:

$$u'_2 = \frac{p(L - x_3)}{GA_s} - \phi = \frac{p(L - x_3)}{GA_s} + \frac{px_3}{2EI} \left( L^2 - \frac{Lx_3}{2} + \frac{x_3^2}{3} \right) \quad (38.58)$$

e quindi l'abbassamento è dato da:

$$u_2 = \frac{px_3}{GA_s} \left( L - \frac{x_3}{2} \right) + \frac{px_3^2}{EI} \left( \frac{L^2}{4} - \frac{Lx_3}{6} + \frac{x_3^2}{24} \right) \quad (38.59)$$

annullandosi anche in questo caso la costante di integrazione, per la prima condizione ai limiti.

### 38.4.1 Discussione dei risultati

La rotazione all'estremo libero è:

$$\phi(L) = -\frac{pL^3}{6EI} \quad (38.60)$$

e quindi coincide con quanto predetto dalla teoria di Eulero-Bernoulli.

L'abbassamento nell'estremo libero è invece fornito da:

$$u_2(L) = \frac{pL^2}{2GA_s} + \frac{pL^4}{8EI} = \frac{pL^4}{8EI} \left( 1 + \frac{4}{\alpha} \right) \quad (38.61)$$

### 38.5 La trave appoggiata con carico distribuito

Le equazioni da risolvere per il caso illustrato nel titolo sono (cfr. Figura 38.5):

$$\begin{aligned} EI\phi'' - GA_s(u_2' + \phi) &= 0 \\ GA_s(u_2'' + \phi') &= -p \end{aligned} \quad (38.62)$$

con le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ \phi'(0) &= 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ \phi'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (38.63)$$

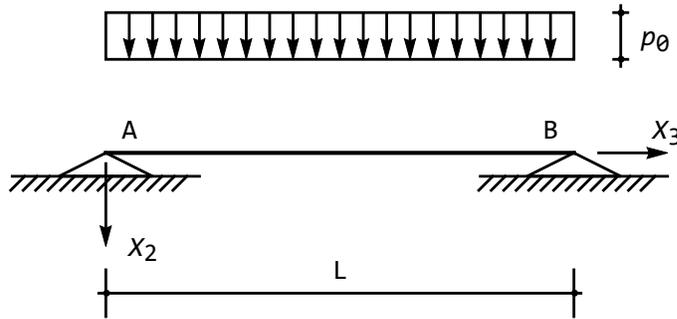


Figura 38.5: Trave appoggiata soggetta a carico distribuito

Per affrontare questo problema, si inizi ad integrare la seconda delle (38.62):

$$GA_s(u_2' + \phi) = -px_3 + C_1 \quad (38.64)$$

e la si sostituisca nella prima delle (38.62):

$$EI\phi'' + px_3 - C_1 = 0 \quad (38.65)$$

Integrando due volte si ottiene la rotazione:

$$\phi' = -\frac{px_3^2}{2EI} + \frac{C_1x_3}{EI} + C_2 \quad (38.66)$$

$$\phi = -\frac{px_3^3}{6EI} + \frac{C_1x_3^2}{2EI} + C_2x_3 + C_3 \quad (38.67)$$

La seconda e quarta condizione ai limiti permettono di calcolare le due costanti di integrazione  $C_1$  e  $C_2$ :

$$\begin{aligned} \phi'(0) = 0 &\longrightarrow C_2 = 0 \\ \phi'(L) = 0 &\longrightarrow C_1 = \frac{pL}{2} \end{aligned} \quad (38.68)$$

e quindi infine la rotazione può scriversi come:

$$\phi = -\frac{px_3^3}{6EI} + \frac{pLx_3^2}{4EI} + C_3 \quad (38.69)$$

Infine, dalla (38.64) si può scrivere:

$$u_2' = \frac{p(L-x_3)}{GA_s} - \phi = \frac{p(L-x_3)}{GA_s} + \frac{px_3^3}{6EI} - \frac{pLx_3^2}{4EI} - C_3 \quad (38.70)$$

ed integrando si giunge a scrivere l'abbassamento come:

$$u_2 = \frac{px_3}{2GA_s} (L-x_3) + \frac{px_3^4}{24EI} - \frac{pLx_3^3}{12EI} - C_3x_3 + C_4 \quad (38.71)$$

Le condizioni ai limiti su  $u_2$  impongono che sia:

$$\begin{aligned} C_4 &= 0 \\ \frac{pL^4}{24EI} - \frac{pL^4}{12EI} - C_3L + C_4 &= 0 \longrightarrow C_3 = -\frac{pL^3}{24EI} \end{aligned} \quad (38.72)$$

e quindi infine:

$$u_2 = \frac{px_3}{2GA_s} (L-x_3) + \frac{px_3^4}{24EI} - \frac{pLx_3^3}{12EI} + \frac{pL^3x_3}{24EI} \quad (38.73)$$

$$\phi = -\frac{px_3^3}{6EI} + \frac{pLx_3^2}{4EI} - \frac{pL^3}{24EI} \quad (38.74)$$

### 38.5.1 Discussione dei risultati

La rotazione in corrispondenza degli appoggi è:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= -\frac{pL^3}{24EI} \\ \phi(L) &= \frac{pL^3}{24EI} \end{aligned} \quad (38.75)$$

e quindi coincide con quanto predetto dalla teoria di Eulero-Bernoulli.

L'abbassamento in mezzera è invece fornito da:

$$u_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{pL^2}{8GA_s} + \frac{5}{384} \frac{pL^4}{EI} = \frac{5}{384} \frac{pL^4}{EI} \left(1 + \frac{48}{5\alpha}\right) \quad (38.76)$$

## 38.6 Il caso della cerniera interna

La trattazione di vincoli intermedi, interni o esterni, o di forze intermedie, siano esse forze o coppie, non presenta particolari problemi concettuali, rispetto al caso delle travi di Eulero-Bernoulli, ma solo una maggiore complessità analitica.

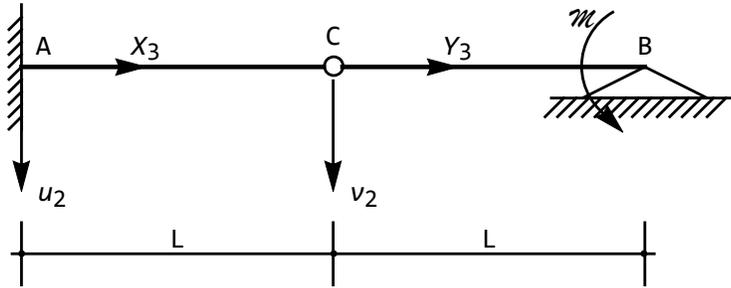


Figura 38.6: Trave incastrata-appoggiata con cerniera in mezzeria

A scopo esemplificativo, si voglia calcolare gli spostamenti e le rotazioni per una trave incastrata a sinistra, appoggiata a destra, con una cerniera interna situata in mezzeria, e soggetta ad una coppia concentrata  $\mathcal{M}$  agente sull'appoggio di destra. (cfr. Figura 38.6).

Introdotti, al solito, due sistemi di riferimento con origine nell'incastro e nella cerniera interna, rispettivamente, si hanno le quattro equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}
 EI\phi^{(1)''} - GA_s(u_2' + \phi^{(1)}) &= 0 \\
 GA_s(u_2'' + \phi^{(1)'}) &= 0 \\
 EI\phi^{(2)''} - GA_s(v_2' + \phi^{(2)}) &= 0 \\
 GA_s(v_2'' + \phi^{(2)'}) &= 0
 \end{aligned} \tag{38.77}$$

con le condizioni ai limiti si ha:

— in corrispondenza dell'incastro:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 \phi^{(1)}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{38.78}$$

— in corrispondenza della cerniera intermedia:

$$\begin{aligned}
 u_2(L) &= v_2(0) \\
 M^{(1)}(L) &= 0 \\
 M^{(2)}(0) &= 0 \\
 T^{(1)}(L) &= T^{(2)}(0)
 \end{aligned} \tag{38.79}$$

— in corrispondenza dell'appoggio:

$$\begin{aligned}
 v_2(L) &= 0 \\
 M^{(2)}(L) &= \mathcal{M}
 \end{aligned} \tag{38.80}$$

In termini di spostamenti e rotazioni, si hanno quindi le otto condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 \phi^{(1)}(0) &= 0 \\
 u_2(L) &= v_2(0) \\
 \phi^{(1)'}(L) &= 0 \\
 \phi^{(2)'}(0) &= 0 \\
 \phi^{(1)}(L) + u_2'(L) &= \phi^{(2)}(0) + v_2'(0) \\
 v_2(L) &= 0 \\
 EI\phi^{(2)'}(L) &= \mathcal{M}
 \end{aligned} \tag{38.81}$$

Dalla seconda della (38.77) si ha:

$$GA_s (u_2' + \phi^{(1)}) = C_1 \tag{38.82}$$

ed inserendo nella prima delle (38.77) si ha:

$$EI\phi^{(1)''} = C_1 \tag{38.83}$$

da cui subito:

$$\phi^{(1)'} = \frac{C_1}{EI}x_3 + C_2 \tag{38.84}$$

$$\phi^{(1)} = \frac{C_1}{EI} \frac{x_3^2}{2} + C_2x_3 + C_3 \tag{38.85}$$

Segue dalla (38.82):

$$u_2' = \frac{C_1}{GA_s} - \frac{C_1}{EI} \frac{x_3^2}{2} - C_2x_3 - C_3 \tag{38.86}$$

e quindi infine:

$$u_2 = \frac{C_1x_3}{GA_s} - \frac{C_1}{EI} \frac{x_3^3}{6} - C_2 \frac{x_3^2}{2} - C_3x_3 + C_4 \tag{38.87}$$

Del tutto analogamente si ha anche, per il secondo tratto:

$$\begin{aligned}
 \phi^{(2)'} &= \frac{C_5}{EI}y_3 + C_6 \\
 \phi^{(2)} &= \frac{C_5}{EI} \frac{y_3^2}{2} + C_6y_3 + C_7 \\
 v_2' &= \frac{C_5}{GA_s} - \frac{C_5}{EI} \frac{y_3^2}{2} - C_6y_3 - C_7 \\
 v_2 &= \frac{C_5y_3}{GA_s} - \frac{C_5}{EI} \frac{y_3^3}{6} - C_6 \frac{y_3^2}{2} - C_7y_3 + C_8
 \end{aligned} \tag{38.88}$$

Valutando opportunamente queste funzioni, ed inserendo il risultato nelle condizioni ai limiti si giunge al seguente sistema di otto equazioni nelle otto incognite  $C_1, C_2, \dots, C_8$ :

$$\begin{aligned}
 C_3 &= 0 \\
 C_4 &= 0 \\
 \frac{C_1 L}{GA_s} - \frac{C_1 L^3}{6EI} - \frac{C_2 L^2}{2} - C_3 L + C_4 - C_8 &= 0 \\
 \frac{C_1 L}{EI} + C_2 &= 0 \\
 C_6 &= 0 \\
 C_1 - C_5 &= 0 \\
 \frac{C_5 L}{GA_s} - \frac{C_5 L^3}{6EI} - \frac{C_6 L^2}{2} - C_7 L + C_8 &= 0 \\
 \frac{C_5 L}{EI} + C_6 &= \mathcal{M}
 \end{aligned} \tag{38.89}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\mathcal{M}}{L} \\
 C_2 &= -\frac{\mathcal{M}}{EI} \\
 C_3 &= C_4 = 0 \\
 C_5 &= \frac{\mathcal{M}}{L} \\
 C_6 &= 0 \\
 C_7 &= \frac{2\mathcal{M}}{GA_s L} + \frac{\mathcal{M}L}{6EI} \\
 C_8 &= \frac{\mathcal{M}}{GA_s} + \frac{\mathcal{M}L^2}{3EI}
 \end{aligned} \tag{38.90}$$

Spostamenti e rotazioni sono quindi forniti da:

$$\begin{aligned}
 u_2(x_3) &= \frac{\mathcal{M}x_3}{GA_s L} + \frac{\mathcal{M}x_3^2}{2EI} - \frac{\mathcal{M}x_3^3}{6EIL} \\
 v_2(y_3) &= \frac{\mathcal{M}}{GA_s} \left(1 - \frac{y_3}{L}\right) + \frac{\mathcal{M}L^2}{3EI} - \frac{\mathcal{M}L}{6EI}y_3 - \frac{\mathcal{M}y_3^3}{6EIL} \\
 \phi^{(1)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3}{EI} \left(1 - \frac{x_3}{2L}\right) \\
 \phi^{(2)}(y_3) &= \frac{2\mathcal{M}}{GA_s L} + \frac{\mathcal{M}L}{6EI} + \frac{\mathcal{M}y_3^2}{2EIL} \\
 M^{(1)}(x_3) &= \mathcal{M} \left(-1 + \frac{x_3}{L}\right) \\
 M^{(2)}(y_3) &= \mathcal{M} \frac{y_3}{L}
 \end{aligned} \tag{38.91}$$

$$T^{(1)}(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{L}$$
$$T^{(2)}(y_3) = \frac{\mathcal{M}}{L}$$

Esercizio - Risolvere lo stesso problema in ipotesi di trave di Eulero-Bernoulli, e verificare le differenze.

# Capitolo 39

## Le distorsioni

Si definisce *distorsione* di un volume elementare una qualsiasi sestupla di deformazioni  $e_{ij}$  di origine non elastica, ossia non generata da alcun insieme di tensioni. Nell'ambito della teoria delle travi, ci si limiterà poi alle cosiddette *distorsioni di Volterra*, per cui il generico concio elementare di larghezza  $\Delta s$  si deforma conservando la planeità delle sezioni rette. Considerando fissa la faccia di sinistra del concio, pertanto, l'effetto delle distorsioni si riduce ad uno spostamento assoluto  $\Delta s_G$  del baricentro della sezione di destra, e ad una rotazione assoluta  $\Delta\phi$  della sezione di destra intorno ad un asse passante per il suo baricentro.

### 39.1 Le distorsioni distribuite

Si presuppone che esistano, e siano finiti, i limiti :

$$\begin{aligned}\delta(s) &= - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_G}{\Delta s} \\ \mu(s) &= - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s}\end{aligned}\tag{39.1}$$

I due vettori  $\delta(s)$  e  $\mu(s)$  si chiamano *distorsione distribuita di traslazione relativa*, e *distorsione distribuita di rotazione relativa*, rispettivamente, mentre l'insieme delle loro sei componenti secondo gli assi si chiamano le *caratteristiche della distorsione distribuita*

### 39.2 Le distorsioni concentrate

Si consideri la sezione generica  $S$ , situata all'ascissa  $s$ , e si consideri un concio elementare di larghezza  $\Delta s$ , centrato in  $S$ . Siano  $D_G(s) = \delta(s)\Delta s$  e  $D_\phi(s) = \mu(s)\Delta s$  i vettori dello spostamento relativo da distorsione tra le due facce del concio elementare. Se  $\Delta s$  tende a zero, mentre  $\delta$  e  $\mu$  vanno all'infinito, in modo



Figura 39.1: Vito Volterra

che il loro prodotto resti costante, si genera nella sezione  $S$  una distorsione concentrata le cui caratteristiche sono, in base alle formule precedenti, uguali e contrarie allo spostamento assoluto  $\Delta s_G$  del baricentro della sezione retta  $S$ , ed alla rotazione assoluta  $\Delta\phi$  della sezione stessa, intorno ad un asse passante per il suo baricentro:

$$\begin{aligned} D_G(s) &= -\Delta s_G(s) \\ D_\phi(s) &= -\Delta\phi(s) \end{aligned} \quad (39.2)$$

### 39.3 Il caso dei sistemi monodimensionali piani

Nel caso dei sistemi monodimensionali piani, sia  $(m, n, t)$  un sistema di assi triortogonale, con l'asse  $t$  diretto secondo l'asse della trave, l'asse  $n$  diretto secondo la normale, e giacente nel piano della trave, ed infine l'asse  $m$  a completare la terna. Le tre componenti della distorsione distribuita  $\delta$  si riducono a due, annullandosi la componente secondo l'asse  $m$ . Più in dettaglio, si avrà la componente secondo l'asse  $t$ , detta *distorsione distribuita di traslazione assiale relativa*  $\lambda$ , e la componente secondo  $n$ , detta *distorsione distribuita di scorrimento relativo*  $\theta$ . Delle tre componenti della distorsione distribuita  $\mu$  sopravvive solo la componente secondo l'asse  $m$ , comunemente denotata  $\mu$ .

Analogamente, le componenti della distorsione concentrata  $D_G$  si riducono alle due componenti secondo gli assi  $t$  ed  $n$ , dette  $D_\eta$  e  $D_\xi$ , mentre l'unica

componente non nulla della distorsione concentrata  $D_\phi$  sarà quella secondo l'asse  $m$ , e sarà indicata con  $D_\phi$ .

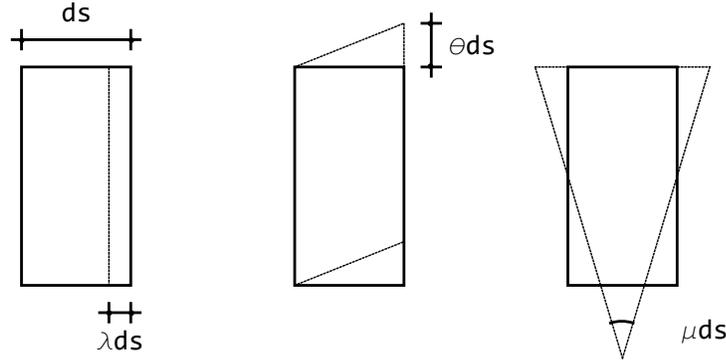


Figura 39.2: Distorsioni di traslazione assiale  $\lambda$ , di scorrimento relativo  $\theta$ , e di rotazione  $\mu$

In Figura 39.2 sono riportate le distorsioni agenti sul concio elementare. Si noti che le caratteristiche della sollecitazione interna compiono lavoro negativo per effetto di distorsioni positive, che  $\lambda$  e  $\theta$  sono adimensionali (allungamenti percentuali ed angoli taglienti), laddove  $\mu$  ha dimensioni fisiche  $L^{-1}$  (curvatura).

Nell'ambito dell'analisi delle travi rettilinee, l'asse  $t$  coincide con l'asse  $X_3$  della trave, l'asse  $n$  si sovrappone ad  $X_2$  ed  $m$  coincide con  $X_1$ .

### 39.4 Le distorsioni concentrate ed il metodo della linea elastica

Il metodo della linea elastica ben si presta anche a risolvere i casi in cui una trave, ad una o più campate, sia soggetta a distorsioni concentrate. Focalizzando l'attenzione sul problema flesso-tagliante, si ipotizzi infatti che in una sezione  $S$  si verifichi una distorsione di rotazione relativa  $D_\phi$ . In virtù della stessa definizione (39.2) nella sezione  $S$  basterà imporre che gli spostamenti siano continui, insieme a momenti e tagli, e che  $\phi_{sin} - \phi_{des} = D_\phi$ . Analogamente, in presenza di una distorsione di traslazione relativa  $D_\eta$ , basterà imporre che rotazioni, momenti e tagli siano continui, mentre dovrà essere  $u_{2sin} - u_{2des} = D_\eta$ .

Un semplice esempio è riportato in Figura 39.3, dove una trave di luce  $L$ , incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, subisce una distorsione  $D_\phi$  nella sezione a distanza  $L_1$  dall'incastro. Indicando, come usuale, con  $u_2$  e  $v_2$  le due linee elastiche relative ai tratti di sinistra e di destra, rispettivamente, si potrà porre:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 \\ v_2(y_3) &= C_5 + C_6y_3 + C_7y_3^2 + C_8y_3^3 \end{aligned} \quad (39.3)$$

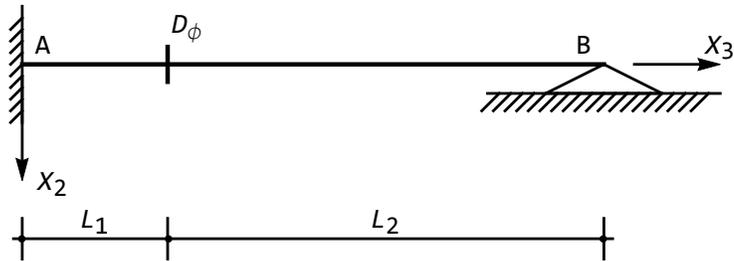


Figura 39.3: Trave incastrata–appoggiata con distorsione di rotazione relativa

Le otto costanti di integrazione si calcolano imponendo le seguenti condizioni ai limiti:

— nell’incastro di sinistra:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{39.4}$$

— in corrispondenza della distorsione:

$$\begin{aligned} u_2(L_1) &= v_2(0) \\ u_2(L_1) - v_2'(0) &= D_\phi \\ M_1^{(1)}(L_1) &= M_1^{(2)}(0) \longrightarrow u_2''(L_1) = v_2''(0) \\ T_2^{(1)}(L_1) &= T_2^{(2)}(0) = 0 \longrightarrow u_2'''(L_1) = v_2'''(0) \end{aligned} \tag{39.5}$$

— nell’appoggio di destra:

$$\begin{aligned} v_2(L_2) &= 0 \\ M_1^{(2)}(L_2) &= 0 \longrightarrow v_2''(L_2) = 0 \end{aligned} \tag{39.6}$$

Derivando le (39.3), e valutando nei punti opportuni si giunge alle otto equazioni algebriche non omogenee nelle otto incognite:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_1 + L_1 C_2 + L_1^2 C_3 + L_1^3 C_4 &= C_5 \\ C_2 + 2L_1 C_3 + 3L_1^2 C_4 - C_6 &= D_\phi \\ 2C_3 + 6L_1 C_4 &= 2C_7 \\ C_4 &= C_8 \\ C_5 + L_2 C_6 + L_2^2 C_7 + L_2^3 C_8 &= 0 \\ 2C_7 + 6L_2 C_8 &= 0 \end{aligned} \tag{39.7}$$

con soluzione:

$$C_1 = 0 \quad (39.8)$$

$$C_2 = 0 \quad (39.9)$$

$$C_3 = \frac{3L_2}{2L^2} D_\phi \quad (39.10)$$

$$C_4 = -\frac{L_2}{2L^3} D_\phi \quad (39.11)$$

$$C_5 = \frac{L_1^2 L_2 (2L_1 + 3L_2)}{2L^3} D_\phi \quad (39.12)$$

$$C_6 = -\frac{(2L_1^3 + 3L_1^2 L_2 + 2L_2^3)}{2L^3} D_\phi \quad (39.13)$$

$$C_7 = \frac{3L_2^2}{2L^3} D_\phi \quad (39.14)$$

$$C_8 = -\frac{L_2}{2L^3} D_\phi \quad (39.15)$$

avendo posto, per comodità,  $L = L_1 + L_2$ .

Gli spostamenti sono allora deducibili inserendo questi valori nelle (39.3):

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \frac{L_2(3L - x_3)x_3^2}{2L^3} D_\phi \\ v_2(y_3) &= \frac{(L_2 - y_3)(2L_1^3 + 3L_1L_2 + L_1y_3(y_3 - 2L_2))}{2L^3} D_\phi \end{aligned} \quad (39.16)$$

con le successive derivate a fornire rotazioni, momenti e tagli:

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x_3) &= \frac{3L_1x_3(x_3 - 2L)}{2L^3} D_\phi \\ \phi^{(2)}(y_3) &= \frac{(2L_1^3 + 3L_1^2L_2 + L_2(2L_2^2 - 6L_2y_3 + 3y_3^2))}{2L^3} D_\phi \\ M_1^{(1)}(x_3) &= -\frac{3EIL_2(L - x_3)}{L^3} D_\phi \\ T_2^{(1)}(x_3) &= \frac{3EIL_2}{L^3} D_\phi \\ M_1^{(2)}(y_3) &= -\frac{3EIL_2(L_2 - y_3)}{L^3} D_\phi \\ T_2^{(2)}(y_3) &= \frac{3EIL_2}{L^3} D_\phi \end{aligned} \quad (39.17)$$

Si osservi subito come ora gli spostamenti e le rotazioni non dipendano dalla rigidità flessionale della trave, laddove le caratteristiche sono ad essa direttamente proporzionali. In Figura 39.4 si riportano i diagrammi di spostamenti e rotazioni, momenti e tagli per il caso in cui la distorsione si verifica ad un quarto della luce  $L$ .

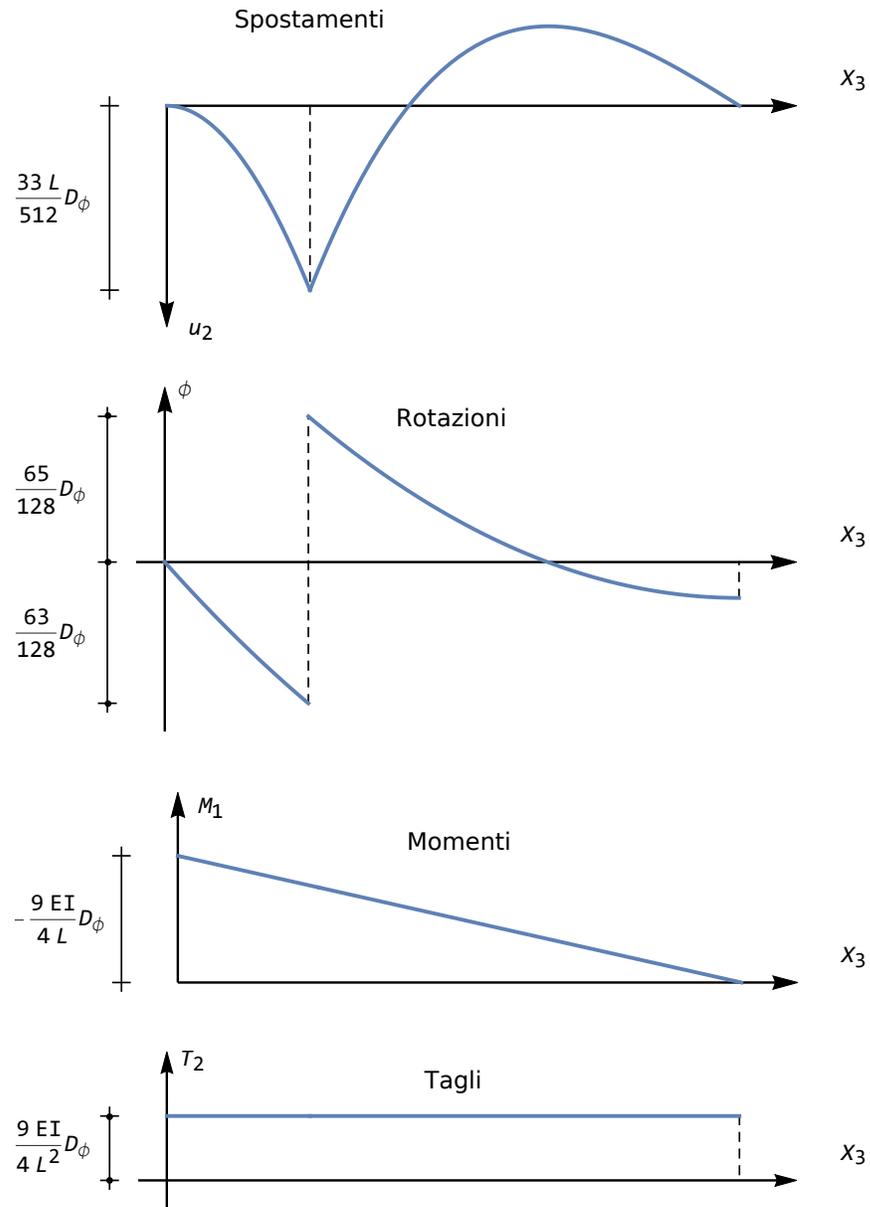


Figura 39.4: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave incastrata-appoggiata soggetta a distorsione rotazionale ad un quarto della luce

Materiale	$\alpha$ (in $K^{-1}$ )
Acciaio	$1.2 \times 10^{-5}$
Alluminio generico	$2.3 \times 10^{-5}$
Alluminio puro	$2.4 \times 10^{-5}$
Ferro	$1.2 \times 10^{-5}$
Ghisa	$1.07 \times 10^{-5}$
Oro	$1.432 \times 10^{-5}$
Ottone	$1.9 \times 10^{-5}$
Platino	$9 \times 10^{-6}$
Pyrex	$4 \times 10^{-6}$
Quarzo fuso	$5.9 \times 10^{-7}$
Rame	$1.7 \times 10^{-5}$
Silicio	$3 \times 10^{-6}$
Tungsteno	$5 \times 10^{-6}$
Vetro	$8 \times 10^{-6}$

Tabella 39.1: Il coefficiente di dilatazione termica per vari materiali (tratta da Wikipedia)

### 39.5 Distorsioni distribuite e variazioni termiche

L'importanza delle distorsioni distribuite risiede in larga parte nella possibilità di tener conto attraverso di esse delle variazioni termiche, frequentemente presenti sulle più comuni strutture. Esistono, in realtà, due tipi di variazioni termiche, che possono essere ridotte a distorsioni assiali di tipo  $\lambda$  e rotazionali, di tipo  $\mu$ . Il primo caso si verifica quando una trave, o una porzione di essa, subisce una variazione termica  $\Delta T$ , uniforme, che in caso di aumento di temperatura tenderà ad allungare la trave, mentre effetto contrario produrrà una diminuzione di temperatura. Si potrà quindi porre:

$$\lambda = -\alpha \Delta T \quad (39.18)$$

dove  $\alpha$  è il *coefficiente di dilatazione termica*, caratteristico del materiale, ed esprimibile come inverso di gradi. In Tabella 39.1 sono riportati i valori di  $\alpha$  per alcuni materiali. Il segno si giustifica poichè un aumento di temperatura provoca una dilatazione del concio elementare, mentre una distorsione  $\lambda$  positiva tende a contrarre il concio.

Il secondo caso, anch'esso frequente, si verifica quando l'estradosso della trave e l'intradosso della trave si trovano a temperatura differente, generando una variazione termica che si può ragionevolmente supporre linearmente variabile lungo l'altezza  $h$  della trave. Si consideri allora la situazione di Figura 39.5, in cui una trave di altezza  $h$  si trova inizialmente ad una temperatura di riferimento  $T_0$ . In seguito, l'intradosso subisce una variazione termica  $\Delta T_A$ , positiva, e l'estradosso una variazione termica negativa  $\Delta T_B$ . In totale, quindi, la variazione

termica tra i due estremi della trave è pari a  $\Delta T = \Delta T_A - \Delta T_B$ . Supponendo che la temperatura vari linearmente tra i due estremi della trave, ne segue che esisterà una fibra che non subisce variazioni di lunghezza, e resta a temperatura  $T_0$ , mentre le fibre superiori si accorciano e le fibre inferiori si allungano. Potrà porsi, indicando con  $ds$  la larghezza del concio elementare:

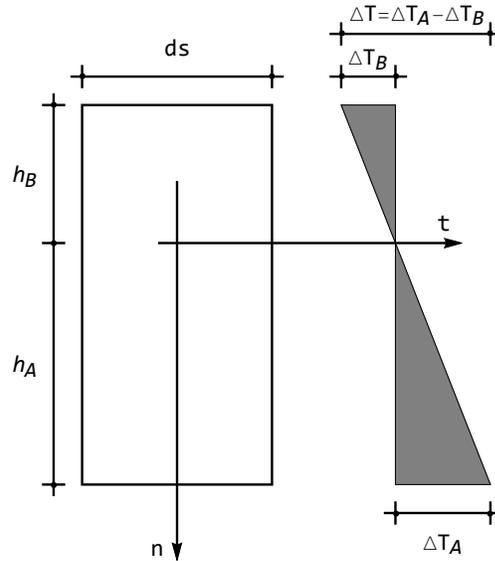


Figura 39.5: Un concio elementare soggetto a variazione termica alla Navier

$$d\phi = \alpha \frac{\Delta T_A}{h_A} ds = \alpha \frac{\Delta T_B}{h_B} ds \quad (39.19)$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} h_A d\phi &= \alpha \Delta T_A ds \\ h_B d\phi &= \alpha \Delta T_B ds \end{aligned} \quad (39.20)$$

e sottraendo membro a membro :

$$d\phi (h_A - h_B) = \alpha (\Delta T_A - \Delta T_B) ds \quad (39.21)$$

da cui:

$$d\phi = \alpha \frac{(\Delta T_A - \Delta T_B)}{(h_A - h_B)} ds = -\alpha \frac{\Delta T}{h} ds \quad (39.22)$$

Ne segue che la descritta variazione termica è equivalente ad una distorsione distribuita di rotazione relativa  $\mu$ , esprimibile come:

$$\mu = -\alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (39.23)$$

La variazione termica del primo caso è anche detta *variazione termica uniforme*, o assiale, mentre nel secondo caso si parla di *variazione termica flessionale*, o alla Navier. Ambedue questi casi possono trattarsi secondo la metodologia della linea elastica, che ora deve essere generalizzata come indicato nella prossima sezione.

## 39.6 Le distorsioni distribuite ed il metodo della linea elastica

In presenza di distorsioni distribuite di tipo  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\theta$ , le usuali equazioni di equilibrio tra carichi e caratteristiche non vengono in alcun modo modificate. Sarà quindi ancora:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dx_3} &= -t(x_3) \\ \frac{dT_2}{dx_3} &= -p(x_3) \\ \frac{dM_1}{dx_3} &= T_2\end{aligned}\quad (39.24)$$

Le equazioni costitutive, invece, vedranno i termini aggiuntivi dovuti alle distorsioni, sicchè occorrerà scrivere:

$$\begin{aligned}N &= EAu_3' + EA\lambda \\ M_1 &= -EIu_2'' + EI\mu\end{aligned}\quad (39.25)$$

e nel caso della teoria di Timoshenko potrà anche porsi, se  $\psi$  è l'angolo addizionale da taglio:

$$T_2 = GA_s\psi + GA_s\theta \quad (39.26)$$

Utilizzando le (39.25) nelle (39.24) si giunge quindi alle equazioni differenziali della linea elastica in presenza di distorsioni distribuite:

$$u_3'' = -\frac{t}{EA} - \lambda' \quad (39.27)$$

$$u_2'''' = \frac{p}{EI} + \mu'' \quad (39.28)$$

Per la travi di Timoshenko, l'equazione del quarto ordine deve essere sostituita dal sistema di due equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}EI\phi'' + EI\mu' - GA_s(\psi + \theta) &= 0 \\ GA_s(\psi' + \theta') &= -p\end{aligned}\quad (39.29)$$

Si consideri, quale primo esempio, un'asta fissa nell'estremo di sinistra e libera all'estremo di destra (asta isostatica), soggetta ad una variazione termica uniforme positiva  $\lambda = -\alpha\Delta T$ . L'equazione della linea elastica diviene:

$$u_3'' = 0 \quad (39.30)$$

con soluzione :

$$u_3(x_3) = C_0 + C_1 x_3 \quad (39.31)$$

Le condizioni ai limiti da imporre sono, se l'asta ha luce  $L$ :

$$\begin{aligned} u_3(0) = 0 &\longrightarrow C_0 = 0 \\ N(L) = 0 &\longrightarrow EA(C_1 - \alpha\Delta T) = 0 \longrightarrow C_1 = \alpha\Delta T \end{aligned} \quad (39.32)$$

In definitiva, l'asta subirà gli spostamenti assiali (positivi in quanto l'asta si allunga):

$$u_3(x_3) = \alpha\Delta T x_3 \quad (39.33)$$

mentre lo sforzo normale sarà identicamente nullo. Se invece l'asta è impedita di muoversi ad ambedue gli estremi (asta iperstatica), allora le condizioni ai limiti forniranno:

$$\begin{aligned} u_3(0) = 0 &\longrightarrow C_0 = 0 \\ u_3(L) = 0 &\longrightarrow C_0 + C_1 L = 0 \longrightarrow C_1 = 0 \end{aligned} \quad (39.34)$$

Quindi gli spostamenti si annulleranno identicamente, mentre lo sforzo normale sarà pari a:

$$N = -EA\alpha\Delta T \quad (39.35)$$

di compressione in quanto l'asta è impedita ad allungarsi.

Come secondo esempio, si consideri una trave a mensola (trave isostatica) soggetta alla variazione termica positiva alla Navier  $\mu = -\alpha \frac{\Delta T}{h}$ . La distorsione è costante, quindi la linea elastica è rappresentata da un polinomio cubico:

$$u_2(x_3) = C_0 + C_1 x_3 + C_2 x_3^2 + C_3 x_3^3 \quad (39.36)$$

Le condizioni ai limiti forniscono:

$$\begin{aligned} u_2(0) = 0 &\longrightarrow C_0 = 0 \\ u_2'(0) = 0 &\longrightarrow C_1 = 0 \\ M(L) = 0 &\longrightarrow u_2''(L) + \alpha \frac{\Delta T}{h} = 0 \longrightarrow 2C_2 + 6C_3 L = -\alpha \frac{\Delta T}{h} \\ T(L) = 0 &\longrightarrow u_2'''(L) = 0 \longrightarrow C_3 = 0 \end{aligned} \quad (39.37)$$

L'unica costante diversa da zero è  $C_2 = -\frac{\alpha \Delta T}{2h}$ , e quindi gli spostamenti saranno forniti dalla parabola quadratica:

$$u_2(x_3) = -\frac{1}{2}\alpha \frac{\Delta T}{h} x_3^2 \quad (39.38)$$

Le corrispondenti rotazioni saranno distribuite con legge lineare:

$$\phi(x_3) = \alpha \frac{\Delta T}{h} x_3 \quad (39.39)$$

mentre le caratteristiche saranno identicamente nulle:

$$\begin{aligned} M_1 &= -EI \left( u_2'' + \alpha \frac{\Delta T}{h} \right) = 0 \\ T_2 &= M_1' = 0 \end{aligned} \quad (39.40)$$

Si noti che la trave subisce spostamenti negativi (innalzamenti) a causa di una variazione termica positiva, in quanto in questo caso l'intradosso ha temperatura superiore all'estradosso, e quindi la fibra all'intradosso si allunga, quella all'estradosso si contrae.

Se invece la trave è iperstatica, ad esempio incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, si hanno le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \longrightarrow C_0 = 0 \\ u_2'(0) &= 0 \longrightarrow C_1 = 0 \\ u_2(L) &= 0 \longrightarrow C_0 + C_1L + C_2L^2 + C_3L^3 = 0 \\ M(L) &= 0 \longrightarrow u_2''(L) + \alpha \frac{\Delta T}{h} = 0 \longrightarrow 2C_2 + 6C_3L = -\alpha \frac{\Delta T}{h} \end{aligned} \quad (39.41)$$

con soluzione :

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\alpha \Delta T}{4h} \\ C_3 &= -\frac{\alpha \Delta T}{4hL} \end{aligned} \quad (39.42)$$

Ne seguono gli spostamenti e le rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \frac{\alpha \Delta T}{4h} x_3^2 \left( 1 - \frac{x_3}{L} \right) \\ \phi(x_3) &= -\frac{\alpha \Delta T}{2h} x_3 + \frac{3\alpha \Delta T}{4hL} x_3^2 \end{aligned} \quad (39.43)$$

e le caratteristiche saranno fornite da:

$$\begin{aligned} M_1 &= -EI \left( u_2'' + \alpha \frac{\Delta T}{h} \right) = -\frac{3}{2} EI \alpha \frac{\Delta T}{h} \left( 1 - \frac{x_3}{L} \right) \\ T_2 &= M_1' = \frac{3EI}{2L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \end{aligned} \quad (39.44)$$



# Capitolo 40

## I corollari di Mohr

In questo Capitolo si illustra un metodo per calcolare lo spostamento o la rotazione di un punto di una trave rettilinea isostatica, sfruttando equazioni di equilibrio.

### 40.1 L'analogia di Mohr

Si consideri una generica trave di Eulero–Bernoulli. Per essa, è ben noto che equilibrando un concio elementare nei riguardi della traslazione verticale e della rotazione si ottengono due relazioni differenziali che legano tra loro il carico verticale applicato  $q(x_3)$ , lo sforzo di taglio  $T_2(x_3)$  ed il momento flettente  $M_1(x_3)$ :

$$\begin{aligned}\frac{dT_2}{dx_3} &= -q \\ \frac{dM_1}{dx_3} &= T_2\end{aligned}\tag{40.1}$$

Ne segue subito, derivando la seconda, ed usando la prima:

$$\frac{d^2M_1}{dx_3^2} = -q\tag{40.2}$$

D'altro canto, è anche noto che la teoria di Eulero–Bernoulli si basa sull'ipotesi di planeità delle sezioni rette, per cui esiste una relazione lineare tra momento flettente e curvatura della sezione retta:

$$\frac{d\phi}{dx_3} = \frac{M_1}{EI_{11}}\tag{40.3}$$

dove  $\phi(x_3)$  rappresenta la rotazione della sezione retta, e la costante di proporzionalità è la rigidezza flessionale  $EI_{11}$ , ossia il prodotto tra il modulo di Young  $E$  del materiale, ed il momento di inerzia  $I_{11}$  della sezione retta. Infine,

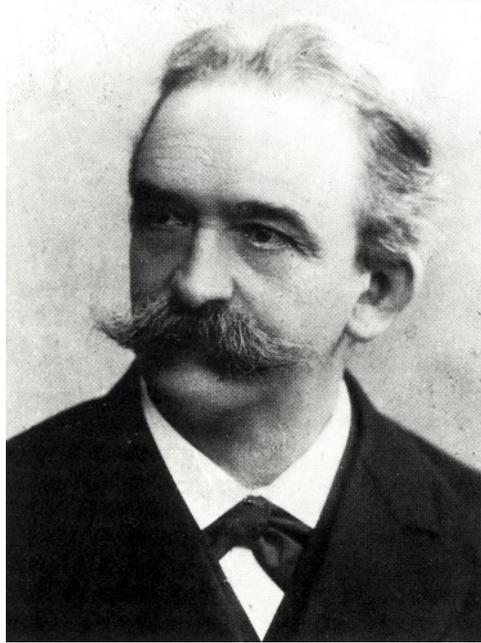


Figura 40.1: Otto Mohr

l'ulteriore ipotesi a base della teoria della trave di Eulero–Bernoulli impone che la sezione retta ruoti dello stesso angolo di cui ruota l'asse neutro, e quindi la rotazione può essere espressa in termini di derivata dello spostamento verticale  $u_2(x_3)$ :

$$\frac{du_2}{dx_3} = -\phi \quad (40.4)$$

Inserendo la (40.4) nella (40.3) si ha poi la nota equazione:

$$\frac{d^2u_2}{dx_3^2} = -\frac{M_1}{EI_{11}} \quad (40.5)$$

Paragonando la (40.5) con la (40.2) si nota che la funzione  $u_2(x_3)$  può essere riguardata come un momento fittizio  $M^*(x_3)$ :

$$M^*(x_3) = u_2(x_3) \quad (40.6)$$

causato da un carico fittizio:

$$q^* = \frac{M_1}{EI_{11}} \quad (40.7)$$

Dalla (40.3), poi, paragonata alla prima delle (40.1), si trae che le rotazioni possono riguardarsi come l'opposto dello sforzo di taglio fittizio  $-T^*$  causato dallo stesso carico fittizio:

$$T^*(x_3) = -\phi(x_3) \quad (40.8)$$

### 40.1.1 La trave ausiliaria e le condizioni ai limiti

Si è visto che gli spostamenti e le rotazioni possono calcolarsi come se rappresentassero una distribuzione di momenti flettenti e tagli dovuti ad un particolare carico fittizio (40.7). Corrispondentemente, le condizioni di vincolo della trave di partenza devono essere opportunamente modificate, giungendo a definire una *trave ausiliaria* su cui calcolare le caratteristiche. Per ottenere il vincolo fittizio da sostituire al vincolo effettivo, si proceda in questo modo:

1. si scrivano le condizioni di congruenza, sia omogenee che non omogenee
2. le si tramuti in condizioni su momenti e tagli fittizi, in base alle (40.6) e (40.8)
3. si deduca il vincolo fittizio in base a queste prestazioni statiche, così come sintetizzato nel seguito, limitatamente ai casi più comuni. Altri vincoli meno frequenti, come ad esempio i vincoli elasticamente cedevoli, possono trattarsi similmente.

#### I vincoli di estremità

E' noto che l'estremo A di una trave può essere:

— incastrato — e per esso:

$$\begin{aligned} u_{2A} &= 0 \\ \phi_A &= 0 \end{aligned} \quad (40.9)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il momento fittizio  $M_A^*$  ed il taglio fittizio  $T_A^*$ , e quindi l'incastrato si trasformerà in una sezione libera

— appoggiato — e per esso:

$$\begin{aligned} u_{2A} &= 0 \\ \phi_A &\neq 0 \end{aligned} \quad (40.10)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il momento fittizio  $M_A^*$  mentre il taglio fittizio  $T_A^*$  potrà essere diverso da zero, e quindi l'appoggio si trasformerà in un appoggio

— dotato di bipendolo — e per esso:

$$\begin{aligned} u_{2A} &\neq 0 \\ \phi_A &= 0 \end{aligned} \quad (40.11)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il taglio fittizio  $T_A^*$  mentre il momento fittizio  $M_A^*$  potrà essere diverso da zero, e quindi il bipendolo rimarrà un bipendolo

— libero — e per esso:

$$\begin{aligned} u_{2A} &\neq 0 \\ \phi_A &\neq 0 \end{aligned} \quad (40.12)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà permettere un taglio fittizio  $T_A^*$  ed un momento fittizio  $M_A^*$  diversi da zero, e quindi l'estremo libero si dovrà trasformare in un incastro

### I vincoli esterni intermedi

Anche i vincoli intermedi possono studiarsi nello stesso modo, e quindi essere opportunamente trasformati nella loro controparte fittizia:

Un vincolo locato all'ascissa generica  $x_3 = \zeta$  che non interrompa la continuità fisica della trave, può essere:

— un appoggio intermedio — e per esso:

$$\begin{aligned} u_{2\zeta} &= 0 \\ \phi_\zeta &\neq 0 \end{aligned} \quad (40.13)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il momento fittizio  $M_\zeta^*$  mentre il taglio fittizio  $T_\zeta^*$  potrà essere diverso da zero, e quindi l'appoggio si trasformerà in una cerniera

— un bipendolo intermedio esterno — e per esso:

$$\begin{aligned} u_{2\zeta} &\neq 0 \\ \phi_\zeta &= 0 \end{aligned} \quad (40.14)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il taglio fittizio  $T_\zeta^*$  mentre il momento fittizio  $M_\zeta^*$  potrà essere diverso da zero, e quindi il bipendolo esterno si trasformerà in un bipendolo interno

### I vincoli interni intermedi (snodi)

Un vincolo locato all'ascissa generica  $x_3 = \zeta$  che interrompa la continuità fisica della trave, può essere:

— una cerniera — e per essa:

$$\begin{aligned} \Delta u_{2\zeta} &= 0 \\ \Delta \phi_\zeta &\neq 0 \end{aligned} \quad (40.15)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà permettere una discontinuità del taglio fittizio  $T_\zeta^*$ , e quindi la cerniera si trasformerà in un appoggio

— un bipendolo interno — e per esso:

$$\begin{aligned} \Delta u_{2\zeta} &\neq 0 \\ \Delta \phi_\zeta &= 0 \end{aligned} \quad (40.16)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà permettere una discontinuità del momento fittizio  $M_\zeta^*$ , e quindi il bipendolo interno diverrà un bipendolo esterno

Altri casi di vincolo meno usuali possono trattarsi nell'identico modo.

L'analogia di Mohr trova la sua applicazione più ovvia nel calcolo di singole quantità cinematiche (spostamenti o rotazioni) su travi isostatiche. In questo caso, infatti, la corrispondente trave ausiliaria è anch'essa isostatica, rendendo immediato il calcolo dei momenti e dei tagli fittizi. Ciò non toglie che esso sia estendibile anche alle strutture iperstatiche, che conducono a travi fittizie labili.

## 40.2 La trave appoggiata

Si consideri una trave appoggiata ad ambedue gli estremi, di luce  $L$ , soggetta ad un carico distribuito  $q(x_3)$ , forze verticali e coppie concentrate, e si vogliano calcolare le rotazioni in corrispondenza dei vincoli  $\phi_A$  e  $\phi_B$ . La trave ausiliaria è ancora appoggiata agli estremi, sicchè le rotazioni richieste possono identificarsi con i tagli in  $A$  e  $B$  per la trave appoggiata soggetta al carico fittizio  $q^*$ :

$$\begin{aligned}\phi_A &= -T_A^* \\ \phi_B &= -T_B^*\end{aligned}\quad (40.17)$$

e poichè, come è noto, il taglio a sinistra è uguale e contrario alla reazione dell'appoggio, mentre a destra il taglio è uguale alla reazione, si può anche scrivere:

$$\begin{aligned}\phi_A &= R_A^* \\ \phi_B &= -R_B^*\end{aligned}\quad (40.18)$$

Nel seguito, si illustrano in dettaglio alcuni carichi particolari:

### 40.2.1 La trave appoggiata soggetta a forza in mezzzeria

Si consideri la trave semplicemente appoggiata di Figura 40.2, soggetta ad una forza concentrata in mezzzeria.

Le reazioni  $R_A$  ed  $R_B$  sono fornite da:

$$R_A = R_B = -\frac{F}{2}\quad (40.19)$$

Il momento flettente è distribuito con legge lineare, si annulla ad ambedue gli estremi, e raggiunge un massimo in corrispondenza della forza, dove vale:

$$M_{1\max} = M_1\left(\frac{L}{2}\right) = -R_B\frac{L}{2} = \frac{FL}{4}\quad (40.20)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico bi-triangolare di Figura 40.2, e si calcolino le reazioni:

$$R_A^* = R_B^* = -\frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{FL}{4EI_{11}} = -\frac{FL^2}{16EI_{11}}\quad (40.21)$$

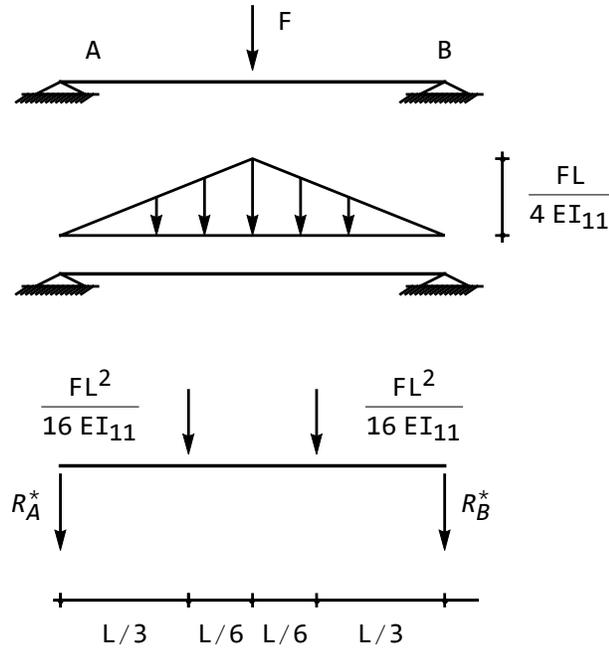


Figura 40.2: Trave appoggiata soggetta a forza concentrata in mezzeria

Infine, le rotazioni si deducono in base alla (40.18):

$$\begin{aligned}\phi_A = R_A^* &= -\frac{FL^2}{16EI_{11}} \\ \phi_B = -R_B^* &= \frac{FL^2}{16EI_{11}}\end{aligned}\quad (40.22)$$

L'abbassamento in mezzeria è ricavabile tramite la (40.6), ossia calcolando il momento flettente sulla trave ausiliaria:

$$u_{2\max} = M_{\max}^* = -R_B^* \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{FL}{4EI_{11}} \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{48EI_{11}} \quad (40.23)$$

### 40.2.2 La trave appoggiata soggetta a carico uniformemente distribuito

Per questa condizione di carico, le reazioni  $R_A$  ed  $R_B$  sono fornite da:

$$R_A = R_B = -\frac{qL}{2} \quad (40.24)$$

Il momento flettente è distribuito con legge parabolica, si annulla ad ambedue gli estremi, e raggiunge un massimo in corrispondenza della forza, dove

vale:

$$M_{max} = M_1 \left( \frac{L}{2} \right) = -R_B \frac{L}{2} - \frac{qL}{2} \frac{L}{4} = \frac{qL^2}{8} \quad (40.25)$$

Ne segue che la funzione momento è esprimibile come:

$$M_1(x_3) = \frac{qx_3}{2} (L - x_3) \quad (40.26)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico parabolico:

$$q^*(x_3) = \frac{qx_3}{2EI_{11}} (L - x_3) \quad (40.27)$$

e si calcolino le reazioni, sfruttando la simmetria del sistema:

$$R_A^* = R_B^* = -\frac{1}{2EI_{11}} \int qx_3 \frac{(L - x_3)}{2} dx_3 = -\frac{qL^3}{24EI_{11}} \quad (40.28)$$

Infine, le rotazioni si deducono in base alla (40.18):

$$\begin{aligned} \phi_A = R_A^* &= -\frac{qL^3}{24EI_{11}} \\ \phi_B = -R_B^* &= \frac{qL^3}{24EI_{11}} \end{aligned} \quad (40.29)$$

L'abbassamento in mezzeria è ricavabile tramite la (40.6), ossia calcolando il momento flettente in mezzeria sulla trave ausiliaria. Tenendo conto che il baricentro del carico parabolico è situato a  $3/8$  della semiluce si ha (cfr. Figura 40.3)

$$u_{2max} = M_{max}^* = -R_B^* \frac{L}{2} - \frac{qL^3}{24EI_{11}} \frac{3}{8} \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI_{11}} \quad (40.30)$$

### 40.2.3 La trave appoggiata soggetta a coppia concentrata in un estremo

Per il caso di Figura 40.4 le reazioni  $R_A$  ed  $R_B$  sono fornite da:

$$\begin{aligned} R_A &= -\frac{\mathcal{M}}{L} \\ R_B &= \frac{\mathcal{M}}{L} \end{aligned} \quad (40.31)$$

Il momento flettente è distribuito con legge lineare, si annulla a sinistra, e raggiunge un massimo in corrispondenza della coppia.

Ne segue che la funzione momento è esprimibile come:

$$M_1(x_3) = \mathcal{M} \frac{x_3}{L} \quad (40.32)$$

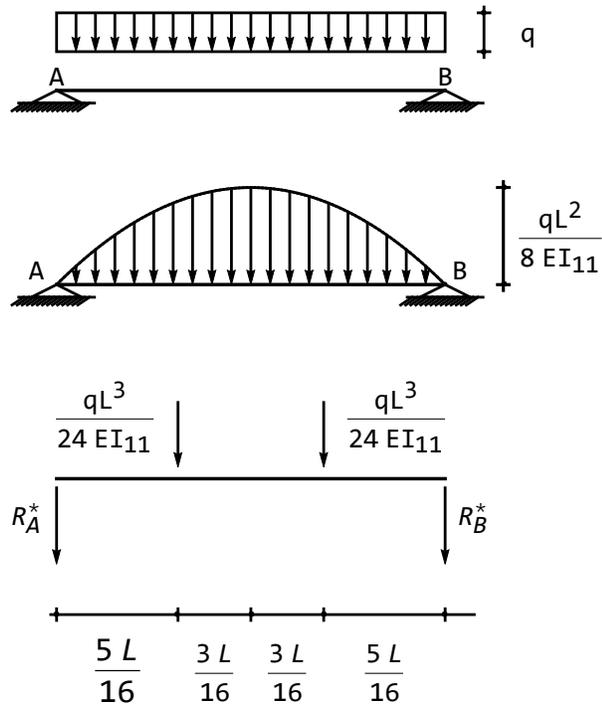


Figura 40.3: Trave appoggiata soggetta a carico distribuito

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico triangolare:

$$q^*(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} \frac{x_3}{L} \quad (40.33)$$

e si calcolino le reazioni, imponendo l'equilibrio alla traslazione ed alla rotazione. Dalla Figura 40.4 hanno le due equazioni:

$$\begin{aligned} R_A^* + R_B^* + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} L &= 0 \\ R_A^* L + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} L \frac{L}{3} &= 0 \end{aligned} \quad (40.34)$$

che possono risolversi a fornire:

$$\begin{aligned} R_A^* &= -\frac{\mathcal{M}L}{6EI_{11}} \\ R_B^* &= -\frac{\mathcal{M}L}{3EI_{11}} \end{aligned} \quad (40.35)$$

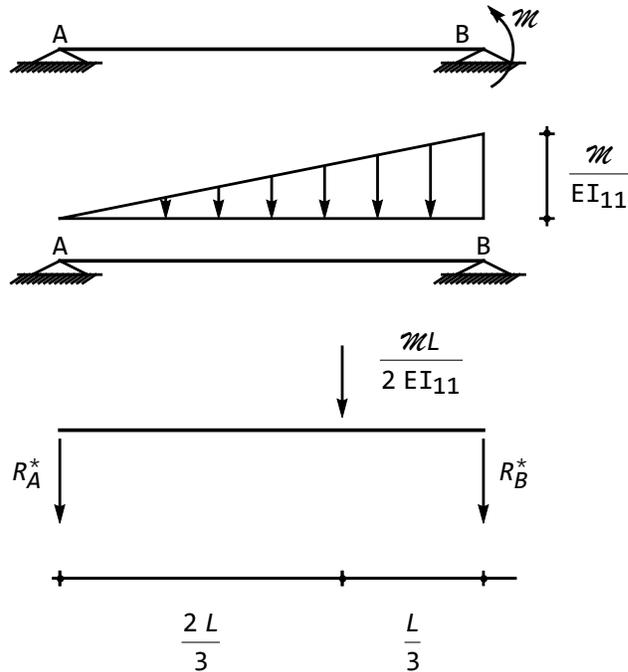


Figura 40.4: Trave appoggiata soggetta a coppia nell'estremo

Infine, le rotazioni si deducono in base alla (40.18):

$$\begin{aligned}\phi_A &= R_A^* = -\frac{ML}{6EI_{11}} \\ \phi_B &= -R_B^* = \frac{ML}{3EI_{11}}\end{aligned}\quad (40.36)$$

### 40.3 La trave a mensola

Si consideri ora una trave a mensola, di luce  $L$ , con incastro a sinistra e libera a destra, soggetta ad un carico distribuito  $q(x_3)$ , forze verticali e coppie concentrate, e si vogliono calcolare la rotazione  $\phi_B$  e l'abbassamento  $u_{2B}$  in corrispondenza dell'estremo libero. La trave ausiliaria è ancora una mensola, in cui però l'estremo libero è a sinistra e l'incastro è a destra, sicchè la rotazione e l'abbassamento richiesti possono identificarsi con il taglio ed il momento in  $B$  per la trave libera–incastrata soggetta al carico fittizio  $q^*$ :

$$\begin{aligned}\phi_B &= T_B^* \\ u_{2B} &= M_B^*\end{aligned}\quad (40.37)$$

Nel seguito, si illustrano in dettaglio alcuni carichi particolari:

### 40.3.1 La trave a mensola soggetta a forza nell'estremo libero

Il momento flettente è distribuito con legge lineare, si annulla nell'estremo libero, e raggiunge un minimo in corrispondenza dell'incastro, dove vale:

$$M_{1\max} = M_1 \left( \frac{L}{2} \right) = -FL \quad (40.38)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico triangolare di Figura 40.5, e si calcolino le reazioni:

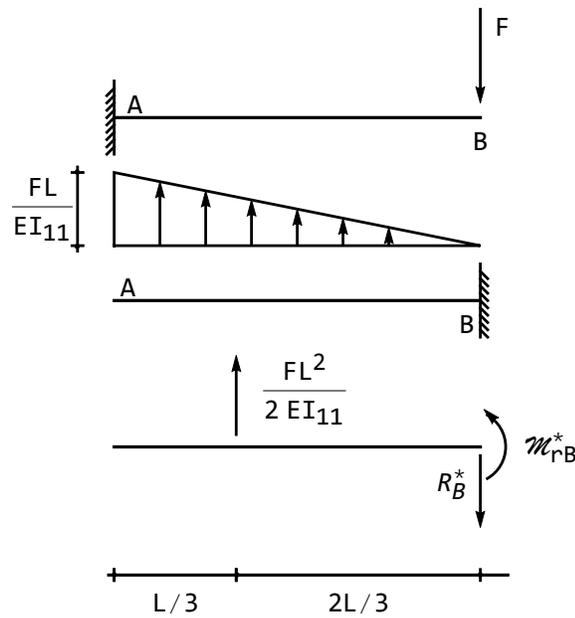


Figura 40.5: Trave a mensola soggetta a forza nell'estremo

$$\begin{aligned} R_B^* &= \frac{1}{2} \frac{FL}{EI_{11}} L = \frac{FL^2}{2EI_{11}} \\ \mathcal{M}_{rB}^* &= \frac{1}{2} \frac{FL}{EI_{11}} L \left( \frac{2}{3} L \right) = \frac{FL^3}{3EI_{11}} \end{aligned} \quad (40.39)$$

Ne segue infine che le richieste rotazioni e spostamenti sono:

$$\begin{aligned} \phi_B &= -\frac{FL^2}{2EI_{11}} \\ u_{2B} &= \frac{FL^3}{3EI_{11}} \end{aligned} \quad (40.40)$$

### 40.3.2 La trave a mensola soggetta a carico uniformemente distribuito

Le reazioni  $R_A$  ed  $\mathcal{M}_{rA}$  per lo schema di Figura 40.6 sono fornite da:

$$\begin{aligned} R_A &= -qL \\ \mathcal{M}_{rA} &= \frac{qL^2}{2} \end{aligned} \quad (40.41)$$

Il momento flettente è distribuito con legge parabolica, si annulla nell'estre-

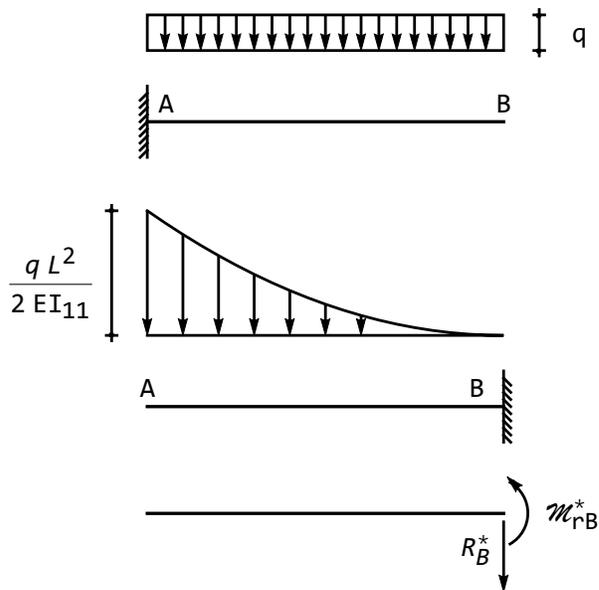


Figura 40.6: Trave a mensola soggetta a carico distribuito

mo libero, insieme alla sua derivata, e raggiunge un minimo in corrispondenza dell'incastro, dove vale:

$$M_{1min} = -\mathcal{M}_{rA} = -\frac{qL^2}{2} \quad (40.42)$$

Ne segue che la funzione momento è esprimibile come:

$$M(x_3) = -\frac{qL^2}{2} + qLx_3 - \frac{q}{2}x_3^2 \quad (40.43)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico parabolico:

$$q^*(x_3) = -\frac{qL^2}{2EI_{11}} + \frac{qL}{EI_{11}}x_3 - \frac{q}{2EI_{11}}x_3^2 \quad (40.44)$$

e si calcolino le reazioni (cfr. Figura 40.6):

$$R_B^* = - \int_0^L q^*(x_3) dx_3 = - \int_0^L \left( -\frac{qL^2}{2EI_{11}} + \frac{qL}{EI_{11}}x_3 - \frac{q}{2EI_{11}}x_3^2 \right) dx_3 = \frac{qL^3}{6EI_{11}} \quad (40.45)$$

$$\mathcal{M}_{rB} = - \int_0^L q^*(x_3)(L-x_3) dx_3 = - \int_0^L \left( -\frac{qL^2}{2EI_{11}} + \frac{qL}{EI_{11}}x_3 - \frac{q}{2EI_{11}}x_3^2 \right) (L-x_3) dx_3 = \frac{qL^4}{8EI_{11}} \quad (40.46)$$

Infine, le rotazioni e gli spostamenti si deducono come:

$$\begin{aligned} \phi_B &= -R_B^* = -\frac{qL^3}{6EI_{11}} \\ u_{2B} &= M_B^* = \frac{qL^4}{8EI_{11}} \end{aligned} \quad (40.47)$$

### 40.3.3 La trave a mensola soggetta a coppia concentrata in un estremo

Il momento flettente è distribuito con legge costante:

$$M(x_3) = \mathcal{M} \quad (40.48)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico costante:

$$q^*(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} \quad (40.49)$$

e si calcolino le reazioni, imponendo l'equilibrio alla traslazione ed alla rotazione. Si ha:

$$\begin{aligned} R_B^* &= -\frac{\mathcal{M}}{EI_{11}}L \\ \mathcal{M}_{rB}^* &= -\frac{\mathcal{M}L}{EI_{11}}\frac{L}{2} \end{aligned} \quad (40.50)$$

Infine, le rotazioni e gli spostamenti sono forniti da:

$$\begin{aligned} \phi_B &= -R_B^* = \frac{\mathcal{M}L}{EI_{11}} \\ u_{2B} &= M_B^* = -\frac{\mathcal{M}L^2}{2EI_{11}} \end{aligned} \quad (40.51)$$

## Capitolo 41

# Le equazioni di congruenza

Per definizione, in una trave iperstatica non è possibile calcolare le reazioni vincolari con sole equazioni di equilibrio. In questo Capitolo si illustra un metodo per affrontare lo studio di travi iperstatiche, affiancando alle equazioni della statica opportune equazioni di congruenza.

Si consideri una trave rettilinea costituita da  $t$  tratti, intendendo per tratto un segmento di trave non interrotto da vincoli interni, e per cui possano scriversi  $2t$  equazioni di equilibrio. Se il numero  $s$  di reazioni incognite dei vincoli agenti sulla trave è maggiore di  $2t$ , ne segue che esse non possono essere calcolate con sole considerazioni di statica.

Sia allora  $i = s - 2t > 0$  il grado di iperstaticità della trave. Il metodo proposto evolve secondo i seguenti passi:

1. rimozione di un numero  $i$  di dispositivi di vincolo, sostituendo ad essi le relative incognite reattive  $X_1, X_2, \dots, X_i$ . E' possibile anche operare opportune sconnessioni interne, aggiungendo le relative caratteristiche incognite. Si identifica in questo modo una struttura isostatica, caricata dai carichi originari, e dalle incognite reattive (dette *incognite iperstatiche*), che in questa fase vanno riguardate come forze applicate di valore incognito.
2. per la struttura così ottenuta si scrivono  $i$  equazioni di congruenza, con le quali si ripristina la prestazione cinematica del vincolo soppresso. La struttura isostatica, caricata dalle forze e dalle incognite iperstatiche, e soggetta alle condizioni di congruenza, prende il nome di *sistema isostatico equivalente* (S.I.E.)
3. utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, le  $i$  equazioni di congruenza divengono un sistema di  $i$  equazioni lineari, nelle  $i$  incognite iperstatiche. Se la scelta delle incognite è stata corretta, tale sistema avrà determinante non nullo, e porterà alla determinazione delle  $i$  incognite iperstatiche
4. la struttura iperstatica di partenza può ora essere sostituita dalla struttura isostatica, caricata dalle forze originarie, e dalle iperstatiche, ora

note. Su di essa possono calcolarsi le restanti reazioni, i diagrammi delle caratteristiche, etc..

Si nota fin da ora che la scelta delle incognite iperstatiche non è univoca, e può essere più o meno conveniente, da due punti di vista:

1. è spesso utile ricondurre lo schema isostatico ad uno schema noto, su cui operare risulta più familiare. E' tipico, quando possibile, ricondursi ad uno schema a mensola, oppure ad una trave semplicemente appoggiata
2. per strutture ad alto numero di iperstaticità, una buona scelta di incognite iperstatiche conduce ad un sistema di equazioni con matrice dei coefficienti a banda ristretta, con conseguente facilità di soluzione. E' quanto si illustrerà sull'esempio della trave continua su molti appoggi

## 41.1 Un esempio

Si consideri la trave incastrata ai due estremi di Figura 41.1a, soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensità  $p_0$ . Essa è ovviamente due volte iperstatica, e quindi non è possibile calcolare direttamente le reazioni vincolari, in quanto le due equazioni della statica:

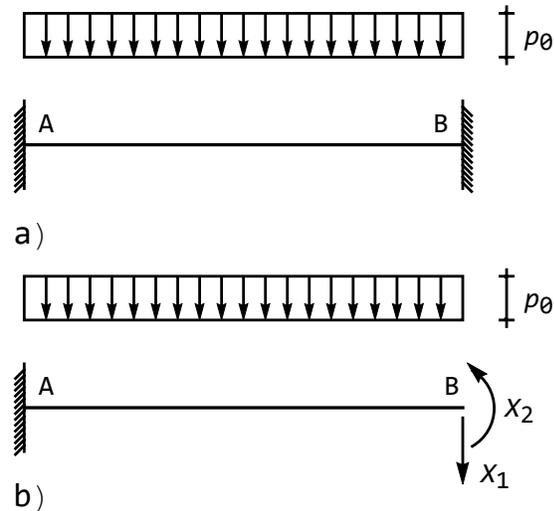


Figura 41.1: Una struttura doppiamente iperstatica ed una possibile scelta delle incognite iperstatiche

$$\begin{aligned} R_A + R_B + p_0L &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + \mathcal{M}_{rB} + \frac{p_0L^2}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (41.1)$$

non permettono il calcolo delle quattro incognite. Tuttavia per la trave in esame è possibile scrivere quattro equazioni di congruenza, che esprimono l'annullarsi di spostamenti e rotazioni in corrispondenza degli incastri:

$$\begin{aligned} u_{2A} &= 0 \\ \phi_A &= 0 \\ u_{2B} &= 0 \\ \phi_B &= 0 \end{aligned} \quad (41.2)$$

Utilizzando due di queste quattro equazioni risulta agevole calcolare due reazioni incognite, e ricondurre lo studio della trave iperstatica di partenza allo studio di una trave isostatica equivalente. Si scelgano due reazioni incognite, ad esempio le reazioni dell'incastro di destra, e si ponga:

$$\begin{aligned} R_B &= X_1 \\ \mathcal{M}_{rB} &= X_2 \end{aligned} \quad (41.3)$$

Si ottiene in tal modo la *struttura isostatica equivalente* di Figura 41.1b, ossia la mensola soggetta al carico  $p_0$ , alla forza incognita  $X_1$  ed alla coppia incognita  $X_2$ . Il valore di queste due incognite si calcola imponendo il rispetto delle due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_{2B} &= 0 \\ \phi_B &= 0 \end{aligned} \quad (41.4)$$

Ed infatti, per il principio di sovrapposizione degli effetti, potrà scriversi, come illustrato in Figura 41.2:

$$\begin{aligned} u_{2B} &= u_{2B}^0 + u_{2B}^1 X_1 + u_{2B}^2 X_2 = 0 \\ \phi_B &= \phi_B^0 + \phi_B^1 X_1 + \phi_B^2 X_2 = 0 \end{aligned} \quad (41.5)$$

dove  $u_{2B}^0$  e  $\phi_B^0$  sono l'abbassamento e la rotazione all'estremo libero di una mensola soggetta al carico  $p_0$ ,  $u_{2B}^1$  e  $\phi_B^1$  sono l'abbassamento e la rotazione all'estremo libero di una mensola soggetta ad una forza di intensità unitaria nell'estremo libero, e  $u_{2B}^2$  e  $\phi_B^2$  sono l'abbassamento e la rotazione all'estremo libero di una mensola soggetta ad una coppia di intensità unitaria. E' questo un sistema di due equazioni nelle due incognite  $X_1$  ed  $X_2$ , i cui coefficienti sono ormai noti, o possono calcolarsi applicando i corollari di Mohr. Si ha:

$$\begin{aligned} X_1 \frac{L^3}{3EI} - X_2 \frac{L^2}{2EI} + \frac{p_0 L^4}{8EI} &= 0 \\ -X_1 \frac{L^2}{2EI} + X_2 \frac{L}{EI} - \frac{p_0 L^3}{6EI} &= 0 \end{aligned} \quad (41.6)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} X_1 = R_B &= -\frac{p_0 L}{2} \\ X_2 = \mathcal{M}_{rB} &= -\frac{p_0 L^2}{12} \end{aligned} \quad (41.7)$$

Ciò fatto, le ulteriori reazioni possono calcolarsi a partire dalle equazioni della statica (41.1)

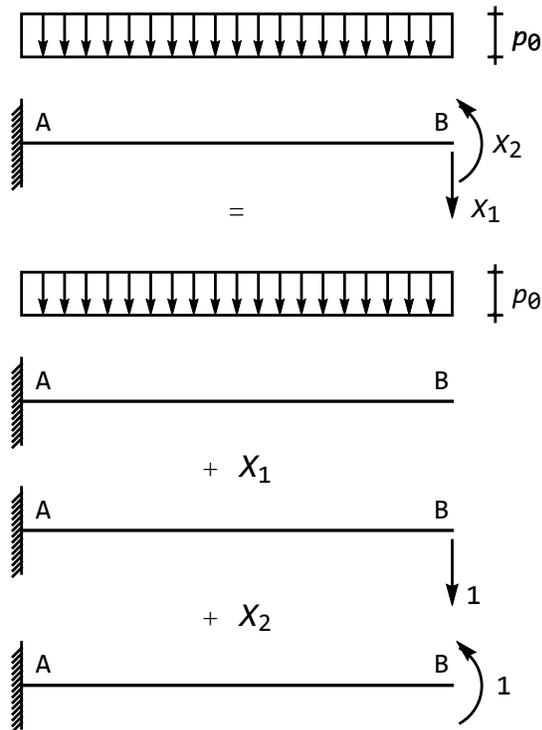


Figura 41.2: Il principio di sovrapposizione degli effetti applicato al calcolo delle iperstatiche

Esercizio 1. - Si risolva ora lo stesso schema utilizzando come incognite iperstatiche le due coppie reattive  $\mathcal{M}_{rA}$  ed  $\mathcal{M}_{rB}$ , e quindi operando su una struttura isostatica equivalente di trave appoggiata agli estremi

## 41.2 Le equazioni dei tre momenti

Una delle strutture di più frequente impiego nell'ambito dell'ingegneria civile è la *trave continua* su  $n$  appoggi, dallo studio dei solai ai più complessi schemi di ponti a travata su molti piloni. Tale schema può a buon diritto essere considerato il prototipo originale, e fu studiato già dal 1855 da Paul Èmile Clapeyron, in occasione della costruzione del ponte ferroviario di Asnières, sulla Senna.

Si tratta di una struttura  $n - 2$  volte iperstatica, e poichè  $n$  può assumere anche valori elevati, risulta opportuno scegliere le incognite iperstatiche in modo da poter semplificare al massimo le  $n - 2$  equazioni di congruenza. E' evidente infatti che per incognite iperstatiche potrebbero legittimamente scegliersi le  $n - 2$

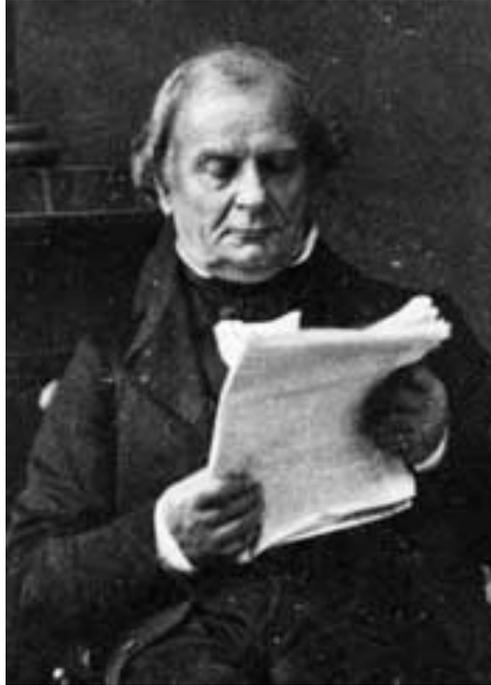


Figura 41.3: Paul Émile Clapeyron

reazioni degli appoggi intermedi, ed in tal modo la trave isostatica equivalente sarebbe la trave appoggiata agli estremi, soggetta al carico  $q$  ed a  $n - 2$  forze verticali incognite. E' però altrettanto evidente che lo studio di tale sistema non è particolarmente agevole. Se invece si introducono  $n - 2$  cerniere intermedie, in corrispondenza degli  $n - 2$  appoggi interni, si riduce la trave continua ad una serie di travi appoggiate, l'una indipendente dall'altra, e su di esse le equazioni di congruenza assumono una forma ripetitiva.

Si consideri allora una generica porzione di trave continua, costituita dalle due campate immediatamente precedente e seguente il generico appoggio  $i$ -esimo, come illustrato in Figura 41.4.

L' $i$ -esima equazione di congruenza è intesa a ripristinare la continuità delle rotazioni in corrispondenza dell' $i$ -esimo appoggio, e può scriversi simbolicamente:

$$\phi_i^S = \phi_i^D \quad (41.8)$$

esprimendo con essa che la rotazione sull'appoggio  $i$ -esimo, considerato appartenente alla campata di sinistra, deve essere uguale alla rotazione dello stesso appoggio considerato appartenente alla campata di destra. Sarà quindi,

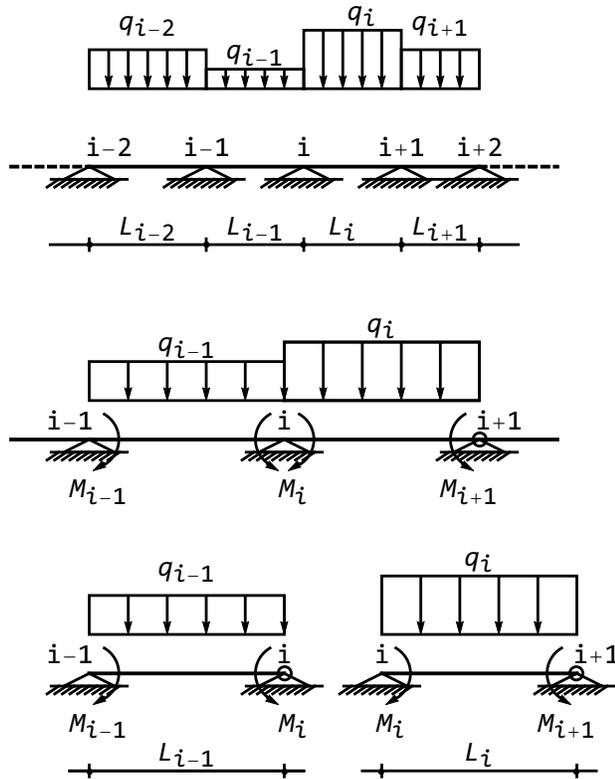


Figura 41.4: Lo schema per la scrittura dell'equazione dei tre momenti

esplicitamente:

$$q_{i-1} \frac{L_{i-1}^3}{24EI} + M_{i-1} \frac{L_{i-1}}{6EI} + M_i \frac{L_{i-1}}{3EI} = -q_i \frac{L_i^3}{24EI} - M_i \frac{L_i}{3EI} - M_{i+1} \frac{L_{i+1}}{6EI} \quad (41.9)$$

ossia:

$$M_{i-1} \frac{L_{i-1}}{6} + \frac{M_i}{3} (L_{i-1} + L_i) + M_{i+1} \frac{L_{i+1}}{6} = -q_{i-1} \frac{L_{i-1}^3}{24} - q_i \frac{L_i^3}{24} \quad (41.10)$$

ed ancora:

$$M_{i-1} L_{i-1} + 2M_i (L_{i-1} + L_i) + M_{i+1} L_{i+1} = -q_{i-1} \frac{L_{i-1}^3}{4} - q_i \frac{L_i^3}{4} \quad (41.11)$$

E' facile osservare che con questa scelta delle incognite iperstatiche la singola equazione di congruenza non contiene più di tre incognite, e quindi la matrice dei coefficienti assume un comodo aspetto tri-diagonale.

Le equazioni appena dedotte sono note come *equazioni dei tre momenti*, o *equazioni di Clapeyron* (1857).

La reazione  $R_i$  sul generico appoggio è fornita dalla somma della reazione calcolata per la campata  $i - 1$  e della reazione calcolata per la trave  $i$ . Si ha allora, per la campata  $i - 1$ :

$$-R_i L_{i-1} - M_{i-1} + M_i - q_{i-1} \frac{L_{i-1}^2}{2} = 0 \quad (41.12)$$

e per la campata successiva:

$$R_i L_i - M_i + M_{i+1} + q_i \frac{L_i^2}{2} = 0 \quad (41.13)$$

e quindi la reazione complessiva sarà:

$$R_i = -\frac{M_{i-1}}{L_{i-1}} + M_i \left( \frac{1}{L_{i-1}} + \frac{1}{L_i} \right) - \frac{M_{i+1}}{L_i} - q_{i-1} \frac{L_{i-1}}{2} - q_i \frac{L_i}{2} \quad (41.14)$$



## Capitolo 42

# Il principio dei lavori virtuali nell'analisi delle travi

Si specializza il principio dei lavori virtuali al caso dei sistemi monodimensionali piani, utilizzando i risultati delle teorie tecniche di Eulero–Bernoulli e di Timoshenko. Si ipotizza inizialmente che la struttura sia a vincoli perfetti, e soggetta solo a carichi distribuiti, forze e coppie concentrate, per poi introdurre distorsioni distribuite, cedimenti vincolari anelastici e vincoli elasticamente cedevoli. Il principio così ottenuto viene utilizzato per il calcolo di spostamenti in strutture isostatiche, per il calcolo di incognite iperstatiche, e per il calcolo di spostamenti in strutture iperstatiche. L'intero capitolo deve rifarsi ad Heinrich Müller–Breslau<sup>1</sup>

### 42.1 Il principio dei lavori virtuali

Si consideri una struttura  $S$ , costituita da un assemblaggio di travi, per ciascuna delle quali si possano ritenere valide le ipotesi a base delle suddette teorie, e si immagini che tale struttura sia soggetta a carichi di varia natura: è ad esempio possibile immaginare che esistano carichi distribuiti  $q'(s)$  con legge generica, coppie distribuite  $m'(s)$  con legge generica, un insieme di  $N_1$  forze concentrate  $F'_i$ , ed un insieme di  $N_2$  coppie concentrate  $\mathcal{M}'_i$ .

Infine, in un primo momento si ipotizza che la struttura è vincolata al suolo con vincoli perfetti.

Si ricorda che l'insieme di queste forze e reazioni deve essere *staticamente ammissibile*, ossia in equilibrio con un insieme di tensioni  $\sigma'_{ij}$ , che a loro volta generano un insieme di momenti  $M'$ , sforzi normali  $N'$  e tagli  $T'$ .

---

<sup>1</sup>Si veda in particolare *La Scienza delle Costruzioni*, Hoepli 1927, in quattro volumi, di cui il secondo ed il terzo interamente dedicati ai sistemi staticamente indeterminati



Figura 42.1: Heinrich Müller-Breslau

Si consideri poi un insieme di spostamenti  $u_i$ , *geometricamente ammissibili*, agenti sulla stessa struttura  $S$ , e siano  $M$ ,  $N$  e  $T$  le c.s.i. corrispondenti a questo stato di spostamenti.

Il lavoro virtuale *esterno* di questo insieme di forze staticamente ammissibile per questo insieme di spostamenti geometricamente ammissibile si scrive:

$$L_e = \int_s q'(s)u_q(s) ds + \int_s m'(s)\phi_m(s) ds + \sum_{i=1}^{N_1} F'_i u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \phi_{mi} \quad (42.1)$$

dove si sono introdotte le seguenti notazioni:  $u_q(s)$  rappresenta la componente di spostamento del punto dell'asse in corrispondenza del carico  $q'(s)$ , misurata nella direzione del carico,  $\phi_m(s)$  è la rotazione della sezione relativa ai tratti in cui sono applicate le coppie distribuite  $m'(s)$ ,  $u_{Fi}$  è la componente dello spostamento in corrispondenza del punto di applicazione della  $i$  - *ma* forza, misurata nella direzione di detta forza,  $\phi_{mi}$  è la rotazione della sezione in corrispondenza della  $i$  - *ma* coppia concentrata. Inoltre, si è genericamente indicato con  $s$  l'estremo di integrazione, che di volta in volta andrà specificato, suddividendo l'integrale in più aliquote.

La (42.1) può essere considerata la traduzione — in teoria delle travi — del termine:

$$\int_{\partial B_1} p_i u_i ds \quad (42.2)$$

ottenuto nel Capitolo 21 per i solidi tridimensionali. Le forze di massa sono invece assenti.

Il lavoro virtuale interno si scriverà come:

$$L_i = \int_B (\sigma'_{33} e_{33} + 2\sigma'_{23} e_{23}) dV \quad (42.3)$$

Per esprimere  $L_i$  in termini di c.s.i., si possono utilizzare le relazioni che legano le tensioni normali e tangenziali allo sforzo normale, al momento flettente ed al taglio. Per lo stato tensionale  $\sigma'_{ij}$  si avrà:

$$\begin{aligned} \sigma'_{33} &= \frac{N'}{A} + \frac{M'}{I} x_2 \\ \sigma'_{23} &= \frac{T'}{A_s} \end{aligned} \quad (42.4)$$

dove  $A_s = \kappa A$  è l'area efficace a taglio, mentre la distribuzione di deformazioni geometricamente ammissibili potrà scriversi come:

$$\begin{aligned} e_{33} &= \frac{N}{EA} + \frac{M}{EI} x_2 \\ 2e_{23} &= \frac{T}{GA_s} \end{aligned} \quad (42.5)$$

dove le due distribuzioni di c.s.i.  $(M', N', T')$  ed  $(M, N, T)$  non sono in alcun modo collegate tra loro. Utilizzando le (42.4) e le (42.5), il lavoro virtuale interno diviene:

$$L_i = \int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds \quad (42.6)$$

ed infine, il principio dei lavori virtuali si traduce nell'uguaglianza:

$$\begin{aligned} \int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds = \\ \int_s q'(s) u_q(s) ds + \int_s m'(s) \phi_m(s) ds + \sum_{i=1}^{N_1} F'_i u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \phi_{mi} \end{aligned} \quad (42.7)$$

valida per qualunque distribuzione  $(M', N', T')$  di caratteristiche della sollecitazione interna, che sia in equilibrio con le forze applicate, e per qualsiasi distribuzione  $(M, N, T)$  che sia derivante da spostamenti geometricamente ammissibili

Nota - I tre termini che compaiono a primo membro della (42.7) rappresentano i contributi assiale, flessionale e tagliante del lavoro interno, rispettivamente. Spesso, è possibile trascurare un termine rispetto agli altri: ad esempio, nelle travi snelle si potrà certamente evitare di calcolare l'aliquota tagliante.

Dal principio dei lavori virtuali si possono trarre, secondo la falsariga di quanto fatto per il solido tridimensionale, il principio degli spostamenti virtuali ed il principio delle forze virtuali.

Nel primo caso si sceglieranno un primo sistema di forze reali e di caratteristiche effettive  $(M', N', T')$ , ed un secondo sistema di spostamenti virtuali  $(\delta u, \delta \phi)$  che si annulli in corrispondenza dei vincoli, e che generi le c.s.i.  $(\delta M, \delta N, \delta T)$ . Si ha quindi il principio degli spostamenti virtuali:

$$\int_s N' \frac{\delta N}{EA} ds + \int_s M' \frac{\delta M}{EI} ds + \int_s T' \frac{\delta T}{GA_s} ds = \int_s q'(s) \delta u_q(s) ds + \int_s m'(s) \delta \phi_m(s) ds + \sum_{i=1}^{N_1} F'_i \delta u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \delta \phi_{mi} \quad (42.8)$$

Il principio delle forze virtuali, invece, si scrive partendo dalla distribuzione effettiva di spostamenti  $(u, \phi)$ , che generi le c.s.i.  $(M, N, T)$  e da una qualsiasi distribuzione di forze (e reazioni) virtuali che sia in equilibrio e che generi le c.s.i.  $(\delta N', \delta M', \delta T')$ :

$$\int_s \delta N' \frac{N}{EA} ds + \int_s \delta M' \frac{M}{EI} ds + \int_s \delta T' \frac{T}{GA_s} ds = 0 \quad (42.9)$$

### 42.1.1 La presenza delle distorsioni distribuite

Se il campo di spostamenti geometricamente ammissibile comprende anche distribuzioni  $\lambda(s)$ ,  $\mu(s)$  e  $\theta(s)$  di distorsioni, il p.l.v. si generalizza, tenendo conto che le caratteristiche staticamente ammissibili compiono lavoro per tali distorsioni, ma che tale lavoro è, per definizione, negativo. Quindi potrà scriversi:

$$\int_s N' \left( \frac{N}{EA} - \lambda \right) ds + \int_s M' \left( \frac{M}{EI} - \mu \right) ds + \int_s T' \left( \frac{T}{GA_s} - \theta \right) ds = \int_s q'(s) u_q(s) ds + \int_s m'(s) \phi_m(s) ds + \sum_{i=1}^{N_1} F'_i u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \phi_{mi} \quad (42.10)$$

### 42.1.2 La presenza di vincoli cedevoli

Si consideri ora il caso in cui la struttura presenta *cedimenti anelastici* nei vincoli. Se si indicano con  $\eta_i$  e  $\theta_{ri}$  il cedimento assiale e rotazionale del generico vincolo  $i - mo$ , bisognerà introdurre il lavoro compiuto dalle reazioni, calcolate sul sistema staticamente ammissibile, per tali cedimenti. Sarà quindi, in assenza di distorsioni:

$$\int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds = \int_s q'(s) u_q(s) ds + \int_s m'(s) \phi_m(s) ds + \sum_{i=1}^{N_1} F'_i u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \phi_{mi} + \sum_{i=1}^{N_3} R'_i \eta_i + \sum_{i=1}^{N_4} \mathcal{M}'_{ri} \theta_{ri} \quad (42.11)$$

avendo ipotizzato che vi siano  $N_3$  cedimenti assiali, ed  $N_4$  cedimenti rotazionali, ed avendo indicato con  $R'_i$  le corrispondenti reazioni vincolari, e con  $\mathcal{M}'_{ri}$  le corrispondenti coppie reattive

Infine, se la struttura presenta vincoli elasticamente cedevoli nei confronti di traslazione e rotazione, bisognerà introdurre anche il lavoro delle reazioni per il corrispondente spostamento. In assenza di distorsioni si avrà allora:

$$\begin{aligned} & \int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds = \\ & \int_s q'(s)u_q(s) ds + \int_s m'(s)\phi_m(s) ds + \\ & \sum_{i=1}^{N_1} F'_i u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \phi_{mi} + \sum_{i=1}^{N_3} R'_i (\eta_i - c_{ri} R_i) + \sum_{i=1}^{N_4} \mathcal{M}'_{ri} (\theta_{ri} - c_{\phi i} \mathcal{M}_{ri}) \end{aligned} \quad (42.12)$$

dove si sono indicate con  $c_{ri}$  e  $c_{\phi i}$  le cedibilità assiali e rotazionali del generico vincolo.

Gli ultimi due termini di questa relazione possono essere considerati la traduzione — in teoria delle travi — del termine:

$$\int_{\partial B_2} \sigma_{ij} n_j f_i ds \quad (42.13)$$

ottenuto nel Capitolo 21 per i solidi tridimensionali.

## 42.2 Il principio dei lavori virtuali per il calcolo degli spostamenti su strutture isostatiche

Si consideri una struttura *isostatica*  $S$ , e si voglia calcolare la componente di spostamento di un suo punto  $P$  secondo la retta orientata  $r$ . A tal fine si può utilizzare il p.l.v. nel seguente modo:

1. si studia la struttura  $S$  soggetta ad una forza *fittizia*, e di valore unitario, agente in  $P$  in direzione della retta  $r$ , e si calcolano le reazioni vincolari ( $R'_i, \mathcal{M}'_{ri}$ ) e le caratteristiche della sollecitazione interna ( $M', N', T'$ ). Si assume questa distribuzione di c.s.i. come insieme staticamente ammissibile (sistema 1)
2. si studia la struttura  $S$  soggetta alle forze *effettive*, e si calcolano le reazioni vincolari ( $R_i, \mathcal{M}_{ri}$ ) e le caratteristiche della sollecitazione interna ( $M, N, T$ ). I corrispondenti campi di spostamenti  $u(s)$  e rotazioni  $\phi(s)$  sono assunti quali spostamenti geometricamente ammissibili. (sistema 2)
3. si scrive il p.l.v. assumendo come sistema staticamente ammissibile le c.s.i. ( $M', N', T'$ ), insieme alle reazioni vincolari ( $R'_i, \mathcal{M}'_{ri}$ ), sicuramente in equilibrio in presenza della forza fittizia, e come sistema di spostamenti

geometricamente ammissibili gli spostamenti effettivi, che generano le c.s.i.  $(M, N, T)$ . Si ha:

$$\int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds =$$

$$1 \times u_r + \sum_{i=1}^{N_3} R'_i \eta_i + \sum_{i=1}^{N_4} \mathcal{M}'_{ri} \theta_{ri} \quad (42.14)$$

dove  $u_r$  è il richiesto spostamento.

Se occorre calcolare la rotazione di una sezione, la struttura andrà fittiziamente caricata da una coppia concentrata di valore unitario, in corrispondenza della sezione in esame

In presenza di cedimenti elastici, caratterizzati da una relazione lineare tra spostamenti e reazioni:

$$s_{Ri} = -c_{ri} R_i$$

$$\phi_{ri} = -c_{\phi i} \mathcal{M}_{ri} \quad (42.15)$$

il principio dei lavori virtuali si scriverà :

$$\int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds =$$

$$1u_r + \sum_{i=1}^{N_3} R'_i (\eta_i - c_{ri} R_i) + \sum_{i=1}^{N_4} \mathcal{M}'_{ri} (\theta_{ri} - c_{\phi i} \mathcal{M}_{ri}) \quad (42.16)$$

in quanto le reazioni del primo sistema  $(R'_i, \mathcal{M}'_{ri})$  compiranno lavoro per gli spostamenti (42.15) del sistema 2.

### 42.2.1 Un esempio per il calcolo di uno spostamento su struttura isostatica

Si consideri la trave di Figura 42.2, e si voglia calcolare la rotazione della sezione in corrispondenza dell'appoggio.

Per utilizzare il principio dei lavori virtuali, si sceglie come sistema staticamente ammissibile (sistema 1) la trave caricata da una coppia fittizia in corrispondenza dell'appoggio in D, come riportato in Figura 42.3:

Si sceglie come sistema geometricamente ammissibile (sistema 2) il sistema reale, caricato dalla forza F, ritrovando quindi lo schema di Figura 42.2.

Il principio dei lavori virtuali fornisce, in ipotesi di trave omogenea a sezione costante, e limitandosi al solo contributo flessionale:

$$\frac{1}{EI} \int_0^{3L} M' M dx_3 = 1\phi_D \quad (42.17)$$

Occorre quindi calcolare il momento  $M'$  sullo schema 1, ed il momento  $M$  sullo schema 2.

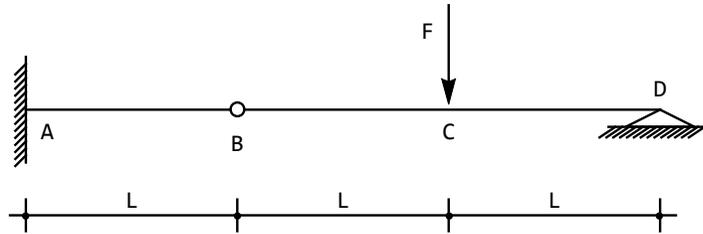


Figura 42.2: Un esempio per il calcolo di uno spostamento su una struttura isostatica

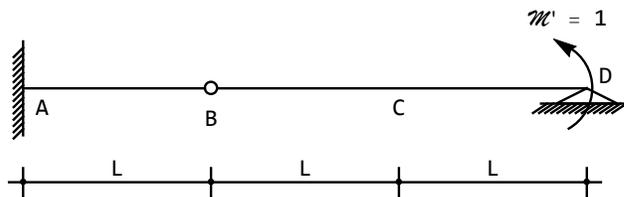


Figura 42.3: Il sistema 1, staticamente ammissibile, su cui calcolare il momento  $M'$

Sullo schema fittizio di forze virtuali, caricato da una coppia, il momento si presenta come un'unica retta, con valore unitario a destra, e con un punto di nullo sulla cerniera, presentandosi come in Figura 42.4.

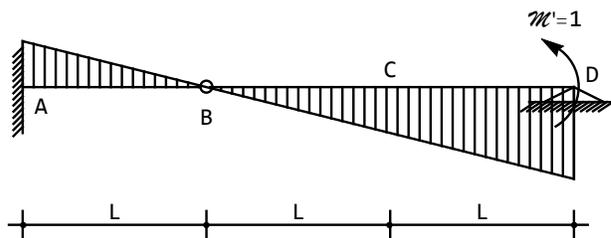
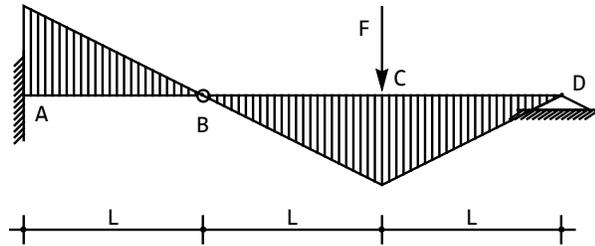


Figura 42.4: Il momento  $M'$  sul sistema 1

Sullo schema reale di spostamenti, invece, il diagramma varia linearmente da  $A$  a  $C$ , per poi proseguire con un'altra inclinazione, annullandosi in  $D$ , come illustrato in Figura 42.5.

Figura 42.5: Il momento  $M$ , calcolato sul sistema 2

Analiticamente, si ottiene:

$$M'(x_3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{x_3}{L} - \frac{1}{2} & x_3 \in [0, 2L]; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x_3}{L} & x_3 \in [0, L]. \end{cases} \quad (42.18)$$

ed analogamente, sul sistema di spostamenti:

$$M(x_3) = \begin{cases} \frac{F}{2} x_3 - \frac{F}{2} L & x_3 \in [0, 2L]; \\ \frac{F}{2} L - \frac{F}{2} x_3 & x_3 \in [0, L]. \end{cases} \quad (42.19)$$

Si noti che il primo diagramma non doveva essere necessariamente suddiviso in due aliquote, ma che si è preferito scrivere le due diverse equazioni da  $A$  a  $C$ , e da  $C$  a  $D$ , in quanto il calcolo dell'integrale deve comunque essere separato in due aliquote:

$$\begin{aligned} \phi_D &= \frac{1}{EI} \int_0^{2L} M' M dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^L M' M dx_3 = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{2L} \left( \frac{1}{2} \frac{x_3}{L} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{F}{2} x_3 - \frac{F}{2} L \right) dx_3 + \right. \\ &\quad \left. \int_0^L \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x_3}{L} \right) \left( \frac{F}{2} L - \frac{F}{2} x_3 \right) dx_3 \right] = \frac{FL^2}{3EI} \end{aligned} \quad (42.20)$$

Esercizio - Dedurre i diagrammi dei momenti delle Figure 42.4 e 42.5, assieme alla loro distribuzione analitica

Esercizio - Confermare il risultato (42.20) applicando il metodo della linea elastica, oppure il metodo dei corollari di Mohr, oppure ancora il metodo di Savioiti

### 42.3 Il p.l.v. per la scrittura delle equazioni di congruenza su strutture iperstatiche

Una seconda interessante utilizzazione del principio dei lavori virtuali si ottiene nell'applicazione del metodo delle forze, con la relativa scrittura delle equazioni di congruenza. Sia  $S$  una struttura  $i$  volte iperstatica, si identifichi una opportuna struttura isostatica equivalente (S.I.E.), in modo da poter scrivere simbolicamente:

$$S = S^{(0)} + \sum_{j=1}^i X_j S^{(j)} \quad (42.21)$$

dove  $S^{(0)}$  è la struttura isostatica prescelta, soggetta ai carichi applicati, ed  $S^{(j)}$  è la struttura isostatica soggetta ad un carico unitario in corrispondenza della  $j$ -ma incognita iperstatica  $X_j$ .

Si assuma ora come sistema staticamente ammissibile la struttura  $S^{(j)}$ , e come sistema geometricamente ammissibile la struttura reale  $S$ . Se si assume, per semplicità, che i vincoli siano perfetti e che non siano presenti distorsioni, il p.l.v. si scrive:

$$\int_s M^{(j)} \frac{M}{EI} ds = 0 \quad j = 1, \dots, i \quad (42.22)$$

tenendo conto del solo effetto flessionale. Per il principio di sovrapposizione degli effetti sarà poi:

$$M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + \dots + X_i M^{(i)} \quad (42.23)$$

e quindi la (42.22) diviene :

$$\int_S M^{(j)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + X_1 \int_S M^{(j)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + \dots + X_i \int_S M^{(j)} \frac{M^{(i)}}{EI} ds = 0 \quad j = 1, \dots, i \quad (42.24)$$

Sono queste le  $i$  equazioni di congruenza, che permettono il calcolo delle  $i$  incognite iperstatiche  $X_j$ .

#### 42.3.1 Un esempio

Si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 42.6, per cui  $i = 2$ .

Si sceglie come struttura isostatica equivalente la trave a mensola incastrata a sinistra e libera a destra, soggetta al carico  $q$ , alla forza incognita  $X_1$  a destra, ed alla coppia incognita  $X_2$  a destra. Si può scrivere, formalmente,  $S = S^{(0)} + X_1 S^{(1)} + X_2 S^{(2)}$ , nel senso che — utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti — tutto ciò che deve essere calcolato sul sistema isostatico equivalente può essere calcolato sui tre schemi  $S^{(0)}$ ,  $S^{(1)}$  ed  $S^{(2)}$ . Ad esempio, il diagramma del momento  $M$  sullo schema di Figura 42.6 può calcolarsi come  $M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + X_2 M^{(2)}$ .

I valori delle due incognite iperstatiche devono essere tali da ripristinare i vincoli in  $B$ , e quindi proibire abbassamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned} u_{2B} &= 0 \\ \phi_B &= 0 \end{aligned} \quad (42.25)$$

Si adotti ora come sistema staticamente ammissibile il sistema  $S^{(1)}$  di Figura 42.8, e come sistema geometricamente ammissibile il sistema  $S$ , o meglio, il suo sistema isostatico equivalente. Il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_0^L M^{(1)} M dx_3 = 0 \quad (42.26)$$

Adottando invece come sistema staticamente ammissibile il sistema  $S^{(2)}$  di Figura 42.9, e come sistema geometricamente ammissibile il sistema  $S$ , o meglio, il suo sistema isostatico equivalente, il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_0^L M^{(2)} M dx_3 = 0 \quad (42.27)$$

Ora, per il principio di sovrapposizione degli effetti, si potrà scrivere  $M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + X_2 M^{(2)}$ , e quindi si ottengono due equazioni nelle due incognite  $X_1$  ed  $X_2$ :

$$\begin{aligned} \int_0^L M^{(1)} M^{(0)} dx_3 + X_1 \int_0^L M^{(1)} M^{(1)} dx_3 + X_2 \int_0^L M^{(1)} M^{(2)} dx_3 &= 0 \\ \int_0^L M^{(2)} M^{(0)} dx_3 + X_1 \int_0^L M^{(2)} M^{(1)} dx_3 + X_2 \int_0^L M^{(2)} M^{(2)} dx_3 &= 0 \end{aligned} \quad (42.28)$$

Il momento  $M^{(0)}$ , da calcolare sullo schema di Figura 42.7, è distribuito con legge parabolica, ed analiticamente può scriversi:

$$M^{(0)}(x_3) = -\frac{q}{2}x_3^2 + qLx_3 - q\frac{L^2}{2} \quad (42.29)$$

Il momento  $M^{(1)}$  si deve calcolare sullo schema di Figura 42.8, ed è esprimibile come legge lineare:

$$M^{(1)}(x_3) = x_3 - L \quad (42.30)$$

Infine,  $M^{(2)}$  è da calcolare sullo schema di Figura 42.9, ed è pari ad 1:

$$M^{(2)}(x_3) = 1 \quad (42.31)$$

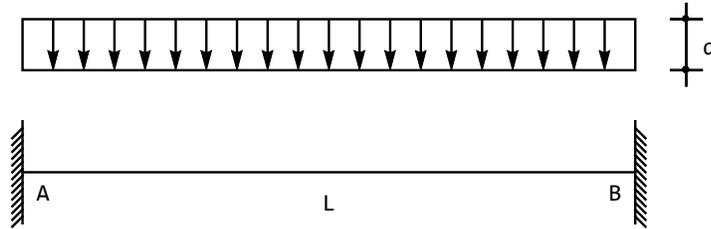


Figura 42.6: Una struttura  $S$  doppiamente iperstatica

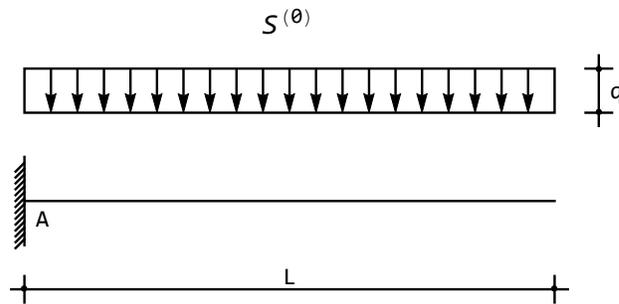


Figura 42.7: Il sistema  $S^{(0)}$ , isostatico e soggetto al carico uniformemente distribuito

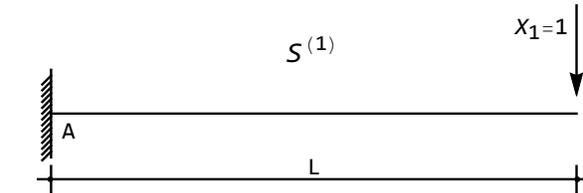


Figura 42.8: Il sistema  $S^{(1)}$ , isostatico e soggetto all'incognita iperstatica  $X_1$ , posta unitaria

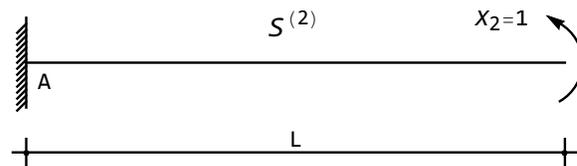


Figura 42.9: Il sistema  $S^{(2)}$ , isostatico e soggetto all'incognita iperstatica  $X_2$ , posta unitaria

Le (42.28) si scrivono allora :

$$\begin{aligned} \int_0^L (x_3 - L) \left( \frac{-q}{2} x_3^2 + qLx_3 - q\frac{L^2}{2} \right) dx_3 + X_1 \int_0^L (x_3 - L)^2 dx_3 + \\ X_2 \int_0^L (x_3 - L) dx_3 = 0 \\ \int_0^L \left( \frac{-q}{2} x_3^2 + qLx_3 - q\frac{L^2}{2} \right) dx_3 + X_1 \int_0^L (x_3 - L) dx_3 + \\ X_2 \int_0^L dx_3 = 0 \end{aligned} \quad (42.32)$$

ossia, calcolando gli integrali:

$$\frac{L^3}{3} X_1 - \frac{L^2 X_2}{2} X_2 = -\frac{qL^4}{8} \quad (42.33)$$

$$-\frac{L^2 X_1}{2} X_1 + LX_2 = \frac{qL^3}{6} \quad (42.34)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} X_1 &= -q\frac{L}{2} \\ X_2 &= -q\frac{L^2}{12} \end{aligned} \quad (42.35)$$

## Capitolo 43

# Il teorema di reciprocità e le linee di influenza

*Influence line method presents the higher level of analysis of a structure, than the fixed load approach. Good knowledge of influence lines approaches an immeasurable increase in understanding of behaviour of structure. Analyst, who combines both approaches for analysis of a structure in engineering practice, is capable to perform a complex analysis of its behaviour*

I.A. Karnovsky, O. Lebed - Advanced Methods of Structural Analysis, Springer 2010

In questo Capitolo si dimostra un principio generale di reciprocità, da cui poter far discendere facilmente i classici teoremi di Maxwell, Betti, Colonnetti e Volterra. Ciò è necessaria premessa allo studio delle linee di influenza, cui viene dedicato il resto del Capitolo

### 43.1 Il principio generale di reciprocità

Si dimostrerà ora il seguente:

**Teorema 18.** *Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticità. La trave sia soggetta ad un primo sistema di  $n_1$  forze  $F^{(1)}$ , ed  $m_1$  tra cedimenti anelastici  $\Delta^{(1)}$  e distorsioni  $D^{(1)}$ , che causa gli spostamenti  $s^{(1)}$  e le caratteristiche della sollecitazione interna  $C^{(1)}$ , e ad un secondo sistema di  $n_2$  forze  $F^{(2)}$ , ed  $m_2$  tra cedimenti anelastici  $\Delta^{(2)}$  e distorsioni  $D^{(2)}$ , che causa gli spostamenti  $s^{(2)}$  e le caratteristiche della sollecitazione interna  $C^{(2)}$ .*

Il lavoro mutuo del primo sistema di forze, cedimenti e distorsioni, dovuto agli spostamenti  $s^{(2)}$  ed alle caratteristiche  $C^{(2)}$ , è uguale al lavoro mutuo del secondo sistema di forze, cedimenti e distorsioni, dovuto agli spostamenti  $s^{(1)}$  ed alle caratteristiche  $C^{(1)}$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione consiste nella doppia scrittura del principio dei lavori virtuali, utilizzando una volta il primo sistema di forze ed il secondo sistema di spostamenti, e la seconda volta impiegando il secondo sistema di forze ed il primo sistema di spostamenti.

Nel primo caso il lavoro virtuale interno si scrive:

$$L_i = \int_s N^{(1)} \frac{N^{(2)}}{EA} ds + \int_s M^{(1)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds + \int_s T^{(1)} \frac{T^{(2)}}{GA_s} ds - \int_s N^{(1)} \lambda^{(2)} ds - \int_s M^{(1)} \mu^{(2)} ds - \int_s T^{(1)} \theta^{(2)} ds \quad (43.1)$$

mentre il lavoro esterno sarà fornito da:

$$L_e = \sum_{i=1}^{n_1} F_i^{(1)} s_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{m_1} R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} - \sum_{i=1}^s c_i R_i^{(1)} R_i^{(2)} \quad (43.2)$$

e quindi il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\sum_{i=1}^{n_1} F_i^{(1)} s_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{m_1} R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} - \sum_{i=1}^s c_i R_i^{(1)} R_i^{(2)} = \int_s N^{(1)} \frac{N^{(2)}}{EA} ds + \int_s M^{(1)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds + \int_s T^{(1)} \frac{T^{(2)}}{GA_s} ds - \int_s N^{(1)} \lambda^{(2)} ds - \int_s M^{(1)} \mu^{(2)} ds - \int_s T^{(1)} \theta^{(2)} ds \quad (43.3)$$

Si noti che si sono anche introdotti  $s$  vincoli elasticamente cedevoli, mentre i cedimenti e le distorsioni concentrate sono stati — per semplicità — riassunti in un unico termine. E' peraltro ovvio che ciascun cedimento (assiale o rotazionale) lavora per la corrispondente reazione o coppia reattiva, mentre ciascuna distorsione lavora per la corrispondente caratteristica della sollecitazione interna.

Nel secondo caso, invece, si avrà:

$$\sum_{i=1}^{n_2} F_i^{(2)} s_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{m_2} R_i^{(2)} \Delta_i^{(1)} - \sum_{i=1}^s c_i R_i^{(2)} R_i^{(1)} = \int_s N^{(2)} \frac{N^{(1)}}{EA} ds + \int_s M^{(2)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + \int_s T^{(2)} \frac{T^{(1)}}{GA_s} ds - \int_s N^{(2)} \lambda^{(1)} ds - \int_s M^{(2)} \mu^{(1)} ds - \int_s T^{(2)} \theta^{(1)} ds \quad (43.4)$$

Dalla (43.3) e dalla (43.4) si ha poi, per confronto:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_1} F_i^{(1)} s_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{m_1} R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} + \int_s N^{(1)} \lambda^{(2)} ds + \int_s M^{(1)} \mu^{(2)} ds + \int_s T^{(1)} \theta^{(2)} ds = \\ & \sum_{i=1}^{n_2} F_i^{(2)} s_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{m_2} R_i^{(2)} \Delta_i^{(1)} + \int_s N^{(2)} \lambda^{(1)} ds + \int_s M^{(2)} \mu^{(1)} ds + \int_s T^{(2)} \theta^{(1)} ds \end{aligned} \quad (43.5)$$

ossia l'asserto.  $\square$

### 43.1.1 Il principio di Betti ed il principio di Maxwell

In assenza di cedimenti e distorsioni il principio di reciprocità si riduce al classico teorema di Enrico Betti:

**Corollario 1.** (*Betti 1872*) - *Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticità. La trave sia soggetta ad un sistema di  $n_1$  forze  $F^{(1)}$ , che causa gli spostamenti  $u^{(1)}$  e ad un sistema di  $n_2$  forze  $F^{(2)}$ , che causa gli spostamenti  $u^{(2)}$ .*

*Il lavoro mutuo del primo sistema di forze dovuto agli spostamenti  $u^{(2)}$ , è uguale al lavoro mutuo del secondo sistema di forze, dovuto agli spostamenti  $u^{(1)}$ :*

$$\sum_{i=1}^{n_1} F_i^{(1)} s_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_2} F_i^{(2)} s_i^{(1)} \quad (43.6)$$

Se inoltre i due insiemi di forze si riducono ambedue ad una sola forza di intensità unitaria, si ha il più antico teorema di reciprocità, dovuto a Maxwell:

**Corollario 2.** (*Maxwell 1864*) - *Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticità. La trave sia soggetta ad una forza unitaria all'ascissa  $\zeta$  che causa gli spostamenti  $s^{(1)}$  e ad una forza unitaria all'ascissa  $\eta$ , che causa gli spostamenti  $s^{(2)}$ .*

*Il lavoro mutuo della prima forza, dovuto agli spostamenti  $s^{(2)}$ , è uguale al lavoro mutuo della seconda forza, dovuto agli spostamenti  $s^{(1)}$  e quindi*

$$s^{(2)}(\zeta) = s^{(1)}(\eta) \quad (43.7)$$

In altri termini, il principio di Maxwell garantisce che la componente di spostamento del punto  $\eta$ , secondo una retta  $b$ , provocato da una forza unitaria agente in un punto  $\zeta$ , secondo la direzione della retta  $a$ , è uguale alla componente di spostamento del punto  $\zeta$ , secondo la retta  $a$ , provocato da una forza unitaria agente nel punto  $\eta$ , secondo la retta  $b$ .

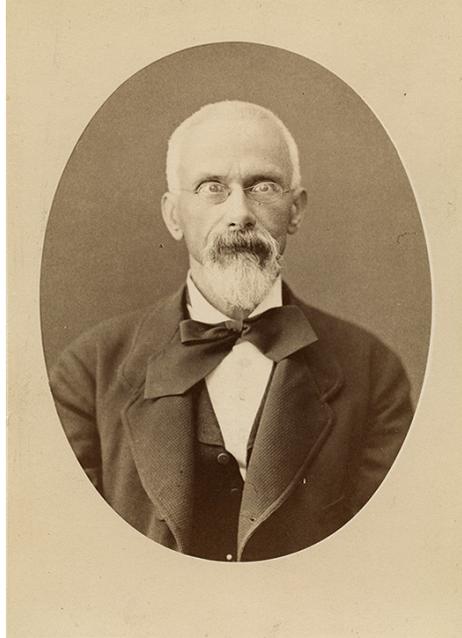


Figura 43.1: EnricoBetti

### 43.1.2 Il principio di Colonnetti

Annullando le distorsioni ed i cedimenti anelastici del primo sistema, e le forze del secondo sistema, si giunge al secondo principio di reciprocità, dovuto a Gustavo Colonnetti:

**Corollario 3.** (Colonnetti) - *Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticità. La trave sia soggetta ad un primo sistema di  $n_1$  forze  $F^{(1)}$ , che causa gli spostamenti  $s^{(1)}$  e le caratteristiche della sollecitazione interna  $C^{(1)}$ , e ad un secondo sistema di  $m_2$  cedimenti anelastici  $\Delta^{(2)}$  e distorsioni  $D^{(2)}$ , che causa gli spostamenti  $s^{(2)}$  e le caratteristiche della sollecitazione interna  $C^{(2)}$ .*

*Il lavoro mutuo del primo sistema di forze, dovuto agli spostamenti  $s^{(2)}$  ed alle caratteristiche  $C^{(2)}$ , è nullo:*

$$\sum_{i=1}^{n_1} F_i^{(1)} s_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{m_2} R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} + \int_s N^{(1)} \lambda^{(2)} ds + \int_s M^{(1)} \mu^{(2)} ds + \int_s T^{(1)} \theta^{(2)} ds = 0 \quad (43.8)$$

### 43.1.3 Il principio di Volterra

Annullando le forze sia del primo che del secondo sistema, si giunge al terzo principio di reciprocità, dovuto a Vito Volterra:

**Corollario 4.** (Volterra) - *Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticità. La trave sia soggetta ad un primo sistema di  $m_1$  cedimenti anelastici  $\Delta^{(1)}$  e distorsioni  $D^{(1)}$ , che causa gli spostamenti  $s^{(1)}$  e le caratteristiche della sollecitazione interna  $C^{(1)}$ , e ad un secondo sistema di  $m_2$  cedimenti anelastici  $\Delta^{(2)}$  e distorsioni  $D^{(2)}$ , che causa gli spostamenti  $s^{(2)}$  e le caratteristiche della sollecitazione interna  $C^{(2)}$ .*

*Il lavoro mutuo del primo sistema di cedimenti e distorsioni, dovuto agli spostamenti  $s^{(2)}$  ed alle caratteristiche  $C^{(2)}$ , è uguale al lavoro mutuo del secondo sistema di cedimenti e distorsioni, dovuto agli spostamenti  $s^{(1)}$  ed alle caratteristiche  $C^{(1)}$ .*

$$\sum_{i=1}^{m_2} R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} + \int_s N^{(1)} \lambda^{(2)} ds + \int_s M^{(1)} \mu^{(2)} ds + \int_s T^{(1)} \theta^{(2)} ds =$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} R_i^{(2)} \Delta_i^{(1)} + \int_s N^{(2)} \lambda^{(1)} ds + \int_s M^{(2)} \mu^{(1)} ds + \int_s T^{(2)} \theta^{(1)} ds$$
(43.9)

Nota - Quanto detto finora non è limitato alle travi ad asse rettilineo, ma ha lo stesso livello di applicabilità del principio dei lavori virtuali. Nel seguito, invece, per semplicità, ci si limita alle travi ad asse rettilineo.

## 43.2 Gli enti duali

Dall'esame dei principi di reciprocità emerge una relazione tra enti forza ed enti spostamento: ciascun elemento dell'insieme delle forze è legato ad un elemento dell'insieme degli spostamenti, nel senso che ciascun ente forza compie lavoro per il corrispondente ente spostamento. Si ha quindi la tabella 43.1 di dualità.

Ente Forza	Ente Spostamento
Forza	Spostamento
Coppia	Rotazione
Momento flettente	Distorsione di rotazione relativa
Taglio	Distorsione di scorrimento
Sforzo normale	Distorsione assiale

Tabella 43.1: Gli enti forza ed i loro enti duali

Ciò detto, è essenziale osservare che nella tabella precedente compaiono cinque quantità che è possibile applicare alla trave, ossia forze, coppie e distorsioni, e cinque quantità che vengono da esse generate, ossia spostamenti, rotazioni e

caratteristiche della sollecitazione interna. L'insieme delle forze, coppie e distorsioni verrà collettivamente indicato con  $C$  (*cause*), mentre l'insieme degli spostamenti, rotazioni e caratteristiche della sollecitazione interna sarà denotato con  $E$  (*effetti*). Infine siano  $c$  ed  $e$  i generici elementi di questi due insiemi.

Ciò detto, si fornisce ora la seguente:

**Definizione 12.** *Si dice linea di influenza  $e_S^c(x_3)$  di un ente  $e \in E$  nella sezione  $S$ , provocato da un ente  $c \in C$  viaggiante sulla trave, il diagramma la cui ordinata alla generica ascissa  $x_3$  fornisce il valore di  $e$  in  $S$  quando  $c$ , unitaria, agisce in  $x_3$ .*

Si precisa subito che il termine *viaggiante* non si riferisce in alcun modo alla mobilità della causa  $c$ , ma solo al poterla situare in una generica ascissa.

Ad esempio, la linea di influenza dello spostamento in una sezione  $S$  dovuta ad una forza viaggiante è un diagramma che fornisce, nella generica  $x_3$ , lo spostamento in  $S$  quando una forza unitaria agisce in  $x_3$ .

Limitandosi alle travi ad asse rettilineo in regime flesso-tagliante, si hanno quindi le seguenti possibilità:

1. Linee di influenza di spostamenti per forze viaggianti:
  - (a) Linea di influenza  $\eta_S^F$  dello spostamento per forza viaggiante
  - (b) Linea di influenza  $\phi_S^F$  della rotazione per forza viaggiante
  - (c) Linea di influenza  $\eta_S^M$  dello spostamento per coppia viaggiante
  - (d) Linea di influenza  $\phi_S^M$  della rotazione per coppia viaggiante
2. Linee di influenza di caratteristiche per forze viaggianti:
  - (a) Linea di influenza  $m_S^F$  del momento per forza viaggiante
  - (b) Linea di influenza  $t_S^F$  del taglio per forza viaggiante
  - (c) Linea di influenza  $m_S^M$  del momento per coppia viaggiante
  - (d) Linea di influenza  $t_S^M$  del taglio per coppia viaggiante
3. Linee di influenza di spostamenti per distorsioni viaggianti:
  - (a) Linea di influenza  $\eta_S^\mu$  dello spostamento per distorsione rotazionale viaggiante
  - (b) Linea di influenza  $\phi_S^\mu$  della rotazione per distorsione rotazionale viaggiante
  - (c) Linea di influenza  $\eta_S^\theta$  dello spostamento per distorsione di scorrimento viaggiante
  - (d) Linea di influenza  $\phi_S^\theta$  della rotazione per distorsione di scorrimento viaggiante
4. Linee di influenza di caratteristiche per distorsioni viaggianti:

- (a) Linea di influenza  $m_S^\mu$  del momento per distorsione rotazionale viaggiante
- (b) Linea di influenza  $t_S^\mu$  del taglio per distorsione rotazionale viaggiante
- (c) Linea di influenza  $m_S^\theta$  del momento per distorsione di scorrimento viaggiante
- (d) Linea di influenza  $t_S^\theta$  del taglio per distorsione di scorrimento viaggiante

I teoremi di reciprocità forniscono la metodologia per il tracciamento dei richiesti diagrammi: il teorema di Betti deve essere applicato per il primo caso, il teorema di Colonnetti si applica nel secondo e nel terzo caso, il teorema di Volterra è utile nel quarto ed ultimo caso.

### 43.3 L'utilizzo del teorema di Betti: le linee di influenza di spostamenti per forze viaggianti

#### Caso 1a - Linea di influenza $\eta_S^F$ dello spostamento in $S$ per forza viaggiante

Si consideri una generica sezione retta  $S$  della trave in esame, e si voglia conoscere lo spostamento verticale  $u_2(S)$  in  $S$  per effetto di una forza unitaria  $F_1 = 1$  agente in un'altra sezione retta generica  $x_3$ . Se si applica una forza  $F$  nella sezione  $S$  e si utilizza il teorema di Betti, si può scrivere:

$$F_1 u_2(S) = F u_2(x_3) \quad (43.10)$$

ed è quindi possibile affermare che il richiesto spostamento  $u_2(S)$  può calcolarsi applicando una forza unitaria  $F = 1$  in  $S$ , leggendo lo spostamento della sezione  $x_3$ . Ne segue che il diagramma degli abbassamenti dovuti alla forza unitaria applicata in  $S$  è la linea di influenza  $\eta_S^F$  degli spostamenti in  $S$  per forza unitaria viaggiante. Il tracciamento della linea di influenza è così ricondotto ad un problema ben noto, da potersi affrontare, ad esempio, con la scrittura dell'equazione differenziale della linea elastica, o con qualsiasi altro metodo preferito.

A titolo di esempio, si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 43.2, e si voglia la linea di influenza dello spostamento in una sezione  $S$  all'ascisa generica  $\zeta$  per effetto di una forza viaggiante.

Occorre calcolare il diagramma degli spostamenti per una trave doppiamente incastrata caricata con una forza unitaria in  $S$ , e tale problema è risolvibile immediatamente a fornire la richiesta linea di influenza:

$$\eta_S^F = \begin{cases} \frac{(L - \zeta)^2 x_3^2 (3L\zeta - Lx_3 - 2\zeta x_3)}{6EIL^3} & x_3 \leq \zeta \\ -\frac{\zeta^2 (L - x_3)^2 (L(\zeta - 3x_3) + 2\zeta x_3)}{6EIL^3} & x_3 \geq \zeta \end{cases} \quad (43.11)$$

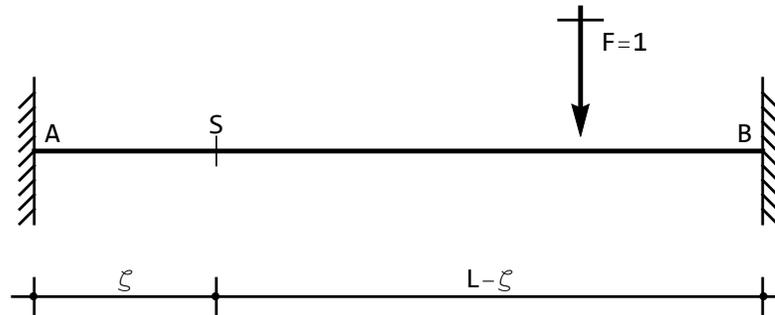


Figura 43.2: Trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante

il cui grafico, per  $\zeta = \frac{L}{4}$ , si presenta come in Figura 43.3. Si noti che le espressioni (43.11) presuppongono un unico sistema di riferimento, con origine in  $A$ .

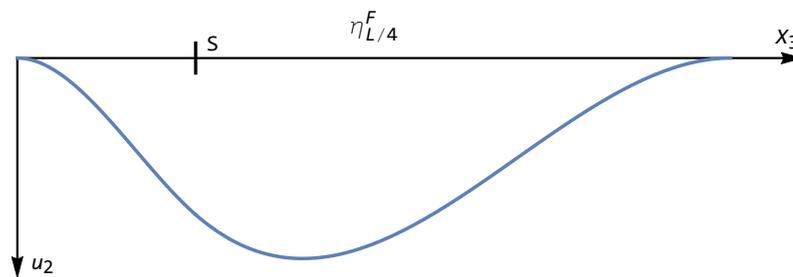


Figura 43.3: Linea di influenza  $\eta_{L/4}^F$  per una trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante

Dall'esame della linea di influenza si trae la conclusione, peraltro ovvia in questo caso semplice, che la sezione  $S$  subirà comunque spostamenti positivi, ovunque agisca la forza viaggiante. Inoltre, lo spostamento sarà massimo quando la forza agisce proprio in corrispondenza del punto di tangenza orizzontale del diagramma. Ad esempio, per  $\zeta = \frac{L}{4}$ , lo spostamento massimo in  $S$  si ottiene quando la forza agisce a  $\frac{2}{5}L$ , e vale  $\frac{9}{3200} \frac{L^3}{EI}$

### Caso 1b - Linea di influenza $\eta_S^M$ dello spostamento in $S$ per coppia viaggiante

Per ottenere la richiesta linea di influenza bisogna calcolare il diagramma dell'ente duale all'ente viaggiante (e quindi occorre calcolare il diagramma delle rotazioni) dovuto ad un ente unitario che sia duale dell'ente in esame (e quindi

occorre caricare la struttura con una forza unitaria). D'altro canto, considerando la struttura caricata da una coppia  $\mathcal{M}$  unitaria nella generica sezione  $x_3$  (primo sistema), e da una forza  $F$  in  $S$  (secondo sistema), il teorema di Betti permette di scrivere:

$$\mathcal{M}\phi(S) = Fu_2(x_3) \quad (43.12)$$

Come esempio un po' più complicato del precedente, si consideri la trave a due campate di Figura 43.4, e si voglia la linea di influenza dello spostamento nella sezione  $S$  situata ad  $L/4$ , dovuto ad una coppia viaggiante, ossia si voglia tracciare il diagramma delle rotazioni dovute ad una forza unitaria agente ad un quarto della luce.

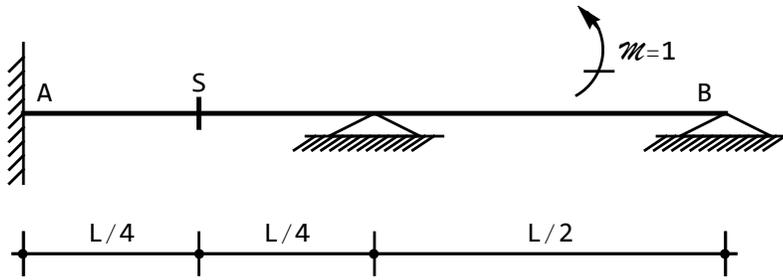


Figura 43.4: Trave a due campate soggetta a coppia viaggiante

Complicazioni analitiche a parte, la metodologia di soluzione del problema strutturale non cambia, e fornisce la richiesta linea di influenza come:

$$\eta_{L/4}^{\mathcal{M}} = \begin{cases} \frac{x_3(-9L + 34x_3)}{112EI} & x_3 \leq \frac{L}{4} \\ -\frac{7L^2 - 38Lx_3 + 44x_3^2}{224EI} & \frac{L}{4} \leq x_3 \leq \frac{L}{2} \\ \frac{11L^2 - 24Lx_3 + 12x_3^2}{448EI} & \frac{L}{2} \leq x_3 \leq L \end{cases} \quad (43.13)$$

Graficamente si ottiene il diagramma di Figura 43.5.

Una interessante applicazione della teoria delle linee di influenza permette il calcolo delle condizioni di carico più sfavorevoli, da applicare su una struttura ai fini di verifica e/o progetto. Se ci si chiede, infatti, dove occorre posizionare la coppia per ottenere i valori massimi e minimi dello spostamento, uno sguardo alla linea di influenza permette di stabilire che il massimo abbassamento si avrà quando la coppia agisce in una ascissa vicina alla mezzera. Per essere più precisi, basta calcolare l'ascissa di massimo sulla seconda campata, ossia risolvere l'equazione:

$$\frac{d}{dx_3} \left( -\frac{7L^2 - 38Lx_3 + 44x_3^2}{224EI} \right) = 0 \quad (43.14)$$

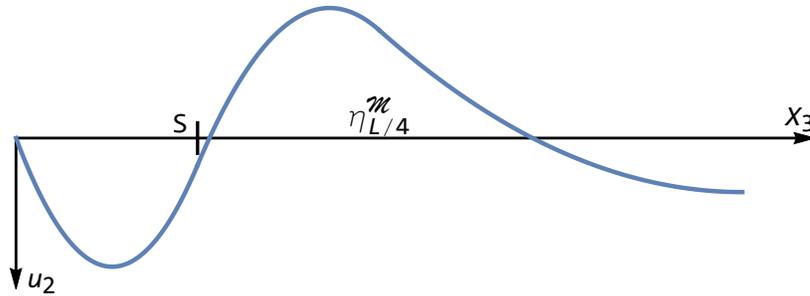


Figura 43.5: Linea d'influenza  $\eta_{L/4}^M$  per una trave a due campate soggetta a coppia viaggiante

immediatamente risolvibile a fornire:

$$x_3^{(1)} = \frac{19}{44}L \approx 0.432L \quad (43.15)$$

Analogamente, si osserva che l'ascissa di minimo della linea di influenza ricade nella prima campata, e quindi si ricava:

$$\frac{d}{dx_3} \left( \frac{x_3(-9L + 34x_3)}{112EI} \right) = 0 \quad (43.16)$$

fornendo l'ascissa in cui occorre applicare la coppia per ottenere il minimo abbassamento:

$$x_3^{(2)} = \frac{9}{68}L \approx 0.132L \quad (43.17)$$

### Caso 1c - Linea di influenza $\phi_S^F$ della rotazione in $S$ per forza viaggiante

In questo caso occorre caricare la trave con una coppia unitaria nella sezione  $S$ , e calcolare il diagramma degli spostamenti da essa generata. Infatti, considerando la struttura caricata da una forza  $F$  unitaria nella generica sezione  $x_3$  (primo sistema), e da una coppia  $\mathcal{M}$  in  $S$  (secondo sistema), il teorema di Betti permette di scrivere:

$$Fu_2(S) = \mathcal{M}\phi_S(x_3) \quad (43.18)$$

Come semplice esempio, si voglia la linea di influenza della rotazione in mezzera per una trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, causata da una forza verticale viaggiante (cfr. Figura 43.6).

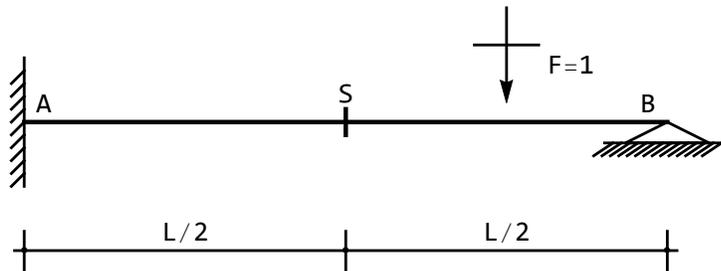


Figura 43.6: Trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra soggetta a forza verticale viaggiante

Per ottenerla, bisogna tracciare il diagramma degli spostamenti dovuti ad una coppia unitaria applicata in mezzeria, giungendo a scrivere:

$$\phi_{L/2}^F = \begin{cases} \frac{(L - 3x_3)x_3^2}{16EIL} & x_3 \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2L^3 - 8L^2x_3 + 9Lx_3^2 - 3x_3^3}{16EIL} & x_3 \geq \frac{L}{2} \end{cases} \quad (43.19)$$

Si ha quindi, in definitiva, il grafico di Figura 43.7.

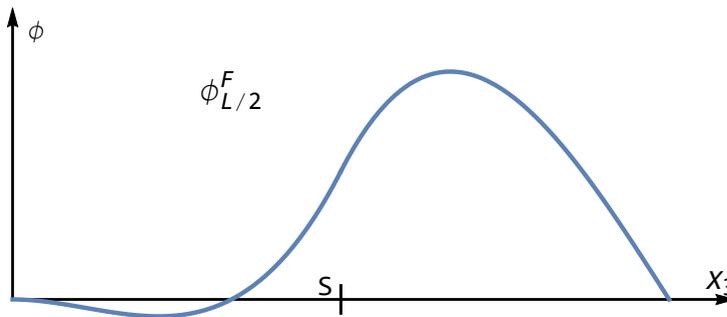


Figura 43.7: Linea d'influenza  $\phi_{L/2}^F$  della rotazione in mezzeria per una trave incastrata–appoggiata soggetta a forza viaggiante

### Caso 1d - Linea di influenza $\phi_S^M$ della rotazione in $S$ per coppia viaggiante

In questo caso, come ormai dovrebbe essere chiaro, occorre caricare la trave con una coppia unitaria nella sezione  $S$ , e calcolare il diagramma delle rotazioni da essa generato. Infatti, considerando la struttura caricata da una coppia unitaria

$M_1$  nella generica sezione  $x_3$  (primo sistema), e da una coppia  $\mathcal{M}$  in  $S$  (secondo sistema), il teorema di Betti permette di scrivere:

$$\mathcal{M}_1\phi(S) = \mathcal{M}\phi(x_3) \quad (43.20)$$

Come semplice esempio, si voglia la linea di influenza della rotazione nell'estremo di sinistra per una trave appoggiata, causata da una coppia viaggiante (cfr. Figura 43.8).

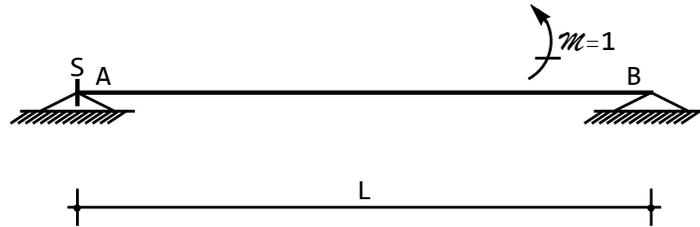


Figura 43.8: Trave appoggiata soggetta a coppia viaggiante: linea di influenza della rotazione a sinistra

Per ottenerla, bisogna tracciare il diagramma delle rotazioni dovuto ad una coppia unitaria applicata nell'estremo di sinistra, giungendo a scrivere:

$$\phi_0^{\mathcal{M}} = \frac{2L^2 - 6Lx_3 + 3x_3^2}{6EIL} \quad (43.21)$$

Ovviamente, per  $x_3 = 0$  si ha  $\phi_0^{\mathcal{M}} = \frac{L}{3EI}$ , mentre per  $x_3 = L$  si ha  $\phi_0^{\mathcal{M}} = -\frac{L}{6EI}$ . Il relativo diagramma è presentato in Figura 43.9

### 43.4 Il primo utilizzo del teorema di Colonnetti: le linee di influenza delle caratteristiche per forze viaggianti

In questa sezione si vogliono tracciare le linee di influenza di momenti e tagli in una sezione retta  $S$ , e poichè gli enti duali delle caratteristiche sono le distorsioni, ne segue che occorre caricare la trave con una distorsione concentrata in  $S$ : distorsione di rotazione se si vuole la linea d'influenza del momento, o distorsione di scorrimento se si vuole la linea di influenza del taglio.

Tutto ciò può anche essere confermato dal teorema di Colonnetti. Se ad esempio si vuole la linea di influenza del momento flettente per forza verticale viaggiante, si consideri la trave soggetta ad una forza unitaria agente nella sezione retta generica  $x_3$  (sistema 1), e la stessa trave soggetta ad una distorsione di

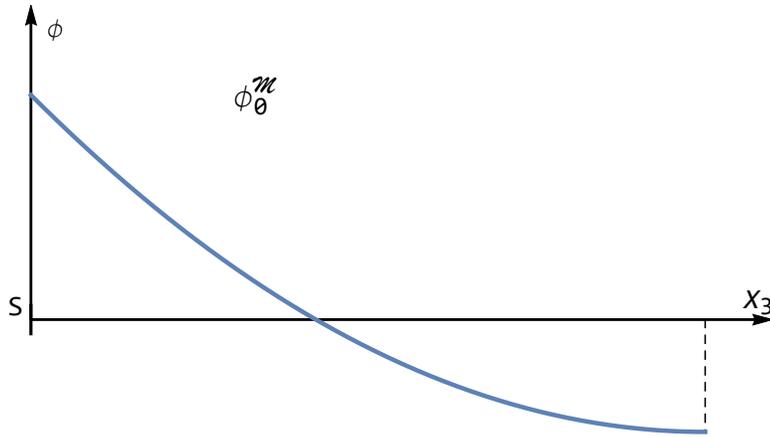


Figura 43.9: Linea d'influenza  $\phi_0^M$  della rotazione a sinistra per una trave appoggiata soggetta a coppia viaggiante

rotazione relativa  $D_\phi$  nella sezione  $S$  (sistema 2). Per il teorema di Colonnetti si può scrivere:

$$Fu_2(x_3) + M(S)D_\phi = 0 \quad (43.22)$$

da cui:

$$M(S) = -\frac{u_2(x_3)}{D_{\phi S}} \quad (43.23)$$

Quindi, la linea di influenza  $m_S^F$  del momento flettente per forza viaggiante si ottiene caricando la struttura con una distorsione  $D_\phi = -1$  nella sezione  $S$ , e calcolando il relativo diagramma degli spostamenti.

### Caso 2a - Linea di influenza $m_S^F$ del momento in $S$ per forza viaggiante

Si consideri una generica trave, e si voglia tracciare, per una sezione generica  $S$ , la linea di influenza del momento flettente per forza viaggiante. In altri termini, per quanto appena detto, occorre calcolare il diagramma degli spostamenti dovuti ad una distorsione  $D_\phi$  di rotazione relativa concentrata nella sezione  $S$ . Può a tal fine utilizzarsi la ben nota metodologia della scrittura della linea elastica, ed in corrispondenza della sezione retta  $S$  bisognerà scrivere le due condizioni di congruenza:

$$u_2^{sin} = u_2^{des} \quad (43.24)$$

$$\phi^{sin} - \phi^{des} = D_\phi \quad (43.25)$$

e le due condizioni di equilibrio:

$$M_1^{sin} = M_1^{des} \quad (43.26)$$

$$T_2^{sin} = T_2^{des} \quad (43.27)$$

Nel caso delle linee di influenza sarà  $D_\phi = -1$ , e quindi la seconda condizione di congruenza si scriverà:

$$\phi^{des} - \phi^{sin} = 1 \quad (43.28)$$

A titolo di esempio, si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 43.10, e si voglia la linea di influenza del momento ad un quarto della luce per effetto di una forza viaggiante.

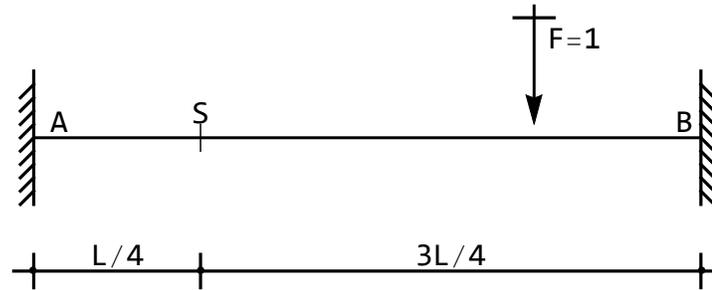


Figura 43.10: Trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante

Occorre calcolare il diagramma degli spostamenti per una trave doppiamente incastrata caricata con una distorsione  $D_\phi$  unitaria e negativa in  $L/4$ , e tale problema è risolvibile immediatamente a fornire la richiesta linea di influenza:

$$m_{L/4}^F = \begin{cases} \frac{(5L - 2x_3)x_3^2}{4L^2} & x_3 \leq \frac{L}{4} \\ \frac{(L - 2x_3)(L - x_3)^2}{4L^2} & x_3 \geq \frac{L}{4} \end{cases} \quad (43.29)$$

il cui grafico si presenta come in Figura 43.11. Si noti che dalla Figura 43.11 è possibile dedurre subito che forze agenti sulla prima semiluce provocano momenti positivi, mentre forze agenti nella seconda campata provocano momenti negativi in  $S$ .

Esercizio - Si deduca la linea di influenza del momento in una sezione posta ad  $L/3$ , dovuta a forze viaggianti. E' possibile ottenere momenti negativi in  $S$ ?

### Il caso del solaio

Una classica applicazione della teoria delle linee di influenza si ritrova, storicamente, nell'analisi delle condizioni di carico più gravose da assegnare ai solai. Si

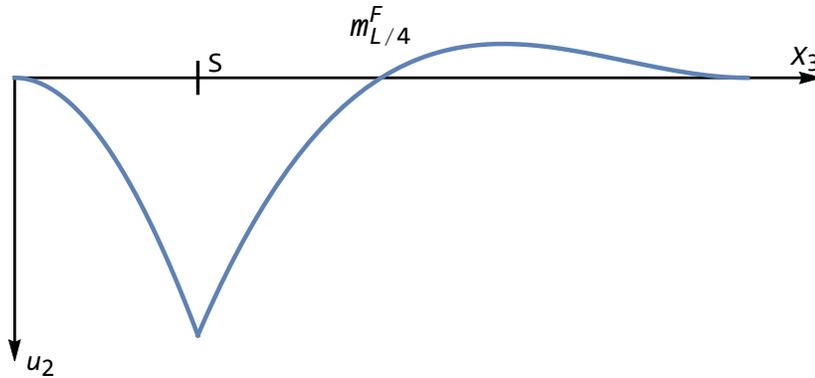


Figura 43.11: Linea di influenza  $m_{L/4}^F$  per una trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante

consideri ad esempio il caso di Figura 43.12, relativo ad un solaio a due campate con sbalzi agli estremi, e si vogliono studiare le sezioni più significative, ossia quelle in mezzeria delle campate, e quelle sugli appoggi.

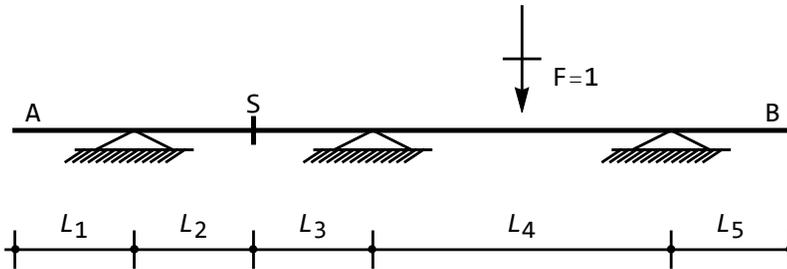


Figura 43.12: Un classico esempio di solaio: linea di influenza per una sezione retta nella prima luce

Se ad esempio si vuole studiare una sezione retta ricadente nella prima campata, occorre scrivere cinque equazioni della linea elastica, ed imporre venti condizioni ai limiti, ottenendo il diagramma degli spostamenti dovuti ad una distorsione unitaria e negativa in  $S$ :

$$\begin{aligned}
 m_S^F &= \frac{(L_1 - x_3)}{\Delta} (x_3 - L_1) (L_2^2 - L_2 L_3 - 2L_3 (L_3 + L_4)) \\
 m_S^F &= \frac{1}{\Delta (L_2 + L_3)} (x_3 - L_1) (-L_2^3 + 2L_3^2 (L_3 + L_4) + L_2 ((x_3 - L_1)^2 + \\
 &\quad 3L_3^2 + 2L_3 L_4))
 \end{aligned}
 \tag{43.30}$$

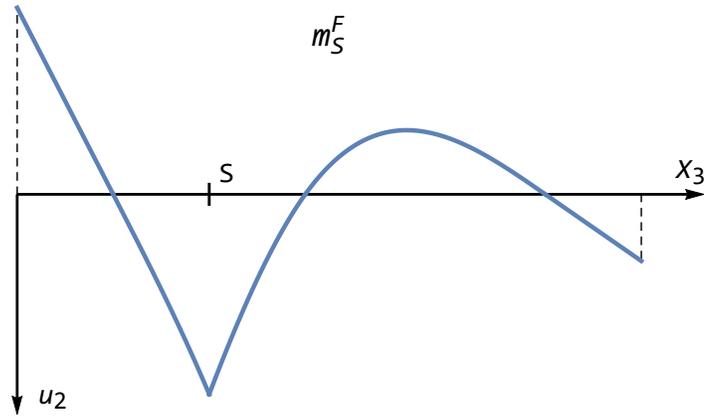


Figura 43.13: La linea di influenza del momento flettente per una sezione retta in mezzeria della prima luce

$$\begin{aligned}
 m_S^F &= \frac{L_2(L_1 + L_2 + L_3 - x_3)}{\Delta(L_2 + L_3)} \left( -L_1^2 + 2(L_2 + L_3)(L_2 + L_3 + L_4) - \right. \\
 &\quad \left. (L_2 + L_3)x_3 - x_3^2 + L_1(L_2 + L_3 + 2x_3) \right) \\
 m_S^F &= -\frac{L_2(x_3 - L_1 - L_2 - L_3)}{\Delta} \left( (-x_3 + L_1 + L_2 + L_3)^2 - \right. \\
 &\quad \left. 3(x_3 - L_1 - L_2 - L_3)L_4 + 2L_4^2 \right) \\
 m_S^F &= \frac{L_2L_4}{\Delta} (x_3 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4)
 \end{aligned} \tag{43.31}$$

nelle cinque campate, con:

$$\Delta = 2(L_2 + L_3)(L_2 + L_3 + L_4) \tag{43.32}$$

Se, ad esempio, i due sbalzi sono lunghi due metri, mentre le due campate sono larghe rispettivamente quattro metri e cinque metri, la linea di influenza in mezzeria della prima campata si presenta come:

$$m_S^F = \begin{cases} \frac{7}{18}(-2 + x_3) & 0 \leq x_3 \leq 2 \\ \frac{1}{144}(56 + (-2 + x_3)^2)(-2 + x_3) & 2 \leq x_3 \leq 4 \\ \frac{1}{144}(456 - 76x_3 - 6x_3^2 + x_3^3) & 4 \leq x_3 \leq 6 \\ -\frac{1}{180}(-6 + x_3)(176 - 27x_3 + x_3^2) & 6 \leq x_3 \leq 11 \\ \frac{5}{36}(-11 + x_3) & 11 \leq x_3 \leq 13 \end{cases} \tag{43.33}$$

o, graficamente, come in Figura 43.13.

Volendo invece studiare la linea di influenza del momento per la sezione in corrispondenza del secondo appoggio, si dovranno scrivere quattro equazioni della linea elastica, e sedici condizioni ai limiti, giungendo alla richiesta linea di influenza:

$$\begin{aligned}
 m_S^F &= \frac{(-x_3 + L_1) L_2}{2(L_2 + L_3)} \\
 m_S^F &= \frac{(x_3 - L_1)^3 - (x_3 - L_1) L_2^2}{2L_2(L_2 + L_3)} \\
 m_S^F &= -\frac{(x_3 - L_1 - L_2)((-x_3 + L_1 + L_2)^2 - 3(x_3 - L_1 - L_2)L_3 + 2L_3^2)}{2L_3(L_2 + L_3)} \\
 m_S^F &= \frac{(x_3 - L_1 - L_2 - L_3)L_3}{2(L_2 + L_3)}
 \end{aligned}
 \tag{43.34}$$

nelle quattro campate. Graficamente si ha il diagramma di Figura 43.14.

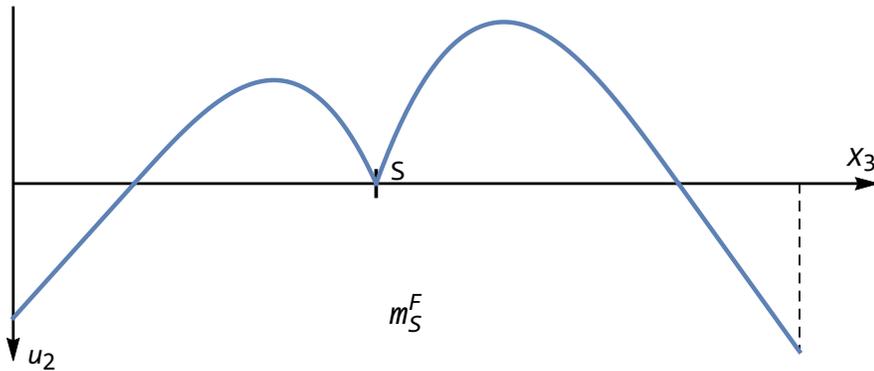


Figura 43.14: La linea di influenza del momento flettente per una sezione retta in corrispondenza del secondo appoggio

### Caso 2b - Linea di influenza $t_S^F$ del taglio in S per forza viaggiante

Per ottenere la richiesta linea di influenza bisogna calcolare il diagramma dell'ente duale all'ente viaggiante (e quindi occorre calcolare il diagramma degli apostamenti) dovuto ad un ente unitario che sia duale dell'ente in esame (e quindi occorre caricare la struttura con una distorsione di scorrimento unitaria e negativa).

A titolo di esempio, si consideri la trave di Figura 43.15, e si voglia la linea di influenza del taglio nella sezione di mezzeria  $S$ , dovuta ad una forza viaggiante,

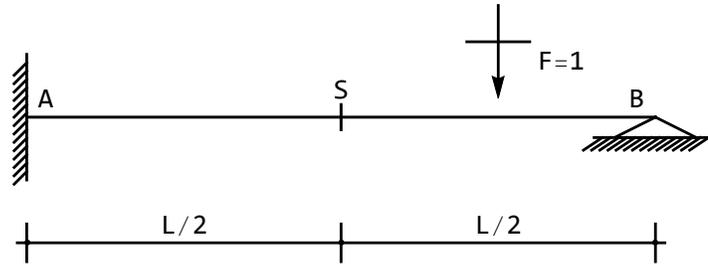


Figura 43.15: Trave incastrata ed appoggiata

ossia si voglia tracciare il diagramma degli spostamenti dovuti ad una distorsione di scorrimento unitaria e negativa agente in mezzeria.

Scrivendo due equazioni differenziali della linea elastica, in mezzeria dovranno allora scriversi le due equazioni di congruenza:

$$u_2^{des} - u_2^{sin} = 1 \quad (43.35)$$

$$\phi^{sin} = \phi^{des} \quad (43.36)$$

e le due condizioni di equilibrio:

$$M_1^{sin} = M_1^{des} \quad (43.37)$$

$$T_2^{sin} = T_2^{des} \quad (43.38)$$

La richiesta linea di influenza è analiticamente definita da:

$$t_{L/2}^F = \begin{cases} \frac{x_3^2(-3L+x_3)}{2L^3} & x_3 \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2L^3 - 3Lx_3^2 + x_3^3}{2L^3} & \frac{L}{2} \leq x_3 \leq L \end{cases} \quad (43.39)$$

Graficamente si ottiene il diagramma di Figura 43.16.

### Caso 2c - Linea di influenza $m_S^M$ del momento in $S$ per coppia viaggiante

In questo caso, poichè si vuole la linea di influenza del momento, bisognerà assoggettare la trave ad una distorsione di rotazione unitaria e negativa. Poichè l'ente viaggiante è una coppia, occorre calcolare il diagramma delle rotazioni. Quindi, sulla trave a tre campate diseguali di Figura 43.17, la linea di influenza del momento in mezzeria per effetto di una coppia viaggiante è data da:

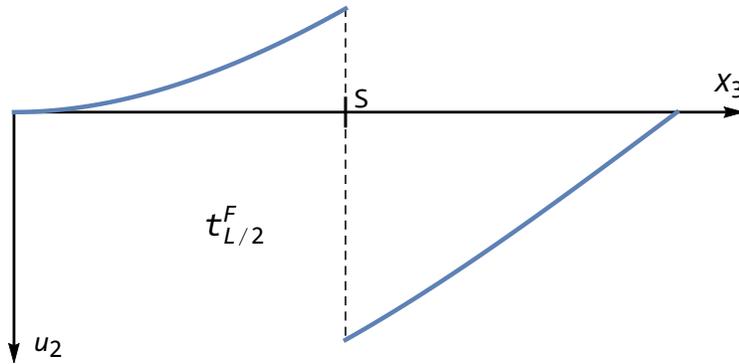
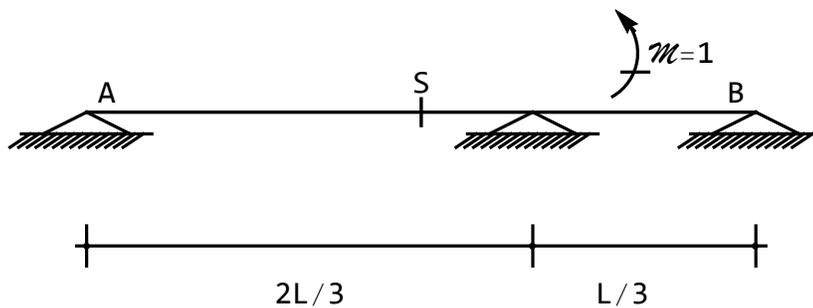

 Figura 43.16: Linea d'influenza  $t_{L/2}^F$  per una trave incastrata-appoggiata


Figura 43.17: Trave a tre appoggi a luci diseguali

$$m_{L/2}^M = \begin{cases} \frac{27x_3^2}{16L^2} & 0 \leq x_3 \leq \frac{L}{2} \\ -1 + \frac{27x_3^2}{16L^2} & \frac{L}{2} \leq x_3 \leq \frac{2}{3}L \\ -\frac{26L^2 - 54Lx_3 + 27x_3^2}{8L^2} & \frac{2}{3}L \leq x_3 \leq L \end{cases} \quad (43.40)$$

mentre graficamente si giunge al diagramma di Figura 43.18.

### Caso 2d - Linea di influenza $t_S^M$ del taglio in S per coppia viaggiante

In quest'ultimo caso si dovrà caricare la trave con una distorsione di scorrimento nella sezione S, come sempre unitaria e negativa, e poi calcolare il risultante diagramma delle rotazioni.

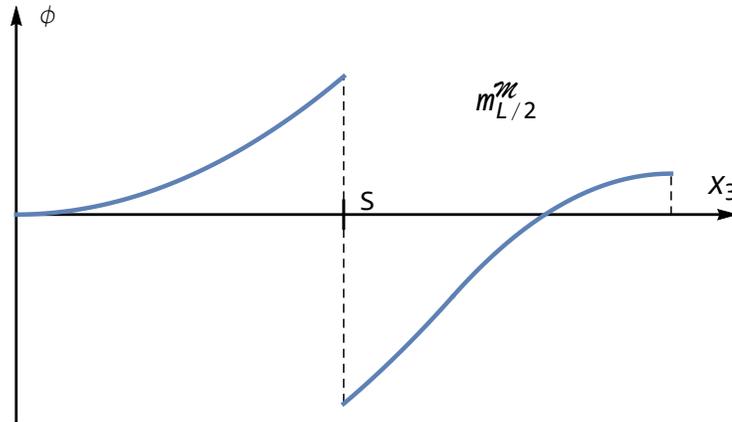


Figura 43.18: Linea d'influenza  $m_{L/2}^M$  per una trave su tre appoggi

### 43.5 Il secondo utilizzo del teorema di Colonnetti: le linee di influenza degli spostamenti per distorsioni viaggianti

In questa sezione si vogliono tracciare le linee di influenza di spostamenti (spostamenti verticali o rotazioni) in una sezione retta  $S$ , dovuti a distorsioni (di rotazione o di scorrimento) viaggianti. Ne segue che occorrerà caricare la struttura in  $S$  con gli enti duali degli spostamenti, ossia con una forza verticale o con una coppia, e bisognerà calcolare il diagramma degli enti duali delle distorsioni, ossia momenti flettenti o tagli

Tutto ciò può anche essere confermato dal teorema di Colonnetti. Se ad esempio si vuole la linea di influenza dello spostamento verticale per distorsione rotazionale viaggiante, si consideri la trave soggetta ad una distorsione rotazionale  $D_\phi$  unitaria nella sezione retta generica  $x_3$  (sistema 1), e la stessa trave soggetta ad una forza verticale  $F$  nella sezione  $S$  (sistema 2). Per il teorema di Colonnetti si può scrivere:

$$F u_2(S) + M(x_3) D_\phi = 0 \quad (43.41)$$

da cui, essendo la distorsione unitaria:

$$u_2(S) = -\frac{M(x_3)}{F} \quad (43.42)$$

Quindi, la linea di influenza  $\eta_S^{D_\phi}$  dello spostamento per distorsione rotazionale viaggiante si ottiene caricando la struttura con una forza unitaria e negativa nella sezione  $S$ , e calcolando il relativo diagramma dei momenti

Su strutture isostatiche è spesso immediato calcolare i diagrammi di momenti e tagli, su strutture iperstatiche complesse può essere ancora utile ricorrere alla

scrittura delle equazioni differenziali della linea elastica. Il metodo di soluzione, lo si ribadisce, è del tutto indipendente dalla teoria delle linee di influenza

### Caso 3a - Linea di influenza $\eta_S^{D\phi}$ dello spostamento in $S$ per distorsione rotazionale viaggiante

A titolo di esempio, si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 43.19, e si voglia la linea di influenza dello spostamento ad un quarto della luce per effetto di una distorsione rotazionale viaggiante.

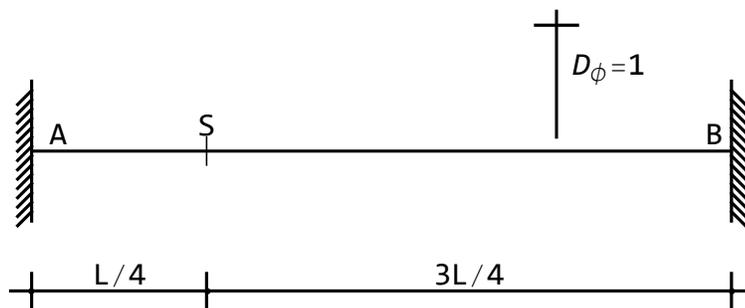


Figura 43.19: Trave doppiamente incastrata soggetta a distorsione rotazionale viaggiante

Occorre calcolare il diagramma dei momenti provocati da una forza unitaria e negativa in  $L/4$ , e tale problema è risolvibile immediatamente a fornire la richiesta linea di influenza:

$$m_{L/4}^F \begin{cases} \frac{9}{64} (L - 6x_3) & x_3 \leq \frac{L}{4} \\ \frac{1}{64} (-7L + 10x_3) & x_3 \geq \frac{L}{4} \end{cases} \quad (43.43)$$

che graficamente si traduce nel diagramma di Figura 43.20.

Dal diagramma si evince, ad esempio, che se si vuole ottenere il massimo spostamento ad un quarto della luce, bisogna applicare la distorsione nell'incastro di sinistra.

### Caso 3b - Linea di influenza $\phi_S^{D\phi}$ della rotazione in $S$ per distorsione rotazionale viaggiante

Per ottenere la richiesta linea di influenza bisogna calcolare il diagramma dell'ente duale dell'ente viaggiante (e quindi occorre calcolare il diagramma dei momenti) dovuto ad un ente unitario che sia duale dell'ente in esame (e quindi occorre caricare la struttura in  $S$  con una coppia unitaria e negativa).

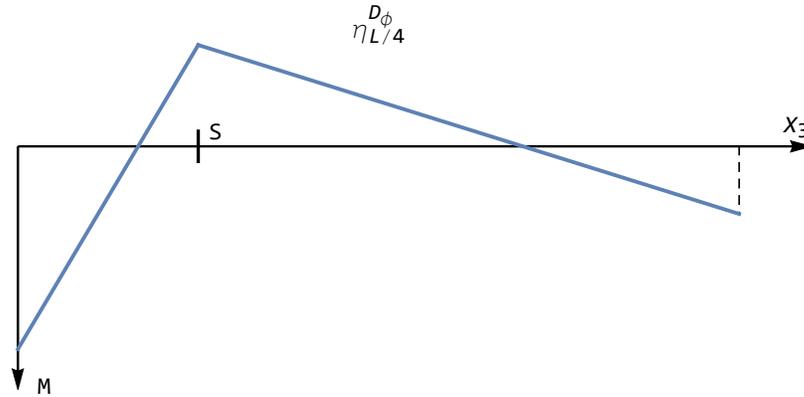


Figura 43.20: Linea di influenza  $\eta_{L/4}^{D_\phi}$  dello spostamento per una trave doppiamente incastrata soggetta a distorsione rotazionale viaggiante

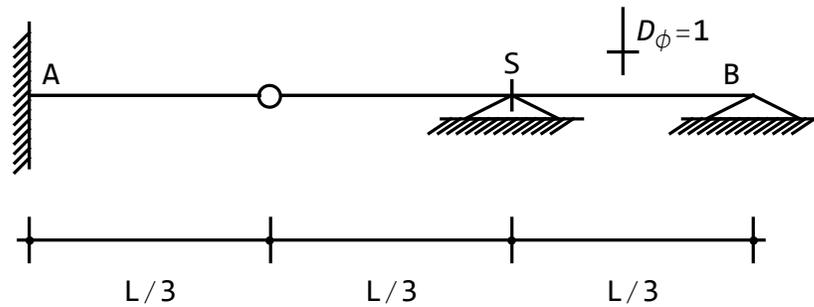
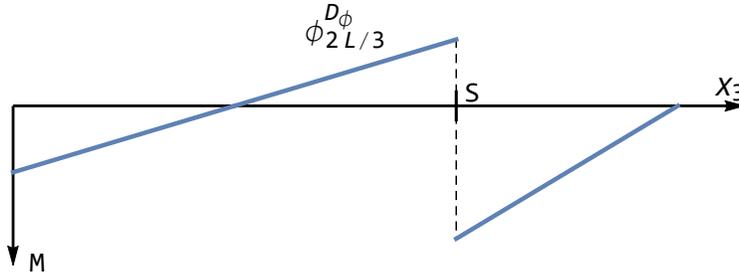


Figura 43.21: Trave incastrata, con cerniera e due appoggi

A titolo di esempio, si consideri la trave di Figura 43.21, e si voglia la linea di influenza della rotazione nella sezione sull'appoggio a due terzi della luce  $S$ , dovuta ad una distorsione rotazionale concentrata viaggiante, ossia si voglia tracciare il diagramma dei momenti dovuti ad una coppia unitaria e negativa agente in corrispondenza del suddetto appoggio. Si ha:

$$\phi_{2L/3}^{D_\phi} = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{x_3}{L} & 0 \leq x_3 \leq \frac{2}{3}L \\ = 2 - \frac{2x_3}{L} & \frac{2}{3}L \leq x_3 \leq L \end{cases} \quad (43.44)$$

Graficamente si ottiene il diagramma di Figura 43.22.


 Figura 43.22: Linea d'influenza  $\phi_{2L/3}^{D_\phi}$  per la trave di 43.21

### Caso 3c - Linea di influenza $\eta_S^{D_\eta}$ dello spostamento in $S$ per distorsione di scorrimento viaggiante

In questo caso, poichè si vuole la linea di influenza dello spostamento, bisognerà assoggettare la trave ad una forza unitaria e negativa. Poichè l'ente viaggiante è una distorsione di scorrimento, occorre calcolare il diagramma del taglio. In Figura 43.23 è presentato il caso di una trave a tre campate con sbalzo, e si vuole tracciare la linea di influenza dello spostamento all'estremo libero per effetto di una distorsione di scorrimento viaggiante. In altri termini, si deve tracciare il diagramma del taglio dovuto ad una forza unitaria e negativa agente nell'estremo libero.

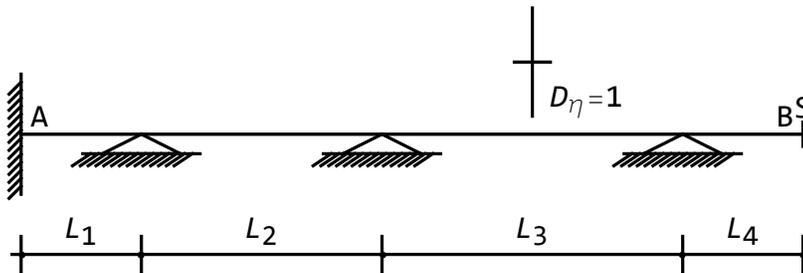


Figura 43.23: Trave a tre campate e sbalzo

L'espressione analitica della richiesta linea di influenza è:

$$\eta_S^{D_\eta} = \frac{3L_2L_3L_4}{2L_1(3L_1(L_2 + L_3) + L_2(3L_2 + 4L_3))} \quad (43.45)$$

$$\eta_S^{D_\eta} = -\frac{3(L_1 + 2L_2)L_3L_4}{2L_2(3L_1(L_2 + L_3) + L_2(3L_2 + 4L_3))}$$

$$\eta_S^{D\eta} = \frac{3(2L_2(L_2 + 2L_3) + L_1(2L_2 + 3L_3))L_4}{2L_3(3L_1(L_2 + L_3) + L_2(3L_2 + 4L_3))}$$

$$\eta_S^{D\eta} = -1$$

nelle quattro campate.

Come si vede, sullo sbalzo la linea di influenza varrà sempre  $-1$ , poi vi sarà un tratto costante e positivo sulla terza e prima campata, alternata ad un valore negativo sulla seconda campata. I valori dipenderanno dalle luci: per il caso particolare  $L_1 = 2$ ,  $L_2 = 4$ ,  $L_3 = 5$ ,  $L_4 = 2$  si ha la linea di Figura 43.24.

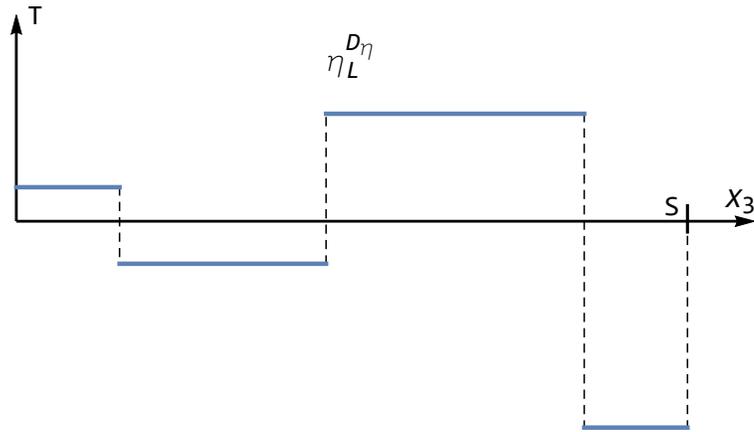


Figura 43.24: Linea d'influenza  $\eta_S^{D\eta}$  per la trave di Figura 43.23

### Caso 3d - Linea di influenza $\phi_S^{D\eta}$ della rotazione in S per distorsione di scorrimento viaggiante

In quest'ultimo caso si dovrà caricare la trave con una coppia di valore unitario e negativo, e poi calcolare il risultante diagramma del taglio. Sullo stesso esempio precedente, bisognerà calcolare il diagramma del taglio dovuto ad una coppia applicata nell'estremo libero. Si ha;

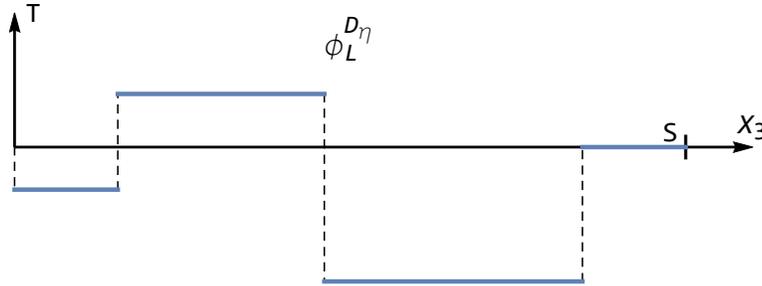
$$\phi_S^{D\eta} = -\frac{3L_2L_3}{2L_1(3L_1(L_2 + L_3) + L_2(3L_2 + 4L_3))}$$

$$\phi_S^{D\eta} = \frac{3(L_1 + 2L_2)L_3}{2L_2(3L_1(L_2 + L_3) + L_2(3L_2 + 4L_3))} \quad (43.46)$$

$$\phi_S^{D\eta} = -\frac{3(2L_2(L_2 + 2L_3) + L_1(2L_2 + 3L_3))}{2L_3(3L_1(L_2 + L_3) + L_2(3L_2 + 4L_3))}$$

$$\phi_S^{D\eta} = 0$$

Sullo sbalzo la linea di influenza sarà nulla, poi sarà negativa in prima e terza campata, positiva in seconda campata. Con gli stessi valori numerici del caso precedente, si ha il diagramma di Figura 43.25


 Figura 43.25: Linea d'influenza  $\phi_L^{D_\eta}$  per la trave di Figura 43.23

### 43.6 L'utilizzo del teorema di Volterra: le linee di influenza delle caratteristiche per distorsioni viaggianti

In quest'ultima sezione si vogliono tracciare le linee di influenza di caratteristiche (momenti o tagli) in una sezione retta  $S$ , dovuti a distorsioni (di rotazione o di scorrimento) viaggianti. Ne segue che occorrerà caricare la struttura in  $S$  con gli enti duali delle caratteristiche, ossia con una distorsione di rotazione o di scorrimento, e bisognerà calcolare il diagramma degli enti duali delle distorsioni, ossia momenti flettenti o tagli.

Tutto ciò può anche essere confermato dal teorema di Volterra. Se ad esempio si vuole la linea di influenza del momento per distorsione di scorrimento viaggiante, si consideri la trave soggetta ad una distorsione di scorrimento  $D_\eta$  unitaria nella sezione retta generica  $x_3$  (sistema 1), e la stessa trave soggetta ad una distorsione rotazionale  $D_\phi$  nella sezione  $S$  (sistema 2). Per il teorema di Volterra si può scrivere:

$$T(x_3) D_\eta = M(S) D_\phi \quad (43.47)$$

da cui:

$$M(S) = \frac{T(x_3)}{D_\phi} \quad (43.48)$$

Quindi, la linea di influenza  $m_S^{D_\eta}$  del momento per distorsione di scorrimento viaggiante si ottiene caricando la struttura con una distorsione di rotazione unitaria in  $S$ , e calcolando il relativo diagramma del taglio.

Si noti subito che in presenza di strutture isostatiche l'applicazione di una distorsione concentrata non causa caratteristiche, e quindi le relative linee di influenza vengono ad annullarsi.

### Caso 4a - Linea di influenza $m_S^{D\phi}$ del momento in $S$ per distorsione rotazionale viaggiante

Assoggettata la trave ad una distorsione di rotazione relativa unitaria e positiva, si calcola il diagramma dei momenti, ottenendo la richiesta linea di influenza. Per la trave di Figura 43.26, doppiamente incastrata e con appoggio a due terzi della luce, si voglia tracciare la linea di influenza del momento per la sezione di incastro a sinistra, dovuta ad una distorsione rotazionale viaggiante.

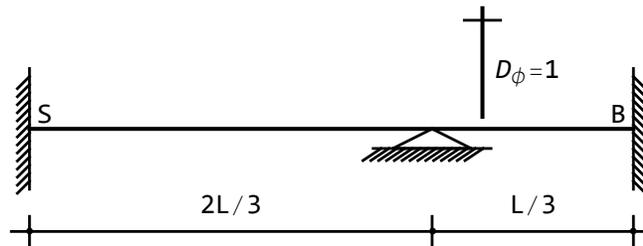


Figura 43.26: Trave doppiamente incastrata con appoggio a due terzi della luce

Per quanto detto, occorre imporre nell'incastro di sinistra una distorsione unitaria e positiva, ossia occorre imporre che sia:

$$D_{\phi 0} = 1 \rightarrow \Delta\phi_0 = -1 \rightarrow \phi_{des} - \phi_{sin} = -1 \rightarrow \phi(x_3 = 0) = -1 \quad (43.49)$$

e calcolare il risultante diagramma del momento. Si ha:

$$\begin{aligned} m_0^{D\phi} &= \frac{EI}{4L^2} (22L - 45x_3) \\ m_0^{D\phi} &= \frac{EI}{L^2} (-8L + 9x_3) \frac{2}{3}L \end{aligned} \quad (43.50)$$

nelle due campate. Graficamente, invece, si giunge al diagramma di Figura 43.27.

### Caso 4b - Linea di influenza $t_S^{D\phi}$ del taglio in $S$ per distorsione rotazionale viaggiante

Sulla stessa trave di Figura 43.26, si voglia ora tracciare la linea di influenza del taglio in mezzeria della prima campata (cfr. Figura 43.28), per effetto di una distorsione rotazionale viaggiante, ossia si calcoli il diagramma del momento dovuto ad una distorsione di scorrimento applicata in mezzeria della prima campata. Utilizzando la metodologia della linea elastica, in  $S$  bisognerà quindi imporre le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} D_{\eta S} = 1 &\rightarrow \Delta u_{2S} = -1 \rightarrow u_{2S}^{des} - u_{2S}^{sin} = -1 \\ \phi_S^{sin} &= \phi_S^{des} \end{aligned} \quad (43.51)$$

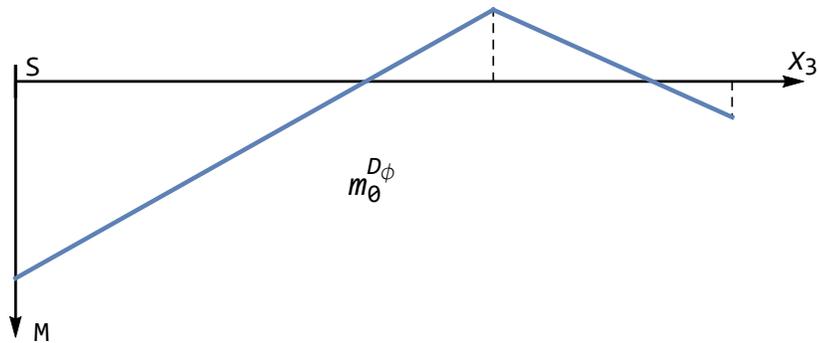


Figura 43.27: Linea di influenza del momento nell'incastro di sinistra per distorsione rotazionale viaggiante

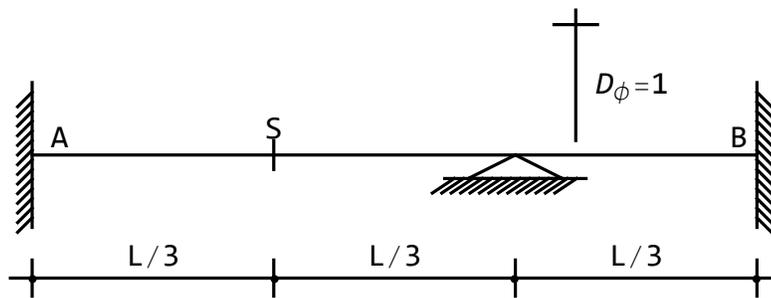


Figura 43.28: Trave doppiamente incastrata con appoggio a due terzi della luce: linea di influenza  $t_S^{D_\phi}$

e le due condizioni di equilibrio:

$$M_S^{sin} = M_S^{des} \quad (43.52)$$

$$T_S^{sin} = T_S^{des} \quad (43.53)$$

Si ha, analiticamente:

$$t_S^{D_\phi} = \begin{cases} -\frac{9EI(10L - 27x_3)}{8L^3} & 0 \leq x_3 \leq \frac{2}{3}L \\ \frac{9EI(8L - 9x_3)}{2L^3} & \frac{2}{3}L \leq x_3 \leq L \end{cases} \quad (43.54)$$

mentre graficamente si ha il diagramma di Figura 43.29.

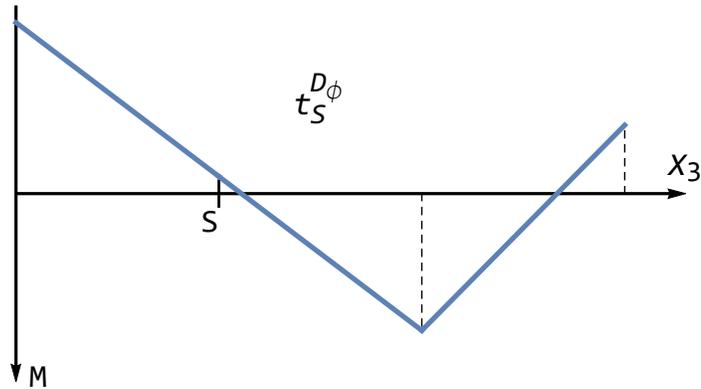


Figura 43.29: Linea di influenza del taglio nella sezione di mezzera della prima campata per distorsione rotazionale viaggiante

**Caso 4c - Linea di influenza  $m_S^{D\eta}$  del momento in S per distorsione di scorrimento viaggiante**

In questo penultimo caso, occorre assoggettare la trave ad una distorsione rotazionale concentrata in  $S$ , unitaria e positiva, e calcolare il risultante diagramma del taglio.

**Caso 4d - Linea di influenza  $t_S^{D\eta}$  del momento in S per distorsione di scorrimento viaggiante**

In quest'ultimo caso, occorre assoggettare la trave ad una distorsione di scorrimento concentrata in  $S$ , unitaria e positiva, e calcolare il risultante diagramma del taglio.

## Capitolo 44

# I carichi assiali sulle travi

Nel Capitolo 31 si è iniziato lo studio della trave snella, o di Eulero–Bernoulli. In particolare, l'energia potenziale totale di una trave di lunghezza  $L$ , con sezione retta di area  $A$ , e momento di inerzia  $I$ , costituita da materiale omogeneo, linearmente elastico ed isotropo, con modulo di Young  $E$ , e soggetta ad una distribuzione di carico trasversale distribuito  $p(z)$  ed una distribuzione di carico assiale distribuito  $t(z)$ , è stata calcolata come:

$$E_t = \frac{1}{2} \int_0^L EAu_3'^2(x_3) dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EIu_2''^2(x_3) dx_3 - \int_0^L p(x_3) u_2(x_3) dx_3 - \int_0^L t(x_3) u_3(x_3) dx_3 \quad (44.1)$$

A questa relazione si è giunti per via energetica, utilizzando le deformazioni lineari, ossia confondendo il tensore di Green–Lagrange con la parte simmetrica del gradiente di spostamento, oppure per via geometrica, scrivendo l'equilibrio di un concio *indefornato* soggetto ai carichi esterni ed interni. In questo livello di approssimazione, quindi, lo studio del comportamento flessionale della trave può disaccoppiarsi dallo studio del comportamento assiale.

In realtà, però, la deformazione flessionale della trave causa anche un accorciamento assiale, come può dedursi visivamente dalla Figura 44.1, che non sempre è possibile trascurare. Quando infatti la trave è caricata assialmente, l'accorciamento assiale dovuto alla deformazione flessionale farà compiere lavoro alle forze assiali, e quindi vi sarà un'aliquota supplementare di energia potenziale, che andrà debitamente introdotta nello studio delle linee elastiche.

Questo Capitolo sarà dedicato alla deduzione dell'energia potenziale di un carico assiale  $F$ , applicato all'estremo di destra di una trave rettilinea di lunghezza  $L$ , come riportato in Figura 44.1. Applicando poi il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale si dedurrà l'equazione differenziale della linea elastica con le opportune condizioni ai limiti.

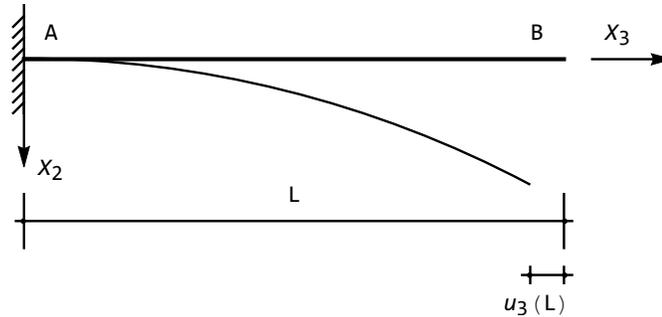


Figura 44.1: L'accorciamento assiale dovuto alla deformazione flessionale

## 44.1 L'energia potenziale del carico assiale

Si consideri un segmento di trave disteso lungo l'asse  $X_3$ , di lunghezza  $dx_3$ , che a seguito della deformazione si trasformerà in un segmento di lunghezza  $d\xi_3$ . La lunghezza del segmento deformato  $d\xi_3$  potrà calcolarsi a partire da quanto illustrato nel Capitolo 14. In particolare, la lunghezza del segmento deformato è legato alla lunghezza del segmento indeformato attraverso la relazione:

$$|M'N'|^2 = |MN|^2 + 2\mathbf{ds}^T \mathbf{Dds} \quad (44.2)$$

Questa equazione deve essere specializzata, per tener conto che (cfr. Figura 44.2):

$$\begin{aligned} |M'N'| &= |d\xi_3| \\ |MN| &= |dx_3| = dx_3 \\ \mathbf{ds}^T &= (0, 0, dx_3) \end{aligned} \quad (44.3)$$

e quindi diventa:

$$|d\xi_3|^2 = dx_3^2 + 2d_{33}dx_3^2 = (1 + 2d_{33}) dx_3^2 \quad (44.4)$$

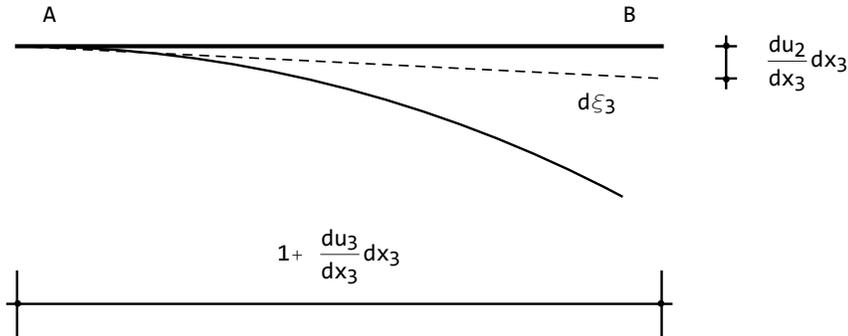
Inoltre, poichè la terna di spostamenti sarà:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= u_2(x_3) \\ u_3 &= u_3(x_2, x_3) \end{aligned} \quad (44.5)$$

la componente  $d_{33}$  del tensore di Green-Lagrange si scriverà:

$$d_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left( \frac{du_2}{dx_3} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3^2} \right)^2 \quad (44.6)$$

L'ipotesi fondamentale, a base della trattazione, è quella di *incomprimibilità* della trave durante la deformazione flessionale, per cui dovrà necessariamente


 Figura 44.2: Il segmento deformato  $d\xi_3$  e le sue due componenti

risultare  $|d\xi_3| = |dx_3|$ , o, dalla (44.4):

$$d_{33} = 0 \quad (44.7)$$

Ne segue, dalla (44.7), la fondamentale relazione:

$$\left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2 = 1 \quad (44.8)$$

da cui subito:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \sqrt{1 - \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2} - 1 \quad (44.9)$$

Quest'ultima relazione può essere utilizzata per il calcolo della desiderata aliquota di energia potenziale del carico assiale, come illustrato in Figura 44.3. Ed infatti, poichè l'energia potenziale può calcolarsi come inverso del lavoro, si avrà:

$$P = Fu_3(L) = F \int_0^L \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 = F \int_0^L \left( \sqrt{1 - \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2} - 1 \right) dx_3 \quad (44.10)$$

ed utilizzando lo sviluppo in serie del binomio, si ha infine:

$$P = -\frac{F}{2} \int_0^L \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2 dx_3 = -\frac{F}{2} \int_0^L u_2'^2(x_3) dx_3 \quad (44.11)$$

## 44.2 La deduzione della linea elastica

Si vogliono ora studiare le configurazioni di equilibrio di una trave soggetta ad una forza di compressione  $F$ , applicando il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, e quindi annullando la variazione prima del funzionale:

$$E_t = \frac{1}{2} \int_0^L EI u_2''^2(x_3) dx_3 - \frac{F}{2} \int_0^L u_2'^2(x_3) dx_3 \quad (44.12)$$

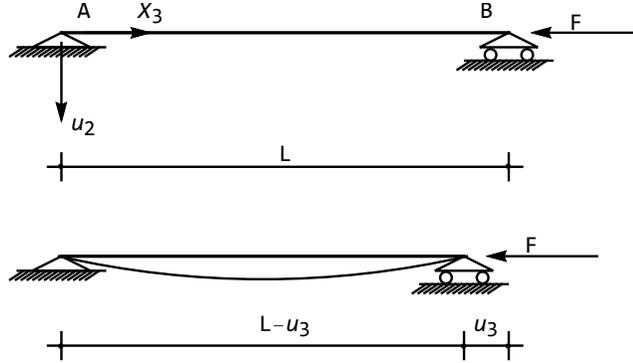


Figura 44.3: L'accorciamento assiale in una trave soggetta a carico di compressione

Come sempre, la variazione totale sarà data da:

$$\begin{aligned}
 \delta E_t &= E_t(u'_2 + \delta u'_2, u''_2 + \delta u''_2) - E_t(u'_2, u''_2) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L EI(u''_2 + \delta u''_2)^2 dx_3 - \frac{F}{2} \int_0^L (u'_2 + \delta u'_2)^2 dx_3 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L EIu''_2{}^2 dx_3 + \frac{F}{2} \int_0^L u'_2{}^2 dx_3 = \\
 &= \int_0^L EIu''_2 \delta u''_2 dx_3 - F \int_0^L u'_2 \delta u'_2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI\delta u''_2{}^2 dx_3 - \frac{F}{2} \int_0^L \delta u'_2{}^2 dx_3
 \end{aligned} \tag{44.13}$$

La variazione prima, da annullare, sarà allora:

$$\delta_1 E_t = \int_0^L EIu''_2 \delta u''_2 dx_3 - F \int_0^L u'_2 \delta u'_2 dx_3 = 0 \tag{44.14}$$

Occorre derivare due volte per parti il primo integrale, come del resto già fatto precedentemente, ed una volta il secondo integrale. Si giunge a scrivere:

$$\delta_1 E_t = \int_0^L (EIu''''_2 + Fu''_2) \delta u_2 dx_3 + [EIu''_2 \delta u'_2]_0^L + [(-Fu'_2 - EIu''''_2) \delta u_2]_0^L = 0 \tag{44.15}$$

Ne segue, per l'arbitrarietà della variazione  $\delta u_2$ , che dovrà essere soddisfatta la seguente equazione differenziale:

$$EIu''''_2 + Fu''_2 = 0 \tag{44.16}$$

nell'intervallo  $[0, L]$ , con le condizioni ai limiti tali da annullare i termini finiti della (44.15). In particolare, è immediato verificare che l'unica condizione da modificare, rispetto a quanto detto nel caso classico di carichi trasversali, sarà la

condizione sull'annullarsi del taglio nell'estremo libero, dove questa volta dovrà essere:

$$EIu_2''' + Fu_2' = 0 \quad (44.17)$$

### 44.3 L'approccio geometrico

Analogamente a quanto detto nel caso classico di forze trasversali, è possibile anche ora utilizzare un approccio geometrico per giungere ai risultati del paragrafo precedente. Volendo calcolare l'effetto del carico assiale in presenza di deformazioni flessionali non nulle, è necessario scrivere le equazioni di equilibrio di un concio *deformato*, ossia estratto da una situazione del tipo di Figura 44.4, e non più di un concio indeformato.

Le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione intorno alla faccia di destra del concio conducono a:

$$-T(x_3) + T(x_3 + dx_3) + p(x_3) dx_3 = 0 \quad (44.18)$$

$$-T(x_3) dx_3 + N(x_3) du_2 - M(x_3) + M(x_3 + dx_3) - p(x_3) dx_3 \frac{dx_3}{2} = 0 \quad (44.19)$$

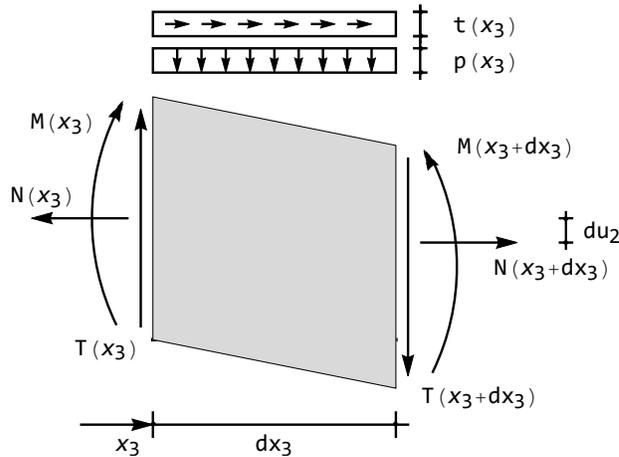


Figura 44.4: Il concio in configurazione deformata

Utilizzando il solito sviluppo in serie, si può porre:

$$T(x_3 + dx_3) \approx T(x_3) + \frac{dT(x_3)}{dx_3} dx_3 \quad (44.20)$$

$$N(x_3 + dx_3) \approx N(x_3) + \frac{dN(x_3)}{dx_3} dx_3 \quad (44.21)$$

$$M(x_3 + dx_3) \approx M(x_3) + \frac{dM(x_3)}{dx_3} dx_3 \quad (44.22)$$

e quindi le equazioni precedenti divengono:

$$\frac{dT}{dx_3} + p = 0 \quad (44.23)$$

$$-T dx_3 + N du_2 + \frac{dM}{dx_3} dx_3 - p \frac{dx_3^2}{2} = 0 \quad (44.24)$$

L'ultimo termine della seconda equazione può trascurarsi, e dividendo per  $dx_3$  si ha:

$$-T + N \frac{du_2}{dx_3} + \frac{dM}{dx_3} = 0 \quad (44.25)$$

Derivando rispetto a  $x_3$ , supponendo  $N$  costante, ed utilizzando la (44.23), si ha:

$$N \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} + \frac{d^2 M}{dx_3^2} + p = 0 \quad (44.26)$$

Infine, utilizzando la ben nota relazione:

$$M = -EI \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} \quad (44.27)$$

si giunge all'equazione differenziale della linea elastica:

$$EI \frac{d^4 u_2}{dx_3^4} - N \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = p \quad (44.28)$$

coincidente con la (44.16) non appena si noti che lo sforzo normale  $N$  è pari a  $-F$ .

La condizione ai limiti sul taglio nell'estremo libero può suscitare delle perplessità. Si consideri tuttavia che nella stessa ottica che ha indotto a scrivere l'equazione differenziale della linea elastica utilizzando la configurazione deformata, occorre ora utilizzare la configurazione deformata anche per imporre l'equilibrio all'estremo libero tra il taglio e la forza assiale. Si ha quindi, come illustrato in Figura 44.5:

$$T_2(L) + F\phi(L) = 0 \quad (44.29)$$

giungendo quindi alla (44.17).

## 44.4 La soluzione dell'equazione differenziale

La (44.28) si può riscrivere convenientemente come:

$$\frac{d^4 u_2}{dx_3^4} + \alpha^2 \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = 0 \quad (44.30)$$

avendo introdotto il parametro positivo:

$$\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad (44.31)$$

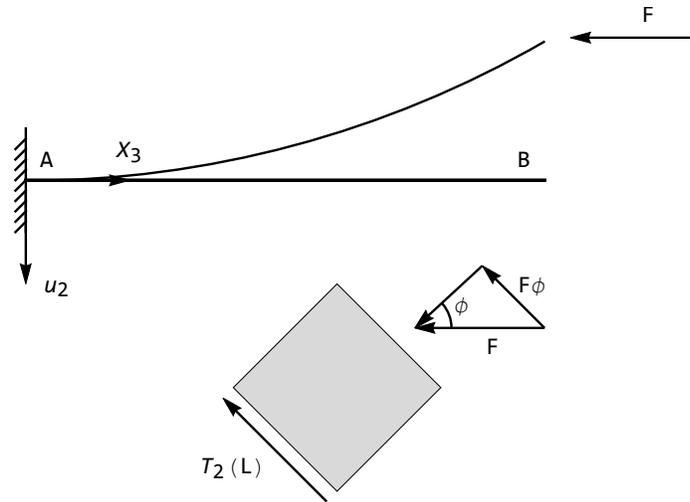


Figura 44.5: L'equilibrio all'estremo libero sulla configurazione deformata

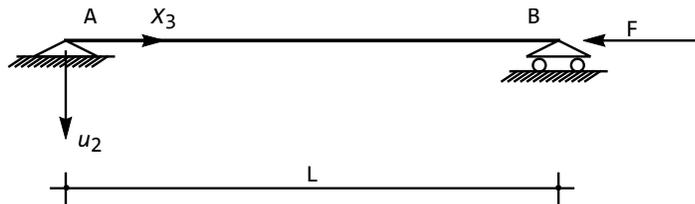


Figura 44.6: La trave appoggiata soggetta ad un carico assiale di compressione

ed il suo integrale generale è fornito da:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2 x_3 + C_3 \cos(\alpha x_3) + C_4 \sin(\alpha x_3) \quad (44.32)$$

Le quattro costanti di integrazione andranno determinate imponendo le condizioni ai limiti. Se ad esempio la trave si suppone appoggiata ad ambedue gli estremi, come in Figura 44.6 allora spostamenti e momenti flettenti dovranno essere nulli agli estremi. Dovrà essere, in altri termini:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2''(0) &= 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ u_2''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (44.33)$$

La derivata seconda dello spostamento (44.32) può calcolarsi facilmente

come:

$$u_2''(x_3) = -\alpha^2 C_3 \cos(\alpha x_3) - \alpha^2 C_4 \sin(\alpha x_3) \quad (44.34)$$

e quindi le (44.33) divengono:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ -\alpha^2 C_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 L + C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \\ -\alpha^2 C_3 \cos(\alpha L) - \alpha^2 C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \end{aligned} \quad (44.35)$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44.36)$$

E' questo un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite  $C_i$ , lineare ed omogeneo. Oltre alla soluzione banale, sempre presente, potranno aversi altre configurazioni di equilibrio non identicamente nulle se il determinante dei coefficienti si annulla. Dovrà quindi aversi:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \end{pmatrix} = 0 \quad (44.37)$$

e svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione secolare in  $\alpha$  :

$$\sin(\alpha L) = 0 \quad (44.38)$$

con soluzione:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L} \quad (44.39)$$

ed  $n \in \mathbb{N}$ .

Se quindi la forza assiale attinge uno dei seguenti valori:

$$F_n = n\pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (44.40)$$

allora si può avere una deformata non nulla, di ampiezza non definita, la cui forma può essere dedotta calcolando le quattro costanti  $C_i$ .

La prima e la seconda delle (44.33) forniscono  $C_1 = 0$  e  $C_3 = 0$ . Le altre due divengono:

$$\begin{aligned} C_2 L + C_4 \sin(\alpha_n L) &= 0 \\ C_4 \sin(\alpha_n L) &= 0 \end{aligned} \quad (44.41)$$

e quindi dovrà essere anche  $C_2 = 0$ , mentre  $C_4$  resta non specificata. Le deformate saranno fornite (cfr.eqn. 44.32) da:

$$u_{2n}(x_3) = C_4 \sin(\alpha_n x_3) \quad (44.42)$$

ossia, in definitiva, saranno onde sinusoidali.

## 44.5 Il concetto di carico critico

Da un punto di vista pratico, i valori (44.40) del carico assumono importanza fondamentale, tale che essi vengono chiamati usualmente i *carichi critici* della trave. Ed infatti si consideri una trave soggetta ad una forza di compressione, che a partire da un valore basso possa crescere a piacimento.

Per bassi valori della forza  $F$ , minori del primo carico critico, la trave resta indeformata, con spostamenti identicamente nulli. Quando  $F$  raggiunge il valore del primo carico critico, improvvisamente e senza alcun preavviso sorge la possibilità di una deformata non nulla, di ampiezza non ricavabile con la presente trattazione, ma comunque diversa da zero. Il fenomeno, noto come *instabilità euleriana*, è tra i più pericolosi della meccanica strutturale, e come tale ad esso andrà rivolta particolare attenzione.

I valori successivi dei carichi critici hanno invece più limitato interesse pratico, perchè difficilmente potrà incrementarsi il valore del carico assiale oltre il primo carico critico, senza provocare lo sbandamento della trave, con la nascita della prima deformata non nulla.

## 44.6 Il calcolo del carico critico per differenti vincoli

### La trave doppiamente incastrata

Per una trave incastrata ad ambedue gli estremi, come illustrato in Figura 44.7 spostamenti e rotazioni dovranno essere nulli agli estremi. Dovrà essere:

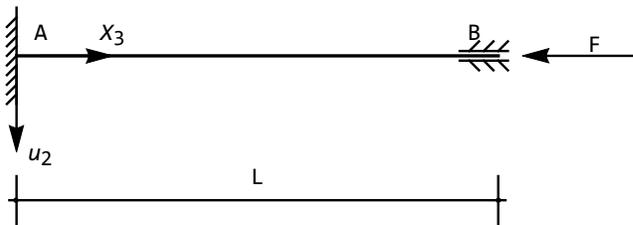


Figura 44.7: La trave incastrata soggetta ad un carico assiale di compressione

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 u_2'(0) &= 0 \\
 u_2(L) &= 0 \\
 u_2'(L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{44.43}$$

La derivata prima dello spostamento (44.32) può calcolarsi facilmente come:

$$u_2'(x_3) = C_2 - \alpha C_3 \sin(\alpha x_3) + \alpha C_4 \cos(\alpha x_3)
 \tag{44.44}$$

e quindi le (44.43) divengono:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ C_2 + \alpha C_4 &= 0 \\ C_1 + C_2 L + C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \\ C_2 - \alpha C_3 \sin(\alpha L) + \alpha C_4 \cos(\alpha L) &= 0 \end{aligned} \quad (44.45)$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 1 & -\alpha \sin(\alpha L) & \alpha \cos(\alpha L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44.46)$$

E' questo un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite  $C_i$ , lineare ed omogeneo. Oltre alla soluzione banale, sempre presente, potranno aversi altre configurazioni di equilibrio non identicamente nulle se il determinante dei coefficienti si annulla. Dovrà quindi aversi:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 1 & -\alpha \sin(\alpha L) & \alpha \cos(\alpha L) \end{pmatrix} = 0 \quad (44.47)$$

e svolgendo i calcoli si ottiene l' equazione secolare in  $\alpha$  :

$$2(\cos(\alpha L) - 1) + \alpha L \sin(\alpha L) = 0 \quad (44.48)$$

che può risciversi, utilizzando le formule di bisezione:

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ \cos x &= 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 1 \end{aligned} \quad (44.49)$$

come:

$$\sin \left( \frac{\alpha L}{2} \right) \left[ \frac{\alpha L}{2} \cos \left( \frac{\alpha L}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha L}{2} \right) \right] = 0 \quad (44.50)$$

Questa equazione sarà soddisfatta sia che valga la:

$$\sin \left( \frac{\alpha L}{2} \right) = 0 \quad (44.51)$$

sia la:

$$\frac{\alpha L}{2} \cos \left( \frac{\alpha L}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha L}{2} \right) = 0 \quad (44.52)$$

che si trasforma in:

$$\tan \left( \frac{\alpha L}{2} \right) = \frac{\alpha L}{2} \quad (44.53)$$

La prima equazione fornisce le radici:

$$\frac{\alpha_n L}{2} = n\pi \quad (44.54)$$

da cui subito la prima serie di carichi critici:

$$F_n = 4n^2 \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (44.55)$$

La seconda equazione, la (44.53), può essere risolta solo numericamente. Diagrammando in via preliminare la funzione si ha il grafico di Figura 44.8, che si ottiene attraverso il comando *Mathematica*:

```
Plot[Tan[x]-x,{x,0,15}]
```

ed ingrandendo la parte iniziale si evidenziano, come in Figura 44.9, le prime due radici. Il comando *Mathematica* è:

```
Plot[Tan[x]-x,{x,0,10}]
```

Identificati i due punti di nullo, essi possono calcolarsi attraverso le righe:

```
FirstRoot = FindRoot[Tan[x]-x == 0, {x,3,5}]
```

```
FirstRoot = FindRoot[Tan[x]-x == 0, {x,7,8}]
```

ottenendo  $x = 4.49341$  ed  $x = 7.72525$ .

In corrispondenza di queste due radici si hanno i carichi critici:

$$\begin{aligned} F'_1 &= 4 \times 4.49341^2 \frac{EI}{L^2} \approx 80.76 \frac{EI}{L^2} \\ F'_2 &= 238.7 \frac{EI}{L^2} \end{aligned} \quad (44.56)$$

Il più basso carico critico, quello che, come detto, ha effettiva importanza pratica, sarà pertanto:

$$F_{cr} = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (44.57)$$

La forma della deformata corrispondente alle radici (44.55) si ottiene risolvendo il sistema omogeneo a determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2n\pi}{L} \\ 1 & L & \cos(2n\pi) & \sin(2n\pi) \\ 0 & 1 & -\frac{2n\pi}{L} \sin(2n\pi) & \frac{2n\pi}{L} \cos(2n\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44.58)$$

e quindi  $C_1 = -C_3 = C$ , e  $C_2 = C_4 = 0$ . La deformata è perciò data da:

$$u_2(x_3) = C \left( 1 - \cos \frac{2n\pi}{L} x_3 \right) \quad (44.59)$$

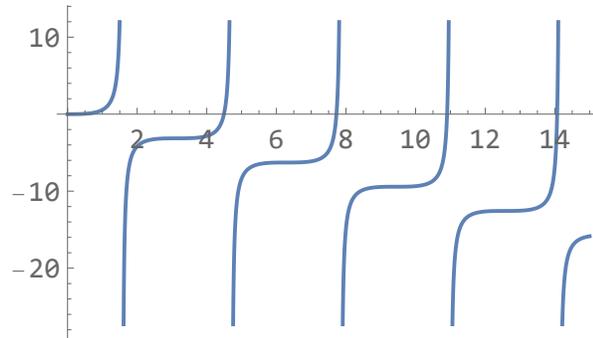


Figura 44.8: Il grafico dell'equazione secolare, come ottenuto da *Mathematica*

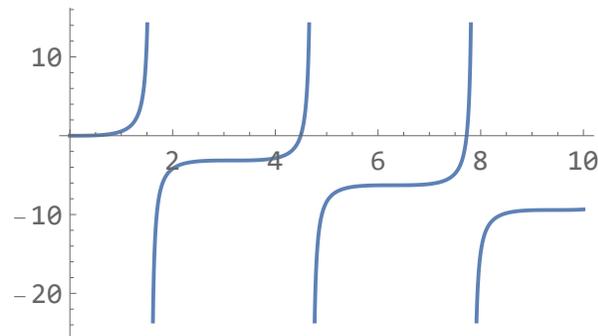


Figura 44.9: Uno zoom del grafico dell'equazione secolare

### La trave a mensola

Per una trave incastrata a sinistra e libera a destra, come riportata in Figura 44.10, dovrà essere, come discusso precedentemente:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 u_2'(0) &= 0 \\
 u_2''(L) &= 0 \\
 u_2'''(L) + \alpha^2 u_2'(L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{44.60}$$

Occorrono ora le prime tre derivate della linea elastica:

$$\begin{aligned}
 u_2'(x_3) &= C_2 - \alpha C_3 \sin(\alpha x_3) + \alpha C_4 \cos(\alpha x_3) \\
 u_2''(x_3) &= -\alpha^2 C_3 \cos(\alpha x_3) - \alpha^2 C_4 \sin(\alpha x_3) \\
 u_2'''(x_3) &= \alpha^3 C_3 \sin(\alpha x_3) - \alpha^3 C_4 \cos(\alpha x_3)
 \end{aligned}
 \tag{44.61}$$

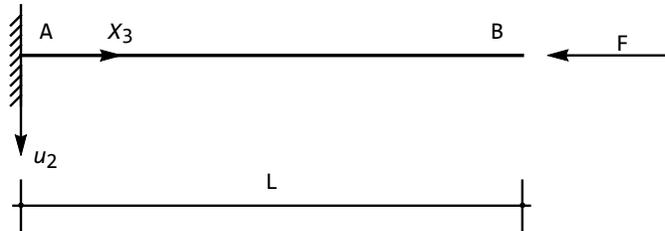


Figura 44.10: La trave a mensola soggetta ad un carico assiale di compressione

e quindi le (44.60) divengono:

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 0 \\
 C_2 + \alpha C_4 &= 0 \\
 C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \\
 \alpha^2 C_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{44.62}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{44.63}$$

E' questo un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite  $C_i$ , lineare ed omogeneo. Oltre alla soluzione banale, sempre presente, potranno aversi altre configurazioni di equilibrio non identicamente nulle se il determinante dei coefficienti si annulla. Dovrà quindi aversi:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{44.64}$$

e svolgendo i calcoli si ottiene l' equazione secolare in  $\alpha$  :

$$\cos(\alpha L) = 0 \tag{44.65}$$

con radici:

$$\alpha_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi \tag{44.66}$$

da cui subito i carichi critici:

$$F_n = \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 \frac{EI}{L^2} \tag{44.67}$$

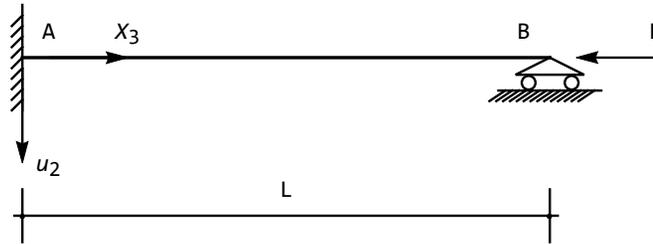


Figura 44.11: La trave incastrata–appoggiata soggetta ad un carico assiale di compressione

Il primo valore sarà quindi:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 L^2} \quad (44.68)$$

La forma della deformata corrispondente alle radici (44.67) si ottiene risolvendo il sistema omogeneo a determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_n L) & \sin(\alpha_n L) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44.69)$$

e quindi  $C_1 = -C_3 = C$ , e  $C_2 = C_4 = 0$ . La deformata è perciò data da:

$$u_2(z) = C \left( 1 - \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \frac{x_3}{L} \right] \right) \quad (44.70)$$

### La trave con incastro ed appoggio

Per una trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra (cfr. Figura 44.11) dovrà essere:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ u_2''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (44.71)$$

Occorrono ora le prime due derivate della linea elastica:

$$\begin{aligned} u_2'(x_3) &= C_2 - \alpha C_3 \sin(\alpha x_3) + \alpha C_4 \cos(\alpha x_3) \\ u_2''(x_3) &= -\alpha^2 C_3 \cos(\alpha x_3) - \alpha^2 C_4 \sin(\alpha x_3) \end{aligned} \quad (44.72)$$

e quindi le condizioni ai limiti divengono:

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 0 \\
 C_2 + \alpha C_4 &= 0 \\
 C_1 + C_2 L + C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \\
 C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0
 \end{aligned} \tag{44.73}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{44.74}$$

Dovrà ora aversi:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \end{pmatrix} = 0 \tag{44.75}$$

e svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione secolare in  $\alpha$ :

$$\tan(\alpha L) = \alpha L \tag{44.76}$$

con radici da calcolare numericamente, come già del resto illustrato.

Il carico critico si scrive come:

$$F_{\text{cr}} = (4.49341)^2 \frac{EI}{L^2} \approx 20.19 \frac{EI}{L^2} \tag{44.77}$$

La forma della deformata corrispondente alle radici  $\alpha_n$  della (44.76) si ottiene risolvendo il sistema omogeneo a determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_n \\ 1 & L & \cos(\alpha_n L) & \sin(\alpha_n L) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_n L) & \sin(\alpha_n L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{44.78}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned}
 C_4 &= C \\
 C_3 &= -C\alpha_n L \\
 C_2 &= -C\alpha_n \\
 C_1 &= \alpha_n L
 \end{aligned} \tag{44.79}$$

con deformata:

$$u_2(x_3) = C(\alpha_n(L - x_3) - \alpha_n L \cos(\alpha_n x_3) + \sin(\alpha_n x_3)) \tag{44.80}$$



# Indice analitico

- Airy George Biddell, 170
- allungamento percentuale, 97, 103
- analogia di Mohr, 430
  - carico fittizio, 430
  - i vincoli, 431
  - momento fittizio, 430
  - taglio fittizio, 430
  - trave ausiliaria, 431
- angolo specifico di torsione, 261
  - per sezioni a corona circolare, 269
  - per sezioni circolari, 268
  - per sezioni ellittiche, 271
- appoggio, 12
  - condizioni ai limiti, 312, 374
  - intermedio, 374
- asse di flessione
  - nella flessione deviata, 239
  - nella flessione retta, 231
- asse di sollecitazione
  - nella flessione deviata, 237
  - nella flessione retta, 231
- asse neutro
  - nella flessione composta, 242
  - nella flessione deviata, 238
  - nella flessione retta, 226
- assi centrali di inerzia, 192
  - per una sezione ad L, 245
- assi di torsione, 262
- assi principali di inerzia, 192
- assioma di Eulero, *vedi* assioma di separazione
- assioma di separazione, 45
- asta
  - equazione differenziale della linea elastica, 315
  - soggetta a carico distribuito, 315
  - soggetta a forza concentrata, 317
- baricentro
  - definizione, 189
  - per sezione circolare, 195
  - per sezione rettangolare, 193
  - per una sezione ad L, 243
- Becchi Antonio, 41, 124
- Beeckman Isaac, 120
- Beltrami Eugenio, 115
- Benvenuto Edoardo, 40, 50, 120, 124
- Bernoulli Jacob, 299
- Betti Enrico, 463
- Bianchi Luigi, 116
- bipendolo, 12, 24
  - condizioni ai limiti, 313, 375
  - interno, 381
- Boscovich Ruggero Giuseppe, 40
- Boussinesq Joseph, 214, 216
- Bredt Rudolf, 289
- Bridgman Percy Williams, 50
- Capecchi Danilo, 41, 176
- caratteristiche della sollecitazione esterna, 200
  - relazioni tra le, 202
- caratteristiche della sollecitazione interna, 202
- carico critico, 497
  - per trave a mensola, 501
  - per trave appoggiata, 496
  - per trave con incastro ed appoggio, 503
  - per trave incastrata, 499
- carrello, 12
- Castigliano Alberto, 129
- Cauchy Augustin-Louis, 41, 93, 122, 124, 252
- Cauchy Augustin-Louis, 58, 155

- Cavallone Sergio, 176  
cedibilità assiali, 453  
cedibilità rotazionali, 453  
cedimenti anelastici, 363, 452  
cedimenti elastici, 365, 453  
centro assoluto di rotazione, 9  
Ceradini Giulio, 41  
Cerchi di Mohr, 81  
    costruzione, 84  
    e direzioni principali, 88  
    nella torsione, 264  
    utilizzo, 84  
Cerchi di Mohr principali, 88  
cerniera, 12, 24  
    condizioni ai limiti, 381  
cerniera ideale, 13  
Clapeyron Benoît Paul Émile, 155, 264, 446  
Clebsch Alfred, 212  
coefficiente di contrazione laterale, *vedi*  
    coefficiente di Poisson  
coefficiente di dilatazione termica, 423  
coefficiente di Poisson, 141, 148  
    limiti di validità, 151  
    nella teoria dei Eulero–Bernoulli, 303  
coefficienti di Chentsov, 142  
coefficienti di influenza mutua del primo tipo, 142  
coefficienti di influenza mutua del secondo tipo, 142  
Colonnetti Gustavo, 176, 185, 464  
condizioni di compatibilità, *vedi* equazioni di compatibilità  
configurazione, 1  
congruenza interna, *vedi* equazioni di compatibilità  
convenzione sui segni di Otto Mohr, 82  
coordinate lagrangiane, 2  
coppie concentrate  
    condizioni ai limiti, 394  
coppie di sforzo, 47  
corollari di Mohr, *vedi* analogia di Mohr  
corona circolare  
    angolo specifico di torsione, 269  
    momenti di inerzia, 195  
corpo rigido, 6  
Cosserat Eugène–Maurice–Pierre, 47  
Cosserat François, 47  
costanti di Lamé, 146  
costanti ingegneristiche, 141  
Coulomb Charles Augustin, 251  
curvatura, 228  
    relazione approssimata momenti–curvatura, 231  
    relazione momenti–curvatura, 228  
curvatura anticlastica, 229  
Davies Glyn A.O, 176  
De Saint–Venant Adhémar–Jean–Claude Barré, 41, 43, 115  
deformazione di un segmento, 103, 110  
deformazioni  
    componenti normali, 104  
    componenti tangenziali, 105  
    piccole, 109  
deformazioni principali, 106  
dilatazione cilindrica, 96  
direzioni principali  
    di tensione, 71  
    di deformazione, 106  
    per materiali isotropi, 148  
Dirichlet Johann Peter Gustav Lejeune, 258, 268  
distanza di estinzione, 215  
distorsioni, 417  
    concentrate, 417  
    di Volterra, 417  
    distribuite, 417  
    linee di influenza, 464  
distribuzioni, teoria delle, 43  
doppio bipendolo, 13, 23  
Duleau Alphonse J. C. B., 251  
ellissoide di Lamé, *vedi* ellissoide delle tensioni  
ellissoide di tensione, 76  
energia complementare, 184  
    variazione, 184  
energia complementare totale, 185  
    principio di stazionarietà, 185  
energia di deformazione

- nel taglio, 284
- nella flessione fuori dal piano, 236
- nella flessione retta, 231
- nella torsione, 263
- nella trattazione approssimata del taglio, 296
- nello sforzo normale, 222
- proprietà di ortogonalità, 236
- energia elastica, 182
  - di un vincolo cedevole, 367
  - nelle travi, 216
  - variazione, 182
- energia potenziale dei carichi, 182
  - assiali, 492
- energia potenziale totale, 183
  - in presenza di vincoli cedevoli, 368
  - nella teoria di Timoshenko, 403
  - principio di stazionarietà, 183
- equazione dei tre momenti, 444
- equazione differenziale della linea elastica, 310
  - in presenza di carico assiale, 492
  - in presenza di distorsioni concentrate, 419
  - in presenza di distorsioni distribuite, 425
  - nella teoria di Timoshenko, 405
- equazione secolare, 67, 71, 107
- equazioni cardinali della statica, 18
- equazioni dell'equilibrio elastico, *vedi* equazioni di Navier–Cauchy
- equazioni di Clapeyron, *vedi* equazione dei tre momenti
- equazioni di compatibilità, 114
  - in stato piano di spostamento, 163
  - in stato piano di tensione, 164
- equazioni di congruenza, 442
- equazioni di Navier–Cauchy, 154
  - per le travi, 210
- equazioni indefinite dell'equilibrio, 61, 126
  - nella torsione, 253
  - per le travi, 208
- estremo libero
  - condizioni ai limiti, 314
- Euler Leonhard, 45, 175, 299
  - fattore di taglio, 296
    - nella sezione rettangolare, 298
  - fattore di torsione, 259
    - nelle corone circolari, 269
    - nelle sezioni circolari, 268
    - nelle sezioni ellittiche, 271, 276
  - Fichera Gaetano, 157, 215
  - flessione composta, 241
    - asse neutro, 242
    - centro di sollecitazione, 241
    - formula trinomia, 241
  - flessione deviata, 237
    - asse di flessione, 239
    - asse neutro, 238
    - formula binomia, 238
    - relazione tra asse di flessione ed asse neutro, 240
    - relazione tra asse di sollecitazione ed asse neutro, 239
  - flessione fuori dal piano, 231
    - c.s.e., 234
    - c.s.i., 234
    - energia di deformazione, 236
    - spostamenti, 233
  - flessione nel piano, 223
    - c.s.e., 225
    - c.s.i., 225
    - energia di deformazione, 231
    - formula di Navier, 226
    - spostamenti, 224
  - flessione non uniforme, *vedi* taglio
  - formula di Eulero
    - per i carichi critici, 496
  - formula di Green–Riemann, 258, 264
  - formula di Jourawsky, 292
  - formula di Kharlab, 293
  - formula di Navier
    - per la flessione fuori del piano, 235
    - per la flessione nel piano, 226
  - forze concentrate
    - condizioni ai limiti, 393
  - forze staticamente ammissibili, 449
  - Fourier Jean Baptiste Joseph, 53
  - Franciosi Vincenzo, 226
  - Fresnel Augustin–Jean, 53
  - funzione di Airy, 159, 169

- cubica, 172  
 quadratica, 170  
 funzione di taglio, 280  
 funzione di tensione, *vedi* funzione di  
     Airy  
 funzione di torsione, 255  
     nelle corone circolari, 269  
     nelle sezioni circolari, 268  
     nelle sezioni ellittiche, 269  
  
 gradiente di deformazione, 96  
 gradiente di spostamento, 93  
     ipotesi di piccolo, 110  
     scomposizione del, 95, 111  
 grado di iperstaticità, 34  
 grado di labilità, 33  
 Green George, 42, 101, 124, 183, 258  
     ipotesi di, 126  
 Gurtin Morton E., 53, 183, 185  
  
 Hooke Robert, 119  
     apparato sperimentale di, 121  
 Huygens Christiaan, 190, 244  
  
 identità di Bianchi, 116  
 Ieşan Dorin, 218  
 incastro, 13  
     condizioni ai limiti, 311  
 ingobbimento, 260  
 invarianti  
     di tensione, 71  
     di deformazione, 107  
 ipotesi di Jourawsky, 291  
 ipotesi molecolare, 123  
  
 Jourawski Dmitrij Ivanovič, 289  
  
 Kecs Wilhelm W., 43  
 Kharlab V.D., 293  
 Kirchhoff Gustav R., 157  
 Kupffer A.T., 289  
 Kurrer Karl-Eugen, 327  
  
 labilità, *vedi* struttura labile  
 Lagrange Joseph-Louis, 101  
 Lamé Gabriel, 76, 146, 155  
 Laplace Pierre-Simon, 41  
  
 lastra sottile piana, 166  
 lastre rettangolari, 170  
     in flessione, 173  
     in trazione, 172  
     soggette a taglio semplice, 172  
 legge di Hooke, 119  
     generalizzata, 122  
     in costanti ingegneristiche, 150  
     inversa, 123, 147  
     inversa in costanti ingegneristiche,  
         150  
     nella teoria di Eulero-Bernoulli, 305  
     nella teoria di Timoshenko, 402  
     per le travi, 209  
     per materiali anisotropi, 143  
     per materiali isotropi, 145  
     per stati piani di spostamento, 168  
     per stati piani di tensione, 167  
     simmetria maggiore, 132  
     simmetrie minori, 131  
     tensorialità della, 131  
 leggi di Huygens, *vedi* teorema di Huy-  
     gens  
 Lekhnitskii Sergei Gheorgievich, 119  
 linea di influenza  
     classificazione, 466  
     definizione, 466  
 Love A.E.H. (Augustus Edward Hou-  
     gh), 183  
  
 Martinez Alberto A., 251  
 materiale auxetico, 151  
 materiale iperelastico, 127  
 materiale isotropo, 140, 145  
 materiale linearmente elastico, 127  
 materiale monoclinico, 132, 145  
 materiale ortotropo, 133, 145  
 materiale trasversalmente isotropo, 135,  
     145  
 matrice cinematica, 27  
 matrice di elasticità, 123  
     inversa, 151  
     simmetria della, 127  
 matrice di rotazione, 187  
 matrice statica, 33  
 Maxwell James Clerk, 463

- metodo delle forze, 441  
 metodo semi-inverso, 210  
 Mizel Victor J., 53  
 modulo di elasticità longitudinale, *vedi* modulo di Young  
 modulo di resistenza a taglio, 148  
 modulo di Young, 141, 148  
 Mohr Otto, 81  
 momenti di inerzia  
     principali, 192  
 momento centrifugo, 190  
 momento d'inerzia polare  
     definizione, 190  
 momento di inerzia  
     baricentrico, 190  
     centrale, 191  
     definizione, 190  
     per corona circolare, 195  
     per sezione circolare, 195  
     per sezione ellittica, 198  
     per sezione rettangolare, 193  
     per sezione triangolare, 196  
     per una sezione ad L, 244  
 momento di inerzia polare, 258  
 momento flettente  
     definizione, 202  
 momento risultante, 18  
 momento statico, 188  
 momento torcente  
     definizione, 202  
 Muskhelishvili Nikoloz, 41, 115  
 Musschenbroeck Pieter van, 40  
 Müller-Breslau Heinrich, 449  
  
 Navier Claude-Louis, 41, 122, 155, 226  
 Newton Isaac, 40, 124  
 Noll Walter, 119  
  
 ortogonalità delle direzioni principali, 72  
 Ostrogradsky Mikhail Vasilyevich, 289  
  
 parallelepipedo elementare, 61  
 Parlett Beresford N., 73  
 pendolo, 12, 22  
 Pessoa Fernando, 399  
  
 Petty William, 120  
 piano di flessione  
     nella flessione retta, 231  
 piano di Mohr, 82  
 piano di sollecitazione  
     nella flessione retta, 231  
 piano neutro, 226  
 piccoli spostamenti, 3  
 planeità delle sezioni rette, 228  
 Poisson Siméon-Denis, 41, 122, 148, 155  
 polo, 6  
 postulato di De Saint-Venant  
     conseguenze, 214  
     enunciato storico, 211  
     formulazione energetica, 215  
 potenziale elastico, 126  
     per materiali isotropi, 148  
 pressoflessione, *vedi* flessione composta  
 principio degli spostamenti virtuali, 180  
     nella teoria di Eulero-Bernoulli, 304  
     per le travi, 452  
 principio dei lavori virtuali  
     in notazione matriciale, 179  
     interpretazione meccanica, 177  
     per corpi deformabili, 175  
     per corpi rigidi, 17  
     per distorsioni distribuite, 452  
     per il calcolo delle iperstatiche, 457  
     per il calcolo di spostamenti, 453  
     per le travi di Eulero-Bernoulli, 449  
     per le travi di Timoshenko, 449  
     per vincoli cedevoli, 452  
 principio delle forze virtuali, 181  
     per le travi, 452  
 principio di azione locale, 119  
 principio di Betti, 463  
     linee di influenza di spostamenti  
         per forze viaggianti, 467  
 principio di Colonnetti, 464  
     linee di influenza di caratteristiche  
         per forze viaggianti, 472  
     linee di influenza di spostamenti  
         per distorsioni viaggianti, 480  
 principio di determinismo, 119

- principio di indifferenza del riferimento materiale, 119  
 principio di reciprocità di Maxwell, 463  
 principio di solidificazione, 61  
 principio di sovrapposizione, 157, 237, 457  
     nel metodo delle forze, 441  
 principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale  
     in presenza di carichi assiali, 491  
     nella teoria di Eulero–Bernoulli, 309  
 principio di unicità, 157, 210  
 principio di Volterra, 465  
     linee di influenza di caratteristiche per distorsioni viaggianti, 485  
 principio generale di reciprocità, 461  
 problema debole di De Saint–Venant, 205  
 problema forte di De Saint–Venant, 200  
 problema misto della teoria dell'elasticità, 153  
  
 raggio di curvatura, 229  
 reazioni vincolari, 19  
 regola di Cramer, 378  
 relazione momenti–curvatura, 231  
 relazione momento–taglio, 304  
 relazione taglio–carichi applicati, 309  
 relazioni di Castigliano, 129  
 Riemann Georg Friedrich Bernhard, 258  
 rigidezza  
     assiale, 367  
     rotazionale, 367  
 rigidità torsionale, 261  
 rigidità, vincolo di, 4  
 risultante, 18  
 Roller Jean, 58  
 Ruta Giuseppe, 41  
  
 Saada Adel S., 96  
 sconnessione  
     doppia, 22  
     semplice, 24  
 sezione circolare, 194  
     momenti di inerzia, 195  
 sezione ellittica, 197  
     momenti di inerzia, 198  
 sezione triangolare, 195  
     baricentro, 195  
     momenti di inerzia, 196  
 sforzo assiale, *vedi* sforzo normale  
 sforzo normale, 219  
     c.s.e., 221  
     c.s.i., 221  
     definizione, 202  
     energia di deformazione, 222  
     spostamenti, 220  
 sforzo normale eccentrico, *vedi* flessione composta, 241  
 sistema isostatico equivalente, 441  
 Slivker V., 293  
 solai, 444  
 solaio  
     linee di influenza, 474  
 solido di Cauchy, 47  
 solido polare, 47  
 spostamenti da deformazione pura, 113  
 spostamenti geometricamente ammissibili, 176, 449  
 spostamento, 93  
 stato monoassiale di deformazione, 161  
 stato monoassiale di tensione, 159  
 stato piano di spostamento, 162  
     equazioni di compatibilità, 163  
     equazioni di Navier–Cauchy, 163  
     tensioni, 162  
 stato piano di tensione, 164  
     deformazioni, 164  
     equazioni di compatibilità, 164  
 Sternberg Eli, 216  
 Stokes George, 113  
 struttura cinematicamente determinata, 28  
 struttura iperstatica, 34  
 struttura isostatica, 34  
 struttura labile, 28, 33  
  
 taglio, 277  
     c.s.e., 282  
     c.s.i., 282  
     definizione, 202

- divergenza delle tensioni tangenziali, 286
- energia di deformazione, 284
- funzione di taglio, 280
- nella teoria di Eulero–Bernoulli, 304
- rotore delle tensioni tangenziali, 285
- sollecitazione aggiuntiva di torsione, 287
- spostamenti, 280
- tensioni, 283
- trattazione approssimata, *vedi* teoria di Jourawsky
- tensione normale, 48, 58
- tensione tangenziale, 48, 59, 77
- tensione, definizione di, 47
- tensioni principali, 69
- tensioni staticamente ammissibili, 176
- tensioni, componenti speciali di, 49
- tensioni, simmetria del tensore delle, 63
- tensore di Green–Lagrange, 101, 110, 489, 490
- Teodorescu Petre P., 43
- teorema di Cauchy–Poisson, 53, 67, 69, 75, 88, 125, 203
- teorema di Clapeyron, 264
- teorema di Green–Riemann, *vedi* formula di Green–Riemann
- teorema di Huygens, 190, 244
- teorema di Toupin, 217
- teoria della trave, *vedi* teoria di Eulero–Bernoulli
- teoria di Eulero–Bernoulli, 299
  - in presenza di carico assiale, 489
  - ipotesi di base, 301
  - spostamenti, 302
- teoria di Jourawsky, 289
  - energia di deformazione, 296
  - fattore di taglio, 296
  - ipotesi a base della, 291
  - la sezione rettangolare, 296
- teoria di Timoshenko
  - area efficace a taglio, 403
  - coefficiente correttivo, 399
  - equazioni della linea elastica, 405
  - in presenza di distorsioni, 425
  - ipotesi di base, 401
  - limiti di validità, 399
  - spostamenti, 402
  - tensioni, 402
  - trave a mensola, 406
  - trave appoggiata, 411
- tetraedro elementare, 53
- Timoshenko Stephen, 289
- torsione
  - angolo specifico di, 261
  - assi di torsione, 262
  - c.s.e., 258
  - cerchi di Mohr, 264
  - divergenza delle tensioni tangenziali, 262
  - energia di deformazione, 263
  - fattore di torsione, 259
  - integrale di Dirichlet, 258, 268
  - nelle sezioni a corona circolare, 269
  - nelle sezioni circolari, 267
  - nelle sezioni ellittiche, 269
  - problema di Dini–Neumann, 257
  - rigidità torsionale, 261
  - rotore delle tensioni tangenziali, 262
  - spostamenti, 255
  - spostamenti da ingobbimento, 260
- Toupin Richard, 216
- trattazione approssimata del taglio, *vedi* teoria di Jourawsky
- trave
  - a mensola, di Timoshenko, 406
  - appoggiata, di Timoshenko, 411
  - asse, 199
  - definizione, 199
  - fibre, 199, 261
  - mantello, 199
  - sezione retta, 199
- trave a mensola
  - in presenza di carichi assiali, 494
- travi ad una campata, 321, 347
  - trave a mensola, 331, 349
  - trave con appoggio e bipendolo, 342
  - trave con incastro e bipendolo, 338, 359

- trave con incastro ed appoggio im-  
perfetto, 369
- trave doppiamente appoggiata, 328,  
353
- trave doppiamente incastrata, 322
- trave incastrata-appoggiata, 334,  
355
- travi continue
  - soluzione con l'equazione dei tre  
momenti, 444
- Trovalusci Patrizia, 41
- Truesdell Clifford A., 39, 119, 149
  
- variazione angolare, 98, 105, 110
- variazioni termiche, 423
  - alla Navier, 423
  - assiali, 423
  - flessionali, 423
- Villaggio Piero, 43, 216
- vincoli olonomi, 1
- vincolo doppio, 12
  - interno, 24
- vincolo semplice, 11
  - interno, 22
- Voigt Woldemar, 41
- Volterra Vito, 465
- von Mises Richard, 216
  
- Weisbach Julius, 327
- Williams William O., 53
  
- Young Thomas, 148
  
- Zanaboni Osvaldo, 216