

Capitolo 22

La geometria delle aree

In questo Capitolo si richiamano sinteticamente alcune nozioni di geometria delle aree (baricentro di una figura piana, momento statico e momento di inerzia di una figura piana rispetto ad un asse) che saranno essenziali per il seguente studio della trave.

22.1 La nozione di baricentro

Si consideri un'area Σ nel piano, sia (O, X_1, X_2) un sistema di riferimento ortogonale levogiro, sia P un punto generico di Σ , di coordinate $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Una *traslazione* del sistema di riferimento, che sposti l'origine $O = (0, 0)$ nel punto $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20})$ si ottiene correlando le coordinate \mathbf{x} del generico punto P nel vecchio sistema di riferimento alle coordinate \mathbf{x}^t dello stesso punto P nel nuovo riferimento tramite le relazioni (cfr. Figura 22.1):

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad (22.1)$$

o, equivalentemente:

$$\begin{aligned} x_1^t &= x_1 - x_{01} \\ x_2^t &= x_2 - x_{02} \end{aligned} \quad (22.2)$$

Una *rotazione* del sistema di riferimento, definita attraverso una rotazione di ampiezza ϕ , si ottiene correlando le coordinate \mathbf{x} del generico punto P nel vecchio sistema di riferimento alle coordinate \mathbf{x}^r dello stesso punto P nel nuovo riferimento tramite le relazioni:

$$\mathbf{x}^r = \mathbf{R}\mathbf{x} \quad (22.3)$$

dove \mathbf{R} è la matrice di rotazione:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (22.4)$$

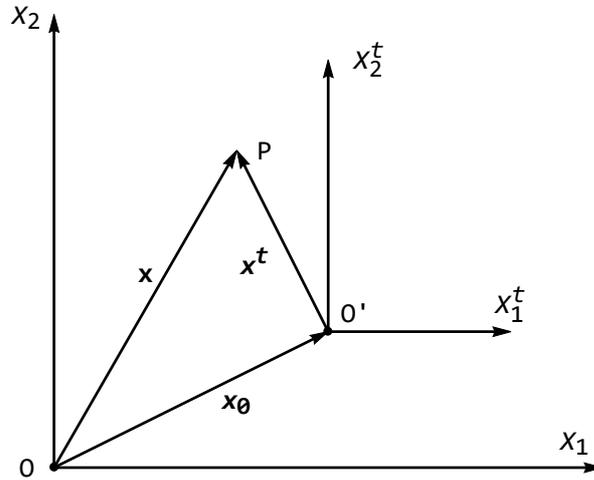


Figura 22.1: La traslazione rigida del sistema di riferimento

Ed infatti, dalla Figura 22.2 risulta agevole calcolare:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^r \cos \phi - x_2^r \sin \phi \\ x_2 &= x_1^r \sin \phi + x_2^r \cos \phi \end{aligned} \quad (22.5)$$

ed invertire questa relazione. Si noti che la matrice di rotazione \mathbf{R} è ortogonale propria, ossia ha determinante pari a +1, e la sua inversa coincide con la sua trasposta.

Ciò premesso, si definisce *vettore dei momenti statici* relativo all'area Σ ed al sistema di riferimento (O, X_1, X_2) il seguente vettore:

$$\mathbf{S} = \int_{\Sigma} \mathbf{x} \, dA = \begin{pmatrix} \int_{\Sigma} x_1 \, dA \\ \int_{\Sigma} x_2 \, dA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_2 \\ S_1 \end{pmatrix} \quad (22.6)$$

Si noti subito che la prima componente del vettore dei momenti statici è stata individuata col simbolo S_2 , ed indica il momento statico dell'area Σ rispetto all'asse X_2 , mentre la seconda componente del vettore dei momenti statici è stata individuata col simbolo S_1 , ed indica il momento statico dell'area Σ rispetto all'asse X_1 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\Sigma} x_2 \, dA \\ S_2 &= \int_{\Sigma} x_1 \, dA \end{aligned} \quad (22.7)$$

A seguito di una traslazione (22.1) del sistema di riferimento, il vettore dei momenti statici di Σ rispetto al sistema di riferimento traslato diverrà:

$$\mathbf{S}^t = \int_{\Sigma} \mathbf{x}^t \, dA = \int_{\Sigma} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \, dA = \mathbf{S} - \Sigma \mathbf{x}_0 \quad (22.8)$$

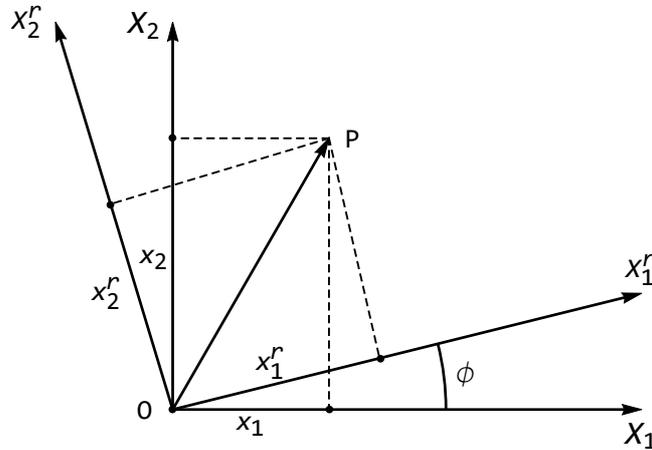


Figura 22.2: Rotazione rigida del sistema di riferimento

o anche, più esplicitamente:

$$\begin{aligned} S_2^t &= S_2 - \Sigma x_{01} \\ S_1^t &= S_1 - \Sigma x_{02} \end{aligned} \quad (22.9)$$

Esisterà allora un punto G , di coordinate (x_{G1}, x_{G2}) , tale che il vettore dei momenti statici di Σ rispetto al sistema di riferimento traslato in G sarà nullo. Tale punto si definisce *baricentro* di Σ , e dalle relazioni precedenti possono trarsi le sue coordinate nel sistema di riferimento originario:

$$\begin{aligned} x_{G1} &= \frac{S_2}{\Sigma} \\ x_{G2} &= \frac{S_1}{\Sigma} \end{aligned} \quad (22.10)$$

Può dimostrarsi che le coordinate del baricentro non dipendono dal particolare sistema di riferimento (O, X_1, X_2) originariamente prescelto.

Dalle (22.10) si trae anche la possibilità di calcolare i momenti statici concentrando l'area Σ nel baricentro, e moltiplicandola per l'opportuna distanza.

22.2 Il tensore dei momenti di inerzia

Si definisce *tensore dei momenti di inerzia* di un'area Σ rispetto ad un sistema di riferimento (O, X_1, X_2) il seguente tensore simmetrico del secondo ordine:

$$\mathbf{I} = \int_{\Sigma} \mathbf{x}\mathbf{x}^T dA = \begin{pmatrix} \int_{\Sigma} x_1^2 dA & \int_{\Sigma} x_1 x_2 dA \\ \int_{\Sigma} x_1 x_2 dA & \int_{\Sigma} x_2^2 dA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{22} & I_{12} \\ I_{12} & I_{11} \end{pmatrix} \quad (22.11)$$

Si noti che anche in questo caso si è definito il *momento d'inerzia* di Σ rispetto all'asse X_1 :

$$I_{11} = \int_{\Sigma} x_2^2 dA \quad (22.12)$$

il momento d'inerzia di Σ rispetto all'asse X_2 :

$$I_{22} = \int_{\Sigma} x_1^2 dA \quad (22.13)$$

ed infine il *momento centrifugo* di Σ rispetto agli assi X_1 ed X_2 :

$$I_{12} = \int_{\Sigma} x_1 x_2 dA \quad (22.14)$$

La traccia della matrice dei momenti di inerzia, invariante rispetto al variare del sistema di riferimento, prende il nome di *momento di inerzia polare* I_p dell'area Σ :

$$I_p = I_{11} + I_{22} \quad (22.15)$$

22.2.1 Le leggi di Huyghens

Si vuol vedere ora come varia il tensore dei momenti di inerzia a seguito di una traslazione del sistema di riferimento. Applicando la regola di traslazione (22.1) si avrà:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^t &= \int_{\Sigma} \mathbf{x}^t \mathbf{x}^{tT} dA = \int_{\Sigma} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T dA \\ &= \int_{\Sigma} \mathbf{x} \mathbf{x}^T dA - \left(\int_{\Sigma} \mathbf{x} dA \right) \mathbf{x}_0^T - \mathbf{x}_0 \int_{\Sigma} \mathbf{x}^T dA + \mathbf{x}_0 \left(\int_{\Sigma} dA \right) \mathbf{x}_0^T \end{aligned} \quad (22.16)$$

ossia ancora:

$$\mathbf{I}^t = \mathbf{I} + \Sigma \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T - \mathbf{S} \mathbf{x}_0^T - \mathbf{x}_0 \mathbf{S}^T \quad (22.17)$$

Esplicitando si ha:

$$\begin{aligned} I_{22}^t &= I_{22} + A x_{01}^2 - 2S_2 x_{01} \\ I_{11}^t &= I_{11} + A x_{02}^2 - 2S_1 x_{02} \\ I_{12}^t &= I_{12} + A x_{01} x_{02} - S_1 x_{01} - S_2 x_{02} \end{aligned} \quad (22.18)$$

Se l'origine del sistema di riferimento originario coincide col baricentro, si ha $S_1 = S_2 = 0$, e si giunge alle classiche *leggi di Huygens*:

$$\begin{aligned} I_{22}^t &= I_{22} + A x_{01}^2 \\ I_{11}^t &= I_{11} + A x_{02}^2 \\ I_{12}^t &= I_{12} + A x_{01} x_{02} \end{aligned} \quad (22.19)$$

Da esse si deduce immediatamente che il momento di inerzia baricentrico è il minimo tra quelli ottenibili per traslazione del sistema di riferimento¹.

¹ *Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, Parigi 1673



Figura 22.3: Christiaan Huygens

22.2.2 I momenti centrali di inerzia

Si vuol vedere ora come varia il tensore dei momenti di inerzia a seguito di una rotazione del sistema di riferimento. Applicando la regola di rotazione (22.3) si avrà:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^r &= \int_{\Sigma} \mathbf{x}^r \mathbf{x}^{rT} dA = \\ &= \int_{\Sigma} \mathbf{R} \mathbf{x} (\mathbf{R} \mathbf{x})^T dA = \int_{\Sigma} \mathbf{R} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^T dA = \mathbf{R} \left(\int_{\Sigma} \mathbf{x} \mathbf{x}^T dA \right) \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \mathbf{I} \mathbf{R}^T \end{aligned} \quad (22.20)$$

Esplicitando si ha, utilizzando la (22.4):

$$\begin{aligned} I_{22}^r &= I_{11} \sin^2 \phi + 2I_{12} \cos \phi \sin \phi + I_{22} \cos^2 \phi \\ I_{11}^r &= I_{11} \cos^2 \phi - 2I_{12} \cos \phi \sin \phi + I_{22} \sin^2 \phi \\ I_{12}^r &= (I_{11} - I_{22}) \sin \phi \cos \phi + I_{12} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \end{aligned} \quad (22.21)$$

Ricordando le formule trigonometriche:

$$\begin{aligned} \sin 2\phi &= 2 \sin \phi \cos \phi \\ \cos 2\phi &= \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \end{aligned} \quad (22.22)$$

il momento d'inerzia centrifugo potrà anche scriversi:

$$I_{12}^r = \frac{1}{2} (I_{11} - I_{22}) \sin 2\phi + I_{12} \cos 2\phi \quad (22.23)$$

Esisterà quindi un valore dell'angolo ϕ per cui il momento d'inerzia centrifugo I_{12}^r viene ad annullarsi. Indicando tale angolo con ϕ^* si avrà:

$$\frac{1}{2}(I_{11} - I_{22}) \sin 2\phi^* + I_{12} \cos 2\phi^* = 0 \quad (22.24)$$

ossia:

$$\frac{\sin 2\phi^*}{\cos 2\phi^*} = 2 \frac{I_{12}}{I_{22} - I_{11}} \quad (22.25)$$

da cui:

$$\phi^* = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2I_{12}}{I_{22} - I_{11}} \right) \quad (22.26)$$

con la restrizione $-\pi/4 \leq \phi^* \leq \pi/4$

Assegnando al sistema di riferimento (O, X_1, X_2) una rotazione di ampiezza ϕ^* si giunge al cosiddetto *sistema di riferimento principale* (O, ξ_1, ξ_2) , mentre gli assi ξ_1 e ξ_2 così ottenuti si dicono *assi principali di inerzia*. In tale sistema di riferimento il tensore dei momenti di inerzia si diagonalizza:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} \quad (22.27)$$

ed i due momenti di inerzia I_1 ed I_2 rispetto agli assi ξ_1 e ξ_2 si dicono *momenti principali di inerzia*. Se inoltre l'origine O del sistema di riferimento coincide col baricentro G dell'area Σ , allora il sistema di riferimento (G, ξ_1, ξ_2) si dice sistema *centrale* di riferimento, gli assi ξ_1 e ξ_2 sono gli *assi centrali di inerzia*, ed i momenti d'inerzia I_1 ed I_2 sono i *momenti centrali di inerzia*.

22.3 La sezione rettangolare

Si vuole illustrare, a titolo di esempio, la ricerca del baricentro e dei momenti centrali d'inerzia per una sezione rettangolare di base b ed altezza h . A tal fine, si sceglie ad arbitrio un riferimento iniziale, ad esempio con origine nel vertice in basso a sinistra, e gli assi coincidenti con i lati del rettangolo, come illustrato in Figura 22.4. Poi si calcolano i due momenti statici rispetto a questi due assi. Rispetto all'asse orizzontale X_1 si ha:

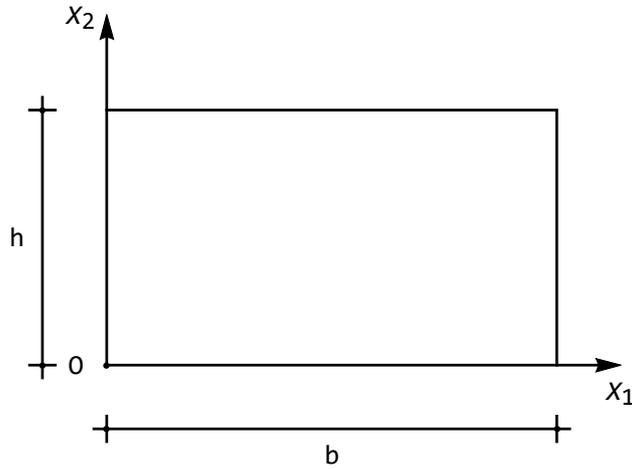
$$S_1 = \int_{\Sigma} x_2 dA = \int_0^b \int_0^h x_2 dx_2 dx_1 = \frac{bh^2}{2} \quad (22.28)$$

e rispetto all'asse verticale X_2 :

$$S_2 = \int_{\Sigma} x_1 dA = \int_0^h \int_0^b x_1 dx_1 dx_2 = \frac{b^2h}{2} \quad (22.29)$$

Le coordinate del baricentro si ottengono allora applicando le (22.10):

$$\begin{aligned} x_{G1} &= \frac{S_2}{bh} = \frac{b}{2} \\ x_{G2} &= \frac{S_1}{bh} = \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (22.30)$$


 Figura 22.4: Una sezione rettangolare di base b ed altezza h

In genere, può dimostrarsi che il baricentro di un'area piana dotata di un'asse di simmetria è obbligato ad appartenere a quest'asse, e poichè il rettangolo possiede due assi di simmetria, il baricentro si trova necessariamente alla loro intersezione.

I momenti d'inerzia rispetto allo stesso sistema di riferimento possono calcolarsi come:

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \int_{\Sigma} x_2^2 dA = \int_0^b \int_0^h x_2^2 dx_2 dx_1 = \frac{bh^3}{3} \\
 I_{22} &= \int_{\Sigma} x_1^2 dA = \int_0^h \int_0^b x_1^2 dx_1 dx_2 = \frac{b^3h}{3} \\
 I_{12} &= \int_{\Sigma} x_1x_2 dA = \int_0^b \int_0^h x_1x_2 dx_1 dx_2 = \frac{b^2h^2}{4}
 \end{aligned} \tag{22.31}$$

Traslando il sistema di riferimento fino a portare l'origine a coincidere con il baricentro, si hanno i momenti di inerzia baricentrici ottenibili a partire dalle leggi di Huyghens (22.19):

$$\begin{aligned}
 I_{22}^t &= \frac{b^3h}{3} - bh \frac{b^2}{4} = \frac{b^3h}{12} \\
 I_{11}^t &= \frac{bh^3}{3} - bh \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{12} \\
 I_{12}^t &= \frac{b^2h^2}{4} - bh \frac{b}{2} \frac{h}{2} = 0
 \end{aligned} \tag{22.32}$$

Poichè il momento centrifugo è nullo, si può concludere che i (22.32) sono i momenti centrali di inerzia.

22.4 La sezione circolare e la corona circolare

Si consideri un'area circolare di raggio R , come riportato in Figura 22.5. Per ragioni di simmetria, il baricentro coincide con il centro della circonferenza. Il calcolo dei momenti di inerzia si conduce nel modo più spedito in coordinate polari, ponendo:

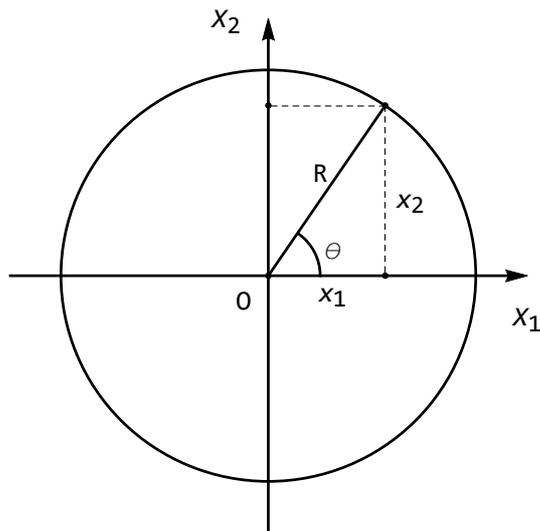


Figura 22.5: Il caso della sezione circolare

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \theta \\x_2 &= r \sin \theta\end{aligned}\quad (22.33)$$

per cui si ha uno Jacobiano pari a:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \quad (22.34)$$

e quindi:

$$\begin{aligned}I_{11} &= \int_{\Sigma} x_2^2 dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \theta r d\theta dr = \frac{\pi R^4}{4} \\I_{22} &= \int_{\Sigma} x_1^2 dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \theta r d\theta dr = \frac{\pi R^4}{4} \\I_{12} &= 0\end{aligned}\quad (22.35)$$

Sia l'uguaglianza dei due momenti di inerzia I_{11} e I_{22} che l'annullarsi del momento centrifugo sono ovvie conseguenze della simmetria della sezione. Il momento d'inerzia polare sarà pari a:

$$I_p = I_{11} + I_{22} = \frac{\pi R^4}{2} \quad (22.36)$$

Considerando ora una sezione a forma di corona circolare, con raggio interno R_i e raggio esterno R_e , si osservi che le sue caratteristiche inerziali possono dedursi pensando la sezione come la differenza tra una sezione circolare piena di raggio R_e ed una di raggio R_i . Si ha così, immediatamente:

$$\begin{aligned} I_{11} = I_{22} &= \frac{\pi (R_e^4 - R_i^4)}{4} \\ I_p &= \frac{\pi (R_e^4 - R_i^4)}{2} \end{aligned} \quad (22.37)$$

22.5 La sezione triangolare

Si consideri ora una sezione a forma di triangolo rettangolo, di base b ed altezza h , come riportato in Figura 22.6. Il momento statico rispetto all'asse X_1 si può calcolare come:

$$S_1 = \int_{\Sigma} x_2 \, dA = \int_0^b \int_0^{h(x_1)} x_2 \, dx_2 \, dx_1 \quad (22.38)$$

Ora, sfruttando la similitudine dei triangoli, dalla Figura 22.6 si evince:

$$\frac{h}{b} = \frac{h(x_1)}{b - x_1} \rightarrow h(x_1) = \frac{h(b - x_1)}{b} \quad (22.39)$$

Sarà pertanto:

$$S_1 = \int_{\Sigma} x_2 \, dA = \int_0^b \int_0^{h(b-x_1)/b} x_2 \, dx_2 \, dx_1 = \frac{bh^2}{6} \quad (22.40)$$

e rispetto all'asse verticale X_2 :

$$S_2 = \int_{\Sigma} x_1 \, dA = \int_0^b \int_0^{h(b-x_1)/b} x_1 \, dx_2 \, dx_1 = \frac{b^2h}{6} \quad (22.41)$$

Il baricentro del triangolo ha quindi coordinate (cfr. Figura 22.7):

$$\begin{aligned} x_{G1} &= \frac{S_2}{A} = \frac{b}{3} \\ x_{G2} &= \frac{S_1}{A} = \frac{h}{3} \end{aligned} \quad (22.42)$$

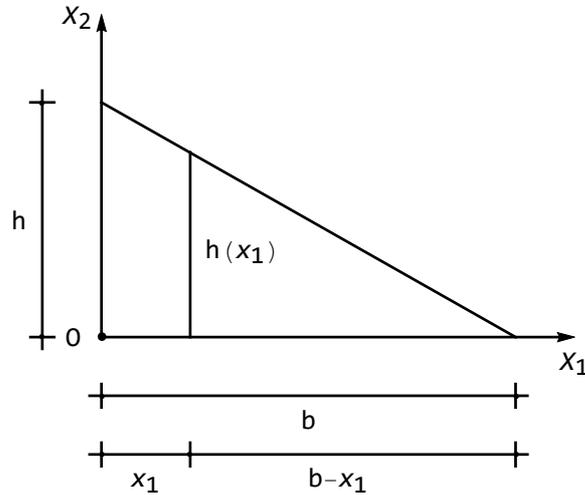


Figura 22.6: Il caso della sezione triangolare

I momenti di inerzia rispetto agli assi X_1 ed X_2 sono calcolabili attraverso la loro definizione:

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \int_{\Sigma} x_2^2 dA = \int_0^b \int_0^{h(b-x_1)/b} x_2^2 dx_2 dx_1 = \frac{bh^3}{12} \\
 I_{22} &= \int_{\Sigma} x_1^2 dA = \int_0^b \int_0^{h(b-x_1)/b} x_1^2 dx_2 dx_1 = \frac{b^3h}{12} \\
 I_{12} &= \int_{\Sigma} x_1x_2 dA = \int_0^b \int_0^{h(b-x_1)/b} x_1x_2 dx_2 dx_1 = \frac{b^2h^2}{24}
 \end{aligned} \tag{22.43}$$

I momenti di inerzia rispetto agli assi baricentrici si calcolano applicando la legge di Huygens:

$$\begin{aligned}
 I'_{22} &= I_{22} - Ax_{G1}^2 = \frac{b^3h}{12} - \frac{bh}{2} \frac{b^2}{9} = \frac{b^3h}{36} \\
 I'_{11} &= I_{11} - Ax_{G2}^2 = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2} \frac{h^2}{9} = \frac{bh^3}{36} \\
 I'_{12} &= I_{12} - Ax_{01}x_{02} = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{bh}{2} \frac{b}{3} \frac{h}{3} = -\frac{b^2h^2}{72}
 \end{aligned} \tag{22.44}$$

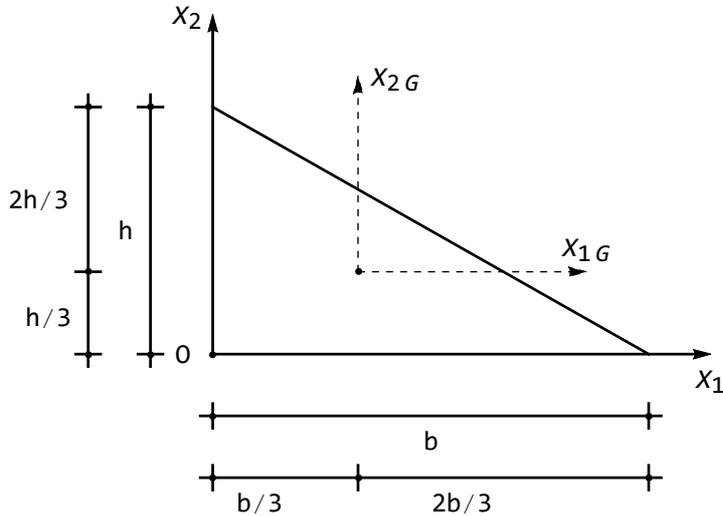


Figura 22.7: Il baricentro della sezione triangolare e gli assi baricentrici

22.6 La sezione ellittica

Si consideri una sezione a forma ellittica, con semiassi di lunghezza a e b , rispettivamente, e quindi di equazione:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad (22.45)$$

in un riferimento con origine nel baricentro ed assi coordinati orientati secondo i semiassi (cfr. Figura 22.8). Il baricentro è immediatamente identificabile come intersezione dei due assi di simmetria, mentre l'area racchiusa dall'ellisse si può calcolare tramite integrazione:

$$A = \int_{-b}^b \int_{-a\sqrt{1-x_2^2/b^2}}^{a\sqrt{1-x_2^2/b^2}} dx_1 dx_2 = \pi ab \quad (22.46)$$

Del tutto analogamente, i momenti di inerzia si calcolano facilmente utilizzando *Mathematica*, oppure facendo uso delle formule di riduzione. E' ad esempio:

$$I_{22} = \int_{\Sigma} x_1^2 dx_1 dx_2 \quad (22.47)$$

e l'integrale è esteso all'area ellittica Σ definita dall'equazione (22.45). Facendo uso delle formule di riduzione, si può scrivere:

$$I_{22} = \int_{-b}^b dx_2 \int_{-a\sqrt{1-x_2^2/b^2}}^{a\sqrt{1-x_2^2/b^2}} x_1^2 dx_1 = \frac{2a^3}{3} \int_{-b}^b \left(1 - \frac{x_2^2}{b^2}\right)^{3/2} dx_2 \quad (22.48)$$

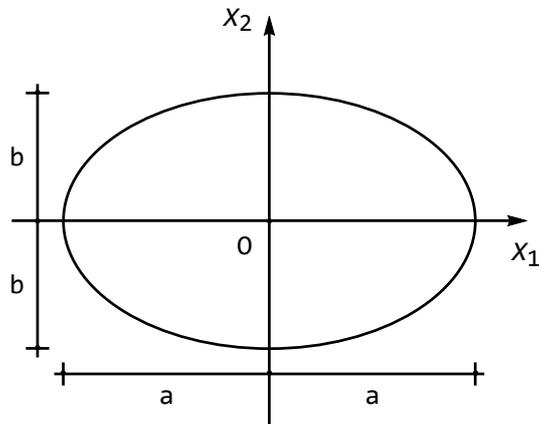


Figura 22.8: Una sezione di forma ellittica

Per calcolare l'ultimo integrale si adotti il cambio di variabile:

$$\eta = \frac{x_2}{b} \quad (22.49)$$

da cui $dx_2 = b d\eta$. Inoltre gli estremi di integrazione diventano -1 ed 1 , e quindi infine:

$$I_{22} = \frac{2a^3}{3} \int_{-1}^1 (1 - \eta^2)^{3/2} b d\eta = \frac{2a^3 b}{3} \frac{3}{8} \pi = \frac{\pi a^3 b}{4} \quad (22.50)$$

Del tutto analogamente si ha:

$$I_{11} = \frac{\pi b^3 a}{4} \quad (22.51)$$

ed anche:

$$I_p = I_{11} + I_{22} = \frac{\pi a^3 b}{4} + \frac{\pi b^3 a}{4} = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2) \quad (22.52)$$

Per motivi di simmetria, il momento centrifugo è nullo, quindi gli assi scelti sono centrali di inerzia.

Capitolo 23

Il problema della trave

In questo Capitolo si inizia lo studio dettagliato del comportamento strutturale di un solido dalla particolare geometria: la trave.

23.1 La descrizione del solido

Si consideri un solido omogeneo B , a forma di cilindro retto, formato da materiale linearmente elastico ed isotropo. La *sezione retta* si ottiene tagliando il solido con un piano parallelo alle due basi, mentre l'*asse* del solido è la retta cui appartengono i baricentri delle sezioni rette. I segmenti paralleli all'asse si chiamano *fibre*.

E' usuale assumere come riferimento una terna ortogonale con origine in G , baricentro di una delle due basi, ed assi X_1, X_2 contenuti nel piano di una delle due basi, mentre l'asse X_3 è orientato verso l'interno del corpo, come illustrato in Figura 23.1.

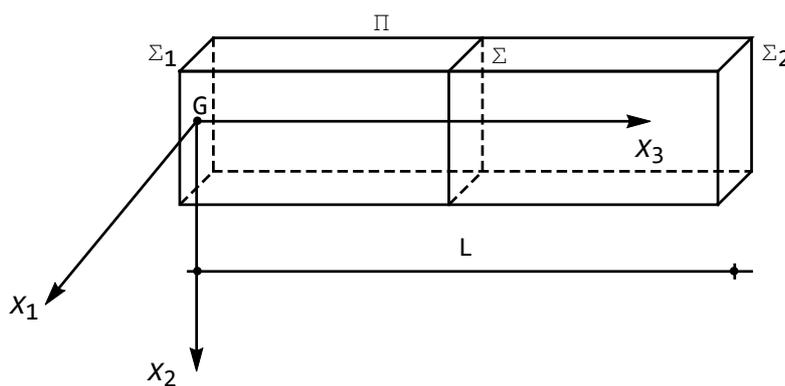


Figura 23.1: Il solido del tipo trave

23.2 La posizione del problema

Un'ipotesi fondamentale riguarda i carichi applicati alla trave. Si assume infatti che le forze di massa siano assenti, e che la superficie laterale sia scarica, sicchè le uniche forze ammesse sono le forze superficiali sulle due basi Σ_1 e Σ_2 . E' evidente che almeno l'ipotesi sulle forze di massa è una approssimazione, attesa la presenza quanto meno delle forze di gravità. Tuttavia, spesso l'influenza di tali forze risulta trascurabile.

Il *problema forte di De Saint-Venant* consiste nel ricercare gli spostamenti dei punti della trave omogenea B , in ipotesi di materiale isotropo e linearmente elastico, in assenza di forze di massa e di forze superficiali sul mantello laterale Π , soggetta ai carichi $\mathbf{p}^{(1)}$ sulla base di sinistra Σ_1 e $\mathbf{p}^{(2)}$ sulla base di destra Σ_2 .

Una condizione necessaria per la risoluzione del problema appena posto è che il solido trave — considerato come un corpo rigido — sia in equilibrio nei riguardi delle tre traslazioni e delle tre rotazioni, ossia che si abbia:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} \mathbf{p}^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} \mathbf{p}^{(2)} dA &= 0 \\ \int_{\Sigma_1} \mathbf{r} \times \mathbf{p}^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} \mathbf{r} \times \mathbf{p}^{(2)} dA &= 0 \end{aligned} \quad (23.1)$$

dove \mathbf{r} è il vettore posizione di un punto rispetto all'origine G . In questa ipotesi sulle forze, e con opportune condizioni di regolarità per il mantello Π e per le forze stesse, può dimostrarsi che il problema di De Saint-Venant ammette soluzione. In forma scalare, le (23.1) si scrivono:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} p_1^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} p_1^{(2)} dA &= 0 \\ \int_{\Sigma_1} p_2^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} p_2^{(2)} dA &= 0 \\ \int_{\Sigma_1} p_3^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} p_3^{(2)} dA &= 0 \end{aligned} \quad (23.2)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} x_2 p_3^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} x_2 p_3^{(2)} dA - L \int_{\Sigma_2} p_2^{(2)} dA &= 0 \\ - \int_{\Sigma_1} x_1 p_3^{(1)} dA - \int_{\Sigma_2} x_1 p_3^{(2)} dA + L \int_{\Sigma_2} p_1^{(2)} dA &= 0 \\ \int_{\Sigma_1} (x_1 p_2^{(1)} - x_2 p_1^{(1)}) dA + \int_{\Sigma_2} (x_1 p_2^{(2)} - x_2 p_1^{(2)}) dA &= 0 \end{aligned} \quad (23.3)$$

23.3 Le caratteristiche della sollecitazione esterna

Sulle due basi Σ_1 e Σ_2 si definiscono le *caratteristiche della sollecitazione esterna*, come i vettori risultanti ed i vettori momenti risultanti delle forze elementari,

nell'ipotesi che l'origine del sistema di riferimento venga traslato fino a coincidere con il baricentro della sezione in esame. Sulla base Σ_1 si ha allora:

$$\mathbf{F}^{(1)} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{p}^{(1)} dA \quad (23.4)$$

$$\mathcal{M}^{(1)} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{r} \times \mathbf{p}^{(1)} dA = \int_{\Sigma_1} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & p_3^{(1)} \end{pmatrix} dA \quad (23.5)$$

o, scalarmente:

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} p_1^{(1)} dA \\ F_2^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} p_2^{(1)} dA \\ F_3^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} p_3^{(1)} dA \\ \mathcal{M}_1^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} x_2 p_3^{(1)} dA \\ \mathcal{M}_2^{(1)} &= - \int_{\Sigma_1} x_1 p_3^{(1)} dA \\ \mathcal{M}_3^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} (x_1 p_2^{(1)} - x_2 p_1^{(1)}) dA \end{aligned} \quad (23.6)$$

Sulla base Σ_2 si hanno invece le caratteristiche della sollecitazione esterna:

$$\mathbf{F}^{(2)} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{p}^{(2)} dA \quad (23.7)$$

$$\mathcal{M}^{(2)} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{r} \times \mathbf{p}^{(2)} dA = \int_{\Sigma_2} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ p_1^{(2)} & p_2^{(2)} & p_3^{(2)} \end{pmatrix} dA \quad (23.8)$$

o, scalarmente:

$$\begin{aligned} F_1^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} p_1^{(2)} dA \\ F_2^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} p_2^{(2)} dA \\ F_3^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} p_3^{(2)} dA \\ \mathcal{M}_1^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} x_2 p_3^{(2)} dA \\ \mathcal{M}_2^{(2)} &= - \int_{\Sigma_2} x_1 p_3^{(2)} dA \\ \mathcal{M}_3^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} (x_1 p_2^{(2)} - x_2 p_1^{(2)}) dA \end{aligned} \quad (23.9)$$

Definite queste quantità, le equazioni di equilibrio (23.1) forniscono sei relazioni tra le dodici caratteristiche della sollecitazione esterna:

$$\begin{aligned} F_i^{(1)} &= -F_i^{(2)} \\ \mathcal{M}_1^{(1)} &= -\mathcal{M}_1^{(2)} + F_2^{(2)} L \\ \mathcal{M}_2^{(1)} &= -\mathcal{M}_2^{(2)} - F_1^{(2)} L \\ \mathcal{M}_3^{(1)} &= -\mathcal{M}_3^{(2)} \end{aligned} \quad (23.10)$$

23.4 Le caratteristiche della sollecitazione interna

Si introduce ora un concetto di fondamentale importanza per l'analisi delle travi e delle piastre, ossia il concetto di *caratteristiche della sollecitazione interna*. Si consideri all'uopo un solido del tipo trave, e si operi un taglio secondo la sezione retta Σ , situata alla generica ascissa x_3 , rimuovendo la parte del solido che non contiene l'origine. Si scelga come riferimento una terna ottenuta trasladando la terna originaria fino a portare l'origine in Σ , sicchè l'asse X_3 resta inalterato, mentre i due nuovi assi \bar{X}_1, \bar{X}_2 sono paralleli ad X_1 ed X_2 , rispettivamente. Sia \mathbf{t}_{x_3} il vettore tensione agente sulla sezione Σ , di normale equiversa ad X_3 .

Definizione 8. *Si definiscono caratteristiche della sollecitazione interna in Σ , le risultanti delle forze elementari $\mathbf{t}_{x_3} dA$ secondo i tre assi \bar{X}_1, \bar{X}_2 ed X_3 , ed i momenti risultanti delle stesse forze rispetto agli stessi assi.*

Sarà quindi, per definizione:

$$\begin{aligned} T_1(x_3) &= \int_{\Sigma} \sigma_{13} dA \\ T_2(x_3) &= \int_{\Sigma} \sigma_{23} dA \\ N(x_3) &= \int_{\Sigma} \sigma_{33} dA \\ M_1(x_3) &= \int_{\Sigma} \sigma_{33} x_2 dA \\ M_2(x_3) &= - \int_{\Sigma} \sigma_{33} x_1 dA \\ M_t(x_3) &= \int_{\Sigma} (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) dA \end{aligned} \quad (23.11)$$

e, sempre per definizione, T_1 e T_2 si chiamano *sforzo di taglio* secondo X_1 ed X_2 , rispettivamente, N si chiama *sforzo normale*, M_1 ed M_2 si chiamano *momenti flettenti* relativi ad X_1 ed X_2 , rispettivamente, ed M_t si chiama *momento torcente*. In genere, queste sei caratteristiche coesistono. Tuttavia, per particolari sollecitazioni esterne, si possono ottenere dei casi più semplici, in cui una

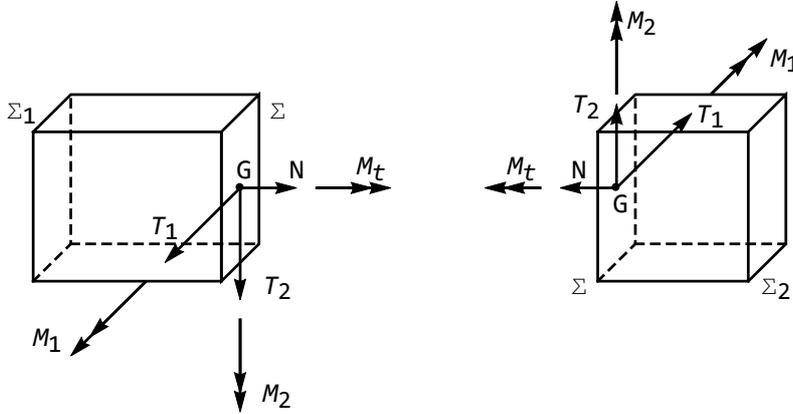


Figura 23.2: Le caratteristiche della sollecitazione interna

sola, o al massimo due, caratteristiche sono diverse da zero, mentre le altre si annullano. A questi casi semplici sono dedicate le prossime lezioni.

23.5 Le caratteristiche della sollecitazione esterna in termini di tensioni

Si noti che è anche possibile esprimere le caratteristiche della sollecitazione esterna in termini di tensioni, anziché di forze superficiali. Basta all'uopo utilizzare il teorema di Cauchy-Poisson, tenendo conto che la normale alla sezione Σ_1 ha coseni direttori $(0, 0, -1)$, mentre la normale alla sezione Σ_2 avrà coseni direttori $(0, 0, 1)$. Sarà quindi:

$$\begin{aligned} p_i^{(1)} &= -\sigma_{i3} \\ p_i^{(2)} &= \sigma_{i3} \end{aligned} \quad (23.12)$$

e quindi le caratteristiche della sollecitazione esterna sono esprimibili come:

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} &= - \int_{\Sigma_1} \sigma_{13} dA \\ F_2^{(1)} &= - \int_{\Sigma_1} \sigma_{23} dA \\ F_3^{(1)} &= - \int_{\Sigma_1} \sigma_{33} dA \\ \mathcal{M}_1^{(1)} &= - \int_{\Sigma_1} x_2 \sigma_{33} dA \\ \mathcal{M}_2^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} x_1 \sigma_{33} dA \end{aligned} \quad (23.13)$$

$$\mathcal{M}_3^{(1)} = - \int_{\Sigma_1} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) \, dA$$

sulla base di sinistra, e:

$$\begin{aligned} F_1^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} \sigma_{13} \, dA \\ F_2^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} \sigma_{23} \, dA \\ F_3^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} \sigma_{33} \, dA \\ \mathcal{M}_1^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} x_2 \sigma_{33} \, dA \\ \mathcal{M}_2^{(2)} &= - \int_{\Sigma_2} x_1 \sigma_{33} \, dA \\ \mathcal{M}_3^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) \, dA \end{aligned} \tag{23.14}$$

sulla base di destra. Le dodici caratteristiche sono riportate in Figura 23.3

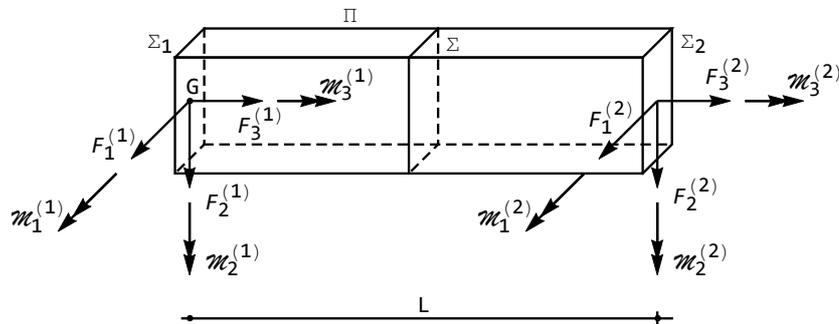


Figura 23.3: Le caratteristiche della sollecitazione esterna sulla trave

La relazione tra caratteristiche della sollecitazione esterna ed interna.

Quando la sezione retta Σ viene scelta all'ascissa $x_3 = L$, essa viene a coincidere con la sezione di destra Σ_2 , e le normali uscenti sono equiverse. Ne segue che le caratteristiche della sollecitazione interna calcolate sulla sezione di destra

coincidono, anche in segno, con le caratteristiche della sollecitazione esterna:

$$\begin{aligned}
 T_1(x_3 = L) &= F_1^{(2)} \\
 T_2(x_3 = L) &= F_2^{(2)} \\
 N(x_3 = L) &= F_3^{(2)} \\
 M_1(x_3 = L) &= \mathcal{M}_1^{(2)} \\
 M_2(x_3 = L) &= \mathcal{M}_2^{(2)} \\
 M_t(x_3 = L) &= \mathcal{M}_3^{(2)}
 \end{aligned}
 \tag{23.15}$$

Se invece la sezione retta Σ viene scelta all'ascissa $x_3 = 0$, essa viene a coincidere con la sezione di sinistra Σ_1 , ma le normali uscenti sono controverse, e quindi le caratteristiche della sollecitazione interna sulla sezione di sinistra sono uguali e contrarie alle caratteristiche della sollecitazione esterna:

$$\begin{aligned}
 T_1(x_3 = 0) &= -F_1^{(1)} \\
 T_2(x_3 = 0) &= -F_2^{(1)} \\
 N(x_3 = 0) &= -F_3^{(1)} \\
 M_1(x_3 = 0) &= -\mathcal{M}_1^{(1)} \\
 M_2(x_3 = 0) &= -\mathcal{M}_2^{(1)} \\
 M_t(x_3 = 0) &= -\mathcal{M}_3^{(1)}
 \end{aligned}
 \tag{23.16}$$

23.6 Il problema debole di De Saint–Venant

Nelle stesse ipotesi geometriche del problema di De Saint–Venant, si consideri ora il seguente:

Problema debole di De Saint–Venant: ricercare gli spostamenti dei punti della trave omogenea B , in ipotesi di materiale isotropo e linearmente elastico, in assenza di forze di massa e di forze superficiali sul mantello laterale Π , soggetta alle tre forze risultanti $\mathbf{F}^{(1)}$ ed ai tre momenti risultanti $\mathcal{M}^{(1)}$ sulla base di sinistra Σ_1 ed alle tre forze risultanti $\mathbf{F}^{(2)}$ ed ai tre momenti risultanti $\mathcal{M}^{(2)}$ sulla base di destra Σ_2 .

Come già detto, di queste dodici quantità solo sei sono effettivamente indipendenti, poichè per l'equilibrio della trave dovranno valere le relazioni (23.10). Si vedrà, nella prossima lezione, che sotto certe ipotesi il problema forte può ricondursi al problema debole, se si accetta il postulato di De Saint–Venant.

Capitolo 24

Il postulato di De Saint–Venant

In questo Capitolo si illustra la particolarizzazione, alla teoria della trave, delle equazioni dell'elasticità fin qui presentate, e si introduce il postulato di De Saint–Venant, che permette di dare validità generale alle sei soluzioni del problema debole.

24.1 L'ipotesi di De Saint–Venant sulle tensioni

Si nota subito, da quanto esposto nel Capitolo precedente, che le tensioni σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} non giocano alcun ruolo nella definizione delle caratteristiche della sollecitazione esterna sulle due basi della trave, o nella definizione delle caratteristiche della sollecitazione interna sulla generica sezione retta. Ciò induce ad ipotizzare che in ciascun punto della trave sia:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0 \quad (24.1)$$

e che quindi lo stato tensionale sia del tipo:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (24.2)$$

Questa assunzione verrà giustificata *a posteriori*, nel senso che si mostrerà che utilizzando la (24.1) si può calcolare una soluzione al problema dell'equilibrio elastico. Poichè il principio di Kirchhoff assicura che essa è anche unica, saremo abilitati a confermare la (24.1). L'interpretazione fisica dell'ipotesi (24.1) è evidente: per esse la trave è ridotta ad un insieme di elementi piani longitudinali che si trasmettono tra loro solo tensioni tangenziali in senso parallelo all'asse della trave, ma non tensioni normali, come illustrato in Figura 24.1.

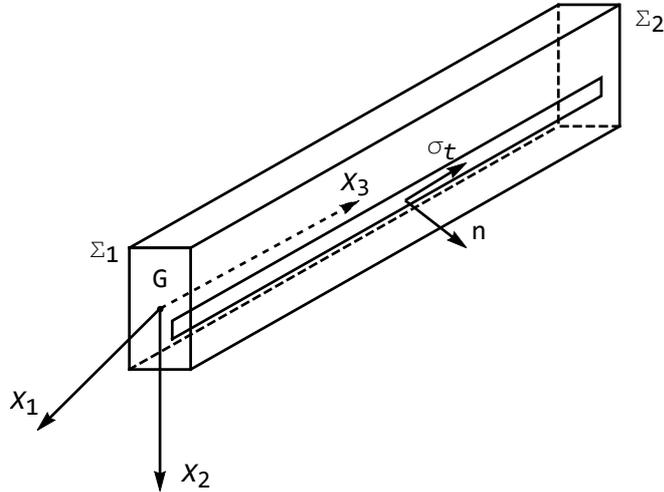


Figura 24.1: Il comportamento della trave alla luce dell'ipotesi sullo stato tensionale

Ed infatti, un qualsiasi elemento piano parallelo all'asse avrà normale definita dai coseni direttori $(n_1, n_2, 0)$ e quindi la tensione normale in un qualsiasi suo punto sarà fornita da:

$$\sigma_n = t_n \cdot n = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 = 0 \quad (24.3)$$

se si suppone valida la (24.1). Si studia ora come si venga a semplificare il problema dell'equilibrio elastico per il solido trave soggetto all'ipotesi (24.1) sullo stato tensionale

Le equazioni indefinite dell'equilibrio

Le equazioni indefinite dell'equilibrio divengono, utilizzando le (24.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (24.4)$$

Ne segue, dalle prime due equazioni, che le tensioni tangenziali non dipendono dalla variabile x_3 , e quindi si riproducono identiche su tutte le sezioni rette. Inoltre, derivando la terza rispetto ad x_3 si giunge a scrivere:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} = 0 \quad (24.5)$$

e quindi la tensione σ_{33} varia al più con legge lineare rispetto ad x_3 .

24.1.1 Le condizioni ai limiti

Occorre scrivere le condizioni ai limiti $\sigma_{ij}n_j = p_i$ in corrispondenza della superficie laterale e di ciascuna delle due basi. La normale alla superficie laterale, per definizione, ha coseni direttori $(n_1, n_2, 0)$, e quindi le condizioni ai limiti si riducono, utilizzando anche le (24.1), alla singola:

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0 \quad (24.6)$$

ossia:

$$\boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (24.7)$$

avendo definito il vettore:

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (24.8)$$

della tensione tangenziale.

Segue dalla (24.7) che in corrispondenza di un punto qualsiasi del contorno della generica sezione retta, la tensione tangenziale è diretta secondo la tangente al contorno.

Sulla base di sinistra, in $x_3 = 0$, i coseni direttori sono $(0, 0, -1)$, e quindi si hanno le tre condizioni:

$$\sigma_{i3} = -p_i^{(1)} \quad (24.9)$$

Infine, sulla base di destra, per $x_3 = L$, i coseni direttori sono $(0, 0, 1)$, e quindi le tre condizioni ai limiti sono:

$$\sigma_{i3} = p_i^{(2)} \quad (24.10)$$

24.1.2 Le leggi di Hooke

Applicando la legge di Hooke:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad (24.11)$$

dallo stato tensionale (24.2) si ottiene lo stato deformativo:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} \\ e_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{E} \\ e_{12} &= 0 \\ e_{13} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} \\ e_{23} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \end{aligned} \quad (24.12)$$

Si noti che tra le tre deformazioni normali esiste la relazione:

$$e_{11} = e_{22} = -\nu e_{33} \quad (24.13)$$

ossia:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\nu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (24.14)$$

24.1.3 Le equazioni di Navier–Cauchy

Si ripercorra il cammino già fatto per ottenere le equazioni dell'equilibrio elastico, come descritto nel Capitolo 19. Partendo quindi dalle equazioni indefinite dell'equilibrio (24.4), si utilizzino le leggi di Hooke inverse, ottenibili facilmente dalle (24.11), giungendo a scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{13}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial e_{23}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial e_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_2} \right) + E \frac{\partial e_{33}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (24.15)$$

Introducendo le relazioni tra deformazioni e derivate degli spostamenti, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} &= 0 \end{aligned} \quad (24.16)$$

Infine, semplificando la terza in base alla (24.14) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} &= 0 \end{aligned} \quad (24.17)$$

Si noti che, nell'ambito della teoria della trave, le equazioni di Navier–Cauchy non dipendono dalle costanti elastiche, e quindi dal materiale di cui è costituita la trave. Posto in tal modo, il problema dell'equilibrio elastico può essere affrontato utilizzando il cosiddetto metodo semi-inverso di De Saint-Venant. In breve, esso si basa sul fatto che una qualsiasi terna di spostamenti (u_1, u_2, u_3)

che soddisfi sia le equazioni di equilibrio sia le condizioni ai limiti deve essere l'unica possibile soluzione del problema della trave, in base al principio di Kirchhoff. Assegnando quindi uno stato tensionale rispettoso delle prescrizioni suddette (tensioni tangenziali costanti lungo l'asse, tensione normale al più lineare lungo l'asse) si ricava lo stato deformativo, tramite le leggi di Hooke, lo stato di spostamento integrando le relazioni deformazioni-spostamenti, e si deducono *a posteriori* le caratteristiche della sollecitazione esterna che causano le assegnate tensioni.

Mentre soddisfare le equazioni di Navier–Cauchy (24.17) non è particolarmente complicato, risulta molto più complesso soddisfare le condizioni ai limiti, e non tanto quella sulla superficie laterale quanto quelle sulle due basi, che dipendono dalle forze applicate e — per il problema forte — dalla loro distribuzione puntuale.

Un postulato, ormai universalmente accettato, e largamente provato da ogni tipo di esperimento, permette di ricondurre il problema forte al problema debole, eliminando alla radice la necessità di esaminare l'effettiva distribuzione delle forze sulle basi.

24.2 Il postulato di De Saint–Venant nella sua forma storica

Il postulato di De Saint–Venant è stato da lui enunciato e commentato in più occasioni. Ad esempio, nella prefazione alla celebre memoria *De la torsion des prismes*, Dunod, Parigi (1855), così scriveva:

Le diverse espressioni fornite nel corso della Memoria per gli spostamenti dei punti dei prismi elastici, per le dilatazioni e le variazioni angolari delle loro parti, le torsioni etc. sono tutte rigorose, allo stesso titolo delle equazioni generali dell'equilibrio elastico, sia in isotropia che in anisotropia, poichè noi le deduciamo con un'analisi esente da ipotesi od omissioni. Esse devono quindi fornire risultati esatti, a condizione che le forze esterne che producono questi effetti siano applicate e distribuite sulle basi, o sezioni estreme dei prismi, esattamente nella maniera prescritta, con la caratteristica di provocare su tutte le sezioni intermedie una distribuzione analoga di sforzi.

Queste espressioni divengono soltanto approssimate nel momento in cui se ne estende l'uso ad altri modi di applicazione e distribuzione delle forze esterne. Il grado di approssimazione non potrà essere precisato — allo stato attuale dell'analisi — ma numerose esperienze, in mancanza di calcoli, fanno ritenere che esso sia notevole. Ad esempio, se si afferra con una tenaglia un estremo di un prisma in caucciù, si vedrà che l'effetto prodotto si estende solo fino ad una piccolissima distanza dal punto di applicazione dell'azione, e che il resto del prisma si comporta come se questa azione non esistesse

affatto. Da ciò, e da una quantità di esperienze simili, si può concludere che forze applicate su una medesima parte di un prisma elastico e che si fanno equilibrio in media, e quindi con risultante e momento risultante nullo, non causano spostamento che in quella parte e in quelle estremamente vicine, senza influenzare percettibilmente le parti del prisma che si trovano un po' al di qua o al di là. Ne segue che tutte le volte che si hanno, verso le estremità di un prisma di una certa lunghezza, forze qualsiasi che stirino il prisma, lo flettano, lo torcano etc., si può sempre rimpiazzare queste forze, con tutta l'approssimazione desiderabile nei riguardi dei loro effetti su tutte le altre parti del prisma, con delle forze staticamente equivalenti o che non ne differiscano che per sistemi in equilibrio, o — in altre parole — con delle forze che abbiano la stessa risultante geometrica e lo stesso momento risultante, e che siano applicate e distribuite nel modo particolare che presuppone la nostra soluzione¹.

e svariati anni dopo così precisava, alla pagina 145 del libro di A. Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, tradotto da M.M. Saint Venant e Flamant, con Note estese di M.M. Saint-Venant, Dunod, Parigi, 1883:

forze staticamente equivalenti, ossia con la stessa risultante e lo stesso momento risultante, producono gli stessi effetti lungo tutto il solido, qualunque sia il loro modo di applicazione e di distribuzio-

¹Les expressions diverses que nous donnons dans le courant de ce Mémoire pour les déplacements des points des prismes élastiques, pour les dilatations et glissements relatifs de leurs parties, les torsions, etc, sont toutes rigoureuses au même titre que les équations générales de l'équilibre d'élasticité, soit égale, soit inégale dans les trois sens, dont nous les déduisons par une analyse exempte d'hypothèses et suppressions. Elles doivent ainsi fournir des résultats *exacts*, à la condition que les forces extérieures qui produisent ces effets soient bien appliquées et distribuées sur les bases ou sections extrêmes des prismes de la manière supposée, ayant pour caractère d'entraîner sur toutes les sections intermédiaires une distribution intérieure semblable.

Elles ne deviennent simplement *approximatives* que dès l'instant où l'on en étend l'usage aux cas d'un autre mode d'application et de distribution des forces extérieures. Le degré de l'approximation ne saurait être précisé dans l'état actuel de l'analyse, mais diverses expériences, à défaut du calcul, font juger qu'il est considérable. Que, par exemple, l'on pince avec une tenaille l'un des bouts d'un prisme en caoutchouc, l'on verra que l'impression produite ne s'étend qu'à une distance fort petite des lignes où l'action s'exerce, et que le reste du prisme se comporte comme si cette action n'existait pas. De ce fait et d'un grand nombre d'autres, on peut conclure que des forces appliquées sur une même partie d'un prisme élastique et qui se font équilibre par son moyen, ou dont la résultante et le moment résultant sont nuls, ne déplacent que les points de cette partie et ceux qui en sont extrêmement voisins, sans agir perceptiblement sur ceux qui se trouvent quelque peu en deçà ou au delà. D'où il suit que toutes les fois qu'il y a, vers les extrémités d'un prisme d'une certaine longueur, des forces quelconques qui l'étendent, le fléchissent, le tordent, etc., on peut toujours les remplacer avec toute l'approximation désirable, quant à leurs effets sur toutes les autres parties, par des forces statiquement *équivalentes* ou n'en différant que par des systèmes en équilibre, autrement dit par des forces ayant même résultante géométrique et même moment résultant, et qui soient appliquées et distribuées de la manière particulière que supposent nos solutions.

ne, eccetto che nel luogo dove esse agiscono, e su porzioni vicine e piccolissime, si da poterle trascurare²

ed ancora, in una nota al paragrafo 28, pagina 174 dello stesso testo:

le soluzioni, anche se, per essere rigorosamente esatte, presuppongono un modo particolare, e mai realizzato, di applicazione e distribuzione delle forze alle estremità della trave che esse stirano, flettono o torcono, si possono nondimeno utilizzare, con tutta l'approssimazione desiderabile, se forze ad esse staticamente equivalenti sono applicate e distribuite in un altro modo su queste estremità: in altri termini, le seconde forze causeranno gli stessi stiramenti, flessioni e torsioni delle prime lungo tutta la trave ch'esse sollecitano, eccetto porzioni piccolissime della sua lunghezza, misurata a partire dai punti dove esse agiscono³.

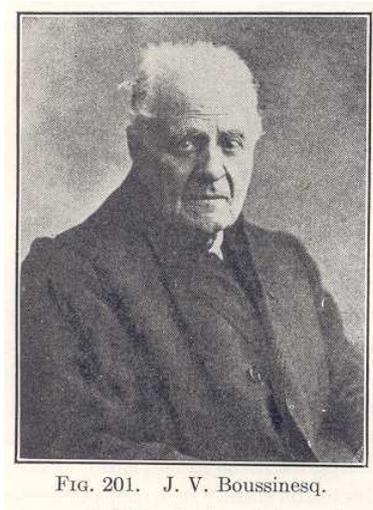


FIG. 201. J. V. Boussinesq.

Figura 24.2: J. Boussinesq

²“... des forces, statiquement équivalentes, ou ayant la même résultante et le même moment résultant, produisent les mêmes effets sur toute la longueur de solides, quel que soit leur mode d'application et de distribution, excepté tout auprès des endroits où elles agissent, ou sur des portions à peine sensibles et dont on peut négliger de tenir compte

³“... les solutions ..., bien qu'elles exigent, pour être rigoureuses, un mode particulier, jamais réalisé, d'application et de distribution des forces aux extrémités des tiges qu'elles étendent, fléchissent ou tordent, conviennent néanmoins, avec toute l'approximation désirable, si des forces qui leur soient statiquement équivalentes sont appliquées, et distribuées d'un autre manière quelconque vers ces extrémités: c'est-à-dire que les dernières forces donneront les mêmes extensions, flexions et torsions que les premières, tout le long de la tige qu'elles sollicitent, en exceptant toutefois des portions très petites de sa longueur, comptées à partir des points où elles agissent ...”

Una generalizzazione ai solidi tridimensionali fu poi subito fornita da Boussinesq nel 1885:

Un sistema equilibrato di forze esterne applicato ad un corpo elastico, i cui punti di applicazione giacciono all'interno di una sfera assegnata, produce deformazioni di grandezza trascurabile a distanze dalla sfera sufficientemente grandi rispetto al suo raggio ⁴

24.3 Conseguenze del postulato

La più importante conseguenza del postulato di De Saint-Venant risiede nella possibilità di disinteressarsi dell'effettiva distribuzione delle forze applicate alle basi, ma di ritenere che solo le *caratteristiche* delle forze stesse siano importanti, ai fini della soluzione del problema della trave. Ed infatti, si consideri un solido

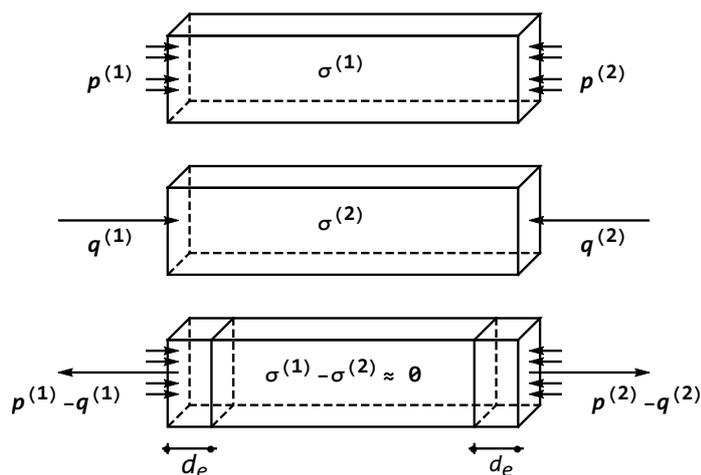


Figura 24.3: Al di là della distanza di estinzione d_e , le tensioni sono trascurabili

trave soggetto alle forze superficiali $\mathbf{p}^{(1)}$ e $\mathbf{p}^{(2)}$ sulle due basi, (Figura 24.3), e siano $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ le tensioni da esse prodotte. Siano poi $\mathbf{q}^{(1)}$ e $\mathbf{q}^{(2)}$ altri due insiemi di forze superficiali, e $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ le tensioni da esse prodotte. Per il principio di sovrapposizione, l'insieme di forze superficiali $\mathbf{p}^{(1)} - \mathbf{q}^{(1)}$ e $\mathbf{p}^{(2)} - \mathbf{q}^{(2)}$ causerà le tensioni $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$. Se ora i due insiemi di forze hanno le stesse caratteristiche, allora la loro differenza sarà un insieme di forze a caratteristiche nulle, e quindi in equilibrio. Ne segue, per il postulato, che ad opportuna distanza d_e dalle basi dovrà essere $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = 0$.

⁴J. Boussinesq *Application des potentiel à l'étude de l'équilibre e des mouvements des solides élastiques* - Gauthier-Villars, Paris 1885

Se ne deduce che due insiemi di forze diverse, applicate alle basi, ma con le stesse caratteristiche, danno luogo alle stesse tensioni, al di là di una certa distanza d_e dalle basi, detta *distanza di estinzione*. In altri termini, la soluzione del problema di De Saint-Venant dipende dalle caratteristiche della sollecitazione, ossia da sei parametri.

Ne segue che se si conoscono sei soluzioni indipendenti per il problema debole, allora tutte le altre possibilità potranno ottenersi tramite sovrapposizione. Nelle prossime Lezioni queste sei soluzioni verranno dedotte utilizzando il metodo semi-inverso, partendo dalle seguenti ipotesi sullo stato tensionale:

- Caso 1 - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ e σ_{33} costante
- Caso 2 - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ e σ_{33} variabile linearmente secondo x_1
- Caso 3 - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ e σ_{33} variabile linearmente secondo x_2
- Caso 4 - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}$
- Caso 5 - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ e σ_{33} variabile linearmente secondo x_1 ed x_3
- Caso 6 - $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ e σ_{33} variabile linearmente secondo x_2 ed x_3

24.4 Le formulazioni energetiche del postulato di De Saint-Venant

Sia la versione originaria del postulato di De Saint Venant che la formulazione di Boussinesq, mentre utilissimi da un punto di vista pratico, non possono essere accettati in un ambito teorico. Ed infatti, come puntualizzato da Fichera:

Poichè la classica teoria lineare dell'Elasticità, aderente o meno che possa essere alla realtà fisica, è una teoria matematica, cioè rigorosamente ipotetico-deduttiva, è evidente che il principio di Saint-Venant non può essere accettato come postulato, ma deve essere dimostrato matematicamente, come conseguenza di tutta l'assiomatica che sta alla base di quella teoria. Naturalmente, questo presuppone una

precisa formulazione matematica del principio stesso, che indichi chiaramente quello che occorre dimostrare⁵.



Figura 24.4: Gaetano Fichera

Inoltre, si è mostrato che travi a sezione retta sottile possono essere caricate agli estremi da forze in equilibrio i cui effetti si risentono lungo tutta la trave, così fornendo un controesempio all'enunciato classico del postulato. E d'altro canto R.von Mises ha puntualizzato che in presenza di forze tangenziali il postulato di Boussinesq cade in difetto. Ne segue la necessità di riformulare il postulato, specificando con attenzione il modo in cui le forze sono applicate, arrivando così alla versione di Sternberg del 1954, rigorosamente enunciata e provata, ma ben al di là dei limiti del corso. Si veda, per una estensiva discussione, il libro di P.Villaggio *Qualitative Methods in Elasticity*, Noordhoff 1977.

Un approccio diverso allo stesso problema è stato suggerito da O. Zanaboni in una serie di memorie del 1937, *Dimostrazione generale del principio di De Saint Venant*, Atti Accademia Lincei 25 (1937), pagg. 117–121, *Valutazione dell'errore massimo cui dà luogo l'applicazione del principio di De Saint Venant*, Atti Accademia Lincei 25 (1937), pagg. 595–601 e *Sull'approssimazione dovuta al principio del De Saint Venant nei solidi prismatici isotropi*, Atti Accademia Lincei 26 (1937), pagg. 340–345. Secondo Zanaboni, non ha senso occuparsi dello smorzarsi *puntuale* delle deformazioni, ma occorre calcolare l'andamento globale delle deformazioni, esaminando l'ammontare dell'energia di deformazione posseduta da porzioni di solido via via più lontane dalle basi. L'intuizione era giusta, i tentativi di formalizzazione matematica erano inaccettabili, e si è dovuto attendere la sistemazione definitiva di Richard Toupin nel 1965 per ottenere un teorema matematicamente ineccepibile che può a buon diritto essere considerato la controparte moderna del postulato di De Saint-Venant:

⁵G.Fichera, *Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica Classica* pag. 50, Quaderni del Consiglio Nazionale delle Ricerche 1985

24.4.1 Il teorema di Toupin

Si indichi con $(\mathbf{u}', \mathbf{e}', \boldsymbol{\sigma}')$ la soluzione del problema debole di De Saint-Venant, e con $(\mathbf{u}'', \mathbf{e}'', \boldsymbol{\sigma}'')$ la soluzione del corrispondente problema forte. Il campo di spostamenti $\mathbf{u} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}''$ conduce allora ad uno stato tensionale $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}''$ nullo sul mantello laterale, ed a caratteristiche nulle sulle due basi.

Se ora B indica la trave in esame, sia B_{x_3} la porzione di trave compresa tra la sezione retta all'ascissa x_3 e la sezione retta di mezzeria $x_3 = L/2$, e sia L_{x_3} l'energia di deformazione contenuta in B_{x_3} :

$$L_{x_3} = \frac{1}{2} \int_{B_{x_3}} c_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dV \quad (24.18)$$

Si noti che si è supposto il materiale anisotropo. Comunque, poichè il potenziale elastico è definito positivo, l'energia elastica L_{x_3} sarà una funzione non crescente di x_3 , e dovrà essere, per ovvi motivi $L_{L/2} = 0$. Il teorema di Toupin fornisce indicazioni su come L_{x_3} decresce al tendere di x_3 da 0 (metà trave) a $x_3 = L/2$ (volume nullo):

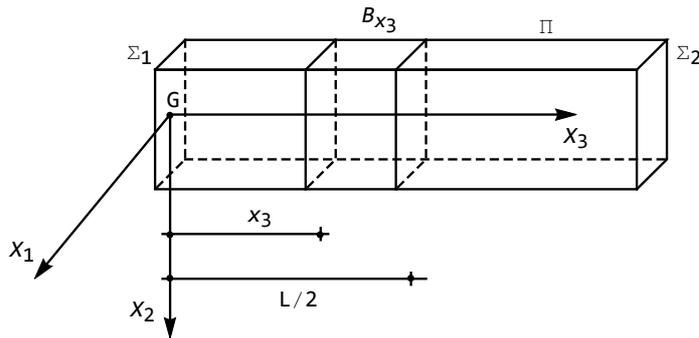


Figura 24.5: Il cilindro identificato dalle sezioni rette a distanza x_3 ed $L/2$ dalla base di sinistra

Teorema 15. (Toupin) - Nelle ipotesi introdotte, l'energia elastica L_{x_3} soddisfa la disuguaglianza:

$$L_{x_3} \leq L_0 \exp \left[-\frac{(x_3 - s)}{k(s)} \right] \quad (24.19)$$

per $x_3 \geq 0$, $s > 0$, e:

$$k(s) = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho \omega_0^2(s)}} \quad (24.20)$$

con:

$$\mu^* = \frac{\mu_M^2}{\mu_m} \quad (24.21)$$

e μ_m e μ_M sono il minimo ed il massimo modulo elastico. Infine, ρ è la densità di massa del materiale di cui è costituita la trave, ed $\omega_0(s)$ può identificarsi con la prima frequenza libera di vibrazione di un cilindro di spessore s e base Σ_1 , composto dello stesso materiale della trave. Il parametro s può essere variato, in modo da ottimizzare la quantità $k(s)$.

Il teorema — la cui dimostrazione va ben al di là dei limiti del presente testo — è contenuto in R. Toupin *Saint-Venant's principle*, Arch. Rat. Mech. & Anal. 18, pagg. 293-304 (1965), e può essere letto nella sezione Ricerche del sito <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk>. Una sua dimostrazione dettagliata si può consultare nel libro di D.İeşan, *Saint-Venant problem*, Springer Lecture Notes in Mathematics.

Capitolo 25

Sforzo assiale e flessione

Si studiano in questo Capitolo i casi di sollecitazione caratterizzati dall'assenza di tensioni tangenziali, e quindi dalla presenza della sola tensione normale σ_{33} . Più in particolare, si studieranno i casi in cui σ_{33} è costante, e quelli in cui varia linearmente con x_1 o con x_2 .

25.1 Lo sforzo assiale

Si esamini un solido del tipo trave, e si ponga l'origine del riferimento nel baricentro della sezione di sinistra.

Si ipotizzi che le tensioni all'interno della trave, a distanza superiore a quella di estinzione, siano date da:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (25.1)$$

e che $\sigma_{33} = \sigma_0$ sia costante.

Nello spirito del metodo semi-inverso, da questa ipotizzata distribuzione di tensioni si vuol dedurre la corrispondente distribuzione di deformazione e di spostamenti, e si vuol sapere a quale caratteristiche della sollecitazione esterna sulle basi essa corrisponda.

In altri termini, invece di assegnare le forze applicate alle basi, e ricavare le tensioni, si segue la via inversa, partendo dalle tensioni, e ricavando *a posteriori* quell'insieme di caratteristiche che producono le assegnate tensioni.

Dalla (25.1) si può trarre lo stato deformativo, utilizzando le leggi di Hooke, come dedotte nel Capitolo precedente:

$$e_{11} = -\frac{\nu}{E}\sigma_0 \quad (25.2)$$

$$e_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_0 \quad (25.3)$$

$$e_{33} = \frac{\sigma_0}{E} \quad (25.4)$$

$$e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0 \quad (25.5)$$

e quindi esistono solo deformazioni normali. Per ricavare gli spostamenti, si parta dalle (25.2–25.4), ottenendo:

$$\begin{aligned} e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 &\implies u_1 = -\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_1 + \phi_1(x_2, x_3) \\ e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 &\implies u_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_2 + \phi_2(x_1, x_3) \\ e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 &\implies u_3 = \frac{\sigma_0}{E}x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (25.6)$$

Sostituendo nelle altre tre equazioni (25.5) si ha:

$$\begin{aligned} e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 &\implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 &\implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0 &\implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (25.7)$$

e queste equazioni, unite alle ovvie relazioni:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = 0 \quad (25.8)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = 0 \quad (25.9)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} = 0 \quad (25.10)$$

portano a concludere che il campo di spostamenti $\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$ genera deforma-

zioni nulle, e quindi è un moto rigido. Supponendo, come usuale, che i vincoli siano tali da impedire moti rigidi, la terna definitiva di spostamenti connessi con le (25.2–25.5) sarà allora:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_1 \\ u_2 &= -\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_2 \\ u_3 &= \frac{\sigma_0}{E}x_3 \end{aligned} \quad (25.11)$$

Poichè le (25.11) sono lineari, le equazioni di Cauchy–Navier del Capitolo 24 sono identicamente soddisfatte. Inoltre, poichè le tensioni tangenziali sono

nulle, soddisfatta è anche l'unica condizione ai limiti dello stesso Capitolo 24, da imporre sulla superficie laterale. Ne segue che la distribuzione di tensioni (25.1) dà luogo ad una possibile soluzione del problema della trave. Vediamo quali caratteristiche della sollecitazione esterna applicate alle basi producono la distribuzione (25.1) delle tensioni.

Le caratteristiche della sollecitazione esterna sulla faccia di destra sono fornite, per definizione, da:

$$\begin{aligned}
 F_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{13} \, dA = 0 \\
 F_2^{(2)} &= \int_A \sigma_{23} \, dA = 0 \\
 F_3^{(2)} &= \int_A \sigma_{33} \, dA = \sigma_0 A \\
 M_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{33} x_2 \, dA = \sigma_0 \int_A x_2 \, dA = 0 \\
 M_2^{(2)} &= - \int_A \sigma_{33} x_1 \, dA = -\sigma_0 \int_A x_1 \, dA = 0 \\
 M_3^{(2)} &= \int_A (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) \, dA = 0
 \end{aligned}
 \tag{25.12}$$

dove si è fatto uso dell'annullarsi del momento statico rispetto ad assi baricentrici.

Analogamente, si ha, sulla faccia di sinistra:

$$\begin{aligned}
 F_1^{(1)} &= F_2^{(1)} = 0 \\
 F_3^{(1)} &= - \int_A \sigma_{33} \, dA = -\sigma_0 A \\
 M_1^{(1)} &= M_2^{(1)} = M_3^{(1)} = 0
 \end{aligned}
 \tag{25.13}$$

Quindi, le caratteristiche della sollecitazione esterna sulle due basi si riducono a due forze uguali e contrarie:

$$\begin{aligned}
 F_3^{(2)} &= F_3 = \sigma_0 A \\
 F_3^{(1)} &= -F_3
 \end{aligned}
 \tag{25.14}$$

e la sollecitazione si chiama *sollecitazione semplice di sforzo assiale di trazione* (se $F_3 > 0$) o di *compressione* (se $F_3 < 0$).

L'unica caratteristica di sollecitazione interna è lo sforzo normale N , positivo se F_3 è positiva, negativo se F_3 è negativa. Esso è costante lungo la trave, e vale:

$$N = \int_A \sigma_{33} \, dA = \sigma_0 A
 \tag{25.15}$$

da cui:

$$\sigma_0 = \sigma_{33} = \frac{N}{A}
 \tag{25.16}$$

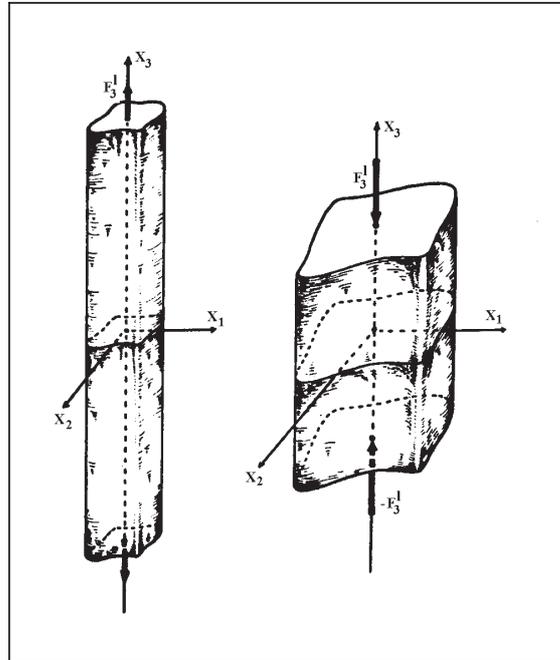


Figura 25.1: La sollecitazione di trazione e compressione (adattato da G. Fichera *Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica classica*)

Sostituendo nella terna di spostamenti si ha infine:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\nu \frac{N}{EA} x_1 \\ u_2 &= -\nu \frac{N}{EA} x_2 \\ u_3 &= \frac{N}{EA} x_3 \end{aligned} \quad (25.17)$$

25.1.1 L'energia di deformazione

L'energia di deformazione L di un tronco di trave lungo l , soggetta a sforzo normale può agevolmente calcolarsi in base alla definizione:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dv = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 dv = \frac{N^2}{2EA^2} \int_V dv = \frac{N^2 l}{2EA} \quad (25.18)$$

Un'utile espressione alternativa si ottiene esprimendo l'energia elastica in funzione degli spostamenti:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dv = \frac{E}{2} \int_V e_{33}^2 dv = \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{du_3}{dx_3} \right)^2 dx_3 \quad (25.19)$$

25.2 Flessione retta nel piano

Si esamini un solido del tipo trave, si ponga l'origine del riferimento nel baricentro della sezione di sinistra, e si orientino gli assi X_1 ed X_2 secondo gli assi principali di inerzia della sezione, portandoli quindi a coincidere con gli assi centrali di inerzia.

Si ipotizzi che le tensioni all'interno della trave, a distanza superiore a quella di estinzione, siano date da:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (25.20)$$

e che stavolta $\sigma_{33} = cx_2$, ossia che la tensione vari linearmente secondo l'asse X_2 .

25.2.1 La deduzione degli spostamenti

Dalla (25.20) si può trarre lo stato deformativo:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{\nu}{E}cx_2 \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E}cx_2 \\ e_{33} &= \frac{c}{E}x_2 \\ e_{12} &= e_{13} = e_{23} = 0 \end{aligned} \quad (25.21)$$

e quindi anche in questo caso esistono solo deformazioni normali. Gli spostamenti sono allora ricavabili con un procedimento simile a quello già illustrato per il caso dello sforzo normale. Partendo dalle espressioni delle deformazioni normali si ha:

$$\begin{aligned} e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 &\implies u_1 = -\frac{\nu}{E}cx_1x_2 + \phi_1(x_2, x_3) \\ e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 &\implies u_2 = -\frac{\nu}{2E}cx_2^2 + \phi_2(x_1, x_3) \\ e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 &\implies u_3 = \frac{c}{E}x_2x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (25.22)$$

e sostituendo nelle altre tre equazioni (25.21) si ha:

$$\begin{aligned} e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 &\implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} - \frac{\nu}{E}cx_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 &\implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0 &\implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} + \frac{c}{E}x_3 \right) = 0 \end{aligned} \quad (25.23)$$

Dalla prima e dalla terza si ricavano le derivate della ϕ_2 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} &= \frac{\nu}{E} c x_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} &= -\frac{c}{E} x_3 - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2}\end{aligned}\quad (25.24)$$

Dalla prima si ottiene, integrando:

$$\phi_2 = \frac{\nu}{2E} c x_1^2 + \psi_2(x_1, x_3) \quad (25.25)$$

ed infine, dalla seconda:

$$\psi_2 = -\frac{c}{2E} x_3^2 + \chi_2(x_1, x_3) \quad (25.26)$$

In definitiva, quindi, si ha una terna di spostamenti pari a:

$$\begin{aligned}u_1 &= -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 + \phi_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{2E} c x_2^2 + \frac{\nu}{2E} c x_1^2 - \frac{c}{2E} x_3^2 + \chi_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= \frac{c}{E} x_2 x_3 + \phi_3(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (25.27)$$

Sarà ora possibile verificare che l'annullarsi delle tre deformazioni taglianti implica:

$$\begin{aligned}e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \chi_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \right) = 0\end{aligned}\quad (25.28)$$

portando a concludere che il campo di spostamenti $\phi^* = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \chi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$ genera deformazioni nulle, e quindi è un moto rigido. Supponendo, come usuale, che i vincoli siano tali da impedire moti rigidi, la terna definitiva di spostamenti connessi con le (25.20) sarà allora:

$$\begin{aligned}u_1 &= -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 \\ u_2 &= -\frac{c\nu}{2E} \left(x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_1^2 \right) \\ u_3 &= \frac{c}{E} x_2 x_3\end{aligned}\quad (25.29)$$

25.2.2 La deduzione delle caratteristiche

Le caratteristiche della sollecitazione esterna sono fornite da:

$$\begin{aligned}
 F_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{13} \, dA = 0 \\
 F_2^{(2)} &= \int_A \sigma_{23} \, dA = 0 \\
 F_3^{(2)} &= \int_A \sigma_{33} \, dA = c \int_A x_2 \, dA = 0 \\
 \mathcal{M}_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{33} x_2 \, dA = c \int_A x_2^2 \, dA = cI_{11} \\
 \mathcal{M}_2^{(2)} &= - \int_A \sigma_{33} x_1 \, dA = -c \int_A x_1 x_2 \, dA = 0 \\
 \mathcal{M}_3^{(2)} &= \int_A (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) \, dA = 0
 \end{aligned} \tag{25.30}$$

dove si è fatto uso dell'annullarsi del momento statico rispetto ad assi baricentrici e del momento centrifugo rispetto a due assi principali di inerzia. Inoltre l'integrale:

$$I_{11} = \int_A x_2^2 \, dA \tag{25.31}$$

è il momento di inerzia della sezione retta rispetto all'asse X_1 .

Analogamente, si ha, sulla faccia di sinistra:

$$F_1^{(1)} = F_2^{(1)} = F_3^{(1)} = \mathcal{M}_2^{(1)} = \mathcal{M}_3^{(1)} = 0 \tag{25.32}$$

$$\mathcal{M}_1^{(1)} = -\mathcal{M}_1^{(2)} = -cI_{11} \tag{25.33}$$

Quindi, le caratteristiche della sollecitazione esterna sulle due basi si riducono a due coppie uguali e contrarie:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1^{(2)} &= \mathcal{M}_1 = cI_{11} \\
 \mathcal{M}_1^{(1)} &= -\mathcal{M}_1
 \end{aligned} \tag{25.34}$$

e la sollecitazione si chiama *sollecitazione semplice di flessione*, o anche *flessione retta*, relativa all'asse X_1

L'unica caratteristica di sollecitazione interna è il *momento flettente* M_1 , costante lungo l'asse della trave, e pari a:

$$M_1 = \int_A \sigma_{33} x_2 \, dA = cI_{11} \tag{25.35}$$

da cui:

$$c = \frac{M_1}{I_{11}} \tag{25.36}$$

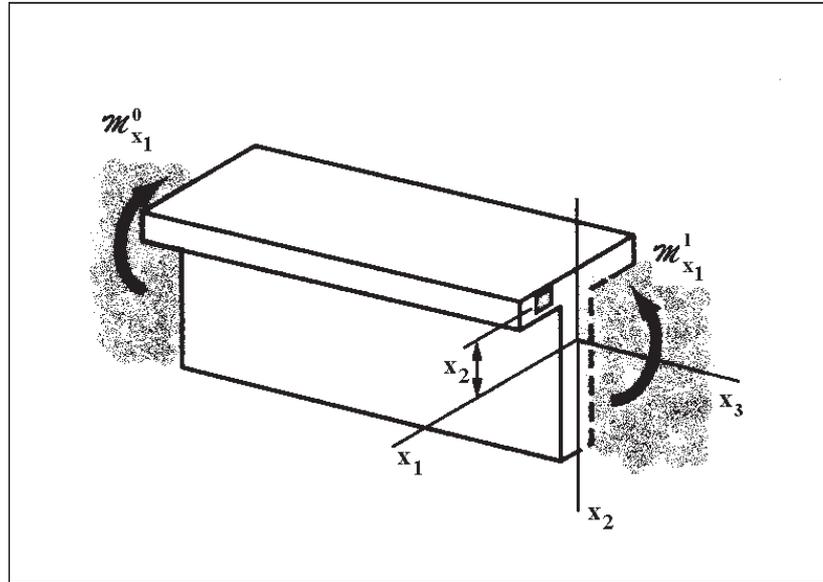


Figura 25.2: Flessione nel piano

ed infine:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_{11}} x_2 \quad (25.37)$$

E' questa la fondamentale formula di Navier: essa assicura che le tensioni si annullano sull'asse X_1 , sono costanti in corrispondenza di ogni corda parallela all'asse X_1 , proporzionali alla distanza da questo. Per $M_1 > 0$ le tensioni sono positive, ossia di trazione, per $x_2 > 0$, negative, ossia di compressione, per $x_2 < 0$, come illustrato in Figura 25.3:

Osservando la trave disposta con l'asse X_3 orizzontale e l'asse X_2 verticale ed orientato verso il basso, il momento flettente è positivo se le due coppie applicate M_1 sono dirette in senso orario sulla estremità di sinistra ed in senso antiorario su quella di destra, e le tensioni che ne derivano sono positive al di sotto dell'asse neutro X_1 , e negative al di sopra. Si spiega così la dizione comune, secondo cui in una trave ad asse orizzontale il momento flettente positivo tende le fibre inferiori e comprime quelle superiori¹.

Di basilare importanza è la seguente:

Definizione 9. *Il piano su cui si annullano gli spostamenti si dice piano neutro, e la traccia di tale piano sulla sezione retta si dice asse neutro. Ne segue, in*

¹V. Franciosi, *Fondamenti di Scienza delle Costruzioni* Vol. II, pag. 137, Liguori, Napoli, 1987

questo caso, che il piano neutro coincide con il piano (X_1, X_3) , e l'asse neutro coincide con l'asse X_1

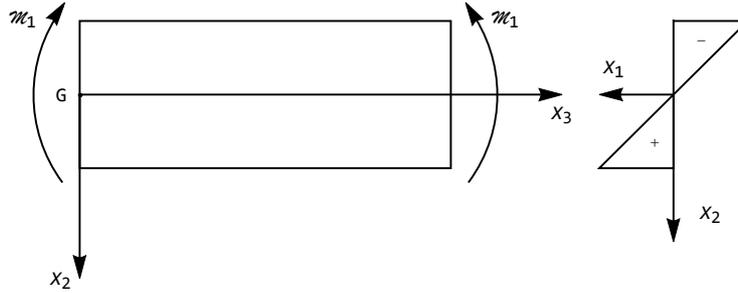


Figura 25.3: Momenti flettenti positivi e diagramma di tensioni alla Navier

25.2.3 Analisi degli spostamenti

Utilizzando la (25.36), gli spostamenti da flessione si scrivono:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2) = -\frac{M_1\nu}{EI_{11}}x_1x_2 \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2, x_3) = -\frac{M_1\nu}{2EI_{11}}\left(x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_1^2\right) \\ u_3 &= u_3(x_2, x_3) = \frac{M_1}{EI_{11}}x_2x_3 \end{aligned} \quad (25.38)$$

Le sezioni rette

Si consideri ora un punto A , di coordinate (x_1, x_2, x_3) , e si deducano le coordinate (ξ_1, ξ_2, ξ_3) del suo trasformato A' :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + u_1 = x_1 - \frac{M_1\nu}{EI_{11}}x_1x_2 \\ \xi_2 &= x_2 + u_2 = x_2 - \frac{M_1\nu}{2EI_{11}}\left(x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_1^2\right) \\ \xi_3 &= x_3 + u_3 = x_3 + \frac{M_1}{EI_{11}}x_2x_3 \end{aligned} \quad (25.39)$$

Quindi, i punti della sezione retta, di equazione $x_3 = k$, si troveranno, a deformazione avvenuta, sulla superficie di equazione:

$$\xi_3 = k \left(1 + \frac{M_1}{EI_{11}}x_2\right) = k \left[1 + \frac{M_1}{EI_{11}}(\xi_2 - u_2)\right] \quad (25.40)$$

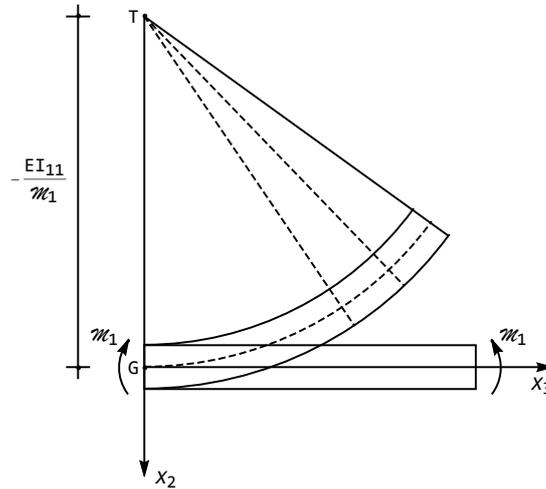


Figura 25.4: La planeità delle sezioni rette

In prima approssimazione si può trascurare u_2 rispetto ad x_2 , e quindi confondere x_2 con ξ_2 , e l'equazione precedente diviene:

$$\xi_3 = k \left(1 + \frac{M_1}{EI_{11}} \xi_2 \right) \quad (25.41)$$

È questa l'equazione di un piano, e si giustifica l'affermazione che *nella sollecitazione di flessione le sezioni rette si conservano piane*. Inoltre, la traccia del piano di equazione (25.41) sul piano (X_2, X_3) interseca l'asse X_2 nel punto T di coordinate $(0, -EI_{11}/M_1)$, come illustrato in Figura 25.4 ed in Figura 25.5. Poiché quanto detto non dipende da k , e quindi è valido per qualsiasi sezione retta, si può concludere che a seguito della deformazione i punti della generica sezione retta apparterranno al fascio di piani il cui sostegno è la retta passante per T ed ortogonale al piano (X_2, X_3) . La quantità $r = \frac{-EI_{11}}{M_1}$ si dice *raggio di curvatura*, ed il suo inverso:

$$\rho = \frac{1}{r} = -\frac{M_1}{EI_{11}} \quad (25.42)$$

è detta *curvatura*. Si può quindi concludere che le rette del piano (X_1, X_3) , e quindi anche l'asse X_3 , si trasformano in archi di cerchio.

Le deformazioni nel piano

Le sezioni rette di equazione $x_3 = k$ restano piane, come si è appena visto, ma ciò non significa che non esistano deformazioni nel piano delle sezioni rette

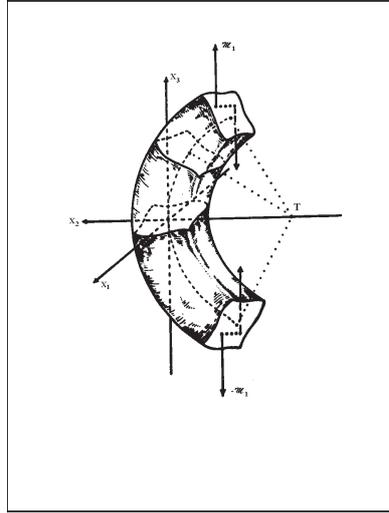


Figura 25.5: La planeità delle sezioni rette (adattato da G. Fichera *Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica classica*)

stesse. Ed infatti, si consideri il piano di equazione $x_1 = h$, i cui punti si portano, a deformazione avvenuta, sulla superficie di equazione:

$$\xi_1 = x_1 + u_1 = h \left(1 - \nu \frac{M_1}{EI_{11}} x_2 \right) \approx h \left(1 - \nu \frac{M_1}{EI_{11}} \xi_2 \right) \quad (25.43)$$

Nell'ordine di approssimazione che ha condotto a confondere x_2 con ξ_2 la precedente rappresenta ancora un piano, parallelo all'asse X_3 , la cui traccia sulla generica sezione retta interseca l'asse X_2 in un punto T' di coordinate $\left(0, \frac{EI_{11}}{\nu M_1} \right)$. La quantità $r' = \frac{EI_{11}}{\nu M_1}$ è ancora un *raggio di curvatura*, ed il suo inverso $\rho' = \nu \rho$ è detto *curvatura anticlastica*. Complessivamente, un tronco di trave soggetto a flessione si deforma come illustrato in Figura 25.6.

L'asse

Si consideri l'asse della trave, di equazione $x_1 = x_2 = 0$. A seguito della deformazione, i suoi punti subiranno gli spostamenti:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= -\frac{M_1}{2EI_{11}} x_3^2 \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (25.44)$$

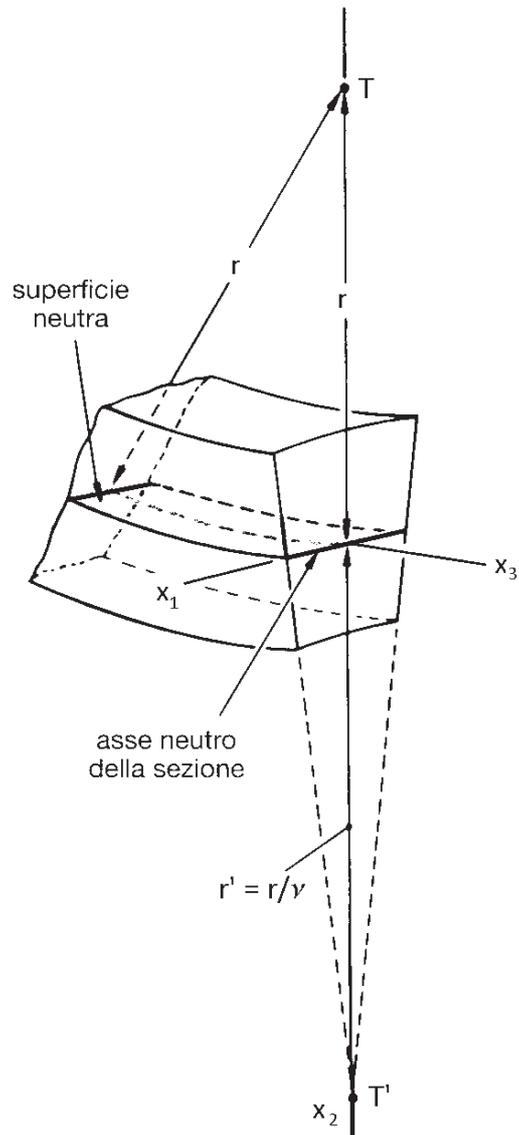


Figura 25.6: La deformazione di un tronco di trave soggetto a flessione

Pertanto l'asse si trasforma in una parabola, di curvatura:

$$\chi = \frac{\frac{d^2 u_2}{dx_3^2}}{\left(1 + \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (25.45)$$

D'altro canto, nella solita ipotesi di piccoli gradienti di spostamento è lecito approssimare ad 1 il denominatore, ritrovando la curvatura (25.42):

$$\chi \approx \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = -\frac{M_1}{EI_{11}} = \rho \quad (25.46)$$

Sono utili le due seguenti:

Definizione 10. *Il piano che contiene la deformata dell'asse si chiama piano di flessione, ed in questo caso coincide con il piano (X_2, X_3) . La traccia del piano di flessione sulla sezione retta, si chiama asse di flessione, ed in questo caso coincide con l'asse X_2 .*

Definizione 11. *Il piano ortogonale all'asse momento della coppia applicata si chiama piano di sollecitazione, ed in questo caso coincide con il piano (X_2, X_3) . La traccia del piano di sollecitazione sulla sezione retta si chiama asse di sollecitazione, ed in questo caso coincide con l'asse X_2 .*

25.2.4 L'energia di deformazione

L'energia di deformazione L di un tronco di trave lungo l , soggetta a flessione nel piano, può agevolmente calcolarsi in base alla definizione:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dv = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 dv = \frac{M_1^2}{2EI_{11}^2} \int_0^l \int_{\Sigma} x_2^2 dA dx_3 = \frac{M_1^2 l}{2EI_{11}} \quad (25.47)$$

Un'utile espressione alternativa si ottiene anche in questo caso esprimendo l'energia elastica in funzione degli spostamenti, utilizzando la (25.46):

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dv = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 dv = \frac{EI_{11}}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 u_2}{dx_3^2}\right)^2 dx_3 \quad (25.48)$$

25.3 Flessione retta fuori dal piano

Analogamente al caso precedente può trattarsi il caso in cui la tensione normale σ_{33} sia l'unica componente di tensione presente, e che sia distribuita con legge

lineare lungo l'asse X_1 . E' questa la terza sollecitazione semplice di De Saint-Venant, per cui quindi:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (25.49)$$

con $\sigma_{33} = cx_1$.

25.3.1 La deduzione degli spostamenti

Ripetendo i passaggi analitici già illustrati per la sollecitazione semplice di flessione nel piano si ottengono le deformazioni:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{\nu}{E}cx_1 \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E}cx_1 \\ e_{33} &= \frac{c}{E}x_1 \\ e_{12} &= e_{13} = e_{23} = 0 \end{aligned} \quad (25.50)$$

che in termini di derivate di spostamenti si scrivono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= -\frac{\nu}{E}cx_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\frac{\nu}{E}cx_1 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{c}{E}x_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (25.51)$$

Le prime tre condizioni forniscono:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{2E}cx_1^2 + \phi_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{E}cx_1x_2 + \phi_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= \frac{c}{E}x_1x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (25.52)$$

che utilizzate nella quarta condizione conducono a scrivere:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} - \frac{\nu c}{E}x_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = 0 \implies \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} = \frac{\nu c}{E}x_2 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \implies \phi_1 = \frac{\nu c}{2E}x_2^2 + \psi_1(x_2, x_3) \quad (25.53)$$

Ne segue che ora la prima componente di spostamento si scriverà:

$$u_1 = -\frac{\nu}{2E}cx_1^2 + \frac{\nu}{2E}x_2^2 + \psi_1(x_2, x_3) \quad (25.54)$$

Introducendo anche questa espressione nella quinta condizione si ha:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \frac{c}{E}x_3 + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} = 0 \implies \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} = -\frac{c}{E}x_3 - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \implies \psi_1 = -\frac{c}{2E}x_3^2 + \chi_1(x_2, x_3) \quad (25.55)$$

e quindi la terna di spostamenti diviene:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{2E}cx_1^2 + \frac{\nu c}{2E}x_2^2 - \frac{c}{2E}x_3^2 + \chi_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{E}cx_1x_2 + \phi_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= \frac{c}{E}x_1x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (25.56)$$

E' possibile ora verificare che il campo di spostamenti (χ_1, ϕ_2, ϕ_3) non causa deformazioni, e quindi si potrà assumere la terna di spostamenti:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{c\nu}{2E} \left(x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_2^2 \right) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{E}cx_1x_2 \\ u_3 &= \frac{c}{E}x_1x_3 \end{aligned} \quad (25.57)$$

25.3.2 La deduzione delle caratteristiche

Applicando le definizioni di caratteristiche di sollecitazione esterna si ottiene, ponendo l'origine nel baricentro ed orientando gli assi secondo le direzioni centrali di inerzia

$$\begin{aligned} F_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{13} \, dA = 0 \\ F_2^{(2)} &= \int_A \sigma_{23} \, dA = 0 \\ F_3^{(2)} &= \int_A \sigma_{33} \, dA = c \int_A x_1 \, dA = 0 \\ \mathcal{M}_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{33}x_2 \, dA = c \int_A x_1x_2 \, dA = 0 \\ \mathcal{M}_3^{(2)} &= \int_A (\sigma_{23}x_1 - \sigma_{13}x_2) \, dA = 0 \\ \mathcal{M}_2^{(2)} &= - \int_A \sigma_{33}x_1 \, dA = -c \int_A x_1^2 \, dA = -cI_{22} \end{aligned} \quad (25.58)$$

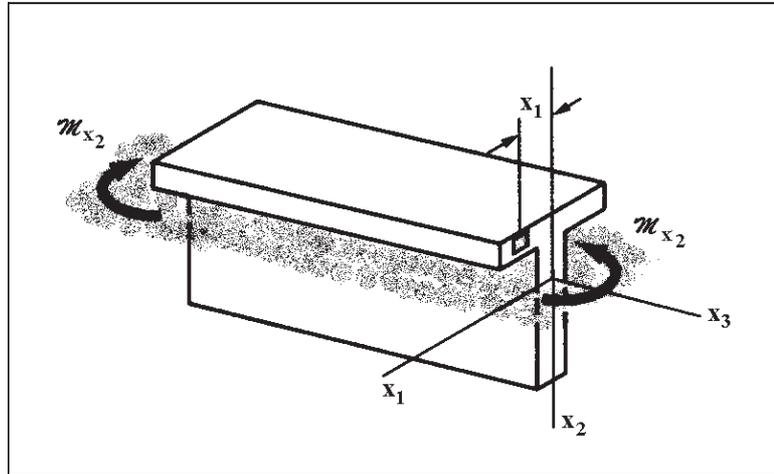


Figura 25.7: La flessione fuori del piano

dove l'integrale:

$$I_{22} = \int_A x_1^2 dA \quad (25.59)$$

è il momento di inerzia della sezione retta rispetto all'asse verticale x_2 .

Analogamente, sulla faccia di sinistra si annullano tutte le c.s.e. a parte la coppia risultante $\mathcal{M}_2^{(1)}$:

$$F_1^{(1)} = F_2^{(1)} = F_3^{(1)} = \mathcal{M}_1^{(1)} = \mathcal{M}_3^{(1)} = 0; \quad (25.60)$$

$$\mathcal{M}_2^{(1)} = -\mathcal{M}_2^{(2)} = cI_{22} \quad (25.61)$$

Quindi, le caratteristiche della sollecitazione esterna sulle due basi si riducono a due coppie uguali e contrarie:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^{(2)} &= \mathcal{M}_2 = -cI_{22} \\ \mathcal{M}_2^{(1)} &= -\mathcal{M}_2 \end{aligned} \quad (25.62)$$

e la sollecitazione si chiama *sollecitazione semplice di flessione*, o anche *flessione retta*, relativa all'asse x_2 .

L'unica caratteristica di sollecitazione interna è il *momento flettente* M_2 :

$$M_2 = - \int_A \sigma_{33} x_1 dA = -cI_{22} \quad (25.63)$$

da cui:

$$c = - \frac{M_2}{I_{22}} \quad (25.64)$$

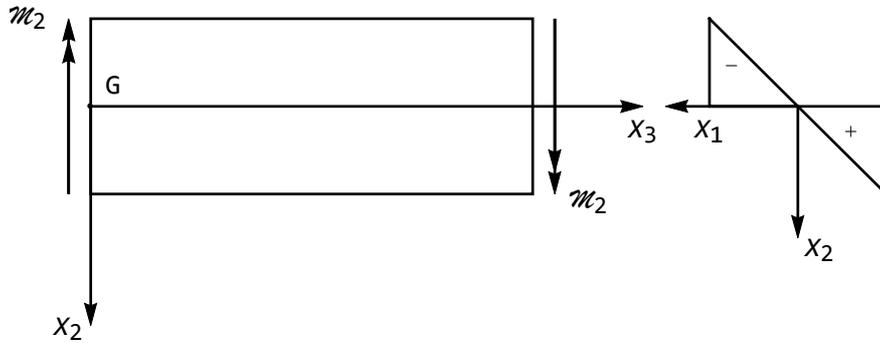


Figura 25.8: Momenti flettenti positivi per la flessione fuori dal piano

ed infine:

$$\sigma_{33} = -\frac{M_2}{I_{22}}x_1 \quad (25.65)$$

Si è giunti quindi ad una formula analoga alla *formula di Navier*: essa assicura che le tensioni si annullano sull'asse X_2 , sono costanti in corrispondenza di ogni corda parallela all'asse X_2 , proporzionali alla distanza da questo. Per $M_2 > 0$ le tensioni sono positive, ossia di trazione, per $x_1 < 0$, negative, ossia di compressione, per $x_1 > 0$. In questo caso, quindi, il piano medio è il piano $X_2 - X_3$, mentre l'asse neutro coincide con l'asse X_2 .

25.3.3 Analisi degli spostamenti

E' possibile dimostrare che anche in questo caso le sezioni rette si trasformano in piani, e quindi è preservata la planeità delle sezioni rette. Inoltre, l'asse della trave si tramuta in una curva contenuta nel piano $X_1 - X_3$, che quindi è in questo caso il piano di flessione, mentre l'asse di flessione sarà la traccia del piano di flessione sulla sezione retta, e quindi sarà l'asse X_1 . Ciò giustifica il nome corrente di *flessione fuori del piano*.

Infine, la relazione tra la caratteristica della sollecitazione interna M_2 e la curvatura dell'asse della trave si scriverà in questo caso:

$$\chi = \frac{d^2 u_1}{dx_3^2} = \frac{M_2}{EI_{22}} \quad (25.66)$$

Il piano ortogonale all'asse momento della coppia applicata si chiama *piano di sollecitazione*, ed in questo caso coincide con il piano $X_1 - X_3$. La traccia del piano di sollecitazione sulla sezione retta si chiama *asse di sollecitazione*, ed in questo caso coincide con l'asse X_1 .

25.3.4 L'energia di deformazione

L'energia di deformazione L di un tronco di trave lungo l , soggetta a flessione fuori del piano può agevolmente calcolarsi in base alla definizione:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} \epsilon_{33} \, dv = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 \, dv = \frac{M_2^2}{2EI_{22}^2} \int_0^l \int_{\Sigma} x_1^2 \, dA \, dx_3 = \frac{M_2^2 l}{2EI_{22}} \quad (25.67)$$

ed ancora:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} \epsilon_{33} \, dv = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 \, dv = \frac{EI_{22}}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 u_1}{dx_3^2} \right)^2 dx_3 \quad (25.68)$$

25.4 L'ortogonalità energetica

Si immagini ora che il tronco di trave sia soggetto contemporaneamente ad una forza assiale $F_3^{(2)}$ e a due coppie flettenti $\mathcal{M}_1^{(2)}$ e $\mathcal{M}_2^{(2)}$. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, la tensione normale σ_{33} sarà fornita da:

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 \quad (25.69)$$

Ne segue che l'energia di deformazione sarà fornita da:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} \epsilon_{33} \, dv = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 \, dv = \frac{1}{2E} \int_V \left(\frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 \right)^2 \, dv \quad (25.70)$$

L'integrando non dipende dalla variabile x_3 , e quindi potrà scriversi, indicando con l la lunghezza della trave:

$$\begin{aligned} L &= \frac{l}{2E} \int_{\Sigma} \left(\frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 \right)^2 \, dA = \\ &= \frac{N^2 l}{2EA} + \frac{M_1^2 l}{2EI_{11}} + \frac{M_2^2 l}{2EI_{22}} + \\ &+ \frac{l}{2E} \frac{N}{A} \frac{M_1}{I_{11}} \int_{\Sigma} x_2 \, dA - \frac{l}{2E} \frac{N}{A} \frac{M_2}{I_{22}} \int_{\Sigma} x_1 \, dA - \frac{l}{2E} \frac{M_1}{I_{11}} \frac{M_2}{I_{22}} \int_{\Sigma} x_1 x_2 \, dA \end{aligned} \quad (25.71)$$

Se gli assi X_1 ed X_2 sono coincidenti con gli assi centrali di inerzia, allora gli ultimi tre integrali si annullano, e quindi:

$$L = \frac{N^2 l}{2EA} + \frac{M_1^2 l}{2EI_{11}} + \frac{M_2^2 l}{2EI_{22}} \quad (25.72)$$

L'energia di deformazione di un tronco di trave soggetto contemporaneamente a sforzo normale, flessione retta nel piano e flessione retta fuori del piano è pari alla somma delle energie elastiche dovute alla presenza di solo sforzo normale, di solo momento flettente nel piano, e di solo momento flettente fuori del piano. In altri termini, le energie mutue di deformazione si annullano, e le tre sollecitazioni sono *ortogonali in senso energetico*.

Capitolo 26

Flessione deviata e sforzo normale eccentrico

Con lo studio della flessione fuori del piano si è esaurito l'esame delle sollecitazioni semplici di De Saint Venant caratterizzate dalla presenza di sola tensione normale σ_{33} . In questo Capitolo si vogliono esaminare le travi soggette a coppie flettenti con asse non coincidente con gli assi centrali di inerzia della sezione, e le travi soggette ad una forza assiale non applicata nel baricentro della sezione retta. In ambedue i casi lo studio potrà condursi sovrapponendo i casi di sollecitazione semplice già esaminati

26.1 Flessione deviata

Si consideri una trave di De Saint-Venant, sollecitata sulla base di destra da una coppia \mathcal{M} il cui asse s non coincide con gli assi centrali di inerzia della sezione, e per l'equilibrio, sulla base di sinistra da una coppia uguale e contraria $-\mathcal{M}$ con lo stesso asse. In questo caso, quindi, a differenza di quanto accadeva nel caso delle sollecitazioni semplici, il piano di sollecitazione non coincide con alcun piano coordinato, come illustrato in Figura 26.1.

La coppia \mathcal{M} può scomporsi nelle due componenti secondo gli assi, \mathcal{M}_1 ed \mathcal{M}_2 , da cui si può dedurre che le caratteristiche della sollecitazione interna agenti sulla trave saranno i due momenti flettenti M_1 ed M_2 . Inoltre, l'asse di sollecitazione è individuato dall'angolo che esso forma con l'asse X_2 , e sarà, come ovvio dalla Figura 26.2:

$$\tan(sX_2) = -\frac{M_2}{M_1} \quad (26.1)$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, possiamo considerare questa sollecitazione come la somma delle due flessioni rette appena studiate, e quindi calcolare spostamenti, deformazioni e tensioni sommando gli spostamenti, le deformazioni e le tensioni ottenute nello studio delle due flessioni rette. Ne

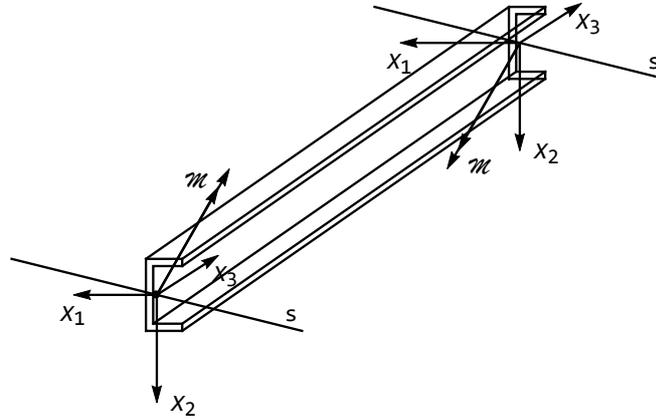


Figura 26.1: Il regime di flessione deviata

segue che la terna di spostamenti si potrà esprimere come:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{M_1\nu}{EI_{11}}x_1x_2 + \frac{M_2\nu}{2EI_{22}}\left(x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_2^2\right) \\ u_2 &= -\frac{M_1\nu}{2EI_{11}}\left(x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_1^2\right) + \frac{M_2\nu}{EI_{22}}x_1x_2 \\ u_3 &= \frac{M_1}{EI_{11}}x_2x_3 - \frac{M_2}{EI_{22}}x_1x_3 \end{aligned} \quad (26.2)$$

mentre le tensioni saranno fornite dalla *formula binomia*:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_{11}}x_2 - \frac{M_2}{I_{22}}x_1 \quad (26.3)$$

Come sempre, il luogo di tensioni nulle si chiama *asse neutro*, ed in questo caso sarà definito dall'equazione:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_{11}}x_2 - \frac{M_2}{I_{22}}x_1 = 0 \quad (26.4)$$

Per individuare l'asse neutro, è necessario individuare l'angolo che esso forma con gli assi coordinati. A tal fine, si ricorda che una retta generica n passante per l'origine ha equazione:

$$ax_1 + bx_2 = 0 \quad (26.5)$$

e forma con gli assi coordinati X_1 ed X_2 gli angoli $nX_1 = \phi$ ed $nX_2 = nX_1 + \pi/2 = \phi + \pi/2$, le cui tangenti trigonometriche si leggono dalla Figura 26.3:

$$\tan(nX_1) = \tan\phi = -\frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{b} \quad (26.6)$$

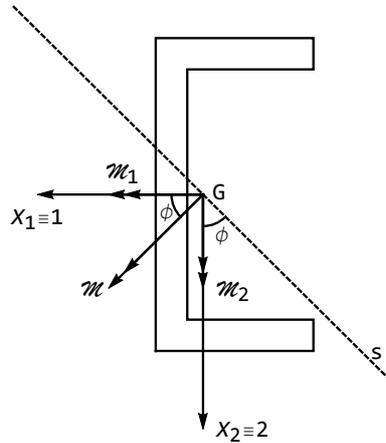


Figura 26.2: La flessione deviata come somma di due flessioni rette

$$\tan(nX_2) = \tan(\phi + \pi/2) = -\cot \phi = \frac{x_1}{x_2} = -\frac{b}{a} \quad (26.7)$$

A partire dalla (26.4), si può quindi giungere a scrivere, con $a = \frac{-M_2}{I_{22}}$ e $b = \frac{M_1}{I_{11}}$:

$$\tan(nX_2) = \frac{M_1 I_{22}}{M_2 I_{11}} \quad (26.8)$$

Si osservi anche, che dalla relazione precedente, e dalla (26.1), si trae la relazione, dipendente solo dalle proprietà geometriche della sezione:

$$\tan(nX_2) \tan(sX_2) = \left(\frac{M_1 I_{22}}{M_2 I_{11}} \right) \left(-\frac{M_2}{M_1} \right) = -\frac{I_{22}}{I_{11}} \quad (26.9)$$

Il *piano di flessione* si può ottenere immediatamente, scrivendo gli spostamenti dei punti dell'asse, come:

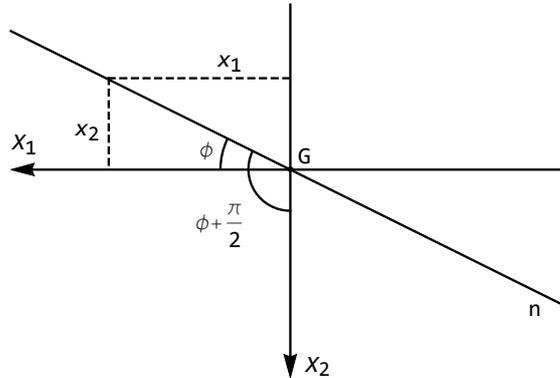
$$u_1 = \frac{M_2}{2EI_{22}} x_3^2 \quad (26.10)$$

$$u_2 = -\frac{M_1}{2EI_{11}} x_3^2 \quad (26.11)$$

$$u_3 = 0 \quad (26.12)$$

sicchè il piano di flessione ha equazione:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + u_1 = \frac{M_2}{2EI_{22}} \xi_3^2 \\ \xi_2 &= x_2 + u_2 = -\frac{M_1}{2EI_{11}} \xi_3^2 \end{aligned} \quad (26.13)$$

Figura 26.3: Calcolo dell'angolo tra l'asse neutro e l'asse X_1

La traccia di tale piano sul piano della sezione retta è detta *asse di flessione*. Si ha il:

Teorema 16. *Asse neutro ed asse di flessione sono tra loro ortogonali*

Dimostrazione. Ed infatti, eliminando ξ_3 dalle due relazioni precedenti si ottiene subito l'equazione dell'asse:

$$\frac{M_1}{I_{11}}\xi_1 + \frac{M_2}{I_{22}}\xi_2 = 0 \quad (26.14)$$

e quindi la relazione di ortogonalità tra la (26.13) e la (26.4) è soddisfatta. Basta, a dimostrare ciò, ricordare che due rette di equazione:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= 0 \\ cx_1 + dx_2 &= 0 \end{aligned} \quad (26.15)$$

sono tra loro ortogonali se:

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = -1 \quad (26.16)$$

Nel caso in esame si ha:

$$a = -\frac{M_2}{I_{22}} \quad b = \frac{M_1}{I_{11}} \quad c = \frac{M_1}{I_{11}} \quad d = \frac{M_2}{I_{22}} \quad (26.17)$$

e quindi:

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = -\frac{M_2}{I_{22}} \frac{I_{11}}{M_1} \frac{M_1}{I_{11}} \frac{I_{22}}{M_2} = -1 \quad (26.18)$$

□

26.2 Sforzo normale eccentrico

Un altro caso notevole di sollecitazione composta è costituita dalla sovrapposizione dello sforzo normale e delle due flessioni rette, o, equivalentemente, dalla sovrapposizione di uno sforzo assiale e da una flessione deviata.

Sulla base di destra, quindi, agiscono sollecitazioni le cui caratteristiche si riducono ad una forza $F_3^{(2)}$ e due coppie flettenti $\mathcal{M}_1^{(2)}$ e $\mathcal{M}_2^{(2)}$. Le coppie possono comporsi in un'unica coppia \mathcal{M} agente in un piano ortogonale a quello della base (piano di sollecitazione), come riportato in Figura 26.4. A loro volta,

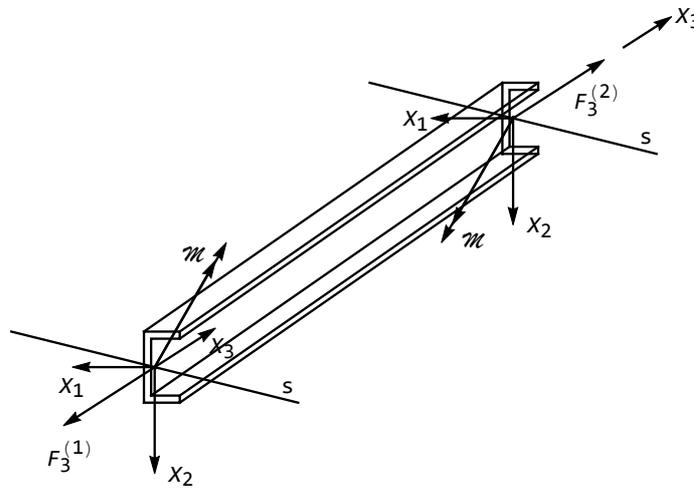


Figura 26.4: La composizione delle due coppie

la coppia \mathcal{M} e la forza $F_3^{(2)}$ possono comporsi in un'unica forza $F_3^{(2)}$ diretta secondo l'asse X_3 , ed agente nel piano di sollecitazione ad una distanza:

$$e = \frac{\mathcal{M}}{F_3^{(2)}} \quad (26.19)$$

dall'asse X_3 . Il punto C in cui questa forza incontra il piano della base si chiama *centro di sollecitazione*: esso si trova sull'asse di sollecitazione s , a distanza e dal baricentro G , e la distanza e si dice eccentricità della forza. (cfr. Figura 26.5). Per l'equilibrio, sulla base di sinistra agiscono solo sollecitazioni con caratteristiche pari ad $F_3^{(1)} = -F_3^{(2)}$, $\mathcal{M}_1^{(1)} = -\mathcal{M}_1^{(2)}$, e $\mathcal{M}_2^{(1)} = -\mathcal{M}_2^{(2)}$, ed anch'esse possono comporsi in un'unica forza eccentrica pari a $-F_3^{(2)}$.

Le caratteristiche della sollecitazione interna in corrispondenza di ciascuna sezione retta si riducono ad uno sforzo normale N e due momenti flettenti M_1 e M_2 . Per il principio di sovrapposizione degli effetti si potrà scrivere subito la *formula trinomia*:

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}}x_2 - \frac{M_2}{I_{22}}x_1 \quad (26.20)$$

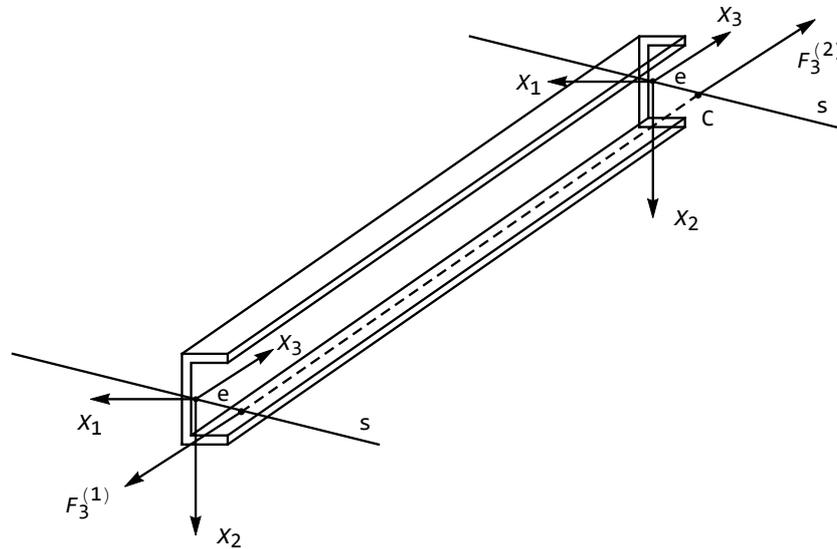


Figura 26.5: La composizione in un unico sforzo normale con eccentricità e

Si noti subito che l'asse neutro, fornito dall'equazione:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}}x_2 - \frac{M_2}{I_{22}}x_1 = 0 \quad (26.21)$$

non è più baricentrico.

26.3 Il profilato ad L

Si consideri una trave con sezione retta fornita dal profilato a L, con lati uguali, di Figura 26.6, soggetta ad una coppia flettente con asse di sollecitazione verticale. La base e l'altezza del profilato siano pari a 100 mm , lo spessore sia pari ad 8 mm , l'intensità della coppia sia pari a 8000 kgmm .

26.3.1 Il calcolo delle caratteristiche di inerzia

Si studia preventivamente il profilato al fine di:

- calcolare il baricentro della sezione
- calcolare la matrice dei momenti di inerzia baricentrali
- calcolare i momenti di inerzia centrali, insieme alle direzioni centrali di inerzia

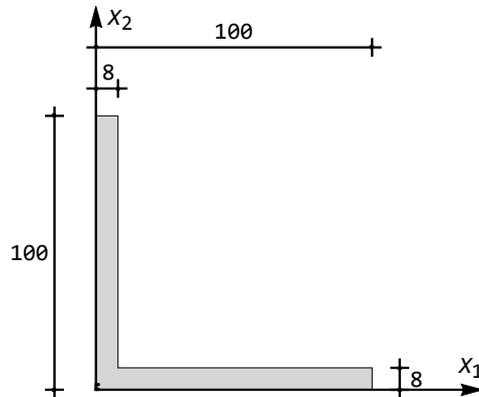


Figura 26.6: Il profilato ad L a lati uguali

Il calcolo del baricentro

Si divida la sezione nei due rettangoli di Figura 26.7, e si definiscano — per speditezza di calcolo — quattro vettori:

- $b = \{8,92\}$ contenente le basi dei rettangoli
- $h = \{100,8\}$ contenente le altezze dei rettangoli
- $d_{x_1} = \{50,4\}$ contenente le distanze dei baricentri dei rettangoli dall'asse orizzontale X_1
- $d_{x_2} = \{4,54\}$ contenente le distanze dei baricentri dei rettangoli dall'asse verticale X_2

Con queste definizioni, si possono calcolare immediatamente l'area della sezione retta ed i due momenti statici rispetto agli assi x_1 e x_2 :

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{i=1}^2 b_i h_i = 1536 \text{ mm}^2 \\
 S_{x_1} &= \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_1 i} = 42944 \text{ mm}^3 \\
 S_{x_2} &= \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_2 i} = 42944 \text{ mm}^3
 \end{aligned}
 \tag{26.22}$$

Ne segue che le coordinate del baricentro saranno fornite dalle formule:

$$\begin{aligned}
 x_{G1} &= \frac{S_{x_2}}{A} = 27.9583 \text{ mm} \\
 x_{G2} &= \frac{S_{x_1}}{A} = 27.9583 \text{ mm}
 \end{aligned}
 \tag{26.23}$$

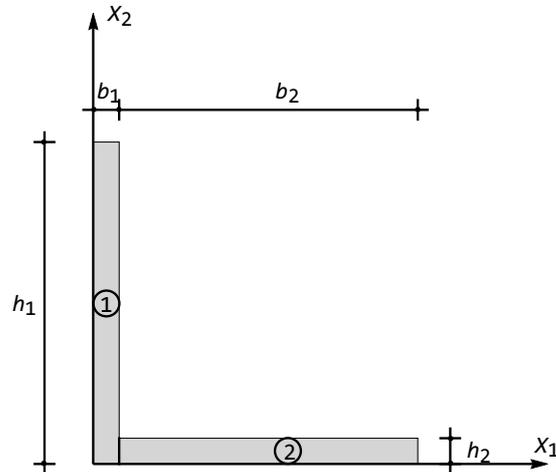


Figura 26.7: I due rettangoli in cui è scomposta la sezione, e gli assi di primo riferimento

Il calcolo della matrice dei momenti di inerzia baricentrici

Si inizi a calcolare i momenti di inerzia rispetto agli assi di primo riferimento X_1 ed X_2 . A ciò fare, si calcolano — rettangolo per rettangolo — i momenti di inerzia rispetto ai propri assi baricentrici, aggiungendo poi il momento di trasporto:

$$\begin{aligned}
 I_{22} &= \sum_{i=1}^2 \frac{b_i h_i^3}{12} + \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x1i}^2 = 2.68 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\
 I_{11} &= \sum_{i=1}^2 \frac{b_i^3 h_i}{12} + \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x2i}^2 = 2.68 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\
 I_{12} &= \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x1i} d_{x2i} = 318976 \text{ mm}^4
 \end{aligned} \tag{26.24}$$

Infine, si usa il teorema di Huyghens per calcolare i richiesti momenti di inerzia baricentrici:

$$\begin{aligned}
 I_{22}^G &= I_{22} - A x_{G2}^2 = 1.48173 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\
 I_{11}^G &= I_{11} - A x_{G1}^2 = 1.48173 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\
 I_{12}^G &= I_{12} - A x_{G1} x_{G2} = -881667 \text{ mm}^4
 \end{aligned} \tag{26.25}$$

Il calcolo dei momenti di inerzia centrali e delle rispettive direzioni

Assegnata la matrice dei momenti di inerzia baricentrali:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{22} & I_{12} \\ I_{12} & I_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.48173 \times 10^6 & -881667 \\ -881667 & 1.48173 \times 10^6 \end{pmatrix} \quad (26.26)$$

l'equazione secolare si scriverà:

$$\lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{I})\lambda + \text{Det}(\mathbf{I}) = 0 \quad (26.27)$$

ossia:

$$\lambda^2 - 2.96345 \times 10^6 \lambda + 1.41817 \times 10^{12} = 0 \quad (26.28)$$

con radici:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\equiv I_1 = 2.36339 \times 10^6 \\ \lambda_2 &\equiv I_2 = 600057 \end{aligned} \quad (26.29)$$

La matrice dei momenti di inerzia è allora divenuta:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600057 & 0 \\ 0 & 2.36339 \times 10^6 \end{pmatrix} \quad (26.30)$$

Le rispettive direzioni centrali si ottengono risolvendo i due sistemi:

$$\begin{aligned} (I_{22} - I_1) n_{11} + I_{12} n_{21} &= 0 \\ I_{21} n_{11} + (I_{11} - I_1) n_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (26.31)$$

e:

$$\begin{aligned} (I_{22} - I_2) n_{12} + I_{12} n_{22} &= 0 \\ I_{21} n_{12} + (I_{11} - I_2) n_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (26.32)$$

Il primo si traduce numericamente in:

$$\begin{aligned} -881667 n_{11} - 881667 n_{21} &= 0 \\ -881667 n_{11} - 881667 n_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (26.33)$$

con soluzione normalizzata $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Il secondo sistema diviene invece:

$$\begin{aligned} 881667 n_{12} - 881667 n_{22} &= 0 \\ -881667 n_{12} + 881667 n_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (26.34)$$

con soluzione normalizzata $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Ne segue che la prima direzione principale sarà inclinata, rispetto ad ambedue gli assi, di un angolo pari a 45 gradi, mentre l'altra direzione, ad essa ortogonale, sarà inclinata di 45 gradi rispetto ad X_1 e di -45 gradi rispetto ad X_2 . Ciò esaurisce lo studio geometrico della sezione retta, portando al sistema di riferimento di Figura 26.8.

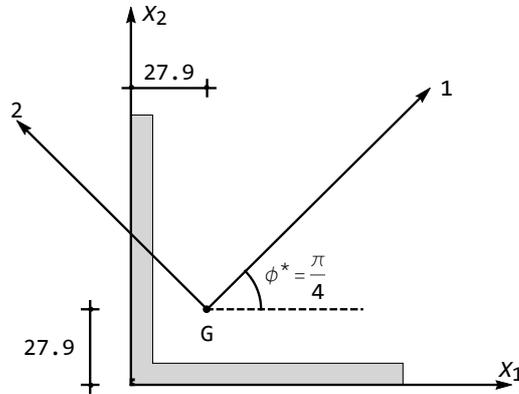


Figura 26.8: Gli assi centrali di inerzia

26.3.2 Il diagramma delle tensioni

Scomponendo la coppia M lungo i due assi centrali di inerzia si avranno le due coppie:

$$M_1 = M \cos(135^\circ) = -5656.85 \text{ kg mm} \quad (26.35)$$

$$M_2 = M \cos(45^\circ) = 5656.85 \text{ kg mm} \quad (26.36)$$

e potranno studiarsi separatamente le due flessioni rette secondo gli assi centrali 1 e 2

Nel primo caso si ottiene il diagramma di Figura 26.9. Un punto significativo in cui la tensione può calcolarsi con relativa facilità è il punto 6, col suo simmetrico 2. Ed infatti le coordinate di 6 nel riferimento originario erano $(0,100)$, sicchè nel riferimento traslato nel baricentro si hanno le coordinate $(-x_{G1}, 100 - x_{G2}) = (-27.9583, 72.0417)$, e nel riferimento ruotato di 45 gradi si avranno le coordinate:

$$\begin{pmatrix} \xi_{51} \\ \xi_{52} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -27.9583 \\ 72.0417 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.1717 \\ 70.7107 \end{pmatrix} \quad (26.37)$$

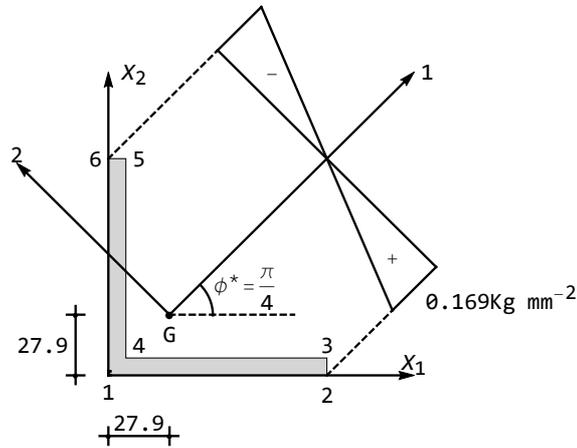
La formula di Navier:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_1} \xi_2 \quad (26.38)$$

fornisce allora nel punto 6 la tensione normale:

$$\sigma_{33}^{(6)} = \frac{-5656.85}{2.36339 \times 10^6} 70.7107 = -0.169248 \text{ kg mm}^{-2} \quad (26.39)$$

Nel punto simmetrico 2 si avrà ovviamente $\sigma_{33}^{(2)} = 0.169248 \text{ kg mm}^{-2}$. Nel punto 5 si avrà la tensione -0.15571 , ottenibile sfruttando la linearità del diagramma.


 Figura 26.9: Il diagramma delle tensioni dovute alla coppia M_1

Nel secondo caso si ha il diagramma della Figura 26.10. Servono ora le coordinate del punto 5, e del punto 1. Con lo stesso procedimento illustrato in precedenza si hanno le coordinate baricentriche del punto 1 come $(0 - x_{G1}, 0 - x_{G2}) = (-27.9583, -27.9583)$, e quindi le coordinate, nel sistema di riferimento centrale:

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -27.9583 \\ -27.9583 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39.539 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26.40)$$

mentre le coordinate baricentriche di 5 sono fornite da $(8 - x_{G1}, 100 - x_{G2}) = (-19.9583, 72.0417)$ e quindi nel sistema di riferimento centrale:

$$\begin{pmatrix} \xi_{51} \\ \xi_{52} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -19.9583 \\ 72.0417 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.8285 \\ 65.0538 \end{pmatrix} \quad (26.41)$$

Seguono le tensioni fornite dalla formula di Navier:

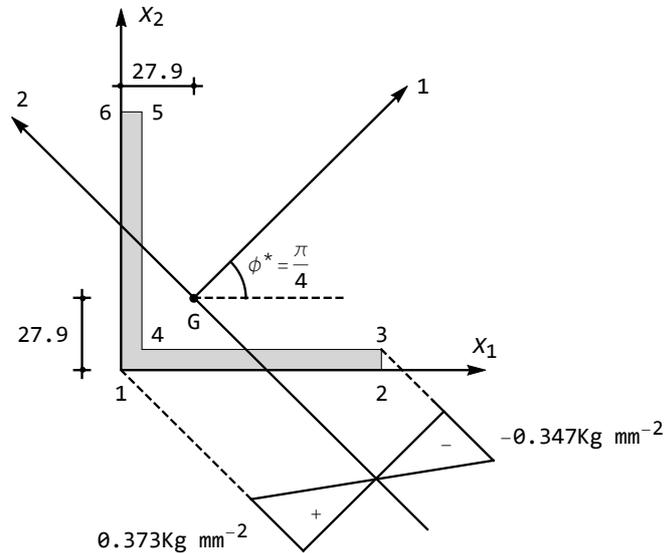
$$\sigma_{33} = -\frac{M_2}{I_2} \xi_1 \quad (26.42)$$

e quindi:

$$\sigma_{33}^5 = -\frac{5656.85}{600057} 36.8285 = -0.347189 \text{ kg mm}^{-2} \quad (26.43)$$

e:

$$\sigma_{33}^1 = -\frac{5656.85}{600057} (-39.539) = 0.372742 \text{ kg mm}^{-2} \quad (26.44)$$

Figura 26.10: Il diagramma delle tensioni dovute alla coppia M_2

L'equazione dell'asse neutro

Si ha, secondo la formula binomia:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_1} \xi_2 - \frac{M_2}{I_2} \xi_1 = 0 \quad (26.45)$$

e quindi:

$$\frac{-5656.85}{2.36339 \times 10^6} \xi_2 - \frac{5656.85}{600057} \xi_1 = 0 \quad (26.46)$$

ossia:

$$\xi_2 = -\frac{2.36339 \times 10^6}{600057} \xi_1 = -3.93861 \xi_1 \quad (26.47)$$

e quindi l'asse neutro forma con l'asse 2 l'angolo pari a:

$$\tan(nX_2) = \frac{\xi_1}{\xi_2} = -\frac{600057}{2.36339 \times 10^6} = -0.253897 \quad (26.48)$$

Infine sarà $\phi = nX_2 = \arctan(-0.253897) = -0.248643$, pari a -14.246 gradi.

Il diagramma finale delle tensioni

Disegnato l'asse neutro, si nota che i valori estremi delle tensioni si raggiungono nel punto 1 e nel punto 5. Per sovrapposizione degli effetti si avrà allora:

$$\sigma_{33}^5 = -0.15571 - 0.347189 = -0.5029 \text{ kg mm}^{-2} \quad (26.49)$$

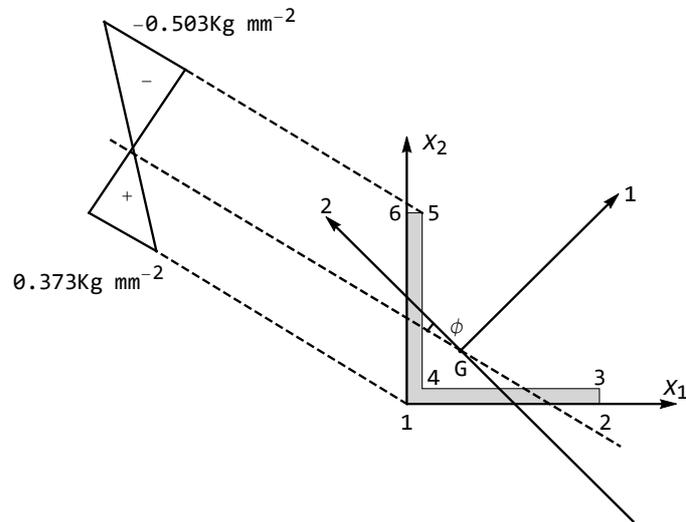


Figura 26.11: Il diagramma finale delle tensioni

$$\sigma_{33}^1 = 0 + 0.372742 = 0.372742 \text{ kg mm}^{-2} \quad (26.50)$$

come riportato in Figura 26.11.

Capitolo 27

Torsione

Si studia in questa lezione il caso di sollecitazione caratterizzato dall'assenza di tensioni normali, e quindi dalla presenza delle sole tensioni tangenziali σ_{13} e σ_{23} :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (27.1)$$

I primi studi sulla torsione rimontano a Coulomb, che a seguito dei suoi studi su elettricità e magnetismo ebbe la necessità di inventare uno strumento in grado di misurare piccole forze elettriche o magnetiche. A tal fine, inventò una precisissima bilancia torsionale, e contemporaneamente sviluppò una teoria sulle “forze torsionali”, illustrata in *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal*, Mem. acad. sci. (1784).

In questa memoria, Coulomb determina la rigidezza torsionale di un filo metallico studiando le oscillazioni torsionali di un cilindro metallico appeso al filo, come illustrato in Figura 27.1, ipotizzando che la coppia torcente reattiva sia linearmente proporzionale all'angolo di torsione θ . Più in particolare, la coppia torcente M_t sarà fornita dalla relazione:

$$M_t = \mu \frac{d^4}{l} \theta \quad (27.2)$$

dove l è la lunghezza del filo, d è il suo diametro, e μ è una costante numerica caratteristica del materiale¹. Alcuni anni dopo, nel 1820, A. Duleau presentò,

¹Usando fili estremamente sottili, ed anche sufficientemente lunghi, la legge di Coulomb permette di misurare forze estremamente deboli. In particolare, Coulomb la utilizzò per misurare forze elettromagnetiche di repulsione, anche se recentemente si è messa in dubbio la correttezza dei suoi esperimenti. Una descrizione dettagliata della bilancia torsionale, insieme ad una replica moderna degli esperimenti di Coulomb può leggersi in A.A. Martinez, *Replication of Coulomb's Torsion Balance Experiment*, Arch. Hist.Exact Sci., **60** (2006), 517-563, da cui invece si evince che il lavoro originale di Coulomb costituisce una descrizione accurata dei componenti dell'esperimento, delle procedure sperimentali e dei risultati.

Sia il lavoro originale di Coulomb, sia il lavoro di Martinez possono leggersi sul sito <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk>.

in *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé*, Paris, alcune sperimentazioni sul comportamento a torsione di travi prismatiche di acciaio. Assumendo, come Coulomb, che l'ipotesi di planeità della sezione retta potesse estendersi anche a questo tipo di sollecitazione, egli confermò la teoria di Coulomb sia per le travi a sezione circolare sia per quelle a sezione circolare cava. Viceversa, utilizzando travi a sezione rettangolare, egli mostrò che le ipotesi di base non reggono più. Ad esempio, le tensioni non sono più proporzionali alla distanza dall'asse della trave. Dopo un tentativo di Cauchy di modificare l'ipotesi di Coulomb per tener conto dell'ingobbimento delle sezioni rette (*Sur la torsion et le vibrations tournantes d'une verge rectangulaire*, Exercices de Mathématiques, 4, pagg. 47-64, 1829), la soluzione completa fu offerta da De Saint-Venant nella famosa memoria del 1853, *Mémoire sur la torsion des prismes*, il cui frontespizio è riprodotto in Figura 27.2. Utilizzando il suo metodo semi-inverso, De Saint-Venant deduce la forma degli spostamenti e pone correttamente il problema per il calcolo della funzione di torsione. Inoltre, il suddetto problema viene risolto per varie forme di sezione retta, ellittica, rettangolare, triangolare, etc. . .

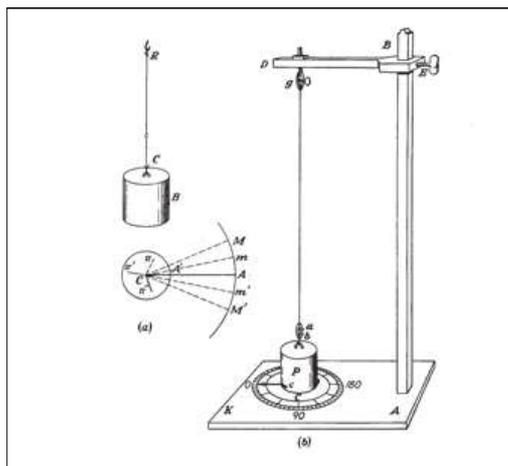


Figura 27.1: La bilancia torsionale di Coulomb

Nel presente Capitolo si parte dalla distribuzione di tensioni caratteristica della torsione, ossia da una matrice di tensioni puramente tangenziale. Utilizzando le equazioni indefinite dell'equilibrio, le leggi di Hooke, e le relazioni spostamenti-deformazioni si giunge a definire la terna di spostamenti. Tale terna, a differenza di quanto ottenuto per le precedenti sollecitazioni normali, varia al variare della forma della sezione retta, e la sua completa determinazione passa attraverso la soluzione di un classico problema di Dini-Neumann.

A partire dallo stato tensionale vengono poi dedotte le caratteristiche della sollecitazione, riconoscendo quindi a posteriori che si è in presenza di una sollecitazione semplice di torsione. Ciò fatto, l'analisi degli spostamenti conclude

l'esposizione generale della teoria della torsione: si deducono gli spostamenti da ingobbimento della generica sezione retta, e si puntualizza che, nelle usuali ipotesi di piccoli spostamenti, la generica fibra non si tramuta in un'elica cilindrica, ma in un'altra retta. Infine, è interessante caratterizzare il vettore delle tensioni tangenziali da torsione attraverso la deduzione della sua divergenza e del suo rotore, dedurre una espressione concisa dell'energia di deformazione, e disegnare i cerchi di Mohr principali.



Figura 27.2: Il frontespizio della memoria di De Saint-Venant sulla torsione

27.1 La deduzione degli spostamenti

Dalle prime due equazioni indefinite dell'equilibrio può trarsi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (27.3)$$

da cui si deduce subito, come del resto già tratto in ambito generale, che le tensioni tangenziali non dipendono dall'ascissa x_3 :

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= \sigma_{13}(x_1, x_2) \\ \sigma_{23} &= \sigma_{23}(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (27.4)$$

Le leggi di Hooke permettono di ricavare le deformazioni:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{13} \\ 0 & 0 & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & 0 \end{pmatrix}\quad (27.5)$$

con:

$$\begin{aligned}e_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{2G} \\ e_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{2G}\end{aligned}\quad (27.6)$$

Poichè le deformazioni normali sono nulle, dovrà essere anche:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0\quad (27.7)$$

e quindi u_1 non dipende dalla variabile x_1 , la componente u_2 non dipende dalla variabile x_2 , e la componente u_3 non dipende dalla variabile x_3 :

$$\begin{aligned}u_1 &= u_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= u_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= u_3(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (27.8)$$

Poichè anche la deformazione tagliante e_{12} è nulla, ne segue:

$$\frac{\partial u_1(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2(x_1, x_3)}{\partial x_1}\quad (27.9)$$

Il secondo membro di questa uguaglianza non dipende da x_2 , quindi u_1 sarà una funzione lineare in x_2 . D'altro canto, il primo membro della (27.9) non dipende da x_1 , e quindi u_2 dipende linearmente da x_1 . Inoltre, alla luce della (27.9) si dovrà scrivere:

$$\begin{aligned}u_1 &= -\alpha(x_3)x_2 + \beta(x_3) \\ u_2 &= \alpha(x_3)x_1 + \gamma(x_3)\end{aligned}\quad (27.10)$$

con $\alpha(x_3)$, $\beta(x_3)$ e $\gamma(x_3)$ funzioni di x_3 ancora da determinare.

A tal fine, dalla definizione di e_{13} ed e_{23} si trae poi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= 2e_{13} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= 2e_{23} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\end{aligned}\quad (27.11)$$

Poichè sia e_{13} che e_{23} non dipendono da x_3 , si nota che i secondi membri non dipendono da x_3 , e quindi $\alpha(x_3)$, $\beta(x_3)$ e $\gamma(x_3)$ devono essere al più funzioni lineari di x_3 , per cui dovrà essere:

$$\begin{aligned}\alpha(x_3) &= \alpha_0 + \alpha_1 x_3 \\ \beta(x_3) &= \beta_0 + \beta_1 x_3 \\ \gamma(x_3) &= \gamma_0 + \gamma_1 x_3\end{aligned}\tag{27.12}$$

ed ancora:

$$\begin{aligned}u_1 &= -\alpha_1 x_2 x_3 + \beta_0 - \alpha_0 x_2 + \beta_1 x_3 \\ u_2 &= \alpha_1 x_1 x_3 + \gamma_0 + \alpha_0 x_1 + \gamma_1 x_3\end{aligned}\tag{27.13}$$

Posto infine:

$$u_3 = \alpha_1 \Psi(x_1, x_2) - \beta_1 x_1 - \gamma_1 x_2\tag{27.14}$$

è facile rendersi conto che il campo di spostamenti:

$$\phi = \begin{pmatrix} \beta_0 - \alpha_0 x_2 + \beta_1 x_3 \\ \gamma_0 + \alpha_0 x_1 + \gamma_1 x_3 \\ -\beta_1 x_1 - \gamma_1 x_2 \end{pmatrix}\tag{27.15}$$

non provoca deformazioni, e quindi, se il solido è propriamente vincolato, deve essere nullo. In definitiva, sarà:

$$\begin{aligned}u_1 &= -c x_2 x_3 \\ u_2 &= c x_1 x_3 \\ u_3 &= c \Psi(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{27.16}$$

lasciando per ora incognita la funzione Ψ .

27.2 La deduzione della funzione Ψ

Per come sono stati dedotti gli spostamenti, risulta chiaro che le prime due equazioni di Cauchy–Navier sono soddisfatte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0\end{aligned}\tag{27.17}$$

La terza, invece, conduce ad una equazione in Ψ :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} = \nabla_2^2 \Psi = 0\tag{27.18}$$

valida sulla sezione retta Σ , che impone alla funzione Ψ di essere *armonica*. Sul contorno Γ , poi, occorrerà imporre la condizione ai limiti:

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0\tag{27.19}$$

Utilizzando le (27.6) si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= 2Ge_{13} = G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = Gc \left(-x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \\ \sigma_{23} &= 2Ge_{23} = G \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = Gc \left(x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)\end{aligned}\quad (27.20)$$

e quindi la (27.19) diviene:

$$\left(-x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) n_1 + \left(x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) n_2 = 0 \quad (27.21)$$

o anche:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} n_2 = -x_1 n_2 + x_2 n_1 \quad (27.22)$$

E' immediato realizzare (Figura 27.3) che i coseni direttori della normale uscente al contorno possono scriversi come:

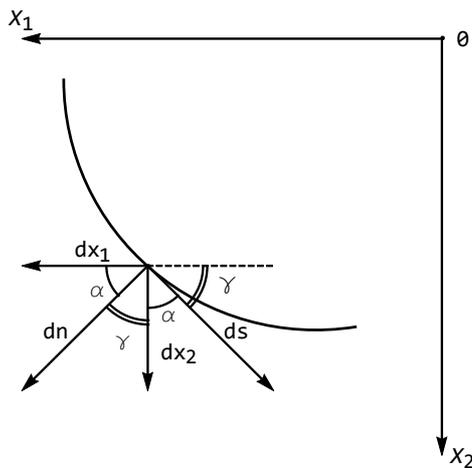


Figura 27.3: Il calcolo dei coseni direttori

$$\begin{aligned}n_1 &= \cos (dn, dx_1) = \cos \alpha = \frac{dx_1}{dn} = \frac{dx_2}{ds} \\ n_2 &= \cos (dn, dx_2) = \cos \gamma = \frac{dx_2}{dn} = -\frac{dx_1}{ds}\end{aligned}\quad (27.23)$$

sicchè il primo membro della relazione precedente diviene la derivata direzionale secondo la normale \mathbf{n} uscente dal contorno:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} n_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dn} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dn} = \frac{\partial \Psi}{\partial n} \quad (27.24)$$

e la condizione al contorno (27.22) diviene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = -x_1 \frac{dx_2}{dn} + x_2 \frac{dx_1}{dn} = x_1 \frac{dx_1}{ds} + x_2 \frac{dx_2}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (x_1^2 + x_2^2) \quad (27.25)$$

L'equazione (27.18) è la ben nota equazione di Laplace, ed una funzione che la soddisfa si dice *funzione armonica*. Il problema della determinazione di una funzione che soddisfa l'equazione di Laplace in un dominio piano, con le condizioni al contorno del tipo (27.25) va sotto il nome di *problema di Dini–Neumann*, e ben noti teoremi matematici garantiscono l'esistenza della funzione.

Ed infatti, può dimostrarsi che il problema di Dini–Neumann ha soluzione se l'integrale della derivata normale esteso a tutto il contorno Γ si annulla:

$$\oint_{\Gamma} \frac{d\Psi}{dn} ds = 0 \quad (27.26)$$

e questo, nel caso in esame, è certamente vero, come può provarsi utilizzando la (27.25):

$$\oint_{\Gamma} \frac{d\Psi}{dn} ds = \oint_{\Gamma} \left(x_1 \frac{dx_1}{ds} + x_2 \frac{dx_2}{ds} \right) ds = \oint_{\Gamma} (x_1 dx_1 + x_2 dx_2) = 0 \quad (27.27)$$

essendo $x_1 dx_1 + x_2 dx_2$ un differenziale esatto, e quindi annullandosi il suo integrale esteso a qualunque curva chiusa.

27.3 La deduzione delle caratteristiche

Le definizioni di caratteristiche della sollecitazione esterna sulla base di destra portano a scrivere:

$$F_3^{(2)} = \mathcal{M}_1^{(2)} = \mathcal{M}_2^{(2)} = 0 \quad (27.28)$$

ed analogamente, sulla sezione di sinistra:

$$F_3^{(1)} = \mathcal{M}_1^{(1)} = \mathcal{M}_2^{(1)} = 0 \quad (27.29)$$

Poi, utilizzando le relazioni tra le caratteristiche della sollecitazione esterna, che qui si riscrivono per comodità:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{(2)} &= -\mathcal{M}_1^{(1)} + F_2^{(2)} L \\ \mathcal{M}_2^{(2)} &= -\mathcal{M}_2^{(1)} - F_1^{(2)} L \\ \mathcal{M}_3^{(2)} &= -\mathcal{M}_3^{(1)} \end{aligned} \quad (27.30)$$

si ricava subito:

$$F_1^{(2)} = F_2^{(2)} = 0 \quad (27.31)$$

L'annullarsi della forza risultante di taglio può anche dimostrarsi direttamente, utilizzando la formula di Green–Riemann (illustrata e dimostrata in

Appendice). Si parta dalla definizione, utilizzando poi le (27.20):

$$T_1 = \int_{\Sigma} \sigma_{13} \, dA = Gc \int_{\Sigma} \left(-x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \, dA = Gc \left[\int_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left[x_1 \left(-x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[x_1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + x_1 \right) \right] \right] \, dA \right] \quad (27.32)$$

ed utilizzando la formula di Green–Riemann si trasformi l'integrale d'area in un integrale di linea:

$$T_1 = Gc \left[\int_{\Gamma} \left[x_1 \left(-x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \right] \, dx_2 - \int_{\Gamma} \left[x_1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + x_1 \right) \right] \, dx_1 \right] \quad (27.33)$$

Infine, utilizzando la (27.21), in connessione con le (27.23), si giunge all'asserto.

Quindi, l'unica caratteristica della sollecitazione esterna agente sulle basi resta la coppia $\mathcal{M}_3^{(2)}$ sulla faccia di destra e la coppia $\mathcal{M}_3^{(1)}$ sulla faccia di sinistra. Si è in presenza della sollecitazione semplice di torsione, e l'unica caratteristica della sollecitazione interna presente è il momento torcente:

$$\begin{aligned} M_t &= \int_{\Sigma} (\sigma_{23}x_1 - \sigma_{13}x_2) \, dA = \\ &= Gc \left[\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + x_1 \right) x_1 \, dA - \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} - x_2 \right) x_2 \, dA \right] = \\ &= Gc \left[\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_1 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 \right) \, dA + I_{11} + I_{22} \right] = \\ &= Gc \left[\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_1 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 \right) \, dA + I_p \right] = Gc [I_p - D(\Psi)] \end{aligned} \quad (27.34)$$

L'integrale:

$$D(\Psi) = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_1 \right) \, dA \quad (27.35)$$

dipende solo da Ψ , ossia dalla forma della sezione retta, ed è noto come *integrale di Dirichlet*, mentre I_p è il momento di inerzia polare.

Si può dimostrare che l'integrale di Dirichlet (27.35) è una quantità non negativa. Ed infatti, partendo dalle ovvie uguaglianze:

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} (\Psi x_1) \\ x_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} (\Psi x_2) \end{aligned} \quad (27.36)$$

si ha, applicando il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} D(\Psi) &= \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_1 \right) \, dA = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (\Psi x_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\Psi x_1) \right) \, dA = \\ &= \int_{\Gamma} \Psi (x_2 n_1 - x_1 n_2) \, ds \end{aligned} \quad (27.37)$$

e per la (27.22):

$$D(\Psi) = \int_{\Gamma} \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds = \int_{\Gamma} \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} n_1 + \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} n_2 \right) ds \quad (27.38)$$

e riapplicando il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} D(\Psi) &= \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) \right) dA \\ &= \int_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \Psi \nabla_2 \Psi \right] dA \end{aligned} \quad (27.39)$$

ed infine, per la (27.18):

$$D(\Psi) = \int_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 \right] dA \geq 0 \quad (27.40)$$

Nelle applicazioni, si introduce un *fattore di torsione* q , in modo da poter scrivere:

$$M_t = \frac{GI_p}{q} c \quad (27.41)$$

e quindi:

$$q = \frac{I_p}{I_p - D(\Psi)} \geq 1 \quad (27.42)$$

Le tensioni, quindi, non saranno funzione del modulo di elasticità tangenziale, e si potranno scrivere come:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= q \frac{M_t}{I_p} \left(-x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \\ \sigma_{23} &= q \frac{M_t}{I_p} \left(x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (27.43)$$

27.4 Analisi degli spostamenti

Utilizzando la (27.41) si può scrivere la terna di spostamenti come:

$$\begin{aligned} u_1 &= -q \frac{M_t}{GI_p} x_2 x_3 \\ u_2 &= q \frac{M_t}{GI_p} x_1 x_3 \\ u_3 &= q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (27.44)$$

27.4.1 La sezione retta

Si consideri la sezione di equazione:

$$x_3 = k \quad (27.45)$$

Essa, a seguito della deformazione si porta nella superficie di equazione:

$$\xi_3 = x_3 + u_3 = k + q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_1, x_2) \approx k + q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(\xi_1, \xi_2) \quad (27.46)$$

dove:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + u_1 = x_1 - q \frac{M_t}{GI_p} k x_2 \\ \xi_2 &= x_2 + u_2 = x_2 + q \frac{M_t}{GI_p} k x_1 \end{aligned} \quad (27.47)$$

Ne segue che, in generale, le sezioni rette *non* si conservano piane, e poichè gli spostamenti u_3 (cosiddetti da *ingobbimento*) sono indipendenti da x_3 , la forma della sezione a deformazione avvenuta sarà la stessa per tutte le sezioni rette.

Dalle (27.47) si deduce che gli spostamenti secondo x_1 ed x_2 della sezione retta a distanza k dall'origine sono riconducibili alla rotazione rigida $\theta(k)$ di centro O ed ampiezza $q \frac{M_t}{GI_p} k$. Ed infatti, dalle (27.47) si trae:

$$\frac{u_1}{u_2} = -\frac{x_2}{x_1} \quad (27.48)$$

e quindi, per la similitudine dei triangoli OCP e PAB si deduce che lo spostamento \mathbf{s} del generico punto P è ortogonale ad OP .

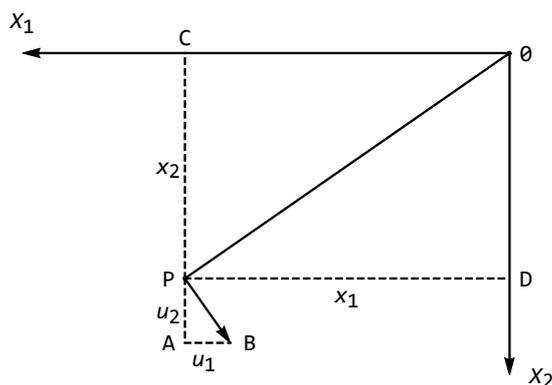


Figura 27.4: Lo spostamento dei punti nel piano della sezione retta

In particolare, due sezioni a distanza unitaria ruotano tra loro dell'angolo:

$$\theta' = q \frac{M_t}{GI_p} \quad (27.49)$$

detto *angolo specifico di torsione*. Il rapporto M_t/θ' prende nome di *rigidità torsionale* della sezione C_t , ed è pari a:

$$C_t = \frac{M_t}{\theta'} = \frac{GI_p}{q} \quad (27.50)$$

27.4.2 Le fibre

Si consideri la generica retta parallela all'asse x_3 , di equazione:

$$\begin{aligned} x_1 - x_{1c} &= 0 \\ x_2 - x_{2c} &= 0 \end{aligned} \quad (27.51)$$

i cui punti subiranno gli spostamenti :

$$\begin{aligned} u_1 &= -q \frac{M_t}{GI_p} x_{2c} x_3 \\ u_2 &= q \frac{M_t}{GI_p} x_{1c} x_3 \\ u_3 &= q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_{1c}, x_{2c}) \end{aligned} \quad (27.52)$$

A deformazione avvenuta, i punti di tale retta soddisfano le condizioni:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + u_1 = x_{1c} - q \frac{M_t}{GI_p} x_{2c} x_3 = x_{1c} - q \frac{M_t}{GI_p} x_{2c} (\xi_3 - u_3) \\ \xi_2 &= x_2 + u_2 = x_{2c} + q \frac{M_t}{GI_p} x_{1c} x_3 = x_{2c} + q \frac{M_t}{GI_p} x_{1c} (\xi_3 - u_3) \\ \xi_3 &= x_3 + u_3 = x_3 + q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_{1c}, x_{2c}) \end{aligned} \quad (27.53)$$

Tenendo conto della terza delle (27.52), la fibra (27.51) si sarà trasformata nella *retta* di equazione:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_{1c} - q \frac{M_t}{GI_p} x_{2c} \left(\xi_3 + q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_{1c}, x_{2c}) \right) \\ \xi_2 &= x_{2c} + q \frac{M_t}{GI_p} x_{1c} \left(\xi_3 + q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_{1c}, x_{2c}) \right) \end{aligned} \quad (27.54)$$

Ciò è valido in ipotesi di piccoli spostamenti, mentre in caso contrario è possibile dimostrare che le fibre si trasformano in eliche cilindriche, come illustrato in Figura 27.5

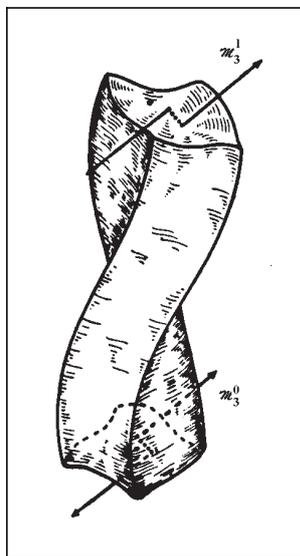


Figura 27.5: La sollecitazione di torsione, adattato da G. Fichera *Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica classica*

Dalle (27.20) si trae poi immediatamente che possono esistere delle fibre cui corrisponde stato tensionale nullo, dette *assi di torsione*. La loro equazione sarà data da:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \\ x_2 &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (27.55)$$

ed in base alla forma della sezione e della funzione di torsione potranno esserci travi senza assi di torsione, o travi con più assi di torsione.

27.5 Lo studio del vettore di tensione tangenziale

Si consideri il vettore bidimensionale $\boldsymbol{\tau}_n$ delle tensioni tangenziali, con componenti $(\sigma_{13}, \sigma_{23})$, e si voglia calcolare il suo *rotore* e la sua *divergenza*. Si ha, in genere:

$$\text{rot} \boldsymbol{\tau}_n = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2} \right) \mathbf{k} \quad (27.56)$$

Inoltre, utilizzando l'espressione (27.43) delle tensioni tangenziali, in connessione con la (27.49), si ha che l'unica componente del vettore rotore di $\boldsymbol{\tau}_n$ è costante, e pari a:

$$(\text{rot}\boldsymbol{\tau}_n)_3 = 2G\theta' \quad (27.57)$$

La divergenza del vettore $\boldsymbol{\tau}_n$ delle tensioni tangenziali si calcola come:

$$\text{div}\boldsymbol{\tau}_n = \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} = q \frac{M_t}{I_p} \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (27.58)$$

e quindi il campo vettoriale delle tensioni tangenziali di tensione è *solenoidale*. Si noti che la (27.58) è la terza equazione indefinita dell'equilibrio elastico, specializzata al caso in studio, e quindi essa è una condizione di equilibrio. La (27.57), viceversa, è una condizione di congruenza, che discende direttamente dalla specializzazione delle condizioni di compatibilità interne. Ed infatti, nel caso in esame si ha $e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{12} = 0$, sicchè le uniche due condizioni di compatibilità non identicamente nulle forniscono:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (27.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (27.60)$$

e poichè e_{13} ed e_{23} non dipendono dalla variabile x_3 si ha anche, ovviamente:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (27.61)$$

e quindi, in definitiva:

$$\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} = \text{cost} \quad (27.62)$$

che non è altro che la (27.57).

27.6 L'energia di deformazione

Il potenziale elastico connesso alla sollecitazione di torsione è fornito da:

$$\phi = \frac{1}{2G} (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \quad (27.63)$$

e quindi l'energia di deformazione è:

$$L = \int_V \phi \, dV = q^2 \frac{M_t^2 l}{2GI_p^2} \int_{\Sigma} \left(\left(-x_2 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(x_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} \right)^2 \right) dA \quad (27.64)$$

Sviluppando i quadrati si ha:

$$L = q^2 \frac{M_t^2 l}{2GI_p^2} \left[\int_{\Sigma} (x_1^2 + x_2^2) dA + \int \left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 \right) dA - 2 \int \left(x_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) dA \right] \quad (27.65)$$

Il primo integrale è ancora una volta il momento polare I_p rispetto al punto O , il secondo integrale è pari, per la (27.40), all'integrale di Dirichlet, il terzo integrale è ancora pari all'integrale di Dirichlet. Ne segue, in definitiva:

$$L = q^2 \frac{M_t^2 l}{2GI_p^2} [I_p - D(\Psi)] = q \frac{M_t^2 l}{2GI_p} \quad (27.66)$$

Identico risultato si ottiene attraverso l'applicazione del teorema di Clapeyron, uguagliando l'energia di deformazione al lavoro compiuto dalle caratteristiche di sollecitazione esterna. In questo caso, le coppie torcenti compiono lavoro per effetto della rotazione torsionale tra le due basi Σ_0 e Σ_l :

$$L = \frac{1}{2} M_3^{(2)} \theta(l) \quad (27.67)$$

ed utilizzando la (27.49) si ha:

$$L = \frac{1}{2} q \frac{M_t^2 l}{GI_p} \quad (27.68)$$

27.7 Le tensioni principali ed il Cerchio di Mohr

E' immediato calcolare le tensioni principali corrispondenti allo stato tensionale (27.1). Per esso infatti si ha l'equazione secolare:

$$-\sigma^3 + \sigma (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 0 \quad (27.69)$$

e quindi, ricordando che si è posto $\tau_n^2 = \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2$, le tre tensioni principali sono $\sigma_1 = -\tau_n$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \tau_n$. Le due direzioni principali corrispondenti alle due tensioni estreme sono inclinate di $\pi/4$ rispetto all'asse, come illustrato dal cerchio principale di Mohr, riportato in Figura 27.6.

27.8 Appendice

La formula di Green–Riemann

Si consideri una curva chiusa Γ , delimitante un'area Σ , come illustrato in Figura 27.7. La formula di Green–Riemann permette di trasformare un integrale di linea esteso a Γ in un integrale di area esteso a Σ . La sua utilità in Scienza delle Costruzioni è quindi evidente.

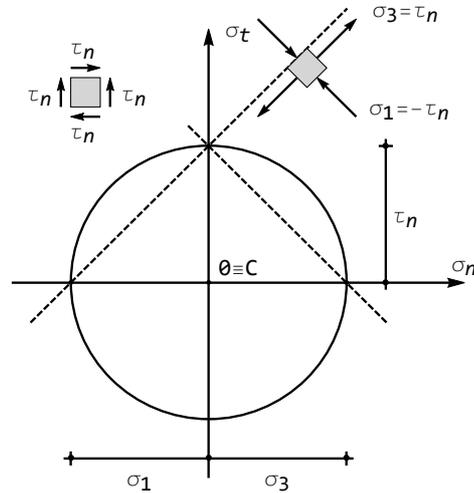


Figura 27.6: Il cerchio di Mohr per stati tensionali da torsione

Date due funzioni $P(x_1, x_2)$ e $Q(x_1, x_2)$, essa si scrive:

$$\oint_{\Gamma} P(x_1, x_2) dx_1 + Q(x_1, x_2) dx_2 = \int_{\Sigma} \left(-\frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial Q}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 \quad (27.70)$$

Si ha infatti:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} -\frac{\partial P}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \\ & - \int_a^b dx_1 \int_{x_2=f_1(x_1)}^{x_2=f_2(x_1)} \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_2 = \int_a^b [P(x_1, f_1(x_2)) - P(x_1, f_2(x_2))] dx_1 \end{aligned} \quad (27.71)$$

ossia, cfr. Figura 27.7:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} -\frac{\partial P}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \\ & \int_{ADB} P(x_1, x_2) dx_1 - \int_{ACB} P(x_1, x_2) dx_1 = \oint_{\Gamma} P(x_1, x_2) dx_1 \end{aligned} \quad (27.72)$$

Analogamente si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \\ & \int_c^d dx_2 \int_{x_1=g_1(x_2)}^{x_1=g_2(x_2)} \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 = \int_c^d [Q(g_2(x_2), x_2) - Q(g_1(x_2), x_2)] dx_2 \end{aligned} \quad (27.73)$$

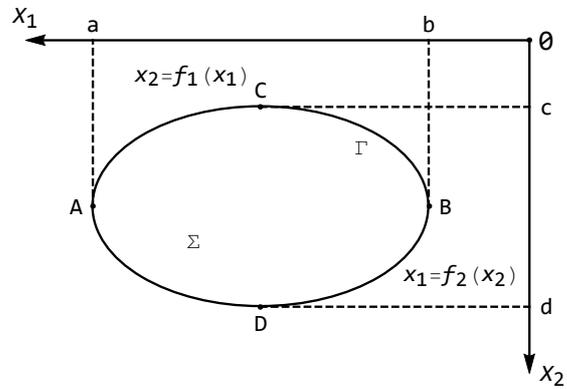


Figura 27.7: La formula di Green-Riemann

ed ancora:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = & \\
 \int_{DBC} Q(x_1, x_2) dx_2 - \int_{DAC} Q(x_1, x_2) dx_2 = \oint_{\Gamma} Q(x_1, x_2) dx_2 & \quad (27.74)
 \end{aligned}$$

Capitolo 28

Torsione nelle sezioni circolari ed ellittiche

In questo Capitolo si applicano i risultati del Capitolo precedente allo studio di alcune sezioni di forma geometrica semplice, a partire dalla sezione circolare. Per essa, come accennato nell'introduzione della lezione precedente, la teoria di Coulomb fornisce risultati corretti, poichè gli ingobbimenti sono nulli.

Si studia poi la sezione ellittica, la cui importanza deriva sia da motivi storici che dalla possibilità di ottenere semplici formule approssimate e valide per qualsiasi sezione.

28.1 La torsione nelle travi a sezione circolare

Si consideri una trave di lunghezza l , a sezione circolare di raggio R , e si ipotizzi di voler particolarizzare ad essa i risultati della lezione precedente. L'origine del sistema di riferimento, che finora è rimasto arbitrario, potrà essere convenientemente spostato nel baricentro della sezione retta, sicchè una semplice similitudine geometrica permette di scrivere (cfr. Figura 28.1):

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad (28.1)$$

e di conseguenza la derivata normale della funzione di torsione dovrà essere pari a:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dn} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dn} = -x_1 \frac{dx_2}{dn} + x_2 \frac{dx_1}{dn} = 0 \quad (28.2)$$

La funzione di torsione potrà quindi essere assunta pari ad una qualsiasi costante, e conseguentemente la sezione retta si manterrà piana, l'integrale di Dirichlet si annulla, e quindi il fattore di torsione sarà pari ad uno. Le tensioni

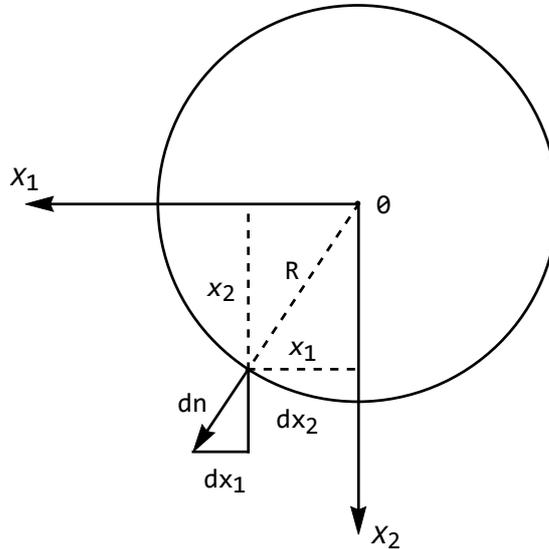


Figura 28.1: La sezione circolare

saranno fornite da:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= -\frac{M_t}{I_p} x_2 \\ \sigma_{23} &= \frac{M_t}{I_p} x_1\end{aligned}\quad (28.3)$$

ed il vettore $\boldsymbol{\tau}_n$ delle tensioni tangenziali avrà intensità pari a:

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \frac{M_t}{I_p} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{M_t}{I_p} r = \frac{2M_t}{\pi R^4} r \quad (28.4)$$

Quindi la tensione tangenziale assume valore costante su ciascuna circonferenza concentrica al contorno, assumendo il suo valore massimo sul contorno esterno, dove si ha:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} R = \frac{2M_t}{\pi R^3} \quad (28.5)$$

Si consideri il generico punto P , di coordinate (x_1, x_2) , e si calcoli il prodotto scalare tra il vettore $\boldsymbol{\tau}_n = (\sigma_{13}, \sigma_{23})$ ed il vettore $\overrightarrow{OP} = (x_1, x_2)$:

$$\boldsymbol{\tau}_n \cdot \overrightarrow{OP} = \sigma_{13} x_1 + \sigma_{23} x_2 = 0 \quad (28.6)$$

Ne segue che il vettore $\boldsymbol{\tau}_n$ dello stato tensionale è ortogonale al vettore \overrightarrow{OP} , come illustrato in Figura 28.2.

Infine, l'angolo specifico di torsione può scriversi:

$$\theta' = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{2M_t}{G\pi R^4} \quad (28.7)$$

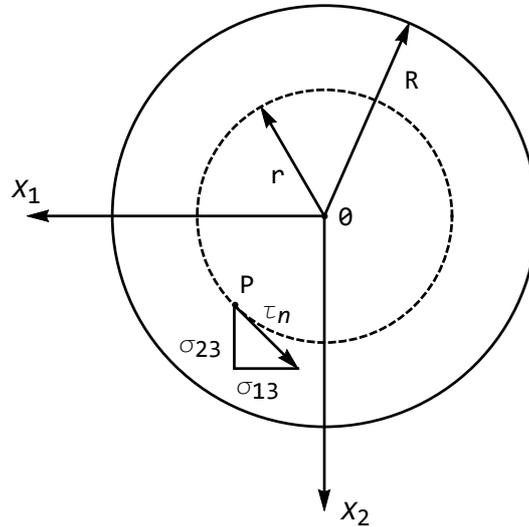


Figura 28.2: Lo stato tensionale su una sezione circolare soggetta a torsione

28.1.1 La sezione a corona circolare

Si consideri ora una sezione circolare cava, con raggio esterno R_e e raggio interno R_i , illustrata in Figura 28.3. Per ambedue i contorni vale ancora la condizione (28.2), e quindi anche in questo caso può scegliersi una funzione Ψ costante. Ne segue che il fattore di torsione resta unitario, e che resta valida l'ipotesi di planeità delle sezioni rette. Le tensioni sono fornite dalle (28.3), ed il vettore τ_n avrà intensità:

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \frac{M_t}{I_p} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{M_t}{I_p} r = \frac{2M_t}{\pi(R_e^4 - R_i^4)} r \quad (28.8)$$

raggiungendo il suo valore massimo sul contorno esterno, dove vale:

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t R_e}{\pi(R_e^4 - R_i^4)} \quad (28.9)$$

Infine, l'angolo specifico di torsione vale:

$$\theta' = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{2M_t}{G\pi(R_e^4 - R_i^4)} \quad (28.10)$$

28.2 La sezione ellittica

Nello spirito del metodo semi-inverso si ipotizzi ora che la funzione di torsione Ψ sia fornita dalla funzione, sicuramente armonica:

$$\Psi(x_1, x_2) = Kx_1x_2 \quad (28.11)$$

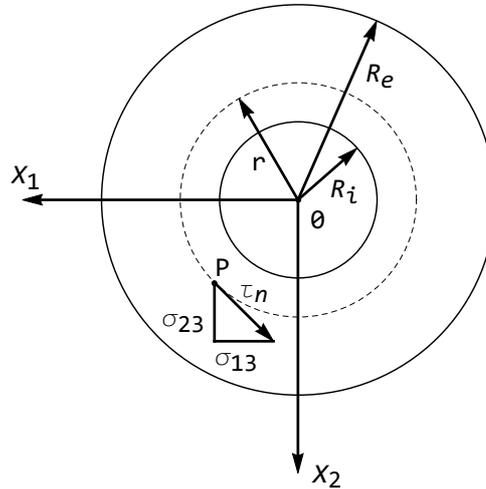


Figura 28.3: La sezione a corona circolare ed il suo stato tensionale

dove K è una costante da determinare. Con questa assunzione, le tensioni saranno fornite da:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= q \frac{M_t}{I_p} \left(-x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) = q \frac{M_t}{I_p} (Kx_2 - x_2) \\ \sigma_{23} &= q \frac{M_t}{I_p} \left(x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) = q \frac{M_t}{I_p} (Kx_1 + x_1)\end{aligned}\quad (28.12)$$

e la condizione al contorno sul mantello laterale Γ :

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0 \quad (28.13)$$

potrà essere scritta, utilizzando anche le $n_1 = \frac{dx_2}{ds}$ ed $n_2 = -\frac{dx_1}{ds}$:

$$(Kx_2 - x_2) \frac{dx_2}{ds} - (Kx_1 + x_1) \frac{dx_1}{ds} = 0 \quad (28.14)$$

ossia:

$$x_1 \frac{dx_1}{ds} + \frac{1-K}{1+K} x_2 \frac{dx_2}{ds} = 0 \quad (28.15)$$

ed ancora:

$$\frac{d}{ds} \left(x_1^2 + \frac{1-K}{1+K} x_2^2 \right) = 0 \quad (28.16)$$

ed integrando, infine:

$$x_1^2 + \frac{1-K}{1+K} x_2^2 = \text{cost} \quad (28.17)$$

E' questa un'equazione che deve valere in ciascun punto del contorno, e come è immediato vedere, essa è l'equazione di una ellisse.

Ed infatti, un'ellisse di semiassi a e b avrà equazione, in un riferimento con origine nel baricentro ed assi coordinati orientati secondo i semiassi:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad (28.18)$$

e dal paragone tra la (28.17) e la (28.18) puo' ricavarsi la costante K :

$$K = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \quad (28.19)$$

Si puo' allora concludere che la funzione di torsione per una trave a sezione ellittica, di semiassi a e b , è fornita da:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x_1 x_2 + \text{cost} \quad (28.20)$$

Si calcoli l'integrale di Dirichlet, come definito nel precedente Capitolo:

$$\begin{aligned} D(\Psi) &= \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_1 \right) dA = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \int_{\Sigma} (x_2^2 - x_1^2) dA = \\ &= \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} (I_{11} - I_{22}) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \frac{\pi}{4} ab (b^2 - a^2) \end{aligned} \quad (28.21)$$

Ne segue che il fattore di torsione è pari a:

$$\begin{aligned} q &= \frac{I_p}{I_p - D(\Psi)} = \frac{\frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2)}{\frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2) - \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \frac{\pi}{4} ab (b^2 - a^2)} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2b^2} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (28.22)$$

avendo utilizzato l'espressione del momento di inerzia polare, come calcolato nel Capitolo 22:

$$I_p = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2) \quad (28.23)$$

L'angolo specifico di torsione è quindi fornito da:

$$\theta' = q \frac{M_t}{GI_p} = \frac{M_t}{G} \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \quad (28.24)$$

Lo stato tensionale

Lo stato tensionale è fornito, dopo brevi calcoli, da:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= q \frac{M_t}{I_p} \left(-x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) = -2 \frac{M_t}{ab^3 \pi} x_2 = -2 \frac{M_t}{Ab^2} x_2 \\ \sigma_{23} &= q \frac{M_t}{I_p} \left(x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) = 2 \frac{M_t}{a^3 b \pi} x_1 = 2 \frac{M_t}{Aa^2} x_1\end{aligned}\quad (28.25)$$

con $A = \pi ab$ area dell'ellisse. La tensione tangenziale avrà risultante:

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = 2 \frac{M_t}{A} \sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4}} \quad (28.26)$$

Si può dimostrare ora il seguente:

Teorema 17. Sia $P = (x_1^P, x_2^P)$ un punto della sezione ellittica di equazione:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (28.27)$$

e sia AB il diametro contenente P . Sia $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normale al contorno in A . Il vettore $\boldsymbol{\tau}_n$ delle tensioni tangenziali in P è diretto secondo la tangente t al contorno in A , come illustrato in Figura 28.4.

Dimostrazione. Basta dimostrare che il prodotto scalare tra il vettore $\boldsymbol{\tau}_n$ delle tensioni tangenziali, valutato in P , ed il vettore \mathbf{n} della normale al contorno in A è nullo. Si ha allora:

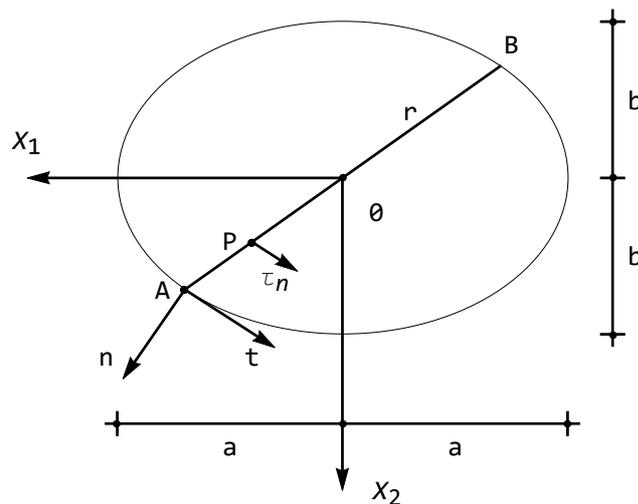


Figura 28.4: L'andamento della tensione tangenziale

$$\boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{n} = \sigma_{13}(x_1^P, x_2^P) n_1 + \sigma_{23}(x_1^P, x_2^P) n_2 \quad (28.28)$$

E' d'altro canto noto che i coseni direttori della normale \mathbf{n} al contorno in A sono proporzionali alle derivate della funzione $f(x_1, x_2)$ in A , e quindi:

$$\begin{aligned} n_1 &= k \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_A = 2k \frac{x_1^A}{a^2} \\ n_2 &= k \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_A = 2k \frac{x_2^A}{b^2} \end{aligned} \quad (28.29)$$

e quindi la (28.28) diviene:

$$\boldsymbol{\tau}_n \cdot \mathbf{n} = -2 \frac{M_t}{ab^3\pi} x_2^P 2k \frac{x_1^A}{a^2} + 2 \frac{M_t}{a^3b\pi} x_1^P 2k \frac{x_2^A}{b^2} \quad (28.30)$$

e poichè (cfr. Figura 28.5):

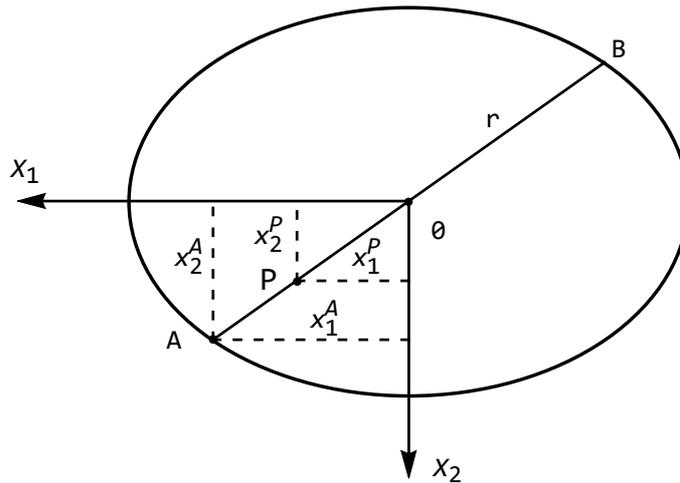


Figura 28.5: Similitudine geometrica per dimostrare la (28.30)

$$\frac{x_1^P}{x_2^P} = \frac{x_1^A}{x_2^A} \quad (28.31)$$

si ha l'asserto. \square

Su tutti i punti del generico diametro AB , il vettore $\boldsymbol{\tau}_n$ delle tensioni tangenziali è diretto secondo la tangente al contorno in A , o in B , ed ha andamento lineare lungo il diametro, annullandosi nel baricentro O , come schematizzato in Figura 28.6. Il valor massimo — relativamente al generico diametro AB — si attinge agli estremi del diametro stesso, ossia in A ed in B .

Ne segue ancora che la tensione tangenziale massima si ha agli estremi del diametro minore. Assumendo ad esempio che sia $a > b$ si ha, dalla (28.26):

$$\tau_{\max} = 2 \frac{M_t}{A} \sqrt{\frac{0}{a^4} + \frac{b^2}{b^4}} = 2 \frac{M_t}{Ab} = 2 \frac{M_t}{\pi ab^2} \quad (28.32)$$

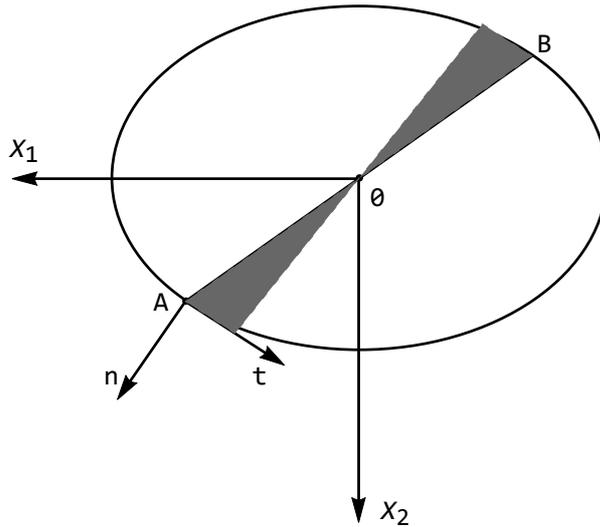


Figura 28.6: Lo stato tensionale lungo il generico diametro

Gli spostamenti da ingobbimento

Il Capitolo precedente porge i seguenti spostamenti da ingobbimento:

$$u_3 = q \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_1, x_2) = \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M_t}{G} x_1 x_2 \quad (28.33)$$

e quindi la sezione retta di equazione $x_3 = k$ si tramuta nella superficie di equazione:

$$\xi_3 = k + \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M_t}{G} x_1 x_2 \approx k + \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M_t}{G} \xi_1 \xi_2 = k - \sigma M_t \xi_1 \xi_2 \quad (28.34)$$

dove σ è una costante positiva per $a > b$. E' questa la superficie di un paraboloido iperbolico, le cui curve di livello sono riportate in Figura 28.7. In presenza di un momento torcente positivo, e nell'ipotesi in cui $a > b$, gli spostamenti u_3 sono positivi nei quadranti in cui x_1 ed x_2 sono di segno diverso, negativi altrove.

28.2.1 Alcune considerazioni pratiche

Partendo dall'espressione (28.24) dell'angolo specifico di torsione, e ricordando che l'area dell'ellisse è pari ad $A = \pi ab$ e che il momento polare è $I_p =$

$\frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2)$, si potrà scrivere:

$$\theta' = 4\pi^2 \frac{I_p}{A^4} \frac{M_t}{G} \quad (28.35)$$

da cui subito potrà dedursi l'espressione della rigidità torsionale della sezione ellittica:

$$C_t = \frac{M_t}{\theta'} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{GA^4}{I_p} \approx 0.0253 \frac{GA^4}{I_p} \quad (28.36)$$

o, generalizzando ad altre forme di sezione retta:

$$C_t = k \frac{GA^4}{I_p} \quad (28.37)$$

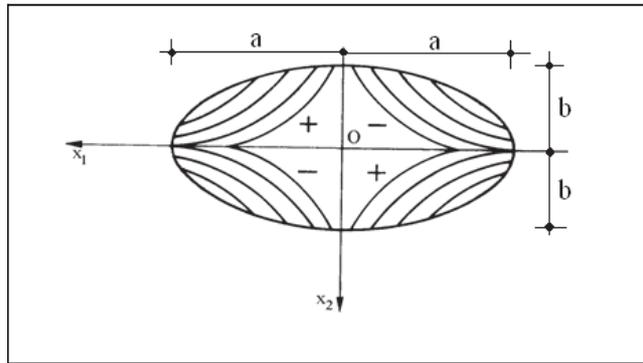


Figura 28.7: Gli spostamenti da ingobbimento della sezione ellittica

Il coefficiente numerico k varia, per le principali sezione compatte, in un intervallo abbastanza limitato. Secondo De Saint-Venant, infatti¹ si ha:

$$0.0228 \leq k \leq 0.0260 \quad (28.38)$$

e quindi può accettarsi la formula approssimata, valida per tutte le sezioni compatte:

$$C_t = 0.025 \frac{GA^4}{I_p} \quad (28.39)$$

Analogamente, moltiplicando e dividendo la (28.35) per il momento di inerzia polare, si ha:

$$\theta' = 4\pi^2 \frac{I_p^2}{A^4} \frac{M_t}{GI_p} = q \frac{M_t}{GI_p} \quad (28.40)$$

¹Sur une formule donnant approximativement le moment de torsion, Comptes Rendus, 88, 142-147 (1879)

da cui subito l'espressione del fattore di torsione per la sezione ellittica:

$$q = 4\pi^2 \frac{I_p^2}{A^4} \quad (28.41)$$

Nello stesso ordine di idee che ha condotto alla formula approssimata (28.39), potrà accettarsi la formula approssimata del fattore di torsione, valida per qualsiasi sezione compatta:

$$q = 40 \frac{I_p^2}{A^4} \quad (28.42)$$

Capitolo 29

Taglio

Si studia in questo Capitolo l'ultimo caso di sollecitazione elementare, caratterizzata da una distribuzione di tensioni normali e tangenziali:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (29.1)$$

ipotizzando che la tensione normale sia funzione lineare in x_2 sulla sezione di sinistra:

$$\sigma_{33}(x_3 = 0) = cx_2 \quad (29.2)$$

e che si annulli sulla sezione di destra:

$$\sigma_{33}(x_3 = L) = 0 \quad (29.3)$$

Assumendo infine una variazione lineare di σ_{33} lungo l'asse, si giunge alla ipotizzata forma della tensione normale:

$$\sigma_{33}(x_2, x_3) = cx_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \quad (29.4)$$

Le tensioni tangenziali, per rispettare le prime due equazioni indefinite dell'equilibrio elastico non dovranno dipendere dalla x_3 :

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \sigma_{13}(x_1, x_2) \\ \sigma_{23} &= \sigma_{23}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (29.5)$$

29.1 La deduzione degli spostamenti

Dalla distribuzione di tensioni (29.1) si trae lo stato deformativo:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} = -\frac{\nu}{E}cx_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} = -\frac{\nu}{E}cx_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ e_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{E} = \frac{c}{E}cx_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \end{aligned} \quad (29.6)$$

$$\begin{aligned} e_{12} &= 0 \\ e_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{2G} = e_{13}(x_1, x_2) \\ e_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{2G} = e_{23}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

I corrispondenti spostamenti potranno calcolarsi integrando le sei seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= -\frac{\nu}{E}cx_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\frac{\nu}{E}cx_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{c}{E}x_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= \frac{\sigma_{13}}{G} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= \frac{\sigma_{23}}{G} \end{aligned} \tag{29.7}$$

Dalle prime tre si trae subito:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{E}cx_1x_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \phi_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{2E}cx_2^2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \phi_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= \frac{c}{E}x_2x_3 - \frac{c}{2EL}x_2x_3^2 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{29.8}$$

Utilizzando le prime due delle (29.8), la quarta delle (29.7) porge:

$$-\frac{\nu}{E}cx_1 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = 0 \tag{29.9}$$

e quindi:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = \frac{\nu}{E}cx_1 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \tag{29.10}$$

Separando le funzioni di (x_1, x_3) dalle funzioni di x_2 si giunge alle due condizioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} &= \frac{\nu}{E}cx_1 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) = 0 \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \tag{29.11}$$

che possono integrarsi, a fornire:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{\nu}{2E}cx_1^2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \psi_2(x_3) \\ \phi_1 &= \phi_1(x_3) \end{aligned} \tag{29.12}$$

La seconda componente di spostamento subisce una prima correzione, divenendo:

$$u_2 = -\frac{\nu}{2E}c(x_2^2 - x_1^2)\left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \psi_2(x_3) \quad (29.13)$$

Dall'ultima delle (29.7) può trarsi ora:

$$\frac{\nu}{2EL}cx_2^2 - \frac{\nu}{2EL}cx_1^2 + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} + \frac{c}{E}x_3 - \frac{c}{2EL}x_3^2 + \frac{\partial\phi_3}{\partial x_2} = \frac{\sigma_{23}}{G} \quad (29.14)$$

Si dovranno separatamente uguagliare tra loro le funzioni di (x_1, x_2) e le funzioni di x_3 . Si hanno pertanto le due condizioni:

$$\sigma_{23} = \frac{G\nu}{2EL}c(x_2^2 - x_1^2) + G\frac{\partial\phi_3}{\partial x_2} \quad (29.15)$$

e:

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} = -\frac{c}{E}x_3 + \frac{c}{2EL}x_3^2 \quad (29.16)$$

A sua volta, quest'ultima condizione permette di scrivere:

$$\psi_2 = -\frac{c}{2E}x_3^2 + \frac{c}{6EL}x_3^3 + \chi_2 \quad (29.17)$$

dove χ_2 è una costante. La seconda componente di spostamento subisce una seconda correzione, divenendo:

$$u_2 = -\frac{\nu}{2E}cx_2^2\left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \frac{\nu}{2E}cx_1^2\left(1 - \frac{x_3}{L}\right) - \frac{c}{2E}x_3^2 + \frac{c}{6EL}x_3^3 + \chi_2 \quad (29.18)$$

ossia, semplificando:

$$u_2 = -\frac{\nu}{2E}c\left(x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu}\right) + \frac{c}{E}\left(\frac{x_3^2}{6} + \nu\frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right)\frac{x_3}{L} + \chi_2 \quad (29.19)$$

Infine, dalla penultima delle (29.7) si deduce:

$$\frac{\nu}{EL}cx_1x_2 + \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1} = \frac{\sigma_{13}}{G} \quad (29.20)$$

ed uguagliando separatamente le funzioni di (x_1, x_2) e di x_3 si giunge a scrivere:

$$\sigma_{13} = \frac{\nu G}{EL}cx_1x_2 + G\frac{\partial\phi_3}{\partial x_1} \quad (29.21)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} = 0 \longrightarrow \phi_1 = \text{cost} \quad (29.22)$$

La terna di spostamenti in esame potrà quindi esprimersi come:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{E}cx_1x_2\left(1 - \frac{x_3}{L}\right) + \phi_1 \\ u_2 &= -\frac{\nu}{2E}c\left(x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu}\right) + \frac{c}{E}\left(\frac{x_3^2}{6} + \nu\frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right)\frac{x_3}{L} + \chi_2 \\ u_3 &= \frac{c}{E}x_2x_3 - \frac{c}{2EL}x_2x_3^2 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (29.23)$$

Si può concludere che il campo di spostamenti $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \chi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ rappresenta una traslazione rigida, e può essere trascurato, e quindi la terna definitiva di spostamenti sarà:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{2E} c \left(x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu}\right) + \frac{c}{E} \left(\frac{x_3^2}{6} + \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right) \frac{x_3}{L} \\ u_3 &= \frac{c}{E} x_2 x_3 - \frac{c}{EL} \left(\frac{x_2 x_3^2}{2} + \Phi(x_1, x_2)\right) \end{aligned} \quad (29.24)$$

avendo definito per comodità una nuova funzione Φ , detta *funzione di taglio*:

$$\Phi(x_1, x_2) = -\frac{EL}{c} \phi_3 \quad (29.25)$$

29.2 La deduzione della funzione Φ

La terna di spostamenti (29.24) conduce, per il modo in cui è stata costruita, alle tensioni:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{Gc}{EL} \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \\ \sigma_{23} &= G \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{Gc}{EL} \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \\ \sigma_{33} &= c x_2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \end{aligned} \quad (29.26)$$

Le prime due equazioni dell'equilibrio elastico sono soddisfatte, in quanto le tensioni tangenziali non dipendono dalla variabile x_3 . La terza equazione:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = 0 \quad (29.27)$$

si traduce in un'equazione da soddisfare nel dominio piano della sezione retta:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = -2x_2 \quad (29.28)$$

Sul contorno Γ occorrerà soddisfare l'unica condizione ai limiti non identicamente nulla:

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0 \quad (29.29)$$

che si traduce nello scrivere:

$$\left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) n_1 + \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) n_2 = 0 \quad (29.30)$$

ossia in una condizione sulla derivata normale al contorno della funzione Φ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nu x_1 x_2 \frac{dx_1}{dn} + \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \frac{dx_2}{dn} \quad (29.31)$$

Il risultante problema ai limiti per la funzione di taglio Φ è simile al problema ai limiti già incontrato nell'esame della torsione, e per esso valgono analoghi teoremi.

29.3 La deduzione delle caratteristiche

Sulla base di destra Σ_2 la tensione normale si annulla, e quindi si ha:

$$F_3^{(2)} = \mathcal{M}_1^{(2)} = \mathcal{M}_2^{(2)} = 0 \quad (29.32)$$

e poi ancora, secondo le definizioni:

$$\begin{aligned} F_1^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} \sigma_{13} dA = \frac{Gc}{EL} \int_{\Sigma_2} \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) dA \\ F_2^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} \sigma_{23} dA = \frac{Gc}{EL} \int_{\Sigma_2} \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) dA \\ \mathcal{M}_3^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) dA \\ &= \frac{Gc}{EL} \int_{\Sigma_2} \left[\left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) x_1 - \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) x_2 \right] dA \end{aligned} \quad (29.33)$$

ossia, semplificando:

$$\mathcal{M}_3^{(2)} = \frac{Gc}{EL} \int_{\Sigma_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} x_1 \right) dA - \frac{Gc\nu}{2EL} \int_{\Sigma_2} (x_1^3 + x_1 x_2^2) dA \quad (29.34)$$

Sulla base di sinistra, invece, la tensione normale assume il valore $\sigma_{33} = cx_2$ e di conseguenza sorgono le caratteristiche:

$$F_3^{(1)} = - \int_{\Sigma_1} \sigma_{33} dA = -c \int_{\Sigma_2} x_2 dA = 0 \quad (29.35)$$

se l'origine degli assi si assume coincidente con il baricentro della sezione,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{(1)} &= - \int_{\Sigma_1} \sigma_{33} x_2 dA = -c \int_{\Sigma_1} x_2^2 dA = -cI_{11} \\ \mathcal{M}_2^{(1)} &= \int_{\Sigma_1} \sigma_{33} x_1 dA = c \int_{\Sigma_1} x_1 x_2 dA = cI_{12} \end{aligned} \quad (29.36)$$

Per l'equilibrio dell'intera trave, poi, dovrà essere:

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} &= -F_1^{(2)} \\ F_2^{(1)} &= -F_2^{(2)} \\ \mathcal{M}_3^{(1)} &= -\mathcal{M}_3^{(2)} \end{aligned} \quad (29.37)$$

ed anche:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{(1)} &= F_2^{(2)} L \\ \mathcal{M}_2^{(1)} &= -F_1^{(2)} L \end{aligned} \quad (29.38)$$

Le caratteristiche della sollecitazione esterna sono quindi quelle di Figura 29.1: sulla base di destra agiscono due forze secondo gli assi X_1 ed X_2 ed una coppia torcente, mentre sulla base di sinistra agiscono due forze secondo gli assi X_1 ed X_2 , uguali e contrarie a quelle agenti sulla sezione di sinistra, una coppia torcente uguale e contraria a quella agente su Σ_2 , e due coppie flettenti secondo gli assi X_1 ed X_2 .

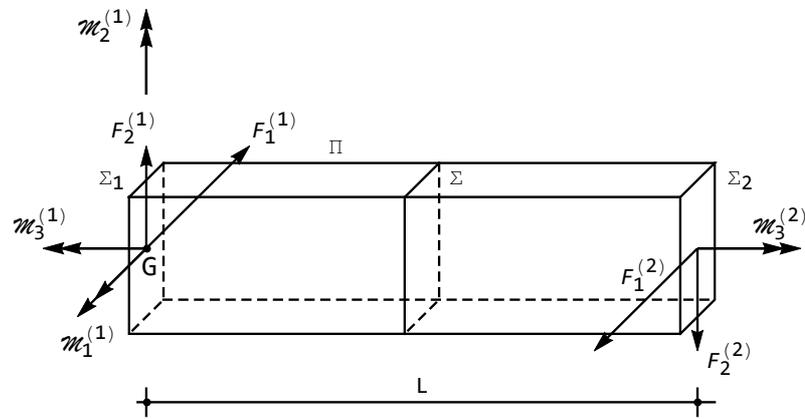


Figura 29.1: Le caratteristiche della sollecitazione esterna per il quinto caso di De Saint-Venant

Le corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna, sulla generica sezione retta Σ , sono fornite da:

- uno sforzo di taglio $T_1 = F_1^{(2)}$, costante lungo la trave
- uno sforzo di taglio $T_2 = F_2^{(2)}$, costante lungo la trave
- un momento torcente $M_t = M_3^{(2)}$, costante lungo la trave
- un momento flettente $M_1 = -T_2 (L - x_3)$ linearmente variabile lungo l'asse
- un momento flettente $M_2 = T_1 (L - x_3)$ linearmente variabile lungo l'asse

Le due forze di taglio possono comporsi in una singola forza di intensità $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$ agente secondo una retta π e le due coppie flettenti possono ridursi ad una singola coppia M flettente di modulo $T (L - x_3)$ il cui asse è normale al piano passante per π e parallelo all'asse della trave. Si giunge così alla situazione di Figura 29.2b). Un'ulteriore riduzione può operarsi facendo agire la forza T a distanza d_t dal baricentro, con d_t tale che risulti $M_t = T d_t$, giungendo alla situazione di Figura 29.2c). Si noti che l'asse di sollecitazione flessionale s , per quanto detto, è parallelo alla retta d'azione dello sforzo di taglio.

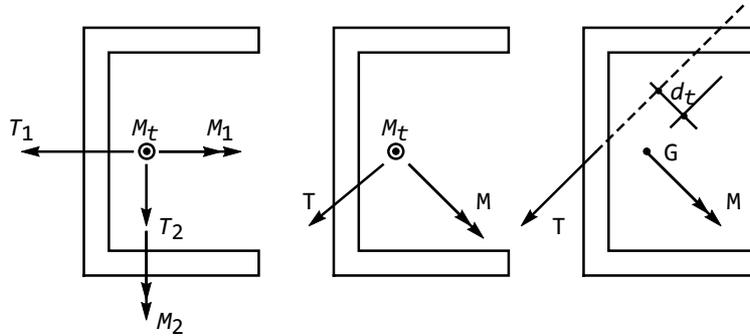


Figura 29.2: Le caratteristiche della sollecitazione interna su una generica sezione retta

Talvolta questa sollecitazione prende il nome, per ovvi motivi, di *sollecitazione di flessione, taglio e torsione*, e talvolta anche di *sollecitazione di flessione non uniforme*.

29.4 La forma finale di spostamenti e tensioni

Dalla (29.36) si trae un'espressione della costante c :

$$c = -\frac{\mathcal{M}_1^{(1)}}{I_{11}} \quad (29.39)$$

e poichè, come noto, $\mathcal{M}_1^{(1)} = -M_1(x_3 = 0)$, si ottiene anche:

$$c = \frac{M_1(x_3 = 0)}{I_{11}} = -\frac{T_2 l}{I_{11}} \quad (29.40)$$

Sostituendo il valore di questa costante nell'espressione degli spostamenti (29.24), ed operando qualche semplificazione si ottiene la forma finale degli spostamenti:

$$\begin{aligned} u_1 &= \nu \frac{T_2}{EI_{11}} x_1 x_2 (l - x_3) \\ u_2 &= \nu \frac{T_2}{2EI_{11}} \left(x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu} \right) (l - x_3) + \frac{T_2}{EI_{11}} \frac{x_3^3}{3} \\ u_3 &= -\frac{T_2}{EI_{11}} x_2 x_3 \left(l - \frac{x_3}{2} \right) + \frac{T_2}{EI_{11}} \Phi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (29.41)$$

Le tensioni, infine, saranno fornite da:

$$\sigma_{13} = -\frac{G}{E} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{23} &= -\frac{G}{E} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \\ \sigma_{33} &= -\frac{T_2}{I_{11}} x_2 (l - x_3)\end{aligned}\tag{29.42}$$

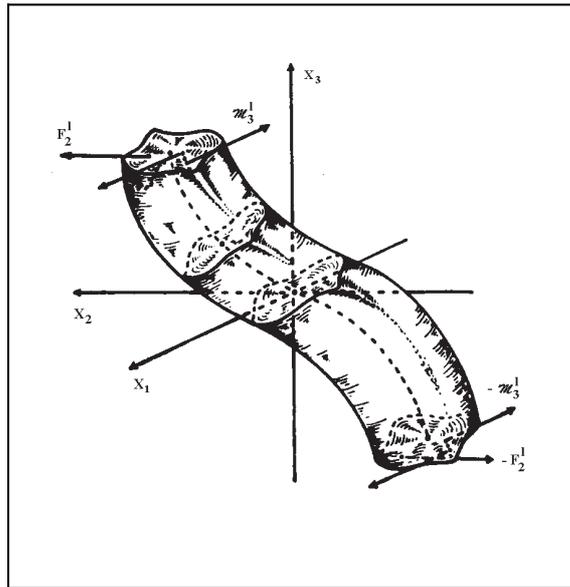


Figura 29.3: La sollecitazione da taglio, adattata da G.Fichera, *Metodi matematici nuovi nella Fisica Matematica classica*

29.5 L'energia di deformazione

In base alla definizione, può calcolarsi l'energia di deformazione connessa alla sollecitazione da taglio:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e} \, dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{33} e_{33} + 2\sigma_{13} e_{13} + 2\sigma_{23} e_{23}) \, dV = L_f + L_t \tag{29.43}$$

Si è suddivisa l'energia di deformazione in una aliquota flessione, in termini di tensioni normali, ed in una aliquota tagliante, in termini di tensioni tangenziali. Per la prima si ha agevolmente:

$$\begin{aligned}L_f &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} \, dV = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 \, dV = \frac{T_2^2}{2EI_{11}^2} \int_0^L (L - x_3)^2 \int_{\Sigma} x_2^2 \, dA \, dx_3 \\ &= \frac{T_2^2}{6EI_{11}} L^3\end{aligned}\tag{29.44}$$

mentre la seconda può esprimersi come:

$$L_t = \frac{1}{2} \int_V (2\sigma_{13}e_{13} + 2\sigma_{23}e_{23}) \, dV = \frac{1}{2G} \int_V (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \, dV =$$

$$\frac{G}{2E^2} \frac{T_2^2 L}{I_{11}^2} \int_{\Sigma} \left(\left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right) \, dA \quad (29.45)$$

ed utilizzando la nota relazione $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ si potrà infine scrivere:

$$L_t = \frac{1}{2EI_{11}^2} \frac{T_2^2 L}{2(1+\nu)} \int_{\Sigma} \left(\left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right) \, dA \quad (29.46)$$

Volendo scrivere l'energia di deformazione tagliante nella forma:

$$L_t = \frac{\kappa}{2} \frac{T_2^2 L}{GA} \quad (29.47)$$

occorrerà introdurre un *fattore di taglio*, fornito da:

$$\kappa = \frac{GA}{2EI_{11}^2(1+\nu)} \int_{\Sigma} \left(\left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right) \, dA \quad (29.48)$$

Si noti che l'energia di deformazione flessionale è proporzionale alla luce della trave elevata al cubo, mentre l'energia di deformazione da taglio è proporzionale alla luce della trave. Ne segue che per travi snelle l'energia flessionale predomina nettamente, mentre per travi tozze l'energia tagliante diviene non trascurabile.

29.6 Lo studio delle tensioni tangenziali

A somiglianza di quanto indicato per la sollecitazione di torsione, è utile calcolare la divergenza ed il rotore del campo vettoriale delle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}_n = (\sigma_{13}, \sigma_{23})$. Si ha, a partire dalle definizioni delle tensioni tangenziali:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_n = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \right) =$$

$$- \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} x_2 + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} x_2 + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \quad (29.49)$$

ed infine, tenendo conto della condizione (29.31):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_n = -\frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} x_2 - \frac{1}{(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} x_2 = -\frac{T_2}{I_{11}} x_2 \quad (29.50)$$

Allo stesso risultato si può giungere attraverso la terza equazione indefinita dell'equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (29.51)$$

che fornisce:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_n = -\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = -\frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{T_2}{I_{11}} x_2 (L - x_3) \right) = -\frac{T_2}{I_{11}} x_2 \quad (29.52)$$

Le tre componenti del rotore di $\boldsymbol{\tau}_n$ si possono calcolare in base alla definizione:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_n)_1 &= -\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ (\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_n)_2 &= \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ (\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_n)_3 &= \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2} = \\ &= -\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left(-\nu x_1 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} - \nu x_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \\ &= \frac{\nu}{1+\nu} \frac{T_2}{I_{11}} x_1 \end{aligned} \quad (29.53)$$

Alternativamente, la terza delle (29.53) può ottenersi attraverso l'utilizzo delle equazioni di congruenza interna, e più precisamente dal secondo gruppo di esse. Ed infatti, dalle tre equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (29.54)$$

si osserva subito che l'ultima è identicamente soddisfatta, mentre le altre due si semplificano in:

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} \right) \quad (29.55)$$

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} \right) \quad (29.56)$$

e poichè:

$$e_{11} = e_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{33} = \nu\frac{T_2}{EI_{11}}x_2(l-x_3) \quad (29.57)$$

le (29.54) divengono:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_2}\right) &= -\nu\frac{T_2}{EI_{11}} \\ \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_1}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (29.58)$$

ed anche, ovviamente:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_1}\right) = 0 \quad (29.59)$$

Ne segue che la terza componente del rotore di $\boldsymbol{\tau}_n$ non dipende da x_2 e da x_3 , mentre dipende linearmente da x_1 . Si potrà quindi scrivere:

$$(\text{rot } \boldsymbol{\tau}_n)_3 = 2G\nu\frac{T_2}{EI_{11}}x_1 + k = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{T_2}{I_{11}}x_1 + k \quad (29.60)$$

Alla costante di integrazione k può darsi un significato fisico osservando che l'equazione precedente è stata tratta — a partire dalle equazioni di congruenza interna — senza specificare la posizione dello sforzo di taglio T_2 , ma solo la sua direzione. Se quindi la distanza tra la retta d'azione di T_2 ed il baricentro è pari proprio a d_t , allora sono valide le (29.53), e $k = 0$, mentre se la retta di azione di T_2 viene spostata, sorge una sollecitazione aggiuntiva di torsione, caratterizzata da una coppia torcente:

$$\mathcal{M}_3^{(2)} = T_2(d-d_t) \quad (29.61)$$

Tale sollecitazione *aggiuntiva* corrisponde ad uno stato tensionale tangenziale a rotore costante, e pari proprio a $k = 2G\theta'$. Ricordando poi che $\theta' = \frac{M_t}{C_t}$, si potrà scrivere:

$$k = 2\frac{G}{C_t}T_2(d-d_t) \quad (29.62)$$

e quindi la terza delle (29.53) diviene:

$$(\text{rot } \boldsymbol{\tau})_3 = \frac{\nu}{1+\nu}\frac{T_2}{I_{11}}x_1 + 2\frac{G}{C_t}T_2(d-d_t) \quad (29.63)$$

Capitolo 30

La teoria di Jourawsky

Nel Capitolo precedente si è illustrata la trattazione del quinto e sesto caso di sollecitazione semplice di De Saint–Venant, giungendo a definire uno stato tensionale caratterizzato da una tensione normale variabile linearmente lungo l’asse della trave e da un campo vettoriale piano di tensioni tangenziali. Tuttavia, la determinazione effettiva di tale campo vettoriale richiede la conoscenza della funzione di taglio $\Phi(x_1, x_2)$, soluzione di un problema di Dini-Neumann definito sulla sezione retta, e tale strada risulta poco agevole, conducendo a formule troppo complesse da poter essere utilizzate nella pratica tecnica.

Si illustra pertanto in questo Capitolo una trattazione approssimata per la ricerca delle tensioni tangenziali¹, che rinuncia a soddisfare la condizione di congruenza, sulla terza componente del rotore, limitandosi a soddisfare le condizioni di equilibrio. Tale teoria, precedente la soluzione esatta di De Saint–Venant, è dovuta all’ingegnere russo D.J. Jourawski, ed è anche talvolta attribuita al tedesco Bredt².

30.1 La trattazione di Jourawski

Si consideri un solido del tipo trave, soggetto a momento flettente e taglio, e si isoli un elemento di trave dV , identificato da due sezioni rette qualsiasi a distanza x_3 ed $x_3 + dx_3$ dalla base di sinistra. Poi si identifichi la porzione dV' di

¹Jourawski, D. J., “Sur la résistance d’un corps prismatique...” *Annales des Ponts et Chaussées, Mémoires et Documents*, 32 serie, vol. 12, parte 2, 1856, págs. 328–351

²Traggo queste notizie da S.P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Company 1953, pagg. 141–142:

Jourawsky [1821-1891] si diplomò nel 1842 presso l’Istituto di Ingegneria delle Comunicazioni di S.Pietroburgo, dove ebbe per professori M.V. Ostrogradsky (matematica) e A.T. Kupffer (resistenza dei materiali). Sviluppò la teoria degli sforzi da taglio nelle sezioni rettangolari durante la progettazione dei ponti in legno per la ferrovia Mosca-S.Pietroburgo, negli anni 1844-50, presentandola all’Accademia russa delle scienze nel 1854. Per essa, ottenne il premio Demidoff.



Figura 30.1: Dmitrij Ivanovič Jouravskij

dV , ottenuta segnando dV con un piano $ABCD$ parallelo al piano (X_1, X_3) che divide la sezione retta Σ mediante una corda b , come illustrato in Figura 30.2.

Come illustrato in Figura 30.3, l'elemento di volume dV' è soggetto alle tensioni normali σ_{33} , positive se di trazione, agenti sulle due facce verticali del volume, ad una distribuzione di tensioni tangenziali σ_{23} agenti sul piano $ABCD$, positive se dirette in senso contrario all'asse della trave (atteso che la normale uscente dal piano è orientata in senso contrario all'asse X_2), e ad una distribuzione di tensioni tangenziali σ_{32} agenti sui piani verticali e dirette — secondo la convenzione sui segni — verso l'alto sulla sezione a distanza x_3 dalla base, e verso il basso sulla sezione a distanza $x_3 + dx_3$ dalla base di sinistra. Imponendo l'equilibrio del volume dV' alla traslazione lungo l'asse X_3 della trave si ha:

$$-\int_{\Sigma'} \sigma_{33}(x_3) dA + \int_{\Sigma'} \sigma_{33}(x_3 + dx_3) dA - \int_{ABCD} \sigma_{23} dA = 0 \quad (30.1)$$

dove Σ' è l'area della sezione retta sottostante la corda b . Si potrà poi sfruttare l'arbitrarietà di dx_3 per scrivere:

$$\sigma_{33}(x_3 + dx_3) = \sigma_{33}(x_3) + \frac{\partial \sigma_{33}(x_3)}{\partial x_3} dx_3 \quad (30.2)$$

trascurando i contributi di ordine superiore. Ne segue che la (30.1) potrà scriversi:

$$\int_{\Sigma'} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3 dA - \int_{ABCD} \sigma_{23} dA = 0 \quad (30.3)$$

e poichè, come è noto dal Capitolo precedente:

$$\sigma_{33} = -\frac{T_2}{I_{11}} x_2 (l - x_3) \quad (30.4)$$

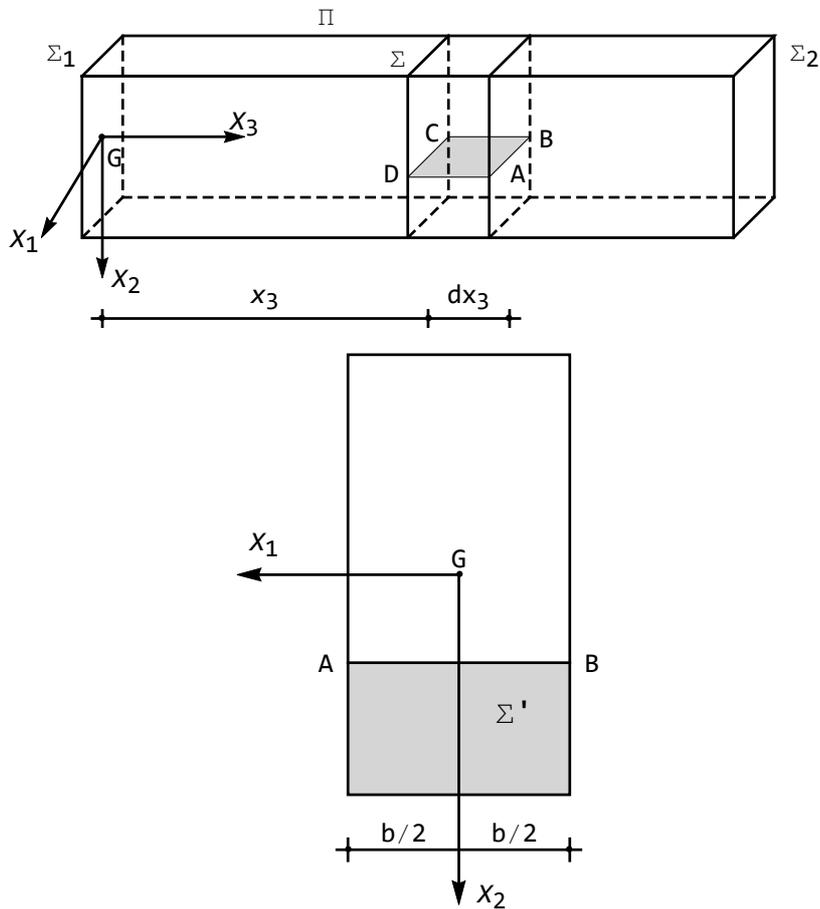


Figura 30.2: Il volume dV' , e la corrispondente sezione Σ'

si ha:

$$\frac{T_2}{I_{11}} dx_3 \int_{\Sigma'} x_2 dA - \int_{ABCD} \sigma_{23} dA = 0 \quad (30.5)$$

Indicando con S'_1 il momento statico della parte di sezione retta Σ' rispetto all'asse X_1 baricentrico si ha poi:

$$\frac{T_2 S'_1}{I_{11}} dx_3 - \int_{ABCD} \sigma_{23} dA = 0 \quad (30.6)$$

Infine, si utilizza la fondamentale:

Ipotesi di Jourawsky - La tensione tangenziale σ_{23} si può supporre costante sul piano $ABCD$

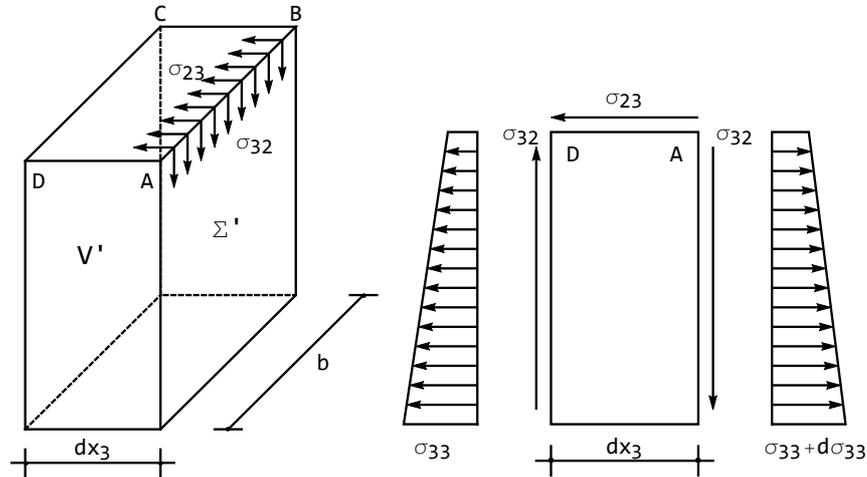


Figura 30.3: L'elemento di trave da equilibrare alla Jourawski e le tensioni su di esso agenti

In questa ipotesi, l'integrale è facilmente risolvibile, ottenendo:

$$\frac{T_2 S'_1}{I_{11}} dx_3 - \sigma_{23} b dx_3 = 0 \quad (30.7)$$

Data l'arbitrarietà di dx_3 si giunge infine alla *formula di Jourawski*:

$$\sigma_{23} = \frac{T_2 S'_1}{I_{11} b} \quad (30.8)$$

che permette il calcolo approssimato della componente tangenziale di tensione σ_{23} senza conoscere la funzione di taglio Φ .

L'altra componente di tensione, σ_{13} , può calcolarsi in base alla terza equazione indefinita dell'equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (30.9)$$

Utilizzando le (30.4) e le (30.8) si ha quindi:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = \frac{T_2}{I_{11}} x_2 - \frac{T_2}{I_{11}} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{S'_1}{b} \right) = \frac{T_2}{I_{11}} x_2 - \frac{T_2}{I_{11} b} \frac{\partial S'_1}{\partial x_2} + \frac{T_2 S'_1}{I_{11} b^2} \frac{\partial b}{\partial x_2} \quad (30.10)$$

D'altro canto sarà possibile calcolare la derivata del momento statico S'_1 rispetto ad x_2 :

$$\frac{\partial S'_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^b \int_{x_2}^{h_1} \xi_2 dA = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{x_2}^{h_1} b(\xi_2) \xi_2 d\xi_2 = -b x_2 \quad (30.11)$$

dove h_1 è la distanza tra l'intradosso e l'asse neutro. Ne segue che la (30.10) si semplifica in:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} = \frac{T_2 S'_1}{I_{11} b^2} \frac{\partial b}{\partial x_2} \quad (30.12)$$

da cui, integrando:

$$\sigma_{13} = \frac{T_2 S'_1}{I_{11} b} \frac{\partial b}{\partial x_2} \frac{x_1}{b} + C \quad (30.13)$$

La costante di integrazione rappresenta l'eventuale valore della tensione sull'asse x_2 , ed è spesso — per ragioni di simmetria — nulla. In tal caso si giunge, utilizzando la (30.8), alla formula di Kharlab³:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} \frac{\partial b}{\partial x_2} \frac{x_1}{b} \quad (30.14)$$

Una formula analoga si ottiene considerando che la σ_{13} deve variare linearmente lungo x_1 , come può riconoscersi derivando opportunamente la terza equazione indefinita dell'equilibrio::

$$\frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1^2} = 0 \quad (30.15)$$

Conoscendo quindi due valori di σ_{13} lungo la corda b , di conseguenza, si può ricavare la σ_{13} in qualsiasi altro punto. Ma nei punti estremi A e B della corda b , (cfr. Figura 30.4) occorre che sia verificata la condizione di equilibrio:

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0 \quad (30.16)$$

e quindi la tensione σ_t risultante di σ_{13} e σ_{23} dovrà essere tangente al contorno, come già noto dalla teoria generale di De Saint-Venant. Questo risultato permette di ricavare l'andamento di σ_{13} . Se infatti le tangenti al contorno in A ed in B si incontrano nel punto Q , la σ_{13} in un qualsiasi altro punto R di AB può esser determinata dalla conoscenza della direzione del vettore σ_t , e del valore della sua componente verticale σ_{23} . Se α è l'angolo formato tra RQ e l'asse x_2 , si ha:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} \tan \alpha \quad (30.17)$$

Il caso generale

La teoria fin qui discussa è caratterizzata dall'aver scelto la corda $b = AB$ parallelamente all'asse neutro X_1 , e quindi un piano $ABCD$ parallelo al piano coordinato (X_1, X_3) . Tuttavia l'ipotesi di Jourawski può ritenersi valida su qualunque piano (Figura 30.5), come si illustrerà in questo paragrafo.

³La formula é dedotta in Karlab V.D., *On tangential stresses in the elementary theory of planar bending* (in Russian) in: *Researches in mechanics of structural constructions and materials*, Proceedings of Leningrad Institute of Civil Engineering, pp.92-95 (1991), ma la trattazione qui presentata segue V.Slivker, "Mechanics of Structural Elements", Springer (2007), pp. 715-728

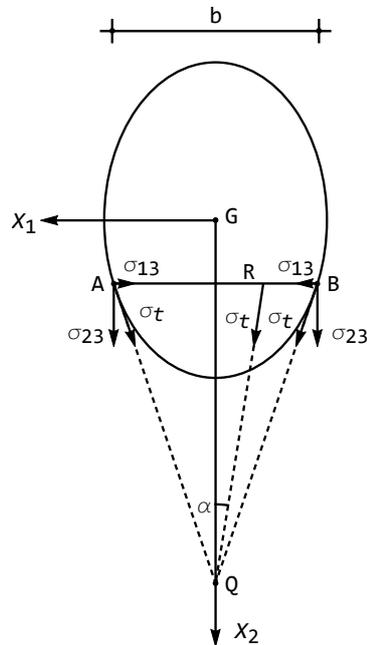


Figura 30.4: Il calcolo della componente σ_{13} di tensione

Scelta infatti una corda AB generica, atta ad identificare il volume di trave dV' , si fissi un sistema di riferimento locale (O, l, m, x_3) , con asse l lungo la corda, e l'asse m ad esso ortogonale, ed in modo che la terna (l, m, x_3) sia levogira. Ne segue che le componenti di tensione che ora entreranno in gioco per l'equilibrio del volume dV' lungo l'asse X_3 sono la tensione normale σ_{33} e la componente tangenziale σ_{m3} , come illustrato in Figura 30.6. La formula di Jourawsky si scrive ora:

$$\sigma_{m3} = \frac{T_2 S'_1}{I_{11} b} \quad (30.18)$$

Le componenti tangenziali σ_{l3} lungo la corda possono calcolarsi, a somiglianza di quanto detto nel caso particolare, partendo dalla terza equazione indefinita dell'equilibrio, che ora si scrive:

$$\frac{\partial \sigma_{l3}}{\partial l} + \frac{\partial \sigma_{m3}}{\partial m} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (30.19)$$

Si dovrà ora derivare due volte rispetto ad l , ottenendo:

$$\frac{\partial^3 \sigma_{l3}}{\partial l^3} + \frac{\partial^3 \sigma_{m3}}{\partial l^2 \partial m} + \frac{\partial^3 \sigma_{33}}{\partial l^2 \partial x_3} = 0 \quad (30.20)$$

Il secondo termine è nullo, in quanto σ_{m3} è per ipotesi costante lungo la corda, mentre il terzo termine è nullo perchè σ_{33} varia linearmente lungo la

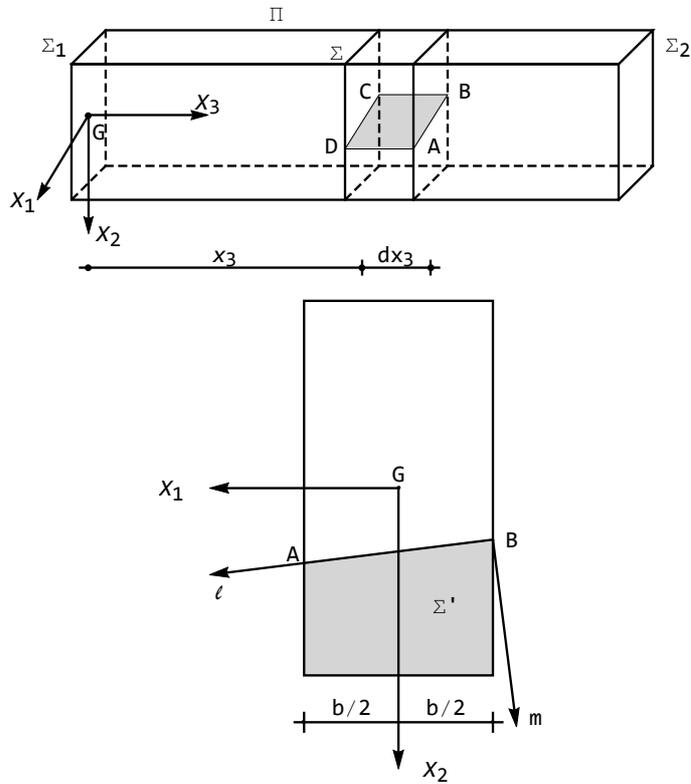


Figura 30.5: Il caso della corda generica

corda stessa. Ne segue che dovrà essere:

$$\frac{\partial^3 \sigma_{l3}}{\partial l^3} = 0 \quad (30.21)$$

e quindi l'andamento di σ_{l3} lungo la corda sarà parabolico:

$$\sigma_{l3} = al^2 + bl + c \quad (30.22)$$

Come già discusso, è possibile conoscere i due valori della σ_{l3} agli estremi della corda, sfruttando la conoscenza della direzione del vettore σ_t . Occorre ora un terzo valore, che potrà essere fornito dalla pendenza del diagramma in un punto qualsiasi. Tale pendenza si calcola, a partire dalla (30.19), come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{l3}}{\partial l} &= -\frac{\partial \sigma_{m3}}{\partial m} - \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = -\frac{T_2}{I_{11}} \left(\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{S'_1}{b} \right) - x_2 \right) \\ &= -\frac{T_2}{I_{11}} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial S'_1}{\partial m} - \frac{S'_1}{b^2} \frac{\partial b}{\partial m} - x_2 \right) \end{aligned} \quad (30.23)$$

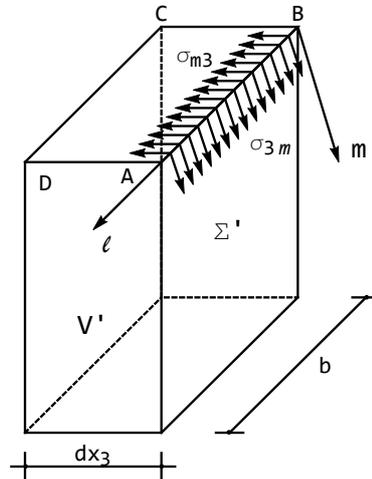


Figura 30.6: Le tensioni tangenziali nel caso della corda non parallela all'asse neutro

30.2 Il fattore di taglio

L'energia di deformazione tagliante si scriverà, adottando le espressioni approssimate di Jourawski:

$$L_t = \frac{1}{2} \int_V (2\sigma_{13}e_{13} + 2\sigma_{23}e_{23}) dV = \frac{1}{2G} \int_V (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) dV = \frac{T_2^2 l}{2GI_{11}^2} \int_{\Sigma} \frac{S_1'^2}{b^2} (1 + \tan^2 \alpha) dA \quad (30.24)$$

Volendo scrivere l'energia di deformazione tagliante nella forma:

$$L_t = \frac{\kappa T_2^2 l}{2GA} \quad (30.25)$$

occorrerà introdurre un *fattore di taglio*, fornito da:

$$\kappa = \frac{A}{I_{11}^2} \int_{\Sigma} \frac{S_1'^2}{b^2} (1 + \tan^2 \alpha) dA \quad (30.26)$$

30.3 La sezione rettangolare

Si consideri una trave a sezione rettangolare, e sia essa soggetta ad uno sforzo di taglio diretto secondo una delle direzioni centrali di inerzia, ad esempio la verticale, come illustrato in Figura 30.7. Ne segue che la flessione che sempre si accompagna allo sforzo di taglio sarà una flessione retta con asse di sollecitazione verticale, $s = X_2$ ed asse neutro X_1 .

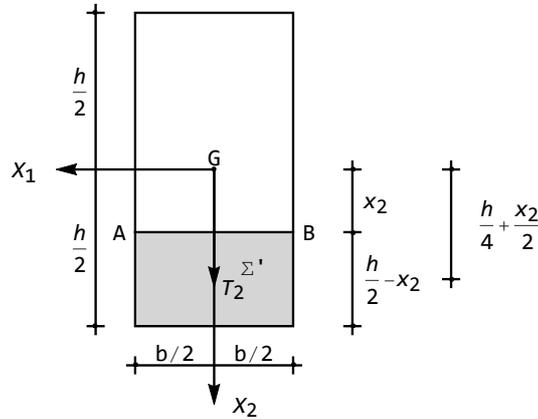


Figura 30.7: La sezione rettangolare soggetta a taglio

Identificata la generica corda parallela all'asse neutro, a distanza x_2 da esso, il momento statico dell'area ombreggiata rispetto all'asse X_1 è fornito da:

$$S'_1 = b \left(\frac{h}{2} - x_2 \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - x_2 \right) + x_2 \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (30.27)$$

e poichè il momento di inerzia baricentrico I_{11} dell'intera sezione rispetto all'asse X_1 è pari a:

$$I_{11} = \frac{bh^3}{12} \quad (30.28)$$

si ha subito, per la formula di Jourawski:

$$\sigma_{23} = \frac{T_2 S'_1}{I_{11} b} = \frac{6T_2}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (30.29)$$

La componente di tensione σ_{23} varia quindi con legge quadratica lungo l'altezza, si annulla agli estremi, dove $x_2 = \pm h/2$, e raggiunge il valore massimo in mezzeria, ossia in corrispondenza dell'asse neutro, dove $x_2 = 0$ (cfr Figura 30.8):

$$\sigma_{23 \max} = \frac{3T_2}{2bh} \quad (30.30)$$

La risultante delle tensioni σ_{23} è una forza T_r pari allo sforzo T_2 , baricentrale e diretta verso il basso:

$$T_r = \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_1 dx_2 = \frac{6T_2}{bh^3} \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) dx_1 dx_2 = T_2 \quad (30.31)$$

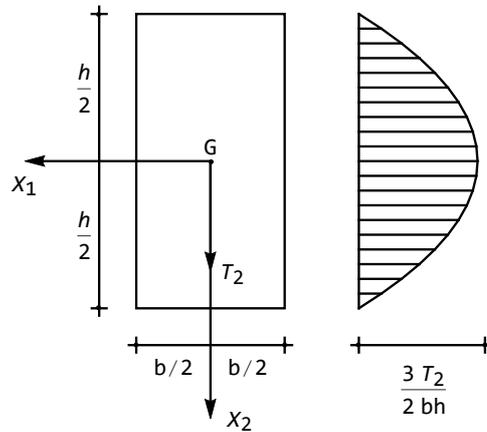


Figura 30.8: Il diagramma delle tensioni per la sezione rettangolare

La componente σ_{13} è ovunque nulla, poichè è ovunque $\alpha = 0$, mentre il fattore di taglio può calcolarsi come:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{A}{I_{11}^2} \int_{\Sigma} \frac{S_1'^2}{b^2} (1 + \tan^2 \alpha) \, dA = 12^2 \frac{bh}{b^2 h^6} \frac{1}{b^2} \int_{\Sigma} \frac{b^2}{4} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right)^2 \, dA \\ &= 12^2 \frac{1}{4h^5} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right)^2 \, dx_2 \end{aligned} \quad (30.32)$$

e svolgendo l'integrale si ha, in definitiva:

$$\kappa = \frac{6}{5} \quad (30.33)$$

Capitolo 31

La teoria di Eulero per la trave snella

In questa parte del corso si particolarizzano i risultati della teoria dell'elasticità e della teoria della trave di De Saint-Venant, studiando un solido monodimensionale piano ad asse rettilineo (trave piana). Dopo aver definito la geometria del solido, si specificano le possibili condizioni di carico, in modo da annullare identicamente le componenti di spostamento lungo un asse, e si pongono alcune ipotesi cinematiche, che costituiscono la base per la cosiddetta *teoria di Eulero-Bernoulli* per la trave. Infine, si particolarizzano le equazioni dell'equilibrio elastico giungendo a due equazioni differenziali disaccoppiate, con le corrispondenti condizioni ai limiti. A far ciò, si utilizza sia il principio degli spostamenti virtuali che il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, identificando così i vincoli che la teoria permette di utilizzare. Infine, si applica il metodo geometrico, o metodo diretto, illustrando in dettaglio i meccanismi di vincolo (incastro, appoggio e bipendolo).

Le due vie esposte in questa lezione sono ambedue antichissime, come può dedursi dalla seguente citazione di Eulero:

Poichè la fabbrica dell'Universo è perfetta, ed è il lavoro del più saggio Creatore, nulla accade nell'universo per cui non si manifesti qualche relazione di massimo o minimo.

Non c'è quindi alcun dubbio che qualunque cosa nell'universo possa spiegarsi in modo soddisfacente a partire dalle cause finali, con l'ausilio del metodo dei massimi e minimi, così come con l'ausilio delle stesse cause effettive.

Perciò, si aprono due vie per studiare i fenomeni naturali, uno tramite l'analisi delle cause effettive, comunemente chiamato metodo diretto, e l'altro per mezzo delle cause finali¹

¹L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausannae et Genevae, 1744



Figura 31.1: L. Eulero

31.1 Le ipotesi geometriche di base

Si consideri (Figura 31.2) un solido del tipo trave, di luce L , con una sezione retta caratterizzata da un asse di simmetria rispetto all'asse X_2 , e si ipotizzi anche che i carichi su di essa agenti non abbiano componenti lungo l'asse X_1 , mentre le altre due componenti siano simmetricamente disposte rispetto all'asse X_2 .

Sono quindi ammessi:

— carichi distribuiti secondo l'asse della trave X_3 , (*carichi assiali*), che possono ricondursi — considerando una striscia di trave di larghezza unitaria — a stese di carico di intensità $t(x_3)$ con dimensione fisica $[FL^{-1}]$

— carichi distribuiti secondo l'asse verticale X_2 , (*carichi trasversali*) che possono ricondursi — considerando una striscia di trave di larghezza unitaria — a stese di carico di intensità $p(x_3)$ con dimensione fisica $[FL^{-1}]$

— distribuzioni di coppie con asse momento coincidente con l'asse X_1 , che possono ricondursi — considerando una striscia di trave di larghezza unitaria — a stese di coppie di intensità $m(x_3)$ con dimensione fisica $[F]$. Di esse si terrà raramente conto.

— forze concentrate dirette secondo l'asse della trave (forze assiali), o secondo l'asse verticale (forze trasversali), e coppie concentrate con asse momento coincidente con l'asse X_1 . Da queste ipotesi sulla geometria e sui carichi segue che i punti della trave potranno subire spostamenti in senso assiale e trasversale, mentre saranno necessariamente nulle le componenti di spostamento secondo l'asse X_1 . Ci si può quindi limitare a studiare i punti del piano X_2, X_3 , ridu-

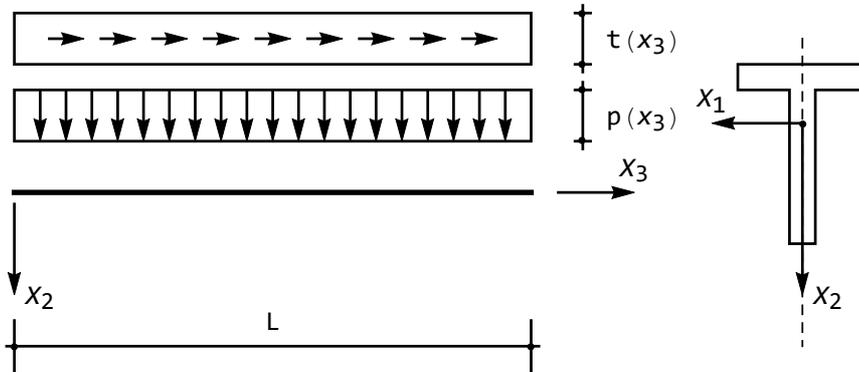


Figura 31.2: La trave da studiare

cendo il problema spaziale di De Saint–Venant ad un più semplice problema bidimensionale, in cui la terna di spostamenti si è semplificata in:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(x_2, x_3) \\ u_3(x_2, x_3) \end{pmatrix} \quad (31.1)$$

31.2 Le ipotesi cinematiche di base

Tutti i modelli strutturali di trave piana possono ricondursi ad una terna di spostamenti del tipo (31.1), in cui le due componenti u_2 ed u_3 andranno ulteriormente specificate attraverso opportune ipotesi cinematiche. La più semplice teoria rimonta a Bernoulli ed Eulero, ed è basata sulle seguenti ipotesi:

1. gli spostamenti verticali ed assiali dei punti dell'asse dipendono solo dalla variabile x_3 . Indicando con l'apice a i punti dell'asse, si ha allora:

$$\begin{aligned} u_2^a &= u_2^a(x_3) \\ u_3^a &= u_3^a(x_3) \end{aligned} \quad (31.2)$$

2. segmenti normali all'asse si conservano segmenti a seguito della deformazione (*ipotesi di planità delle sezioni rette*). Ad esempio, il segmento $A - A$, situato in Figura 31.3 a distanza x_3 dalla base di sinistra, si trasformerà in un segmento $A' - A'$.
3. segmenti normali all'asse si conservano normali all'asse deformato. Quindi il segmento $A - A$ subisce la rotazione $\phi(x_3)$ pari alla rotazione dell'asse neutro alla stessa ascissa.

Segue dalle tre ipotesi appena formulate, che una sezione retta a distanza x_3 dalla base di sinistra subisce un abbassamento $u_2(x_3) = u_2^a(x_3)$, uguale per

tutti i punti della sezione, uno spostamento assiale $u_3(x_2, x_3)$, ed una rotazione di ampiezza $\phi(x_3)$, uguale alla rotazione dell'asse. Pertanto, tale angolo è fornito da:

$$\phi(x_3) = -\frac{du_2}{dx_3} = -u_2'(x_3) \quad (31.3)$$

indicando con l'apice la derivazione rispetto ad x_3 . Ne segue che lo spostamento assiale $u_3(x_2, x_3)$ di un punto generico P della sezione retta, situato a distanza x_2 dal baricentro, è pari a:

$$u_3(x_2, x_3) = u_3^a(x_3) + x_2\phi(x_3) = u_3^a(x_3) - x_2u_2'(x_3) \quad (31.4)$$

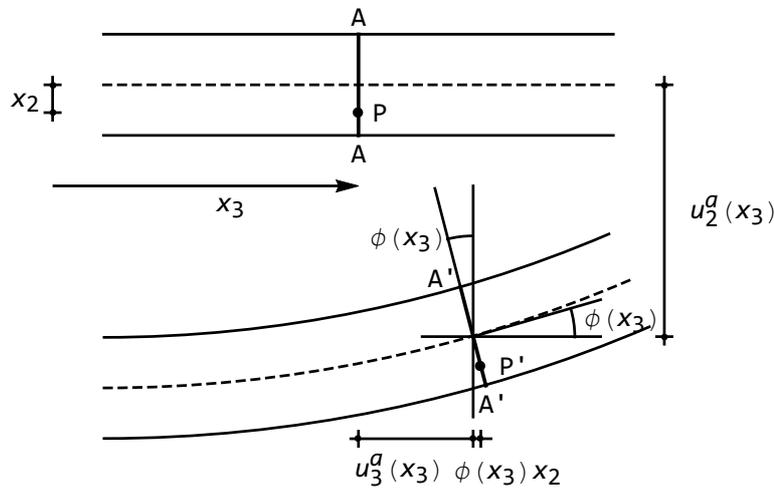


Figura 31.3: Le ipotesi di Eulero-Bernoulli

Il vettore \mathbf{s} della terna di spostamenti è fornito pertanto da:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(x_2, x_3) \\ u_3(x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(x_3) \\ u_3(x_3) - x_2u_2'(x_3) \end{pmatrix} \quad (31.5)$$

dove, per semplicità, d'ora in poi si trascurerà l'apice a .

Le deformazioni corrispondenti a questa terna di spostamenti sono deducibili a partire dalle ben note leggi che legano le deformazioni alle derivate prime degli spostamenti:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (31.6)$$

$$\begin{aligned}
 e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\
 e_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (u_2'(x_3) - u_2'(x_3)) = 0 \\
 e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{du_3}{dx_3} - x_2 \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = u_3'(x_3) - x_2 u_2''(x_3)
 \end{aligned}$$

Le precedenti relazioni si conciliano con la relazione generale di De Saint-Venant, (cfr. eqn.(24.13) del Capitolo 24):

$$e_{11} = e_{22} = -\nu e_{33} \quad (31.7)$$

solo nel caso $\nu = 0$, ossia di solido a contrazione laterale impedita. Nella stessa ipotesi, la legge di Hooke porta alla sola tensione normale σ_{33} , pari a:

$$\sigma_{33} = E (u_3'(x_3) - x_2 u_2''(x_3)) \quad (31.8)$$

Ne segue che le caratteristiche sforzo normale $N(x_3)$ e momento flettente $M_1(x_3)$ sono fornite da:

$$N(x_3) = \int_{\Sigma} E (u_3'(x_3) - x_2 u_2''(x_3)) \, dA = EA u_3'(x_3) \quad (31.9)$$

$$M_1(x_3) = \int_{\Sigma} E (x_2 u_3'(x_3) - x_2^2 u_2''(x_3)) \, dA = -EI_{11} u_2''(x_3) \quad (31.10)$$

coincidenti con i risultati ottenuti nel Capitolo 25.

Il calcolo dello sforzo di taglio

Una notevole incongruenza della teoria di Eulero-Bernoulli risiede nella impossibilità di calcolare lo sforzo di taglio T_2 come risultante delle tensioni tangenziali, secondo la definizione del Capitolo 23. Ed infatti, essendo nulla la componente tangenziale di tensione σ_{23} si avrà senz'altro:

$$T_2(x_3) = \int_{\Sigma} \sigma_{23} \, dA = 0 \quad (31.11)$$

D'altro canto, banali considerazioni di equilibrio mostrano che uno sforzo di taglio dovrà essere necessariamente presente. Ed infatti, si consideri un concio di trave di larghezza dx_3 , situato all'ascissa x_3 , come riportato in Figura 31.4. Perchè esso sia in equilibrio, occorrerà che siano soddisfatte le tre equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale, alla traslazione verticale, ed alla rotazione intorno ad una sezione generica, ed è immediato realizzare che l'assenza di forze taglianti verticali impedisce di soddisfare l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale. Si può giungere però ad una definizione soddisfacente dello sforzo

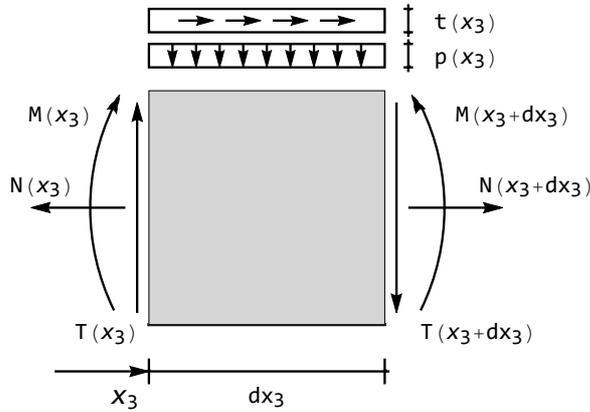


Figura 31.4: Il concio elementare e le forze su di esso agenti

di taglio imponendo l'equilibrio delle forze presenti alla rotazione intorno alla faccia di destra:

$$-M_1(x_3) + M_1(x_3 + dx_3) - T_2(x_3) dx_3 + p(x_3) dx_3 \frac{dx_3}{2} = 0 \quad (31.12)$$

Se dx_3 è abbastanza piccolo, si può approssimare $M_1(x_3 + dx_3)$ con i primi termini di un suo sviluppo in serie:

$$M_1(x_3 + dx_3) = M_1(x_3) + \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} dx_3 \quad (31.13)$$

ed inoltre l'ultimo termine della (31.12) può trascurarsi. Se ne trae:

$$-M_1(x_3) + M_1(x_3) + \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} dx_3 - T_2(x_3) dx_3 = 0 \quad (31.14)$$

ed infine si giunge alla *definizione* di taglio secondo la teoria di Eulero-Bernoulli:

$$T_2(x_3) = \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} = -EI_{11} u_2'''(x_3) \quad (31.15)$$

La (31.15) è in netta contraddizione con la (31.11), ma è il prezzo da pagare per l'estrema semplicità della teoria di Eulero-Bernoulli per travi snelle.

31.3 Lo studio della linea elastica col principio degli spostamenti virtuali

Si scriva il principio degli spostamenti virtuali, come dedotto nel Capitolo 21. In base a quanto finora assunto, il lavoro interno si limita al solo contributo

delle tensioni normali σ_{33} , mentre si ipotizza che insistano sulla trave solo stese di carico distribuito di tipo assiale e di tipo trasversale. Inoltre, si ipotizza che tali carichi agiscano su tutta la trave. Si avrà quindi:

$$\int_B \sigma_{33} \delta e_{33} dV = \int_0^L p(x_3) \delta u_2 dx_3 + \int_0^L t(x_3) \delta u_3 dx_3 \quad (31.16)$$

Altri esempi di carichi distribuiti, estesi ad una luce parziale, e di carichi concentrati, possono essere facilmente trattati modificando l'espressione del lavoro esterno.

Si introduca ora la legge di Hooke, esprimendo la tensione σ_{33} in termini di deformazione e_{33} , e poi si utilizzi l'ultima delle (31.6) per esprimere la deformazione in termini di spostamento. Si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{\Sigma} E (u_3'(x_3) - x_2 u_2''(x_3)) (\delta u_3'(x_3) - x_2 \delta u_2''(x_3)) dA dx_3 \\ = \int_0^L p(x_3) \delta u_2 dx_3 + \int_0^L t(x_3) \delta u_3 dx_3 \end{aligned} \quad (31.17)$$

Svolgendo i prodotti, si ha, eliminando per semplicità la dipendenza funzionale da x_3 :

$$\int_0^L (EA u_3' \delta u_3' + EI_{11} u_2'' \delta u_2'' - p \delta u_2 - t \delta u_3) dx_3 \quad (31.18)$$

tenendo conto che:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} dA &= A \\ \int_{\Sigma} x_2 dA &= 0 \\ \int_{\Sigma} x_2^2 dA &= I_{11} \end{aligned} \quad (31.19)$$

dove A è l'area della sezione retta, ed I_{11} è il suo momento di inerzia rispetto all'asse X_1 .

Ipotizzando da ora in poi che la trave sia omogenea ed a sezione costante, e che quindi il modulo di Young, l'area ed il momento di inerzia possano considerarsi costanti, il primo integrale della (31.18) può integrarsi per parti una volta, ottenendo:

$$\int_0^L u_3' \delta u_3' dx_3 = [u_3' \delta u_3]_0^L - \int_0^L u_3'' \delta u_3 dx_3 \quad (31.20)$$

mentre il secondo integrale va integrato per parti due volte:

$$\begin{aligned} \int_0^L u_2'' \delta u_2'' dx_3 &= [u_2'' \delta u_2']_0^L - \int_0^L u_2''' \delta u_2' dx_3 = [u_2'' \delta u_2']_0^L - [u_2''' \delta u_2]_0^L + \\ &\int_0^L u_2'''' \delta u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (31.21)$$

Inserendo ambedue questi risultati nella (31.18) si giunge a scrivere:

$$\int_0^L [(-EAu_3'' - t) \delta u_3 + (EI_{11}u_2'''' - p) \delta u_2] dx_3 + [EAu_3' \delta u_3]_0^L + [EI_{11}u_2'' \delta u_2']_0^L - [EI_{11}u_2''' \delta u_2]_0^L = 0 \quad (31.22)$$

Le variazioni δu_3 e δu_2 sono arbitrarie, e quindi dovranno annullarsi le quantità in parentesi, conducendo alle due equazioni differenziali disaccoppiate in u_3 ed in u_2 :

$$\begin{aligned} EAu_3'' &= -t \\ EI_{11}u_2'''' &= p \end{aligned} \quad (31.23)$$

Le restanti quantità dovranno annullarsi ai due estremi della trave. Per lo spostamento u_3 dovrà quindi essere:

$$\begin{aligned} EAu_3'(0) \delta u_3(0) &= 0 \\ EAu_3'(L) \delta u_3(L) &= 0 \end{aligned} \quad (31.24)$$

mentre per lo spostamento u_2 sarà necessariamente:

$$\begin{aligned} EI_{11}u_2''(0) \delta u_2'(0) &= 0 \\ EI_{11}u_2''(L) \delta u_2'(L) &= 0 \\ EI_{11}u_2'''(0) \delta u_2(0) &= 0 \\ EI_{11}u_2'''(L) \delta u_2(L) &= 0 \end{aligned} \quad (31.25)$$

Lo studio della funzione $u_3(x_3)$ degli spostamenti assiali è quindi completamente separato dallo studio della funzione $u_2(x_3)$ degli spostamenti trasversali. Inoltre, gli spostamenti assiali sono governati da un problema ai limiti differenziale del secondo ordine, mentre quelli trasversali da un problema ai limiti differenziale del quarto ordine. Occorre quindi risolvere le equazioni differenziali (31.23), e determinare le costanti di integrazione imponendo le condizioni ai limiti (31.24) per lo spostamento assiale, e le condizioni (31.25) per lo spostamento trasversale.

La soluzione delle equazioni differenziali della linea elastica

La soluzione delle (31.23) può scriversi come somma di un integrale generale, soluzione dell'omogenea associata, e di un integrale particolare, che dipende dalla particolare forma delle funzioni $t(x_3)$ e $p(x_3)$. Riscritte le equazioni nella forma più conveniente:

$$\begin{aligned} u_3'' &= -\frac{t}{EA} \\ u_2'''' &= \frac{p}{EI} \end{aligned} \quad (31.26)$$

si ha:

$$\begin{aligned} u_3(x_3) &= A_0 + A_1x_3 + I_w \\ u_2(x_3) &= C_0 + C_1x_3 + C_2x_3^2 + C_3x_3^3 + I_v \end{aligned} \quad (31.27)$$

con I_w e I_v integrali particolari, mentre A_0 , A_1 , C_0 , C_1 , C_2 e C_3 rappresentano costanti di integrazione da specificare imponendo le opportune condizioni ai limiti, in $x_3 = 0$ ed in $x_3 = L$. Tali condizioni, da ricavare in base alle (31.24) ed alle (31.25), rispettivamente, riflettono le condizioni con cui è vincolata la trave, secondo la classificazione riportata nel prossimo paragrafo

Le condizioni di vincolo

E' conveniente separare lo studio del problema assiale dallo studio del problema flessionale.

Il problema assiale

In base alla (31.9), le condizioni (31.24) si possono scrivere:

$$\begin{aligned} N(0)\delta u_3(0) &= 0 \\ N(L)\delta u_3(L) &= 0 \end{aligned} \quad (31.28)$$

Agli estremi della trave, pertanto, si può avere questa duplice alternativa:

- Estremo fisso $\longrightarrow u_3 = 0$
- Estremo libero $\longrightarrow N = 0$ ossia $u_3' = 0$

Il problema flessionale

In base alla (31.10) ed alla (31.15) le condizioni (31.25) si possono scrivere:

$$\begin{aligned} M_1(0)\delta\phi(0) &= 0 \\ M_1(L)\delta\phi(L) &= 0 \\ T_2(0)\delta u_2(0) &= 0 \\ T_2(L)\delta u_2(L) &= 0 \end{aligned} \quad (31.29)$$

Agli estremi della trave, pertanto, si possono simulare queste condizioni di vincolo:

- Estremo fisso $\longrightarrow u_2 = 0$ e $\phi = 0$
- Estremo appoggiato $\longrightarrow u_2 = 0$ e $M_1 = 0$, ossia $u_2'' = 0$
- Estremo con bipendolo $\longrightarrow \phi = 0$ e $T_2 = 0$, ossia $u_2''' = 0$
- Estremo libero $\longrightarrow M_1 = 0$, ossia $u_2'' = 0$ e $T_2 = 0$, ossia $u_2''' = 0$

31.4 Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale

Come si è visto, il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale discende dal principio degli spostamenti virtuali. Nessuna sorpresa, quindi, se utilizzando questo principio si giungerà alle stesse equazioni del paragrafo precedente.

Si parte dalla definizione dell'energia potenziale totale, somma dell'energia elastica e dell'energia potenziale dei carichi:

$$E_t = \frac{1}{2} \int_B E e_{33}^2 dV - \int_0^L p(x_3) u_2(x_3) dx_3 - \int_0^L t(x_3) u_3(x_3) dx_3 \quad (31.30)$$

ed utilizzando l'ultima delle (31.6), si può scrivere l'energia elastica come un funzionale delle due componenti di spostamento u_2 ed u_3 :

$$\begin{aligned} E_t = & \frac{1}{2} \int_0^L EA u_3'^2(x_3) dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} u_2''^2(x_3) dx_3 \\ & - \int_0^L p(x_3) u_2(x_3) dx_3 - \int_0^L t(x_3) u_3(x_3) dx_3 \end{aligned} \quad (31.31)$$

Si scriva ora la *variazione* di E_t rispetto alle due variabili u_3 ed u_2 , ottenendo:

$$\begin{aligned} \delta E_t = & E_t(u_3 + \delta u_3, u_2 + \delta u_2) - E_t(u_3, u_2) = \\ & \frac{1}{2} \int_0^L EA (u_3' + \delta u_3')^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} (u_2'' + \delta u_2'')^2 dx_3 - \\ & \int_0^L p(u_2 + \delta u_2) dx_3 - \int_0^L t(u_3 + \delta u_3) dx_3 - \frac{1}{2} \int_0^L EA u_3'^2 dx_3 - \\ & \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} u_2''^2 dx_3 + \int_0^L p u_2 dx_3 + \int_0^L t u_3 dx_3 \end{aligned} \quad (31.32)$$

Svolgendo i quadrati e semplificando si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta E_t = & \int_0^L EA u_3' \delta u_3' dx_3 + \int_0^L EI_{11} u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 + \\ & \frac{1}{2} \int_0^L EA \delta u_3'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} \delta u_2''^2 dx_3 \end{aligned} \quad (31.33)$$

Ne segue che la variazione dell'energia potenziale totale si esaurisce in due aliquote: la prima, lineare, e la seconda quadratica:

$$\delta_1 E_t = \int_0^L EA u_3' \delta u_3' dx_3 + \int_0^L EI_{11} u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 \quad (31.34)$$

$$\delta_2 E_t = \frac{1}{2} \int_0^L EA \delta u_3'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} \delta u_2''^2 dx_3 \quad (31.35)$$

Per il principio di stazionarietà, dovrà essere:

$$\delta_1 E_t = \int_0^L EA u_3' \delta u_3' dx_3 + \int_0^L EI_{11} u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 = 0 \quad (31.36)$$

coincidente con la (31.18).

31.5 L'approccio geometrico

Talvolta è utile impiegare il metodo geometrico, o diretto, per dedurre le equazioni differenziali della linea elastica. Si tratta di imporre l'equilibrio del concio di Figura 31.4, oltre che alla rotazione, anche rispetto alla traslazione orizzontale ed alla traslazione verticale. Si ha:

Equilibrio alla traslazione orizzontale :

$$-N(x_3) + N(x_3 + dx_3) + t(x_3) dx_3 = 0 \quad (31.37)$$

ossia:

$$-N(x_3) + N(x_3) + \frac{dN(x_3)}{dx_3} dx_3 + t(x_3) dx_3 = 0 \quad (31.38)$$

ed infine:

$$\frac{dN(x_3)}{dx_3} + t(x_3) = 0 \quad (31.39)$$

Equilibrio alla traslazione verticale :

$$-T_2(x_3) + T_2(x_3 + dx_3) + p(x_3) dx_3 = 0 \quad (31.40)$$

ossia:

$$-T_2(x_3) + T_2(x_3) + \frac{dT_2(x_3)}{dx_3} dx_3 + p(x_3) dx_3 = 0 \quad (31.41)$$

ed infine:

$$\frac{dT_2(x_3)}{dx_3} + p(x_3) = 0 \quad (31.42)$$

Equilibrio alla rotazione :

$$\frac{dM_1(x_3)}{dx_3} = T_2(x_3) \quad (31.43)$$

come già visto.

Ciò fatto, occorre utilizzare i legami tra le caratteristiche e gli spostamenti, ossia occorre introdurre nella (31.39) l'espressione dello sforzo normale (31.9) mentre nelle (31.42) e (31.43) bisognerà utilizzare la (31.10) e la (31.15). Nel primo caso, se la trave è omogenea, e quindi se E ed A sono costanti, si ritrova la prima equazione differenziale (31.23):

$$EA \frac{d^2 u_3(x_3)}{dx_3^2} + t(x_3) = 0 \quad (31.44)$$

Nel secondo caso si ottiene, derivando la (31.43) ed utilizzando la (31.42), una fondamentale relazione tra momento e carico applicato:

$$\frac{d^2 M_1(x_3)}{dx_3^2} + p(x_3) = 0 \quad (31.45)$$

Infine, utilizzando l'equazione (31.10), che lega il momento alla curvatura, si riottiene la seconda equazione differenziale (31.23):

$$EI_{11} \frac{d^4 u_2(x_3)}{dx_3^4} = p(x_3) \quad (31.46)$$

Le condizioni ai limiti

Proseguendo nello spirito dell'approccio diretto, è opportuno suddividere le condizioni ai limiti che è possibile imporre in due distinte categorie: *condizioni di congruenza*, che coinvolgono spostamenti e rotazioni, e *condizioni di equilibrio*, che coinvolgono i momenti flettenti, gli sforzi di taglio e gli sforzi normali. Limitandosi all'esame del problema flesso-tagliante, le condizioni di congruenza vanno imposte *a priori*, in base al tipo di vincolo che si vuole realizzare. Se quindi si prevede che un estremo della trave debba essere *incastrato*, si dovrà imporre che in quell'estremo siano nulli sia gli spostamenti che le rotazioni, se invece l'estremo è solo *appoggiato*, allora le rotazioni saranno libere, e dovrà annullarsi solo lo spostamento. Dualmente, un *bipendolo* prevede rotazioni nulle e spostamenti liberi, mentre un *estremo* lasciato *libero* può spostarsi e può ruotare.

Tali condizioni possono essere realizzate predisponendo opportuni dispositivi di vincolo, in grado di annullare gli spostamenti e/o le rotazioni sviluppando opportune *forze reattive*. Da questo punto di vista, l'appoggio può essere considerato equivalente ad una forza verticale *incognita* R , in grado di annullare il corrispondente spostamento, il bipendolo è equivalente ad una coppia reattiva incognita \mathcal{M}_R , in grado di annullare la rotazione della sezione retta cui il bipendolo è applicato, e l'incastro può essere sostituito con una forza reattiva R ed una coppia reattiva \mathcal{M}_R , in grado di annullare sia lo spostamento che la rotazione.

Imposte le condizioni di congruenza, possono *dedursi* le ulteriori condizioni di equilibrio, imponendo l'equilibrio del concio vincolato, sia nei confronti di

una eventuale traslazione verticale che di una rotazione. Le due condizioni che in tal modo si ottengono andranno considerate condizioni di vincolo se non coinvolgono reazioni incognite, oppure equazioni in grado di far conoscere le reazioni, *dopo* aver risolto il problema ai limiti.

In Figura 31.5 è offerta una panoramica dettagliata delle condizioni di vincolo possibili ai due estremi di una trave di Eulero–Bernoulli. La prima riga si riferisce all'estremo di sinistra, la riga inferiore invece all'estremo di destra. Per ciascuno di questi due estremi sono illustrati i quattro vincoli possibili, nell'ordine a) incastro, b) appoggio, c) bipendolo, d) estremo libero.

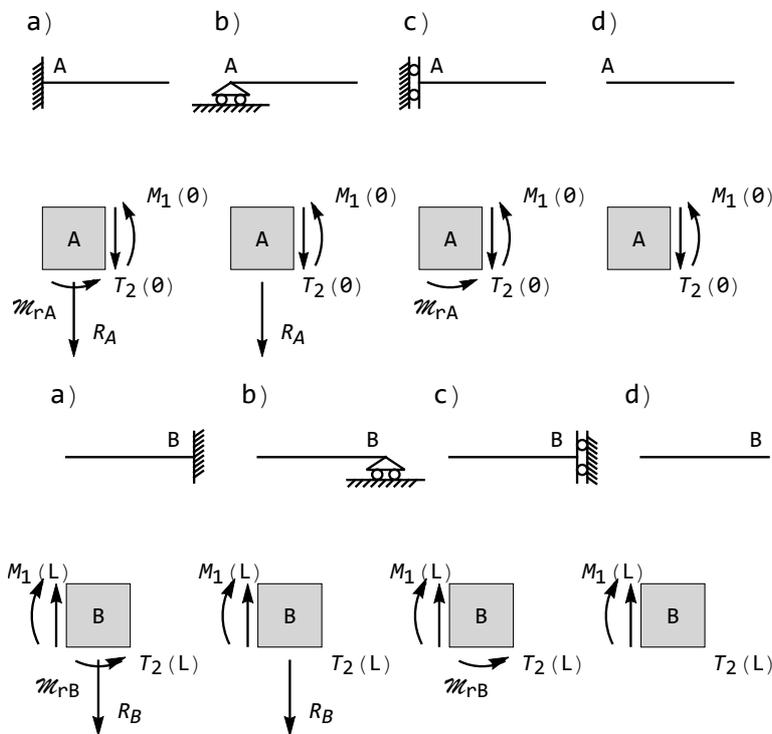


Figura 31.5: Le condizioni di vincolo previste dalla teoria di Eulero–Bernoulli - a) incastro, b) appoggio, c) bipendolo, d) estremo libero

a) incastro

Le due condizioni di congruenza che definiscono l'incastro esprimono l'annullarsi di spostamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2(\xi) &= 0 \\ \phi(\xi) &= 0 \longrightarrow u_2'(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (31.47)$$

dove $\xi = 0$ se l'incastro è a sinistra, e $\xi = L$ se l'incastro è a destra.

Esse definiscono completamente l'incastro, ai fini delle condizioni ai limiti da introdurre nel corrispondente problema ai limiti.

Come detto, per annullare spostamenti e rotazioni l'incastro svilupperà una forza reattiva R_ξ ed una coppia reattiva $\mathcal{M}_{R\xi}$, di cui occorrerà tener conto nell'imposizione delle condizioni di equilibrio del concio elementare. Se l'incastro è situato a sinistra, in $\xi = 0$, allora le forze agenti sul concio elementare sono quelle indicate in Figura 31.5a), in prima riga: la reazione verticale R_A , positiva se equivarsa all'asse X_2 , e quindi positiva se verso il basso, la coppia reattiva \mathcal{M}_{rA} , positiva se antioraria, il taglio $T_2(0)$, positivo se induce rotazioni *orarie* del concio elementare, il momento flettente $M_1(0)$, positivo se tende le fibre inferiori del concio. Si noti che le caratteristiche della sollecitazione interna, ossia il taglio ed il momento, sono state applicate solo sulla faccia di destra del concio, in quanto la faccia di sinistra coincide con la faccia esterna della trave. Tutto ciò premesso, l'equilibrio del concio è garantito dalle due condizioni:

$$\begin{aligned} R_A + T_2(0) &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + M_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (31.48)$$

Tali condizioni possono essere utilizzate, dopo aver risolto il problema ai limiti, per calcolare le reazioni dell'incastro.

Se l'incastro è situato a destra, in $\xi = L$, allora le forze agenti sul concio elementare sono quelle indicate in Figura 31.5a), in seconda riga: la reazione verticale R_B , positiva se equivarsa all'asse X_2 , e quindi sempre positiva se verso il basso, la coppia reattiva \mathcal{M}_{rB} , positiva se antioraria, il taglio $T_2(L)$, positivo se induce rotazioni *orarie* del concio elementare, il momento flettente $M_1(L)$, positivo se tende le fibre inferiori del concio. Si noti che le caratteristiche della sollecitazione interna, ossia il taglio ed il momento, sono state applicate solo sulla faccia di sinistra del concio, in quanto la faccia di destra coincide con la faccia esterna della trave, e che quindi ora il taglio positivo è diretto verso l'alto, mentre il momento flettente è positivo se orario. Tutto ciò premesso, l'equilibrio del concio è garantito dalle due condizioni:

$$\begin{aligned} R_B - T_2(L) &= 0 \\ \mathcal{M}_{rB} - M_1(L) &= 0 \end{aligned} \quad (31.49)$$

Le (31.48) e (31.49) esprimono una conclusione di carattere generale:
- nell'estremo di sinistra, le reazioni sono uguali e contrarie alle corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna, mentre nell'estremo di destra le reazioni sono uguali alle corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna.

b) appoggio

L'unica condizione di congruenza che definisce l'appoggio esprime l'annullarsi dello spostamento:

$$u_2(\xi) = 0 \quad (31.50)$$

Ad essa deve essere affiancata una condizione di equilibrio, da introdurre nel corrispondente problema ai limiti.

A ciò fare, si consideri che l'appoggio sviluppa una forza reattiva R_ξ , di cui occorrerà tener conto nell'imposizione delle condizioni di equilibrio del concio elementare. Se l'appoggio è situato a sinistra, in $\xi = 0$, allora le forze agenti sul concio elementare sono quelle indicate in Figura 31.5b), in prima riga: la reazione verticale R_A , positiva se equivale all'asse X_2 , e quindi positiva se verso il basso, il taglio $T_2(0)$, positivo se induce rotazioni *orarie* del concio elementare, il momento flettente $M_1(0)$, positivo se tende le fibre inferiori del concio. Ne segue che l'equilibrio del concio è garantito dalle due condizioni:

$$\begin{aligned} R_A + T_2(0) &= 0 \\ M_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (31.51)$$

La seconda condizione, esprime l'annullarsi del momento flettente, può e deve essere utilizzata come condizione ai limiti, per cui le condizioni che definiscono completamente l'appoggio, saranno:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ M_1(0) = 0 &\longrightarrow u_2''(0) = 0 \end{aligned} \quad (31.52)$$

La prima delle (31.51), invece, può essere utilizzata, dopo aver risolto il problema ai limiti, per conoscere la reazione dell'appoggio.

Infine, se l'appoggio è situato a destra, è immediato analizzare la situazione di Figura 31.5b), seconda riga, e dedurre che le due condizioni ai limiti da imporre sono:

$$\begin{aligned} u_2(L) &= 0 \\ M_1(L) = 0 &\longrightarrow u_2''(L) = 0 \end{aligned} \quad (31.53)$$

mentre la restante condizione di equilibrio serve a calcolare la reazione:

$$R_B - T_2(L) = 0 \longrightarrow R_B = T_2(L) \quad (31.54)$$

c) bipendolo

Il bipendolo è un vincolo che può essere considerato duale all'appoggio: la condizione di congruenza che lo definisce esprime infatti l'annullarsi della rotazione:

$$\phi(\xi) = u_2'(\xi) = 0 \quad (31.55)$$

e di conseguenza esso svilupperà una coppia reattiva incognita. Alla (31.55) bisognerà affiancare una condizione di equilibrio, ottenibile come usuale esaminando il concio elementare dove agisce il bipendolo stesso.

Se il bipendolo è situato a sinistra, in $\xi = 0$, allora le forze agenti sul concio elementare sono quelle indicate in Figura 31.5c), in prima riga: la coppia reattiva \mathcal{M}_{rA} , positiva se antioraria, il taglio $T_2(0)$, positivo se induce rotazioni *orarie*

del concio elementare, il momento flettente $M_1(0)$, positivo se tende le fibre inferiori del concio. Ne segue che l'equilibrio del concio è garantito dalle due condizioni:

$$\begin{aligned} T_2(0) &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + M_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (31.56)$$

La prima condizione, esprime l'annullarsi del taglio, può e deve essere utilizzata come condizione ai limiti, per cui le condizioni che definiscono completamente il bipendolo, saranno:

$$\begin{aligned} \phi(0) = 0 &\longrightarrow u_2'(0) = 0 \\ T_2(0) = 0 &\longrightarrow u_2'''(0) = 0 \end{aligned} \quad (31.57)$$

La seconda delle (31.56), invece, può essere utilizzata, dopo aver risolto il problema ai limiti, per conoscere la coppia reattiva del bipendolo.

Infine, se il bipendolo è situato a destra, è immediato analizzare la situazione di Figura 31.5c), seconda riga, e dedurre che le due condizioni ai limiti da imporre sono:

$$\begin{aligned} \phi(L) = 0 &\longrightarrow u_2'(L) = 0 \\ T_2(L) = 0 &\longrightarrow u_2'''(L) = 0 \end{aligned} \quad (31.58)$$

mentre la restante condizione di equilibrio serve a calcolare la reazione:

$$\mathcal{M}_{rB} - M_1(L) = 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{rB} = M_1(L) \quad (31.59)$$

d) estremo libero

Se un estremo della trave è libero sia di spostarsi che di ruotare, non sarà possibile in esso scrivere alcuna equazione di congruenza, mentre imponendo l'equilibrio del concio di Figura 31.5d) verranno scritte due equazioni di equilibrio, esprimenti l'annullarsi del momento e del taglio:

$$\begin{aligned} M_1(\xi) = 0 &\longrightarrow u_2''(\xi) = 0 \\ T_2(\xi) = 0 &\longrightarrow u_2'''(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (31.60)$$

Problemi

Problema n.1 - Utilizzando il principio degli spostamenti virtuali, dedurre i due problemi ai limiti della teoria della trave presupponendo che il modulo di Young, l'area ed il momento di inerzia della sezione retta siano arbitrarie funzioni continue di x_3 (trave non omogenea a sezione variabile)

Problema n.2 - Dedurre per via geometrica le condizioni ai limiti del problema ai limiti assiale

Capitolo 32

Il problema ai limiti assiale

In questo Capitolo si applicano i risultati del Capitolo precedente, calcolando spostamenti e caratteristiche di alcune travi ad una sola campata soggette a carichi di tipo assiale. Si imposta quindi e si risolve il problema ai limiti del secondo ordine, illustrando alcuni semplici condizioni di carico. Nel seguito si intenderà con il termine *asta* una trave soggetta a soli carichi assiali, mentre il termine *trave* sarà riservato ai casi di forze trasversali.

32.1 L'asta soggetta a carico uniformemente distribuito

Il caso di carico più semplice è quello per cui $t(x_3) = t_0 = \text{costante}$. In questo caso l'equazione differenziale che regge il problema ai limiti si scrive:

$$u_3'' = -\frac{t_0}{EA} \quad (32.1)$$

ed è immediato constatare, per integrazioni successive, che il suo integrale è pari a:

$$u_3(x_3) = A_0 + A_1 x_3 - t_0 \frac{x_3^2}{2EA} \quad (32.2)$$

Per ottenere le due costanti di integrazione A_0 ed A_1 occorre specificare le condizioni di vincolo. Si hanno due casi di interesse pratico.

32.1.1 Asta fissa agli estremi

Per un'asta i cui due estremi sono impediti a muoversi, occorrerà che sia:

$$u_3(0) = u_3(L) = 0 \quad (32.3)$$

ossia, dalla (32.2):

$$\begin{aligned} A_0 &= 0 \\ A_0 + A_1 L - t_0 \frac{L^2}{2EA} &= 0 \end{aligned} \quad (32.4)$$

e quindi la linea elastica è data da:

$$u_3(x_3) = \frac{t_0 x_3}{2EA} (L - x_3) \quad (32.5)$$

mentre lo sforzo normale è dato da:

$$N(x_3) = EAu_3'(x_3) = t_0 \left(\frac{L}{2} - x_3 \right) \quad (32.6)$$

In Figura 32.1 è riportato l'andamento dei grafici degli spostamenti e degli sforzi normali. Come può osservarsi, e come deducibile dalle formule, lo sforzo normale è distribuito con legge lineare, mentre lo spostamento assiale varia con legge quadratica lungo l'asse, raggiungendo il suo massimo in mezzeria.

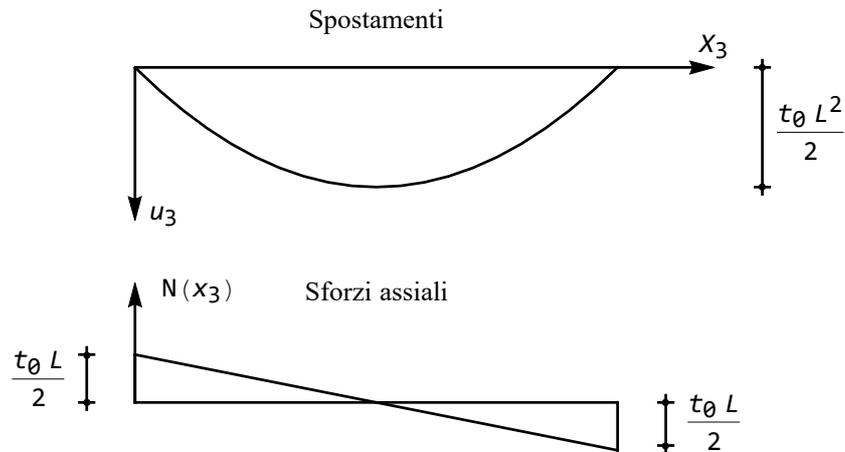


Figura 32.1: Asta fissa agli estremi soggetta a carico distribuito uniforme: diagramma degli spostamenti e degli sforzi assiali

Le reazioni dei due vincoli agli estremi sono facilmente calcolabili con considerazioni di equilibrio. A sinistra si avrà, come deducibile dalla Figura 32.2:

$$H_0 + N(0) = 0 \longrightarrow H_0 = -N(0) = -t_0 \frac{L}{2} \quad (32.7)$$

ed a destra:

$$H_L - N(L) = 0 \longrightarrow H_L = N(L) = -t_0 \frac{L}{2} \quad (32.8)$$

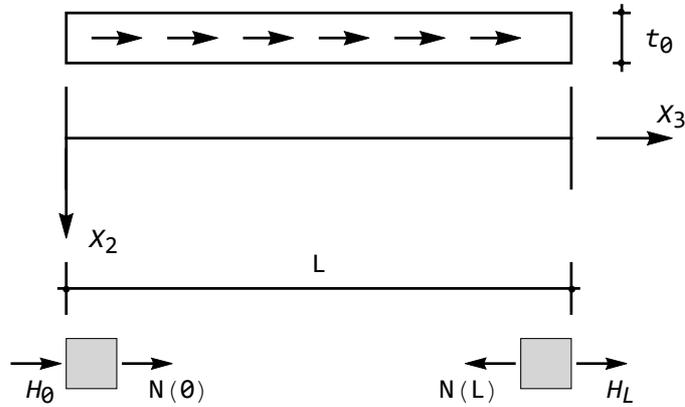


Figura 32.2: Le reazioni assiali per l'asta soggetta a carico uniformemente distribuita

32.1.2 Asta fissa a sinistra e libera a destra

In questo caso dovrà essere:

$$u_3(0) = u_3'(L) = 0 \quad (32.9)$$

ossia, dalla (32.2):

$$\begin{aligned} A_0 &= 0 \\ A_1 - \frac{t_0 L}{EA} &= 0 \end{aligned} \quad (32.10)$$

e quindi la linea elastica è data da:

$$u_3(x_3) = \frac{t_0 x_3}{EA} \left(L - \frac{x_3}{2} \right) \quad (32.11)$$

mentre lo sforzo normale è dato da:

$$N(x_3) = EA u_3'(x_3) = t_0 (L - x_3) \quad (32.12)$$

In Figura 32.3 sono riportati i grafici degli spostamenti e degli sforzi normali. Calcolare le reazioni vincolari.

32.2 L'asta soggetta a forza concentrata all'estremo

Si consideri ora un'asta fissa a sinistra, libera a destra, e soggetta ad una forza concentrata F all'estremo libero. Utilizzando il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, al fine di stabilire le condizioni al contorno all'estremo

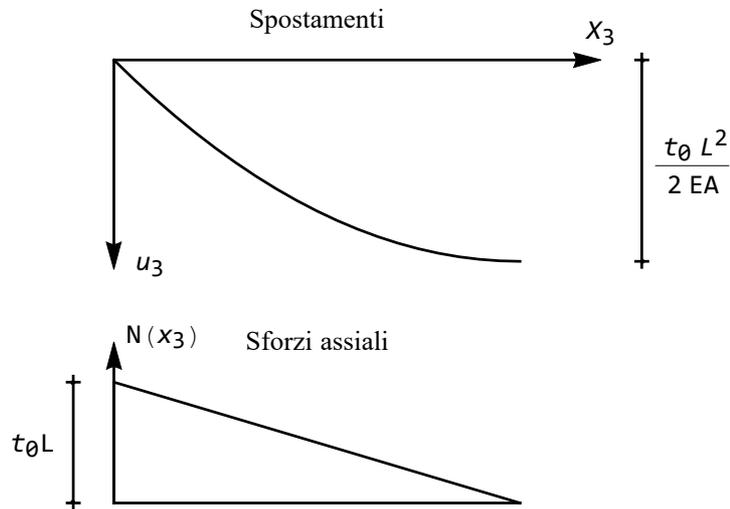


Figura 32.3: Asta fissa a sinistra e libera a destra : diagramma degli spostamenti e degli sforzi assiali

libero, si scrive l'energia potenziale totale come:

$$E_t = \frac{1}{2} \int_0^L EAu_3'^2(x_3) dx_3 - Fu_3(L) \quad (32.13)$$

e quindi la variazione prima di E_t è fornita da:

$$\delta_1 E_t = \int_0^L EAu_3''\delta u_3' dx_3 - F\delta u_3(L) = 0 \quad (32.14)$$

Integrando per parti si giunge alla solita equazione differenziale, con $t_0 = 0$, ed alle condizioni ai limiti:

$$EAu_3'(0)\delta u_3(0) = 0 \quad (32.15)$$

$$(EAu_3'(L) - F)\delta u_3(L) = 0 \quad (32.16)$$

Nell'estremo di sinistra, fisso, dovrà essere $u_3(0) = 0$, mentre a destra, nell'estremo libero, sarà:

$$EAu_3'(L) = F \quad (32.17)$$

Nota - La (32.17) esprime l'equilibrio tra sforzo normale e forza applicata, come può facilmente evincersi enucleando il concio elementare all'ascissa $x_3 = L$, ed esprimendo la condizione di equilibrio nei riguardi delle possibili traslazioni orizzontali (cfr.Figura 32.4)

Gli spostamenti saranno allora dati da:

$$u_3(x_3) = \frac{F}{EA}x_3 \quad (32.18)$$

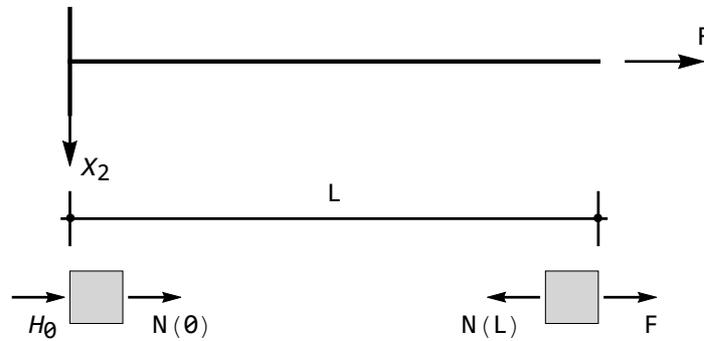


Figura 32.4: L'asta soggetta a carico concentrato nell'estremo libero

mentre lo sforzo normale è costante, e pari ad F . Si noti che non è necessario, in questo caso, risolvere il problema ai limiti per ottenere la (32.18). Ed infatti, in assenza di carichi distribuiti, la relazione:

$$\frac{dN(x_3)}{dx_3} + t(x_3) = 0 \quad (32.19)$$

implica che lo sforzo normale sia costante lungo l'asse x_3 . Di conseguenza, per la (32.17), esso sarà pari ovunque ad F , e poichè:

$$N(x_3) = EAu_3'(x_3) \quad (32.20)$$

sarà subito:

$$u_3'(x_3) = \frac{F}{EA} \longrightarrow u_3(x_3) = \frac{F}{EA}x_3 + C \quad (32.21)$$

Infine, la costante di integrazione C si annulla, in base alla condizione a sinistra, dove $u_3(0) = 0$.

Capitolo 33

Le travi ad una campata

In questo Capitolo si studiano le travi ad una sola campata con i più comuni tipi di vincolo. La classificazione completa è abbastanza agevole, e porta ad identificare sedici schemi, come riportato nella tabella 33.1.

inc-inc	inc-app	inc-bip	inc-lib
app-inc	app-app	app-bip	app-lib
bip-inc	bip-app	bip-bip	bip-lib
lib-inc	lib-app	lib-bip	lib-lib

Tabella 33.1: La classificazione delle travi ad una campata di Eulero–Bernoulli

I sei schemi del triangolo inferiore possono ricondursi ai corrispondenti casi del triangolo superiore, sicchè si può limitare l'esame a dieci schemi strutturali. Una prima classificazione si può ottenere in base alla possibilità di calcolare le reazioni vincolari con le sole equazioni di equilibrio della statica del corpo rigido. E' infatti immediato realizzare che per le travi in esame si hanno a disposizione due equazioni di equilibrio indipendenti, e precisamente un'equazione di equilibrio nei riguardi delle possibili traslazioni verticali, ed una equazione di equilibrio nei confronti delle rotazioni intorno ad un punto arbitrario (polo).

Nel caso di travi iperstatiche, non sarà possibile calcolare le reazioni vincolari in base a sole considerazioni di equilibrio, ma occorrerà affiancare ad esse ulteriori equazioni. Ad esempio, si potrà risolvere il problema ai limiti, calcolare i momenti ed i tagli, e da essi dedurre le reazioni.

Nel caso di travi isostatiche, si potranno usualmente ricavare le reazioni vincolari semplicemente risolvendo le equazioni di equilibrio. Nel caso di travi labili, invece, la trave non possiede abbastanza vincoli da eliminare i moti rigidi, e quindi subirà traslazioni e/o rotazioni. E' evidente la limitata utilità di simili schemi, almeno in ingegneria strutturale.

Si controlli la classificazione seguente:

— travi due volte iperstatiche: trave doppiamente incastrata

- travi una volta iperstatiche: trave incastro–appoggio, trave incastro–bipendolo
- travi isostatiche: trave incastro–libera (mensola), trave appoggio–appoggio, trave appoggio–bipendolo
- travi una volta labili: trave bipendolo–bipendolo, trave appoggio–libera, trave bipendolo–libera
- travi due volte labili: trave libera–libera

Nel seguito si esamineranno in un certo dettaglio i dieci schemi strutturali appena dedotti, supponendo inizialmente che siano assenti carichi concentrati.

33.1 La trave incastrata agli estremi

Il caso di carico più semplice è quello per cui $p(x_3) = p_0 = \text{costante}$. In questo caso l'equazione differenziale che regge il problema si scrive:

$$u_2''''(x_3) = \frac{p_0}{EI_{11}} \quad (33.1)$$

e la sua soluzione può ottenersi per integrazioni successive:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 + \frac{p_0}{24EI_{11}}x_3^4 \quad (33.2)$$

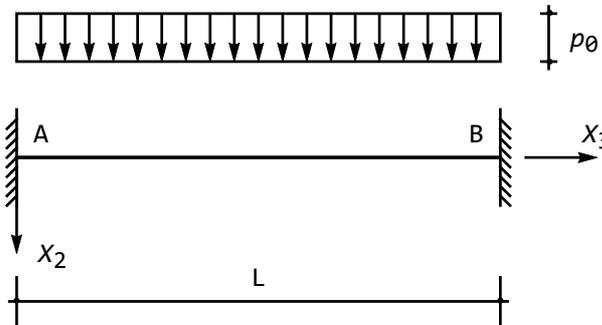


Figura 33.1: La trave doppiamente incastrata soggetta ad un carico uniformemente distribuito

Per ottenere le quattro costanti di integrazione C_i , occorre specificare le condizioni di vincolo. Si osservi comunque, in via preliminare, che poichè il carico è distribuito con legge costante, il taglio sarà necessariamente una funzione lineare, il momento una funzione quadratica, la rotazione una funzione cubica, e lo spostamento — come confermato dalla (33.2) — sarà un polinomio del quarto ordine.

Per una trave i cui due estremi sono impediti sia di muoversi che di ruotare, come in Figura 33.1, occorrerà che sia:

$$\begin{aligned} u_2(0) = 0 &\longrightarrow C_1 = 0 \\ u_2'(0) = 0 &\longrightarrow C_2 = 0 \\ u_2(L) = 0 &\longrightarrow C_1 + C_2L + C_3L^2 + C_4L^3 + p_0 \frac{L^4}{24EI_{11}} = 0 \\ u_2'(L) = 0 &\longrightarrow C_2 + 2C_3L + 3C_4L^2 + p_0 \frac{L^3}{6EI_{11}} = 0 \end{aligned} \quad (33.3)$$

Le ultime due delle (33.3) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{p_0L^2}{24EI_{11}} \\ C_4 &= -\frac{p_0L}{12EI_{11}} \end{aligned} \quad (33.4)$$

sicchè gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0x_3^2(L-x_3)^2}{24EI_{11}} \quad (33.5)$$

Conosciuti gli spostamenti, si possono facilmente ricavare rotazioni, momenti e tagli:

$$\begin{aligned} \phi(x_3) &= -\frac{p_0x_3}{12EI_{11}}(L^2 - 3Lx_3 + 2x_3^2) \\ M_1(x_3) &= -\frac{p_0}{12}(L^2 - 6Lx_3 + 6x_3^2) \\ T_2(x_3) &= \frac{p_0}{2}(L - 2x_3) \end{aligned} \quad (33.6)$$

Si noti che il taglio varia con legge lineare, e, per la simmetria geometrica e di carico dello schema, si annulla in mezzeria ed assume valori uguali ed opposti agli estremi, mentre il momento varia con legge parabolica, assumendo valori uguali agli estremi ed attingendo il suo massimo in mezzeria. Sarà:

$$\begin{aligned} T_2(0) &= p_0 \frac{L}{2} \\ T_2(L) &= -p_0 \frac{L}{2} \\ M_1(0) = M_1(L) &= -p_0 \frac{L^2}{12} \end{aligned} \quad (33.7)$$

mentre in mezzeria si ha:

$$M_1\left(\frac{L}{2}\right) = p_0 \frac{L^2}{24} \quad (33.8)$$

I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 33.2. Dal loro esame possono trarsi alcune conclusioni di carattere generale, che spesso possono aiutare sia nel tracciamento approssimato dei grafici, sia nel controllo di eventuali errori. Si noti allora:

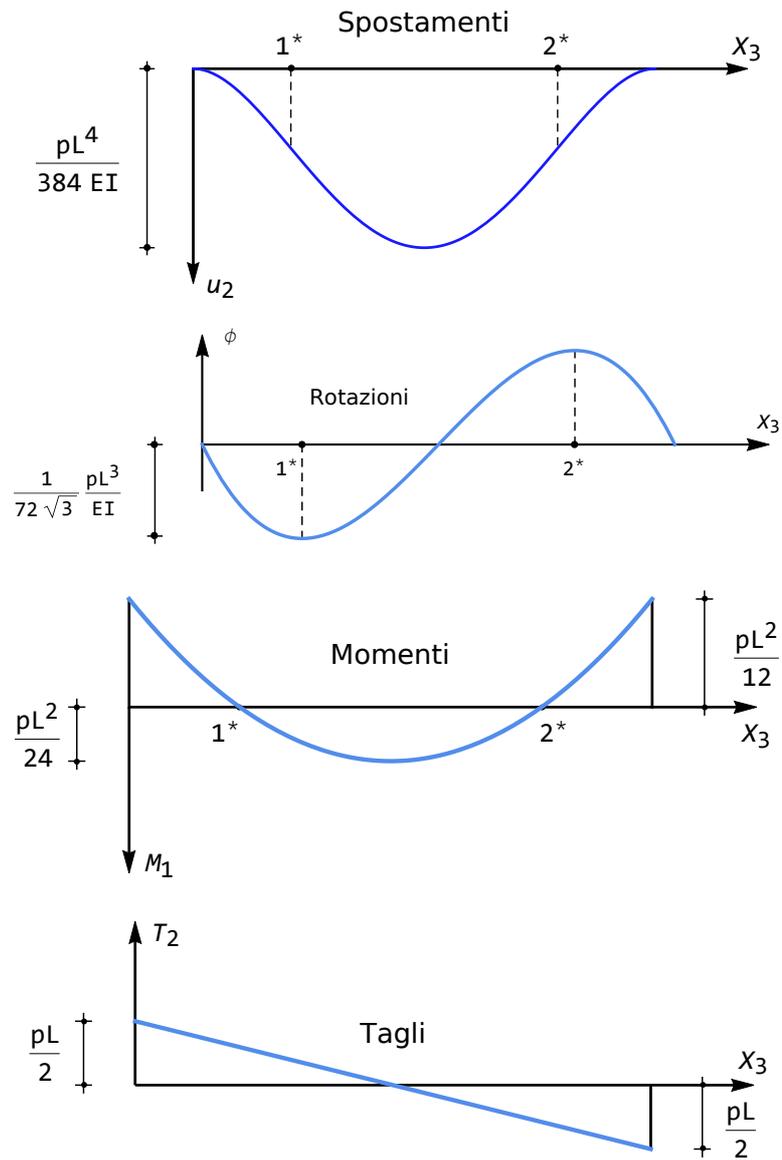


Figura 33.2: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave doppiamente incastrata

1. la relazione che lega momenti e tagli garantisce che il diagramma del taglio rappresenta la derivata del momento flettente. Ne segue che il taglio fornisce informazioni sulla pendenza del diagramma del momento, sicchè — ad esempio — dove il taglio si annulla il momento avrà pendenza orizzontale, attingendo un minimo, un massimo o un punto di flesso. Nella fattispecie, il taglio si annulla in mezzeria, dove il momento è massimo.
2. la relazione che lega rotazioni e spostamenti garantisce che il diagramma delle rotazioni rappresenta, a meno del segno, la derivata dell'abbassamento. Ne segue che le rotazioni forniscono informazioni sulla pendenza del diagramma dell'abbassamento, a somiglianza di quanto detto prima per la coppia taglio-momento flettente. Nella fattispecie, le rotazioni sono nulle in mezzeria, dove si verifica l'abbassamento massimo.
3. la relazione che lega momenti flettenti e rotazioni garantisce che il diagramma del momento è proporzionale alla derivata delle rotazioni. Ne segue che esso fornisce informazioni sulla pendenza del diagramma delle rotazioni. Se ad esempio si vuol conoscere le ascisse di rotazione massima e minima, occorre calcolare le ascisse dove il momento flettente viene ad annullarsi. Dalla (6) si ha:

$$L^2 - 6Lx_3 + 6x_3^2 = 0 \quad (33.9)$$

e quindi i momenti si annullano in 1^* e 2^* , di ascissa

$$\begin{aligned} x_3^{*1} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) L \approx 0.211325L \\ x_3^{*2} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) L \approx 0.788675L \end{aligned} \quad (33.10)$$

In corrispondenza di tali ascisse le rotazioni raggiungono i loro valori minimi e massimi, pari a:

$$\begin{aligned} \phi(x_3^{1*}) &= \phi_{min} = -\frac{1}{72\sqrt{3}} p_0 \frac{L^3}{EI} \\ \phi(x_3^{2*}) &= \phi_{max} = \frac{1}{72\sqrt{3}} p_0 \frac{L^3}{EI} \end{aligned} \quad (33.11)$$

4. la relazione che lega il momento all'abbassamento fornisce utili indicazioni sulla *curvatura* del diagramma degli abbassamenti. Ed infatti può notarsi che la curvatura cambia di segno in 1^* e 2^* .
5. Lo spostamento massimo è attinto in mezzeria, dove sono nulle le rotazioni, e vale:

$$u_{2\max} = u_2 \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{1}{384} p_0 \frac{L^4}{EI} \quad (33.12)$$

6. Infine, è necessario che i diagrammi soddisfino le condizioni ai limiti. Nel caso in esame, ad esempio, nel diagramma delle rotazioni può controllarsi che esse si annullino agli estremi, mentre il diagramma degli spostamenti dovrà annullarsi agli estremi, e dovrà partire in questi punti con tangente orizzontale.

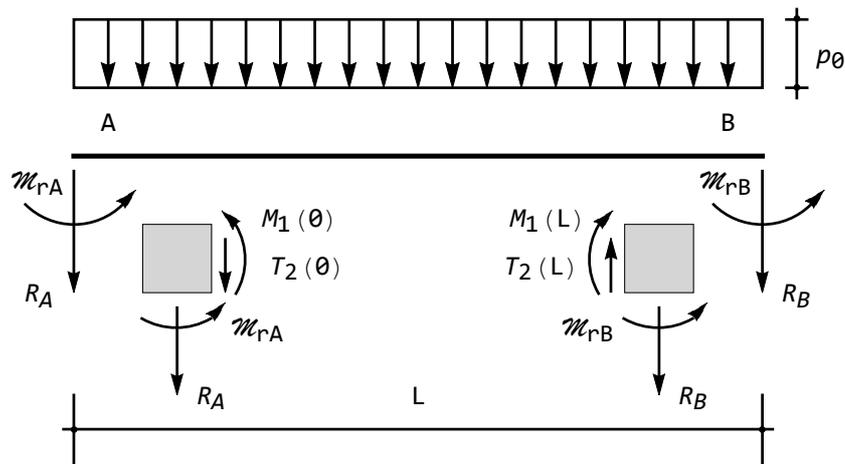


Figura 33.3: Le reazioni per la trave incastrata agli estremi

Come si è detto, la trave incastrata agli estremi è doppiamente iperstatica, e vano sarebbe il tentativo di calcolare le quattro reazioni vincolari attraverso le due equazioni di equilibrio della statica (cfr. Figura 33.3):

$$\begin{aligned} R_A + R_B + p_0 L &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + \mathcal{M}_{rB} + R_A L + p_0 \frac{L^2}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (33.13)$$

Le reazioni quindi dovranno ricavarsi dalla conoscenza delle c.s.i. agli estremi, come illustrato in Figura 33.3:

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2(0) = -p_0 \frac{L}{2} \\ \mathcal{M}_{rA} &= -M_1(0) = p_0 \frac{L^2}{12} \\ R_B &= T_2(L) = -p_0 \frac{L}{2} \\ \mathcal{M}_{rB} &= M_1(L) = -p_0 \frac{L^2}{12} \end{aligned} \quad (33.14)$$

Ne segue che le due reazioni verticali sono dirette verso l'alto, che la coppia reattiva a sinistra è antioraria, mentre la coppia reattiva a destra è oraria.

33.1.1 Una digressione storica : l'errore di Weisbach

Come riportato da Karl–Eugen Kurrer (*The History of the Theory of Structures*, Wiley 2009, pag.173), il primo ad utilizzare i diagrammi del momento per illustrarne la distribuzione lungo l'asse è stato Julius Weisbach nel suo trattato enciclopedico *Lehrbuch der Ingenieur–und Maschinen–Mechanik* (1845). Ad esempio, per la trave doppiamente incastrata, soggetta ad un carico uniformemente distribuito, viene riportata l'immagine qui riprodotta come Figura 33.4.

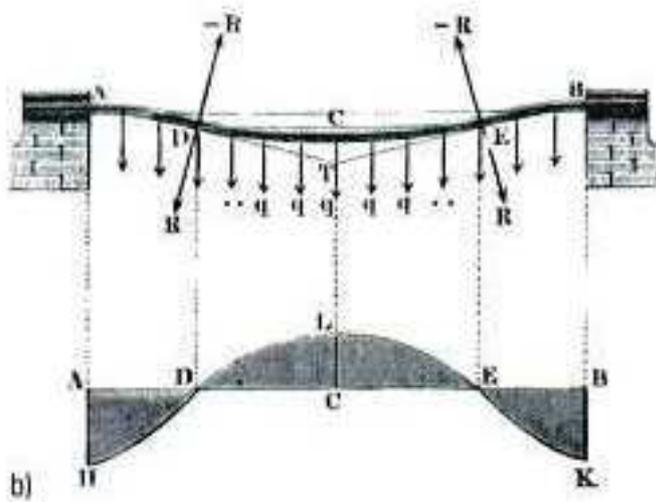


Figura 33.4: Il diagramma del momento flettente per trave doppiamente incastrata, secondo Weisbach

Nella parte superiore della Figura, è schematizzata la deformata della trave, e sono ben evidenziati i due punti di flesso in D ed E . Nel diagramma inferiore è riportato il diagramma del momento flettente (con l'asse verticale diretto verso l'alto), con i due punti di nullo in D ed E : la correlazione tra il diagramma del momento flettente, e la curvatura del diagramma dello spostamento è quindi correttamente osservata.

Tuttavia, il diagramma del momento non è corretto, in quanto nei punti D ed E il momento non cambia curvatura, come invece implicito nel disegno di Weisbach. In realtà, la relazione tra momento e carico distribuito:

$$\frac{d^2 M_1}{dx_3^2} = -p \quad (33.15)$$

implica, in questo caso, una curvatura costante del diagramma del momento.

33.2 La trave appoggiata agli estremi

Per una trave i cui due estremi sono impediti di muoversi, ma possono ruotare, come riportato in Figura 33.5, occorrerà che sia:

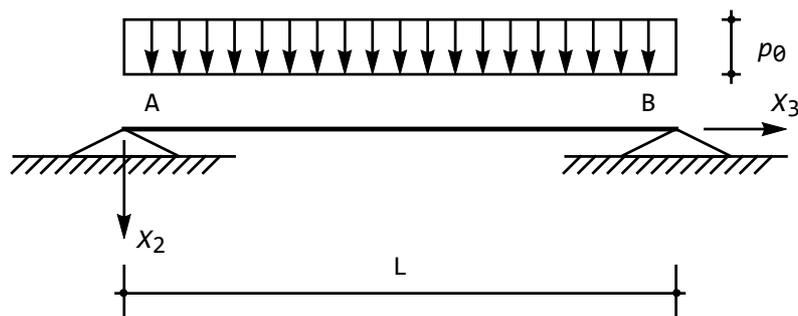


Figura 33.5: La trave semplicemente appoggiata

$$\begin{aligned}
 u_2(0) = 0 &\rightarrow C_1 = 0 \\
 M_1(0) = 0 &\rightarrow u_2''(0) = 0 \rightarrow 2C_3 = 0 \\
 u_2(L) = 0 &\rightarrow C_1 + C_2L + C_3L^2 + C_4L^3 + p_0 \frac{L^4}{24EI_{11}} = 0 \\
 M_1(L) = 0 &\rightarrow u_2''(L) = 0 \rightarrow 2C_3 + 6C_4L + p_0 \frac{L^2}{2EI_{11}} = 0
 \end{aligned} \tag{33.16}$$

Le ultime due delle (33.16) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{p_0 L^3}{24EI_{11}} \\
 C_4 &= -\frac{p_0 L}{12EI_{11}}
 \end{aligned} \tag{33.17}$$

sicchè gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0 x_3}{24EI_{11}} (L^3 - 2Lx_3^2 + x_3^3) \tag{33.18}$$

Conosciuti gli spostamenti, si possono facilmente ricavare rotazioni, momenti e tagli:

$$\begin{aligned}
 \phi(x_3) &= -\frac{p_0}{24EI_{11}} (L^3 - 6Lx_3^2 + 4x_3^3) \\
 M_1(x_3) &= \frac{p_0}{2} (L - x_3) x_3 \\
 T_2(x_3) &= \frac{p_0}{2} (L - 2x_3)
 \end{aligned} \tag{33.19}$$

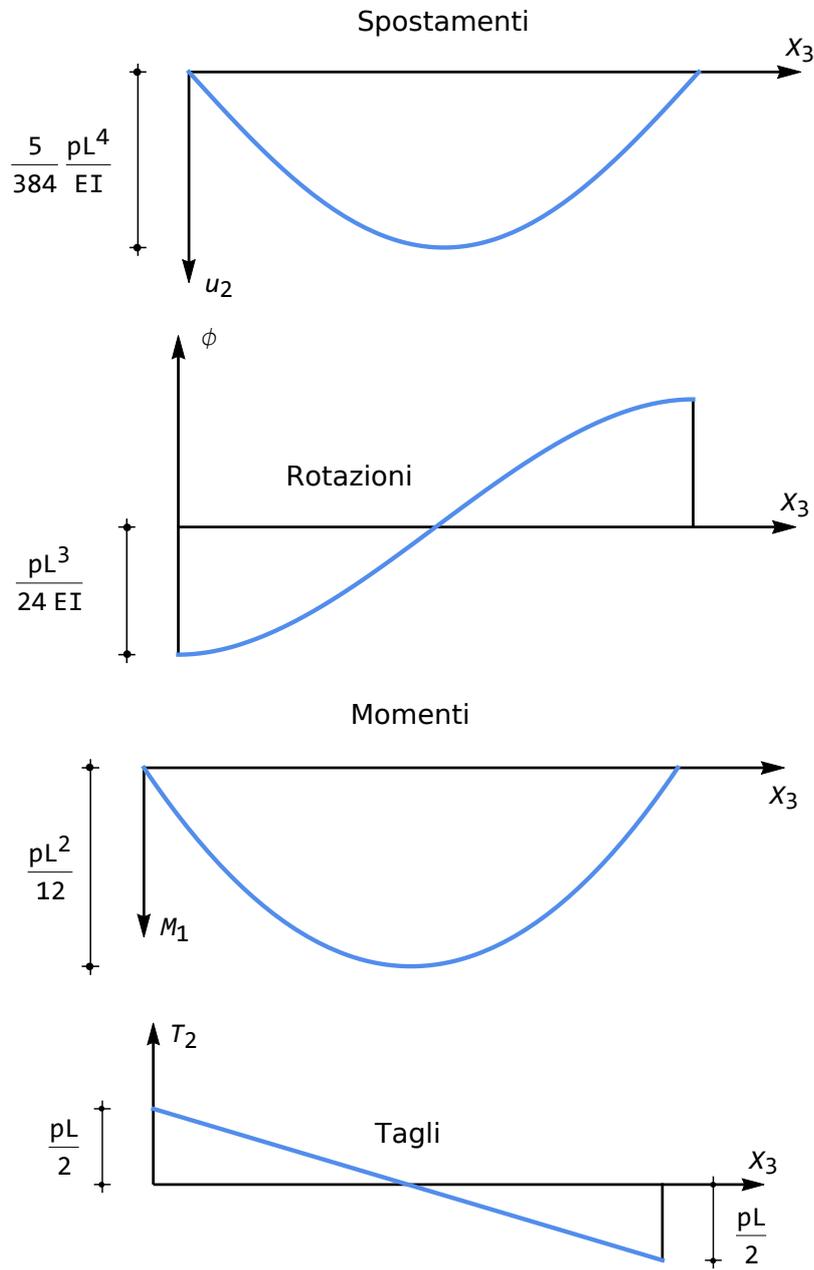


Figura 33.6: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave doppiamente appoggiata

Si noti che il taglio varia con la stessa legge lineare della trave doppiamente incastrata, mentre il momento varia con legge parabolica, assumendo valori nulli agli estremi. Ciò basta per garantire che il diagramma delle rotazioni partirà, nei due estremi, con tangente orizzontale, come riportato in Figura 33.6, dove sono anche definiti alcuni valori significativi:

$$\begin{aligned}\phi_{\min} &= \phi(0) = -\frac{1}{24} \frac{p_0 L^3}{EI} \\ \phi_{\max} &= \phi(L) = \frac{1}{24} \frac{p_0 L^3}{EI}\end{aligned}\quad (33.20)$$

mentre in mezzeria si hanno i valori massimi di momenti e spostamenti:

$$\begin{aligned}M_{1\max} &= M\left(\frac{L}{2}\right) = p_0 \frac{L^2}{8} \\ u_{2\max} &= u_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384} p_0 \frac{L^4}{EI}\end{aligned}\quad (33.21)$$

Nota - Rispetto alla trave doppiamente incastrata, il momento in mezzeria è triplicato, e l'abbassamento massimo è quintuplicato.

Le due reazioni verticali degli appoggi possono calcolarsi — stante l'isostaticità della struttura — attraverso la scrittura delle due equazioni di equilibrio della statica:

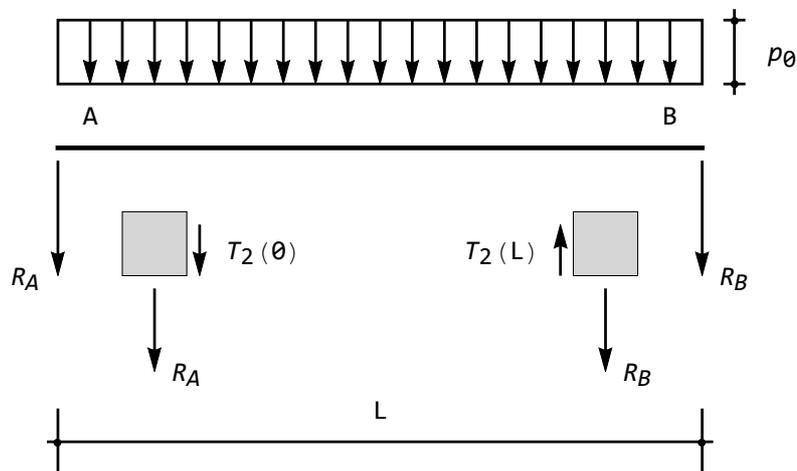


Figura 33.7: Le reazioni per la trave appoggiata agli estremi

$$\begin{aligned}R_A + R_B + p_0 L &= 0 \\ R_A L + p_0 \frac{L^2}{2} &= 0\end{aligned}\quad (33.22)$$

da cui:

$$R_A = R_B = -p_0 \frac{L}{2} \quad (33.23)$$

Alternativamente, si può leggere dallo schema di Figura 33.7:

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2(0) = -p_0 \frac{L}{2} \\ R_B &= T_2(L) = -p_0 \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (33.24)$$

E' interessante osservare che nel caso di strutture isostatiche è spesso possibile ottenere i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione interna, senza dover risolvere il problema ai limiti. Ed infatti, in questo caso si conoscono le reazioni, attraverso le (33.22), da cui possono ricavarsi i tagli agli estremi, e poichè l'andamento del diagramma è lineare, non resta che congiungere i due valori di $T_2(0)$ e di $T_2(L)$. Inoltre, il diagramma del momento ha andamento parabolico, e quindi per il suo tracciamento basta conoscere il valore in due punti (agli estremi, dove esso è nullo) e la pendenza in mezzeria (nulla, perchè nullo è il taglio in mezzeria).

33.3 La trave a mensola

Si consideri ora una trave il cui estremo sinistro sia incastrato, mentre il destro sia libero, soggetta al solito carico uniformemente distribuito su tutta la luce (cfr. Figura 33.8). A sinistra occorre quindi imporre le due condizioni di congruenza, annullando spostamenti e rotazioni, mentre nell'estremo libero dovranno essere soddisfatte le condizioni di equilibrio che annullano le caratteristiche delle sollecitazione interna. Sarà allora:

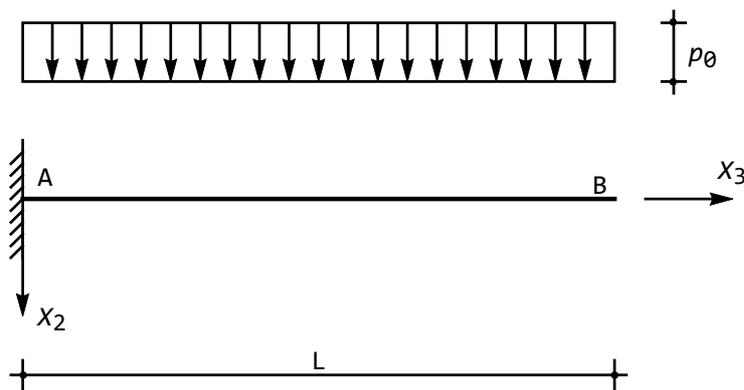


Figura 33.8: La trave a mensola

$$\begin{aligned}
u_2(0) = 0 &\longrightarrow C_1 = 0 \\
u_2'(0) = 0 &\longrightarrow C_2 = 0 \\
M_1(L) = 0 &\longrightarrow u_2''(L) = 0 \longrightarrow 2C_3 + 6C_4L + p_0 \frac{L^2}{2EI_{11}} = 0 \\
T_2(L) = 0 &\longrightarrow u_2'''(L) = 0 \longrightarrow 6C_4 + p_0 \frac{L}{EI_{11}} = 0
\end{aligned} \tag{33.25}$$

Le ultime due delle (33.25) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$\begin{aligned}
C_3 &= p_0 \frac{L^2}{4EI_{11}} \\
C_4 &= -p_0 \frac{L}{6EI_{11}}
\end{aligned} \tag{33.26}$$

sicchè gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0 x_3^2}{24EI_{11}} (6L^2 - 4Lx_3 + x_3^3) \tag{33.27}$$

da cui, per derivazioni successive:

$$\begin{aligned}
\phi(x_3) &= -\frac{p_0 x_3}{6EI_{11}} (3L^2 - 3Lx_3 + x_3^2) \\
M_1(x_3) &= -\frac{p_0}{2} (L - x_3)^2 \\
T_2(x_3) &= p_0 (L - x_3)
\end{aligned} \tag{33.28}$$

I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 33.9.

Partendo dal diagramma del taglio, esso è lineare, si annulla in corrispondenza dell'estremo libero (quarta condizione ai limiti), ed ha pendenza pari a $-p_0$. Ne segue univocamente il diagramma di Figura.

Il diagramma del momento flettente è parabolico, si annulla nell'estremo libero (terza condizione ai limiti), e in questo stesso estremo presenta una tangente orizzontale. Le rotazioni, invece, sono nulle nell'incastro (seconda condizione ai limiti), ed assumono il loro valore massimo nell'estremo libero, dove il diagramma presenta una tangente orizzontale, dovuta all'annullarsi del momento in tale punto. Infine, gli spostamenti sono nulli nell'incastro, ed il relativo diagramma parte con tangente orizzontale, fino ad arrivare ad un valore massimo all'estremo libero.

I valori significativi per le caratteristiche della sollecitazione interna si raggiungono in corrispondenza dell'incastro:

$$\begin{aligned}
M_{1min} = M_1(0) &= -\frac{p_0}{2} L^2 \\
T_{2max} = T_2(0) &= p_0 L
\end{aligned} \tag{33.29}$$

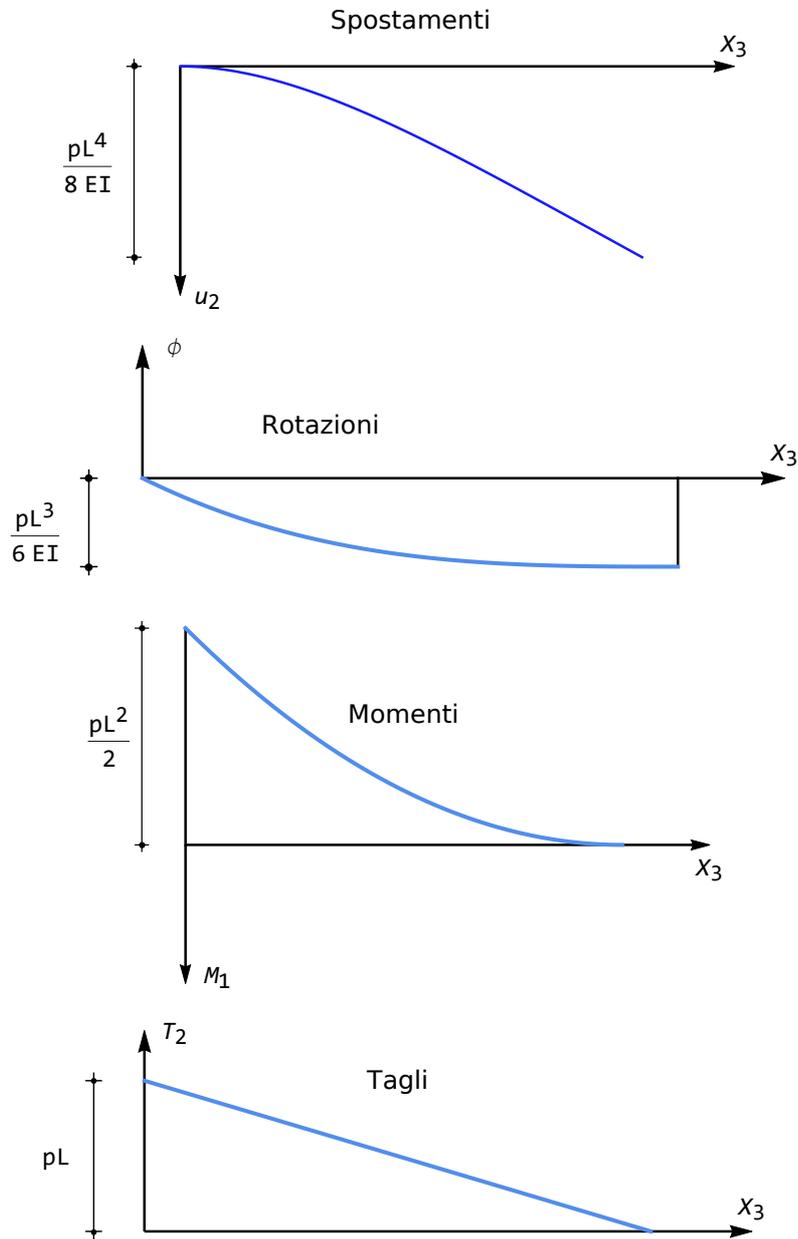


Figura 33.9: La trave a mensola soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

mentre rotazioni e spostamenti massimi si attingono nell'estremo libero:

$$\begin{aligned}\phi_{min} = \phi(L) &= -\frac{p_0 L^3}{6EI_{11}} \\ u_{2max} = u_2(L) &= \frac{p_0 L^4}{8EI_{11}}\end{aligned}\quad (33.30)$$

Anche la trave a mensola è isostatica, sicchè la reazione e la coppia reattiva dell'incastro possono calcolarsi dalle due equazioni di equilibrio della statica, come evidente dalla Figura 33.10:

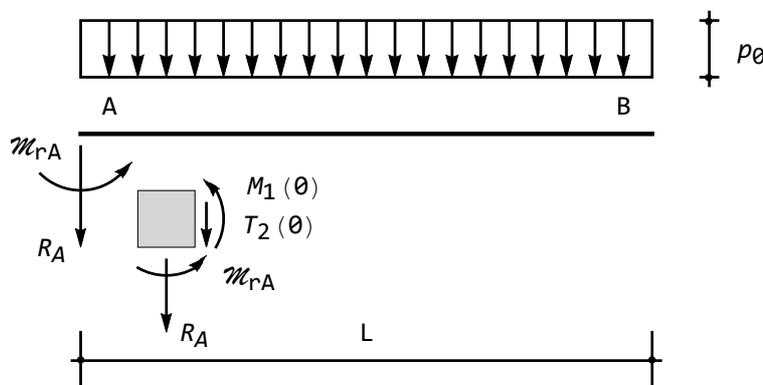


Figura 33.10: Le reazioni per la trave a mensola

$$\begin{aligned}R_A + p_0 L &= 0 \longrightarrow R_A = -p_0 L \\ \mathcal{M}_{rA} + R_A L + p_0 \frac{L^2}{2} &= 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{rA} = p_0 \frac{L^2}{2}\end{aligned}\quad (33.31)$$

Alternativamente, esse possono calcolarsi dall'equilibrio del concio elementare, e come sempre sono uguali e contrarie alle corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna.

La trave incastrata–appoggiata

Si consideri ora una trave il cui estremo sinistro sia incastrato, mentre il destro sia appoggiato, soggetta al solito carico uniformemente distribuito su tutta la luce (cfr. Figura 33.11). A sinistra occorre quindi imporre le due condizioni di congruenza, annullando spostamenti e rotazioni, mentre nell'appoggio di destra alla condizione di congruenza, che annulla lo spostamento, occorre affiancare la condizione di equilibrio, secondo cui dovrà essere nullo il momento flettente.

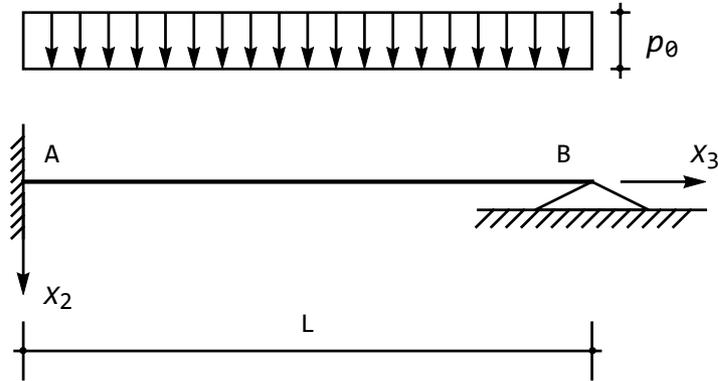


Figura 33.11: La trave incastrata-appoggiata

Sarà allora:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) = 0 &\longrightarrow C_1 = 0 \\
 u_2'(0) = 0 &\longrightarrow C_2 = 0 \\
 u_2(L) = 0 &\longrightarrow C_1 + C_2L + C_3L^2 + C_4L^3 + p_0 \frac{L^4}{24EI_{11}} = 0 \quad (33.32) \\
 M_1(L) = 0 &\longrightarrow u_2''(L) = 0 \longrightarrow 2C_3 + 6C_4L + p_0 \frac{L^2}{2EI_{11}} = 0
 \end{aligned}$$

Le ultime due delle (33.32) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$\begin{aligned}
 C_3 &= p_0 \frac{L^2}{16EI_{11}} \\
 C_4 &= -\frac{5}{48} p_0 \frac{L}{EI_{11}}
 \end{aligned} \quad (33.33)$$

sicchè gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0}{48EI_{11}} x_3^2 (3L^2 - 5Lx_3 + 2x_3^2) \quad (33.34)$$

da cui, per derivazioni successive:

$$\begin{aligned}
 \phi(x_3) &= -\frac{p_0}{48EI_{11}} x_3 (6L^2 - 15Lx_3 + 8x_3^2) \\
 M_1(x_3) &= -\frac{p_0}{8} (L^2 - 5Lx_3 + 4x_3^2) \\
 T_2(x_3) &= p_0 \left(\frac{5}{8}L - x_3 \right)
 \end{aligned} \quad (33.35)$$

I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 33.12. Il diagramma del taglio è — come sempre finora — lineare, si

annulla in corrispondenza dei $5/8$ della luce, ed attinge i due valori estremi sull'appoggio e nell'incastro:

$$\begin{aligned} T_{2\max} &= T_2(0) = \frac{5}{8}p_0L \\ T_{2\min} &= T_2(L) = -\frac{3}{8}p_0L \end{aligned} \quad (33.36)$$

Il momento flettente varierà con legge parabolica, annullandosi sull'appoggio e ad $1/4$ della luce. Inoltre esso raggiungerà il suo valore massimo laddove il taglio si annulla, ossia a $5/8$ della luce, ed il suo valore minimo nell'incastro:

$$\begin{aligned} M_{1\min} &= M(0) = -\frac{p_0L^2}{8} \\ M_{1\max} &= M\left(\frac{5}{8}L\right) = \frac{9}{128}p_0L^2 \end{aligned} \quad (33.37)$$

Le rotazioni si annulleranno di sicuro in corrispondenza dell'incastro, e sicuramente presenteranno una tangente orizzontale sull'appoggio, dove il momento è nullo. Inoltre raggiungeranno un altro valore estremo (di minimo) ad $1/4$ della luce, in corrispondenza dell'altro punto di nullo del momento. Infine, la curvatura del diagramma, proporzionale alla derivata seconda della funzione — ossia proporzionale al taglio — si annullerà ai $5/8$ della luce. I valori massimi e minimi sono forniti da:

$$\begin{aligned} \phi_{\min} &= \phi\left(\frac{L}{4}\right) = -\frac{11}{768}p_0\frac{L^3}{EI_{11}} \\ \phi_{\max} &= \phi(L) = p_0\frac{L^3}{48EI_{11}} \end{aligned} \quad (33.38)$$

L'ascissa della trave in cui le rotazioni si annullano può trovarsi risolvendo l'equazione:

$$x_3(6L^2 - 15Lx_3 + 8x_3^2) = 0 \quad (33.39)$$

ed ottenendo quindi la soluzione $x_3 = 0$, corrispondente all'incastro, e le due soluzioni:

$$x_3^{1,2} = \frac{L}{16}(15 \pm \sqrt{33}) \quad (33.40)$$

La soluzione col segno positivo ricade al di fuori dell'intervallo $[0, L]$, e quindi non ha significato fisico, mentre la soluzione col segno negativo identifica una ascissa αL , con $\alpha \approx 0.578$.

Per tracciare il diagramma degli abbassamenti si hanno i seguenti dati: esso deve annullarsi agli estremi, e nell'incastro deve avere tangente orizzontale. Inoltre, deve avere tangente orizzontale in corrispondenza dell'ascissa αL , e la sua curvatura deve cambiare di segno ad $1/4$ della luce, dove si annulla il momento flettente. L'abbassamento massimo si verifica in αL , e vale:

$$u_{2\max} = u_2(\alpha L) = \gamma p_0 \frac{L^4}{EI_{11}} \quad (33.41)$$

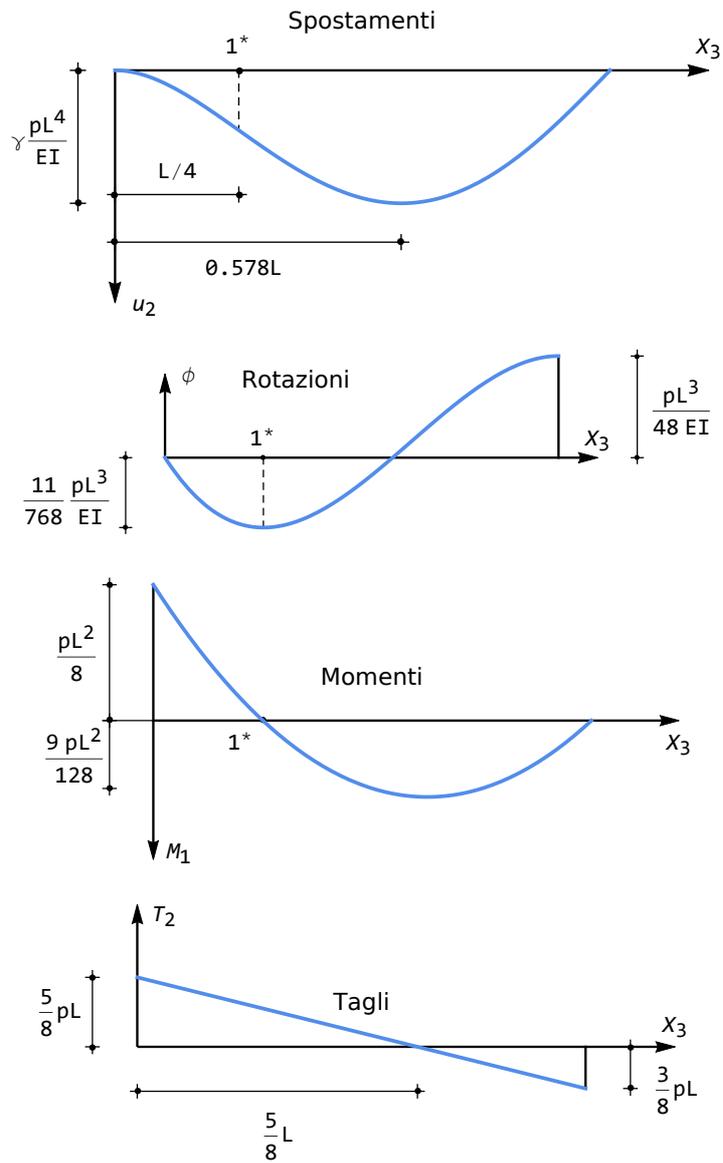


Figura 33.12: La trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

ed il coefficiente γ è valutabile come:

$$\gamma = \frac{39 + 55\sqrt{33}}{65536} \approx 0.00541612 \quad (33.42)$$

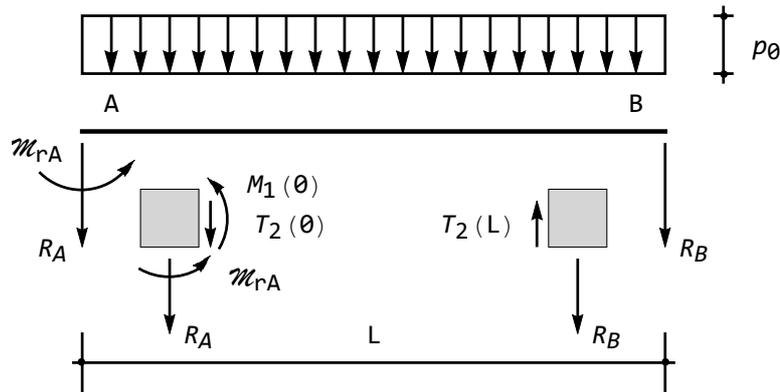


Figura 33.13: Le reazioni per la trave incastrata ed appoggiata

Le tre reazioni non possono calcolarsi in base alle sole equazioni della statica, poichè la trave è una volta iperstatica. Ne segue che esse dovranno dedursi *a posteriori*, in base ai valori delle caratteristiche della sollecitazione interna agli estremi, come illustrato in Figura 33.13.

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2(0) = -\frac{5}{8}p_0L \\ \mathcal{M}_{rA} &= -M_1(0) = \frac{p_0L^2}{8} \\ R_B &= T_2(L) = -\frac{3}{8}p_0L \end{aligned} \quad (33.43)$$

33.4 La trave con incastro e bipendolo

Si consideri ora una trave il cui estremo sinistro sia incastrato, mentre il destro sia libero di abbassarsi ma non di ruotare (bipendolo), soggetta al solito carico uniformemente distribuito su tutta la luce (cfr. Figura 33.14). A sinistra occorre quindi imporre le due condizioni di congruenza, annullando spostamenti e rotazioni, mentre nel bipendolo di destra alla condizione di congruenza, che annulla la rotazione, occorre affiancare la condizione di equilibrio, secondo cui

dovrà essere nullo lo sforzo di taglio. Sarà allora:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) = 0 &\longrightarrow C_1 = 0 \\
 u_2'(0) = 0 &\longrightarrow C_2 = 0 \\
 \phi(L) = 0 &\longrightarrow u_2'(L) = 0 \longrightarrow C_2 + 2C_3L + 3C_4L^2 + p_0 \frac{L^3}{6EI_{11}} = 0 \quad (33.44) \\
 T_2(L) = 0 &\longrightarrow u_2''(L) = 0 \longrightarrow 6C_4 + p_0 \frac{L}{EI_{11}} = 0
 \end{aligned}$$

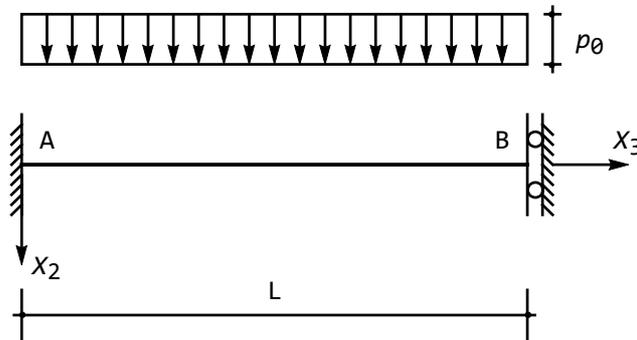


Figura 33.14: La trave con incastro e bipendolo

Le ultime due delle (33.44) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$\begin{aligned}
 C_3 &= p_0 \frac{L^2}{6EI_{11}} \\
 C_4 &= -p_0 \frac{L}{6EI_{11}}
 \end{aligned} \quad (33.45)$$

sicchè gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0}{24EI_{11}} x_3^2 (x_3 - 2L)^2 \quad (33.46)$$

da cui, per derivazioni successive:

$$\begin{aligned}
 \phi(x_3) &= -\frac{p_0}{6EI_{11}} x_3 (2L^2 - 3Lx_3 + x_3^2) \\
 M_1(x_3) &= -\frac{p_0}{6} (2L^2 - 6Lx_3 + 3x_3^2) \\
 T_2(x_3) &= p_0 (L - x_3)
 \end{aligned} \quad (33.47)$$

I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 33.15. Il diagramma del taglio è — come sempre finora — lineare, si annulla in corrispondenza del bipendolo, ed avendo pendenza pari a $-p_0$ attinge

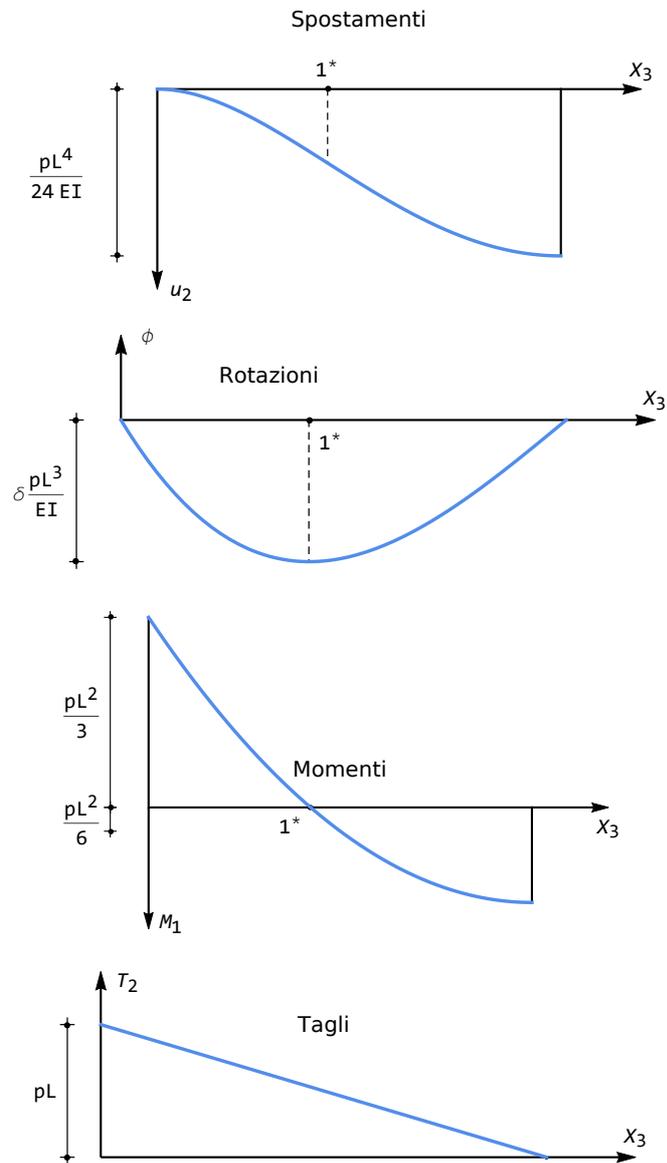


Figura 33.15: La trave con incastro a sinistra e con bipendolo a destra, soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

il valore $-p_0L$ nell'incastro. Il momento flettente varierà con legge parabolica, giungendo sul bipendolo con tangente orizzontale. I valori estremi si verificano in corrispondenza dei vincoli, e valgono:

$$\begin{aligned} M_{1min} &= M_1(0) = -\frac{p_0L^2}{3} \\ M_{1max} &= M_1(L) = \frac{p_0L^2}{6} \end{aligned} \quad (33.48)$$

Infine, esso si annulla nel punto 1^* di ascissa $L - \frac{L}{\sqrt{3}} \approx 0.422L$. Le rotazioni si annulleranno di sicuro in corrispondenza dell'incastro e del bipendolo, e sicuramente presenteranno una tangente orizzontale in 1^* , dove i momenti sono nulli. In tale punto si avrà il valore massimo, pari a:

$$\phi_{min} = \phi(1^*) = -\frac{1}{9\sqrt{3}}p_0 \frac{L^3}{EI_{11}} = \delta p_0 \frac{L^3}{EI_{11}} \quad (33.49)$$

Il diagramma delle rotazioni non presenta punti di nullo interni all'intervallo $[0, L]$, e di conseguenza il diagramma degli abbassamenti non avrà punti di estremo. Comunque, l'abbassamento sarà nullo nell'incastro, ed il diagramma avrà tangente orizzontale nel bipendolo. Infine, la curvatura sarà nulla in 1^* . L'abbassamento massimo si avrà nel bipendolo, e vale:

$$u_{2max} = u_2(L) = p_0 \frac{L^4}{24EI_{11}} \quad (33.50)$$

Anche in questo le tre reazioni non possono calcolarsi in base alle sole equazioni

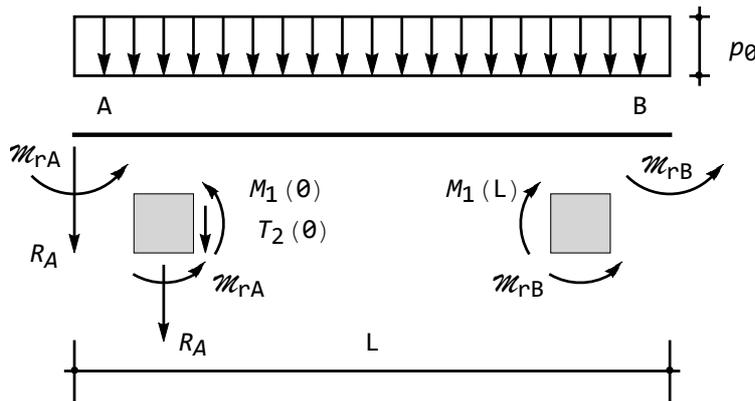


Figura 33.16: Le reazioni per la trave con incastro e bipendolo

della statica, poichè la trave è una volta iperstatica. Ne segue che esse dovranno

dedursi *a posteriori*, in base ai valori delle caratteristiche della sollecitazione interna agli estremi, come riportato in Figura 33.16:

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2(0) = -p_0L \\ \mathcal{M}_{rA} &= -M_1(0) = p_0\frac{L^2}{3} \\ \mathcal{M}_{rB} &= M_1(L) = p_0\frac{L^2}{6} \end{aligned} \quad (33.51)$$

33.5 La trave con appoggio e bipendolo

Concludiamo questa rassegna con il caso più semplice, in cui la trave è semplicemente appoggiata a sinistra, mentre l'estremo di destra è vincolato con un bipendolo (cfr. Figura 33.17). La risultante struttura è isostatica, e le due reazioni possono calcolarsi in base alle due equazioni della statica, così come indicato in Figura 33.18:

$$\begin{aligned} R_A + p_0L &= 0 \longrightarrow R_A = -p_0L \\ -p_0\frac{L^2}{2} + \mathcal{M}_{rB} &= 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{rB} = p_0\frac{L^2}{2} \end{aligned} \quad (33.52)$$

Si noti che la seconda equazione esprime l'equilibrio alla rotazione intorno al punto A .

Il diagramma del taglio segue immediatamente, in quanto se ne conosce l'andamento (lineare) e due valori, in corrispondenza dell'appoggio, dove sarà $T_2(0) = -R_A = p_0L$, ed in corrispondenza del bipendolo, dove $T_2(L) = 0$. Sarà quindi:

$$T_2(x_3) = p_0(L - x_3) \quad (33.53)$$

Il diagramma del momento è altrettanto semplice, in quanto si conosce il suo valore a sinistra $M_1(0) = 0$ e a destra $M_1(L) = \mathcal{M}_{rB} = p_0\frac{L^2}{2}$, ed inoltre esso avrà tangente orizzontale in corrispondenza del bipendolo. Assegnato un generico andamento quadratico:

$$M_1(x_3) = a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 \quad (33.54)$$

le tre condizioni suddette permettono il calcolo delle tre costanti:

$$\begin{aligned} M_1(0) &= 0 \longrightarrow a_0 = 0 \\ M_1(L) &= p_0\frac{L^2}{2} \longrightarrow a_0 + a_1L + a_2L^2 = p_0\frac{L^2}{2} \\ \frac{dM_1}{dx_3}(L) &= 0 \longrightarrow a_1 + 2a_2L = 0 \end{aligned} \quad (33.55)$$

Ne segue:

$$M_1(x_3) = p_0Lx_3 - \frac{p_0}{2}x_3^2 = p_0x_3\left(L - \frac{x_3}{2}\right) \quad (33.56)$$

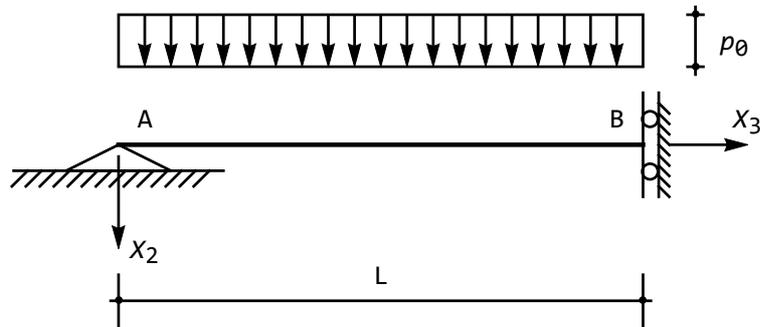


Figura 33.17: La trave con appoggio e bipendolo

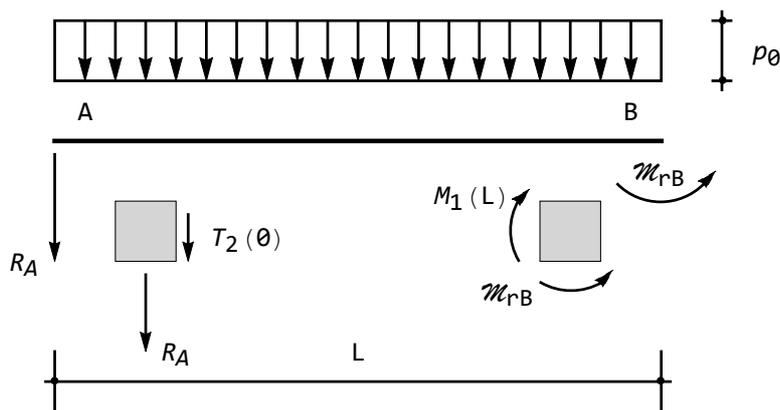


Figura 33.18: Le reazioni per la trave con appoggio e bipendolo

Per conoscere il diagramma delle rotazioni, si può utilizzare la relazione:

$$\phi'(x_3) = \frac{M_1(x_3)}{EI_{11}} \quad (33.57)$$

che integrata fornisce:

$$\phi(x_3) = \frac{p_0}{EI_{11}} \left(\frac{x_3^2}{2} L - \frac{x_3^3}{6} \right) + c_0 \quad (33.58)$$

La costante di integrazione c_0 può calcolarsi imponendo che la rotazione sia nulla in corrispondenza del bipendolo:

$$\phi(L) = \frac{p_0 L^3}{3EI_{11}} + c_0 = 0 \longrightarrow c_0 = -\frac{p_0 L^3}{3EI_{11}} \quad (33.59)$$

Infine, le rotazioni sono fornite da:

$$\phi(x_3) = \frac{p_0}{EI_{11}} \left(\frac{x_3^2}{2} L - \frac{x_3^3}{6} - \frac{L^3}{3} \right) \quad (33.60)$$

Gli abbassamenti si deducono dalla relazione:

$$u_2'(x_3) = -\phi(x_3) \quad (33.61)$$

che conduce, utilizzando la (33.60), a:

$$u_2(x_3) = -\frac{p_0}{EI_{11}} \left(\frac{x_3^3}{6} L - \frac{x_3^4}{24} - \frac{L^3 x_3}{3} \right) + c_0 \quad (33.62)$$

In questo caso, la costante di integrazione c_0 si annulla, in quanto occorre imporre che l'abbassamento sia nullo sull'appoggio, ossia in $x_3 = 0$. I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 33.19, dove sono anche indicati alcuni valori notevoli.

Si confermi attraverso la via usuale quanto ottenuto in questa sezione.

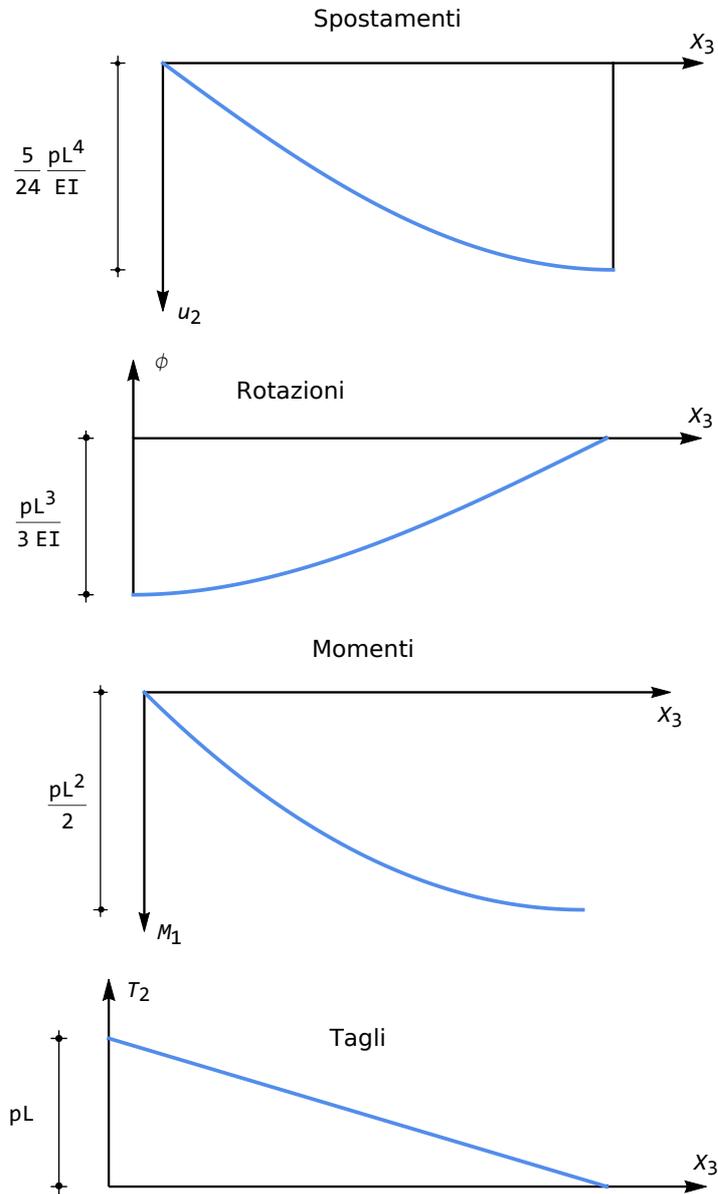


Figura 33.19: La trave con appoggio a sinistra e con bipendolo a destra, soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

Capitolo 34

Ancora sulle travi ad una campata

In questo Capitolo si studiano le travi ad una sola campata con i più comuni tipi di vincolo e soggetti ai più comuni tipi di carico concentrato.

34.1 Introduzione

Si consideri una trave soggetta al carico distribuito $p_0(x_3)$, alla forza F_s ed alla coppia \mathcal{M}_s agenti ambedue all'estremo di sinistra, ed alla forza F_d ed alla coppia \mathcal{M}_d agenti ambedue all'estremo di destra, come illustrato in Figura 34.1.

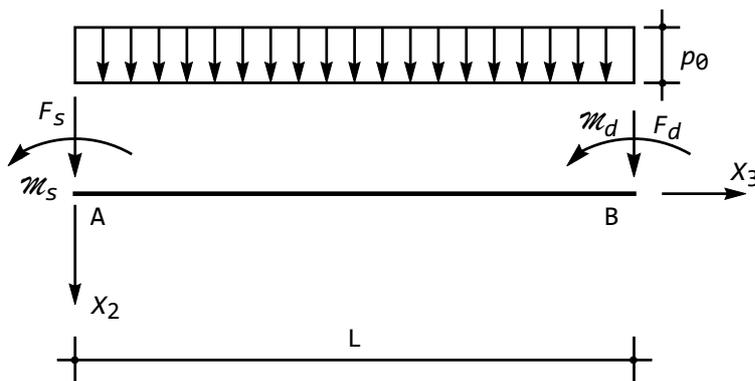


Figura 34.1: La trave ad una campata soggetta a carichi concentrati agli estremi

L'energia potenziale totale di questa trave è pari alla somma dell'energia elastica, che per le travi di Eulero–Bernoulli si riduce alla sola aliquota

flessionale:

$$L_f = \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} u_2''^2(x_3) dx_3 \quad (34.1)$$

e dell'energia potenziale dei carichi applicati, uguale e contraria al lavoro da essi svolto:

$$P = - \int_0^L p_0(x_3) u_2(x_3) dx_3 - F_s u_2(0) - F_d u_2(L) - \mathcal{M}_s \phi(0) - \mathcal{M}_d \phi(L) \quad (34.2)$$

Per il principio di stazionarietà, dovrà essere:

$$\begin{aligned} \delta_1 E_t &= \int_0^L EI_{11} u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p_0 \delta u_2 dx_3 \\ &\quad - F_s \delta u_2(0) - F_d \delta u_2(L) + \mathcal{M}_s \delta u_2'(0) + \mathcal{M}_d \delta u_2'(L) = 0 \end{aligned} \quad (34.3)$$

Integrando due volte per parti il primo integrale, si ha l'usuale equazione differenziale della linea elastica, con le relative condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} (-EI_{11} u_2''(0) + \mathcal{M}_s) \delta u_2'(0) &= 0 \longrightarrow (M_1(0) + \mathcal{M}_s) \delta u_2'(0) = 0 \\ (EI_{11} u_2''(L) + \mathcal{M}_d) \delta u_2'(L) &= 0 \longrightarrow (-M_1(L) + \mathcal{M}_d) \delta u_2'(L) = 0 \end{aligned} \quad (34.4)$$

$$\begin{aligned} (EI_{11} u_2'''(0) - F_s) \delta u_2(0) &= 0 \longrightarrow (T_2(0) + F_s) \delta u_2(0) = 0 \\ (-EI_{11} u_2'''(L) - F_d) \delta u_2(L) &= 0 \longrightarrow (T_2(L) - F_d) \delta u_2(L) = 0 \end{aligned} \quad (34.5)$$

In un estremo incastrato, le due condizioni di congruenza, che annullano spostamenti e rotazioni, restano inalterate, e d'altro canto l'eventuale presenza di forze o coppie concentrate verrebbe bilanciata dalle reazioni vincolari.

In un estremo appoggiato, invece, la condizione di congruenza che vieta l'abbassamento resta inalterata, mentre la condizione di equilibrio non esprimerà più l'annullarsi del momento flettente, bensì, dalle (34.4). Per un appoggio di sinistra il momento sarà pari alla coppia applicata, cambiata di segno, mentre in un appoggio di destra il momento verrà a coincidere con la coppia applicata anche in segno.

Analogamente, in un bipendolo andrà modificata la condizione di equilibrio, che non vedrà più l'annullarsi del taglio. Dalle (34.5) si trae che per un bipendolo di sinistra il taglio sarà pari alla forza applicata, cambiata di segno, mentre in un bipendolo di destra il taglio verrà a coincidere con la forza applicata anche in segno.

In corrispondenza di un appoggio, una eventuale forza verticale verrebbe assorbita dalla reazione dell'appoggio, mentre una coppia agente in un bipendolo viene assorbita dalla coppia reattiva. Infine, in un estremo libero ambedue le condizioni di equilibrio vanno modificate in base alle (34.4-34.5), per cui a sinistra le caratteristiche sono uguali alle corrispondenti forze applicate, ma cambiate di segno, mentre a destra si ha concordanza di segno.

In definitiva, gli unici casi significativi di forze concentrate in corrispondenza dei vincoli sono:

1. trave a mensola soggetta a forza nell'estremo libero
2. trave a mensola soggetta a coppia nell'estremo libero
3. trave con incastro–appoggio soggetta a coppia sull'appoggio
4. trave con incastro–bipendolo soggetta a forza sul bipendolo
5. trave appoggiata con coppia sull'appoggio
6. trave con appoggio–bipendolo con forza sul bipendolo

34.2 La trave a mensola

Si abbia una trave a mensola, ossia incastrata a sinistra e libera a destra, soggetta ad una forza F nell'estremo libero (cfr. Figura 34.2). In assenza di carico distribuito, l'equazione differenziale sarà omogenea:

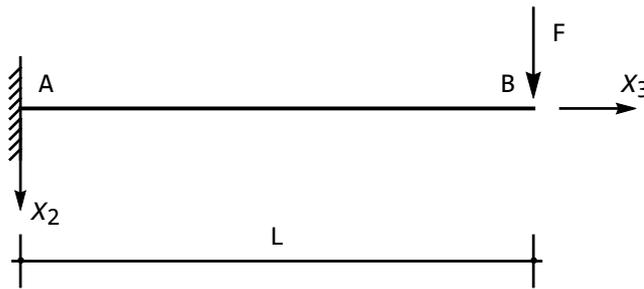


Figura 34.2: La trave a mensola soggetta a forza nell'estremo libero

$$EI_{11}u_2'''' = 0 \quad (34.6)$$

con soluzione:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 \quad (34.7)$$

Ne segue immediatamente che in questo caso, ed in tutti i casi in cui sono assenti carichi distribuiti, lo spostamento varia secondo un polinomio cubico, e conseguentemente la rotazione varierà con legge quadratica, il momento sarà una funzione lineare, ed il taglio sarà costante.

Le condizioni ai limiti possono trarsi dalle (34.4–34.5). Alternativamente, possono fissarsi *a priori* le condizioni di congruenza, ossia l'annullarsi dello spostamento e della rotazione nell'incastro, e dedurre *a posteriori* le altre due condizioni nell'estremo libero, equilibrando il concio elementare all'ascissa $x_3 = L$. Si ha, come può dedursi dalla Figura 34.3:

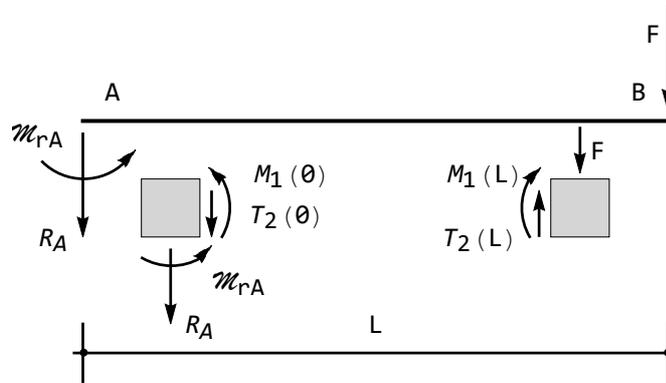


Figura 34.3: Lo schema per la scrittura geometrica delle condizioni ai limiti

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 \phi(0) = 0 &\longrightarrow u_2'(0) = 0 \\
 M_1(L) = 0 &\longrightarrow EI_{11}u_2''(L) = 0 \\
 -T_2(L) + F = 0 &\longrightarrow EI_{11}u_2'''(L) + F = 0
 \end{aligned} \tag{34.8}$$

Queste quattro condizioni possono tramutarsi in un sistema di quattro equazioni algebriche e lineari nelle quattro costanti di integrazione, che quindi possono essere calcolate come:

$$\begin{aligned}
 C_1 = C_2 &= 0 \\
 C_3 &= \frac{FL}{2EI_{11}} \\
 C_4 &= -\frac{F}{6EI_{11}}
 \end{aligned} \tag{34.9}$$

La linea elastica sarà quindi fornita da:

$$u_2(x_3) = \frac{Fx_3^2}{EI_{11}} \left(\frac{L}{2} - \frac{x_3}{6} \right) \tag{34.10}$$

e, conseguentemente:

$$\begin{aligned}
 \phi(x_3) &= \frac{Fx_3}{EI_{11}} \left(\frac{x_3}{2} - L \right) \\
 M_1(x_3) &= F(x_3 - L) \\
 T_2(x_3) &= F
 \end{aligned} \tag{34.11}$$

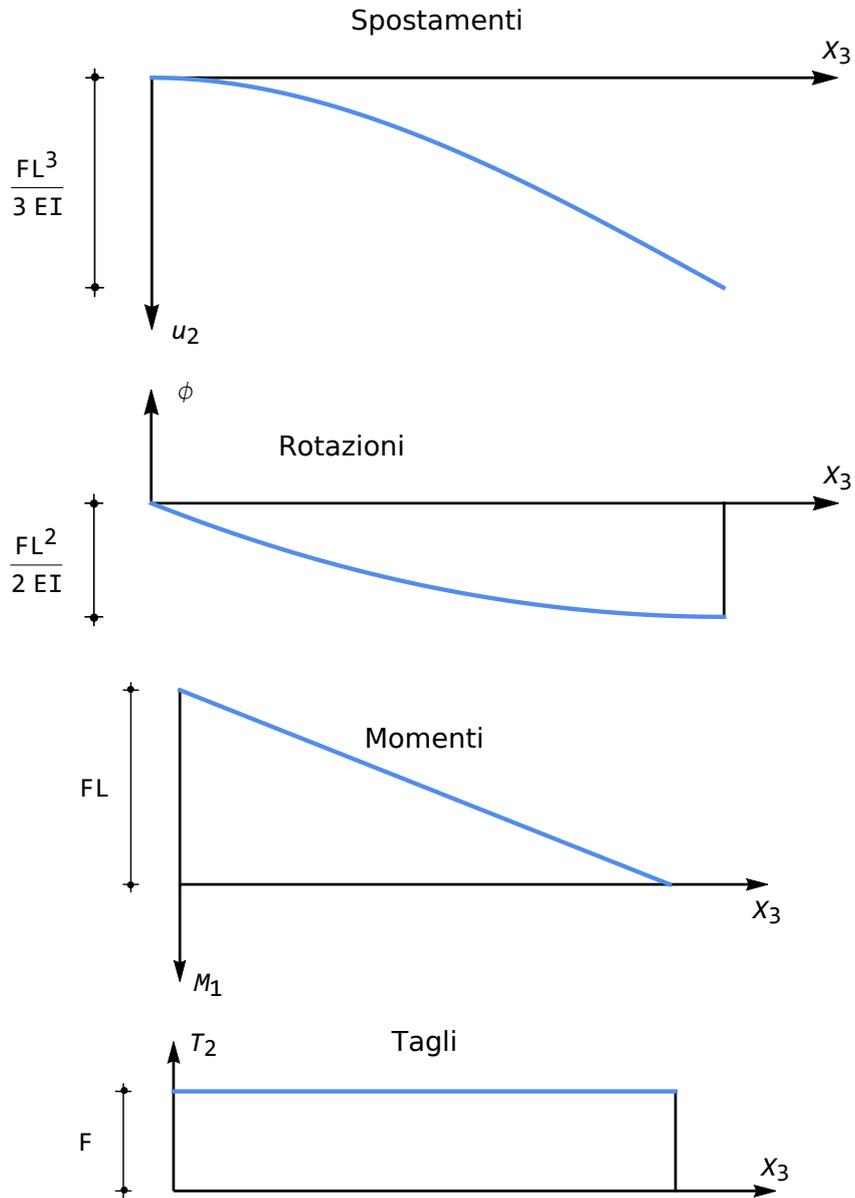


Figura 34.4: Il caso della mensola soggetta a forza concentrata nell'estremo libero

Di interesse sono i valori degli spostamenti all'estremo libero, e delle caratteristiche all'incastro:

$$\begin{aligned} u_{2max} = u_2(L) &= \frac{FL^3}{3EI_{11}} \\ \phi_{min} = \phi(L) &= -\frac{FL^2}{2EI_{11}} \\ M_{1min} = M_1(0) &= FL \end{aligned} \quad (34.12)$$

Il tracciamento dei diagrammi (cfr. Figura 34.4 può convenientemente partire dal taglio, che è banale, e dal momento flettente, che è lineare, si annulla in corrispondenza dell'estremo nullo, ed ha pendenza pari a F . Le rotazioni, che variano con legge quadratica, si annullano nell'incastro, e nell'estremo libero il relativo diagramma deve avere pendenza nulla, in quanto il momento si annulla in quella sezione. Infine, gli abbassamenti si annullano nell'incastro e la pendenza deve essere nulla nello stesso incastro.

Si abbia ora la stessa trave a mensola, soggetta ad una coppia \mathcal{M} nell'estremo libero (cfr. Figura 34.5). Le condizioni ai limiti, analogamente a quanto detto per la mensola soggetta a forza concentrata, sono:

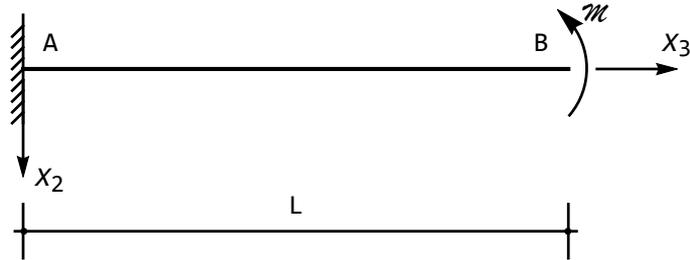


Figura 34.5: La trave a mensola soggetta a coppia nell'estremo libero

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \longrightarrow u_2'(0) = 0 \\ -M_1(L) + \mathcal{M} &= 0 \longrightarrow EI_{11}u_2''(L) + \mathcal{M} = 0 \\ T_2(L) &= 0 \longrightarrow u_2'''(L) = 0 \end{aligned} \quad (34.13)$$

ossia, in questo caso:

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 = C_4 &= 0 \\ C_3 &= -\frac{\mathcal{M}}{2EI_{11}} \end{aligned} \quad (34.14)$$

La linea elastica sarà quindi fornita da:

$$u_2(x_3) = -\frac{\mathcal{M}}{2EI_{11}}x_3^2 \quad (34.15)$$

e, conseguentemente:

$$\begin{aligned}\phi(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} x_3 \\ M_1(x_3) &= \mathcal{M} \\ T_2(x_3) &= 0\end{aligned}\quad (34.16)$$

Di interesse sono i valori degli spostamenti all'estremo libero:

$$\begin{aligned}u_{2min} = u_2(L) &= -\frac{\mathcal{M}L^2}{2EI} \\ \phi_{max} = \phi(L) &= \frac{\mathcal{M}L}{EI}\end{aligned}\quad (34.17)$$

Il tracciamento dei diagrammi non presenta difficoltà, ed è riportato in Figura 34.6.

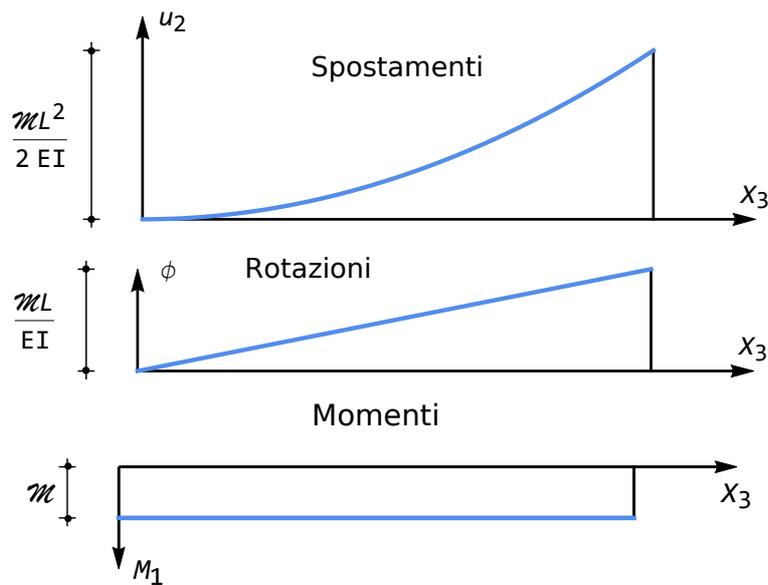


Figura 34.6: Il caso della mensola soggetta a coppia concentrata nell'estremo libero

34.3 La trave appoggiata

Si abbia ora una trave appoggiata ad ambedue gli estremi, soggetta ad una coppia \mathcal{M} agente all'estremo di destra (cfr. Figura 34.7). In assenza di carico distribuito, l'equazione differenziale sarà omogenea:

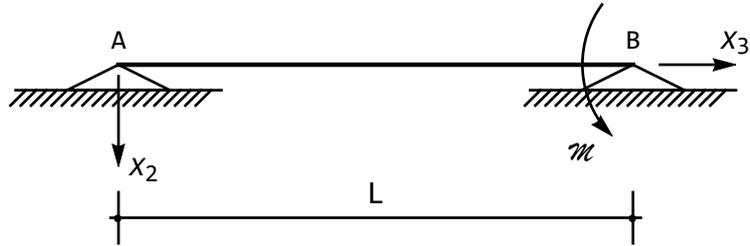


Figura 34.7: La trave appoggiata soggetta a coppia nell'estremo di destra

$$EI_{11}u_2'''' = 0 \quad (34.18)$$

con soluzione:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 \quad (34.19)$$

Le condizioni ai limiti di congruenza impongono l'annullarsi dell'abbassamento in ambedue gli estremi, mentre equilibrando i concetti elementari in $x_3 = 0$ ed in $x_3 = L$ si hanno le altre due condizioni:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ M(0) = 0 &\longrightarrow u_2''(0) = 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ -M(L) + M &= 0 \longrightarrow EI_{11}u_2''(L) + \mathcal{M} = 0 \end{aligned} \quad (34.20)$$

da cui le quattro costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_3 = 0 \\ C_2 &= \frac{\mathcal{M}L}{6EI_{11}} \\ C_4 &= -\frac{\mathcal{M}}{6EI_{11}L} \end{aligned} \quad (34.21)$$

La linea elastica sarà quindi fornita da:

$$u_2(x_3) = \mathcal{M} \frac{x_3(L-x_3)(L+x_3)}{6EI_{11}L} \quad (34.22)$$

e, conseguentemente:

$$\begin{aligned} \phi(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{6EI_{11}} \left(L - 3\frac{x_3^2}{L} \right) \\ M_1(x_3) &= \mathcal{M} \frac{x_3}{L} \\ T_2(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{L} \end{aligned} \quad (34.23)$$

Le reazioni degli appoggi hanno valore assoluto pari a $\frac{\mathcal{M}}{L}$, la reazione di sinistra è negativa, quindi diretta verso l'alto, mentre la reazione di destra è positiva, e quindi diretta verso il basso. In tal modo esse formano una coppia di braccio L , che equilibra la coppia esterna. I diagrammi del taglio, del momento, delle rotazioni e degli spostamenti sono riportati in Figura 34.8. Si noti che il diagramma delle rotazioni porta a sinistra con tangente orizzontale, e si annulla all'ascissa $x_3 = \frac{L}{\sqrt{3}}$. In tale ascissa si verifica l'abbassamento massimo, pari a:

$$u_{2max} = \frac{1}{9\sqrt{3}} \frac{\mathcal{M}L^2}{EI_{11}} \quad (34.24)$$

Di notevole interesse sono poi le rotazioni negli appoggi:

$$\begin{aligned} \phi_{min} = \phi(0) &= -\frac{\mathcal{M}L}{6EI_{11}} \\ \phi_{max} = \phi(L) &= \frac{\mathcal{M}L}{3EI_{11}} \end{aligned} \quad (34.25)$$

34.4 La trave incastrata ed appoggiata

Un ulteriore esempio di trave ad una sola campata soggetta a carichi concentrati è la trave incastrata ad un estremo, appoggiata all'altro estremo, e soggetta ad una coppia sull'appoggio (Figura 34.9).

Ferma restando la distribuzione cubica degli spostamenti, e quindi quella quadratica delle rotazioni, lineare dei momenti e costante dei tagli, le condizioni ai limiti di congruenza saranno ora tre, esprimenti l'annullarsi dello spostamento in ambedue gli estremi, e della rotazione nell'incastro. La restante condizione deriva dall'equilibrio alla rotazione del concio elementare sull'appoggio:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ \phi(0) = 0 &\longrightarrow u_2'(0) = 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ -M(L) + \mathcal{M} &= 0 \longrightarrow EI_{11}u_2''(L) + \mathcal{M} = 0 \end{aligned} \quad (34.26)$$

ossia:

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 &= 0 \\ C_3 &= \frac{\mathcal{M}}{4EI_{11}} \\ C_4 &= -\frac{\mathcal{M}}{4EI_{11}L} \end{aligned} \quad (34.27)$$

La linea elastica sarà quindi fornita da:

$$u_2(x_3) = \mathcal{M} \frac{x_3^2(L - x_3)}{4EI_{11}L} \quad (34.28)$$

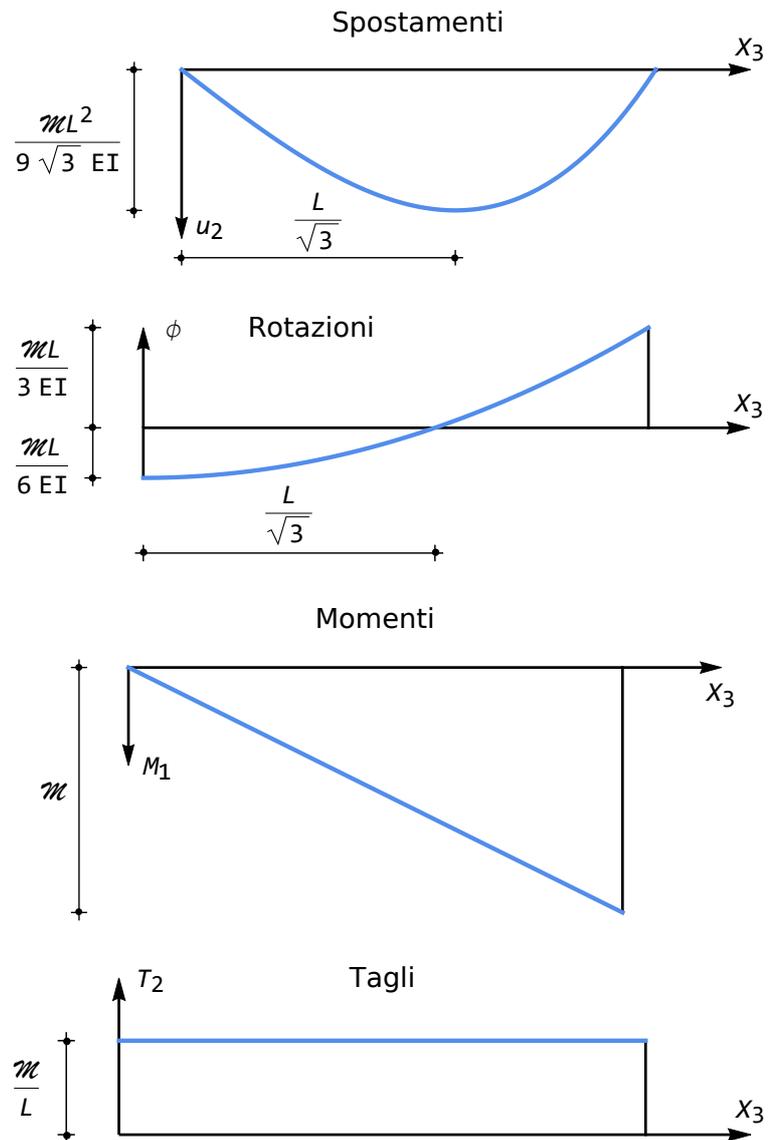


Figura 34.8: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per trave appoggiata soggetta ad una coppia su un appoggio

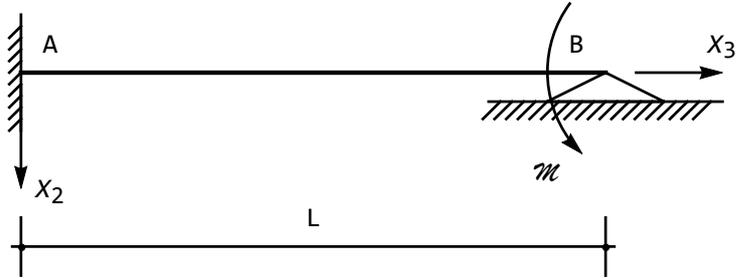


Figura 34.9: La trave incastrata-appoggiata soggetta a coppia nell'estremo di destra

e, conseguentemente, per derivazioni successive:

$$\begin{aligned}
 \phi(x_3) &= \frac{\mathcal{M}x_3(3x_3 - 2L)}{4EI_{11}L} \\
 M_1(x_3) &= \mathcal{M} \frac{3x_3 - L}{2L} \\
 T_2(x_3) &= \frac{3}{2} \frac{\mathcal{M}}{L}
 \end{aligned}
 \tag{34.29}$$

I diagrammi delle caratteristiche sono facilmente tracciabili: il taglio è costante, il momento si annulla ad un terzo della luce, assume il valore \mathcal{M} nell'appoggio (come da condizione ai limiti) ed il valore $\mathcal{M}/2$ nell'incastro. Le rotazioni, nulle nell'incastro, si annullano a $2/3$ della luce, ed il relativo diagramma ha tangente orizzontale ad un terzo della luce, dove il momento è nullo. Infine, gli spostamenti sono nulli ad ambedue gli estremi, ed il diagramma avrà tangente orizzontale in corrispondenza dell'incastro, ed ai $2/3$ della luce, dove le rotazioni sono nulle. Si ha quindi la situazione di Figura 34.10, dove sono anche riportati alcuni valori significativi.

Le reazioni non sono calcolabili con sole considerazioni di equilibrio, in quanto la trave è una volta iperstatica, ma possono essere dedotte dalla conoscenza delle caratteristiche della sollecitazione interna:

$$\begin{aligned}
 R_A &= -T_2(0) = -\frac{3}{2} \frac{\mathcal{M}}{L} \\
 R_B &= T_2(L) = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{M}}{L} \\
 \mathcal{M}_{rA} &= -M_1(0) = \frac{\mathcal{M}}{2}
 \end{aligned}
 \tag{34.30}$$

E' utile verificare che questi valori soddisfano le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione.

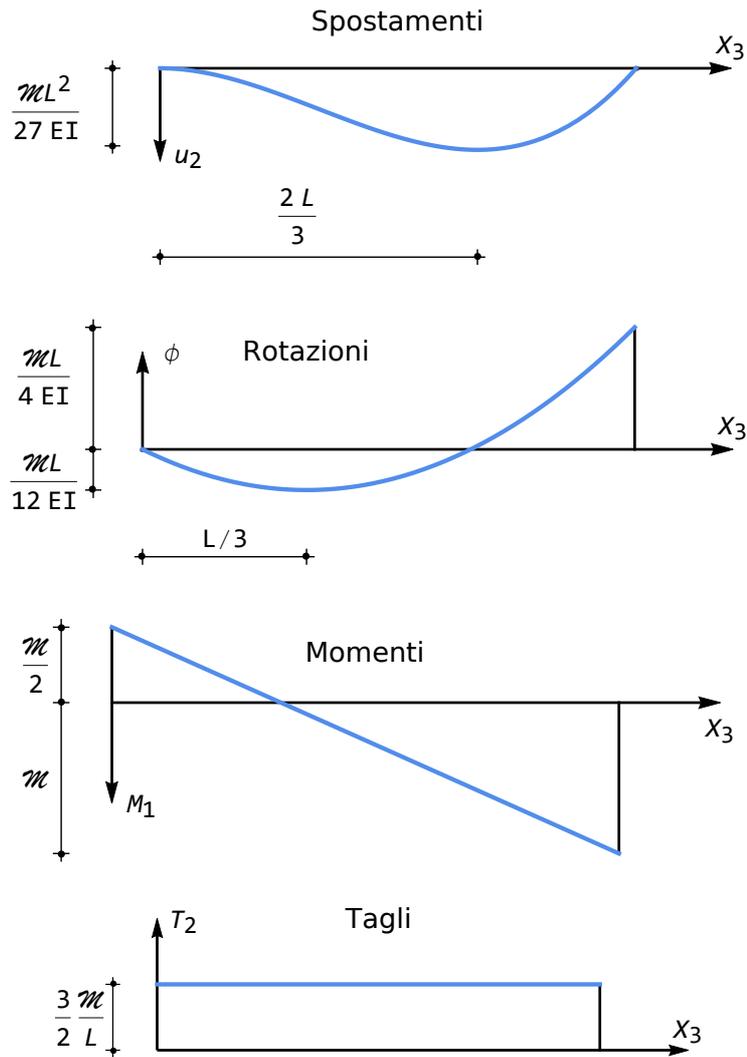


Figura 34.10: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per trave incastrata ed appoggiata, soggetta ad una coppia su un appoggio

34.5 La trave con incastro e bipendolo

L'unico carico concentrato agli estremi che sia ipotizzabile su una trave incastata e con bipendolo è una forza F agente in corrispondenza del bipendolo (Figura 34.11). Tre condizioni ai limiti sono di congruenza, e devono esprimere l'annullarsi dell'abbassamento nell'incastro, e della rotazione sia nell'incastro che nel bipendolo, mentre l'ultima condizione dovrà garantire l'equilibrio del bipendolo alla traslazione verticale:

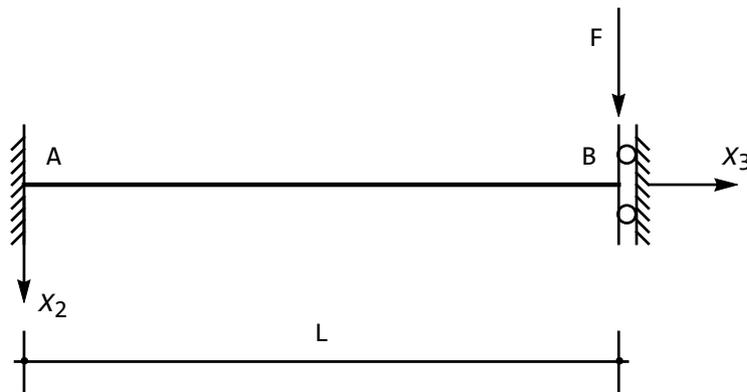


Figura 34.11: La trave con incastro a sinistra e bipendolo a destra, soggetta a forza sul bipendolo

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 \phi(0) = 0 &\longrightarrow u_2'(0) = 0 \\
 \phi(L) = 0 &\longrightarrow u_2'(L) = 0 \\
 -T_2(L) + F &= 0 \longrightarrow EI_{11}u_2'''(L) + F = 0
 \end{aligned} \tag{34.31}$$

Assunta l'usuale soluzione cubica dell'equazione della linea elastica, le precedenti condizioni ai limiti si tramutano in quattro equazioni nelle quattro costanti di integrazione, che possono essere quindi calcolate come:

$$\begin{aligned}
 C_1 C_2 &= 0 \\
 C_3 &= \frac{FL}{4EI_{11}} \\
 C_4 &= -\frac{F}{6EI_{11}}
 \end{aligned} \tag{34.32}$$

La linea elastica sarà quindi fornita da:

$$u_2(x_3) = F \frac{x_3^2(3L - 2x_3)}{12EI_{11}} \tag{34.33}$$

e, conseguentemente, per derivazioni successive:

$$\begin{aligned}\phi(x_3) &= \frac{Fx_3(x_3 - L)}{2EI_{11}} \\ M_1(x_3) &= F\left(x_3 - \frac{L}{2}\right) \\ T_2(x_3) &= F\end{aligned}\tag{34.34}$$

L'andamento dei diagrammi, riportati in Figura 34.12, è banale, ed il suo studio è lasciato come esercizio, così come la deduzione delle reazioni vincolari.

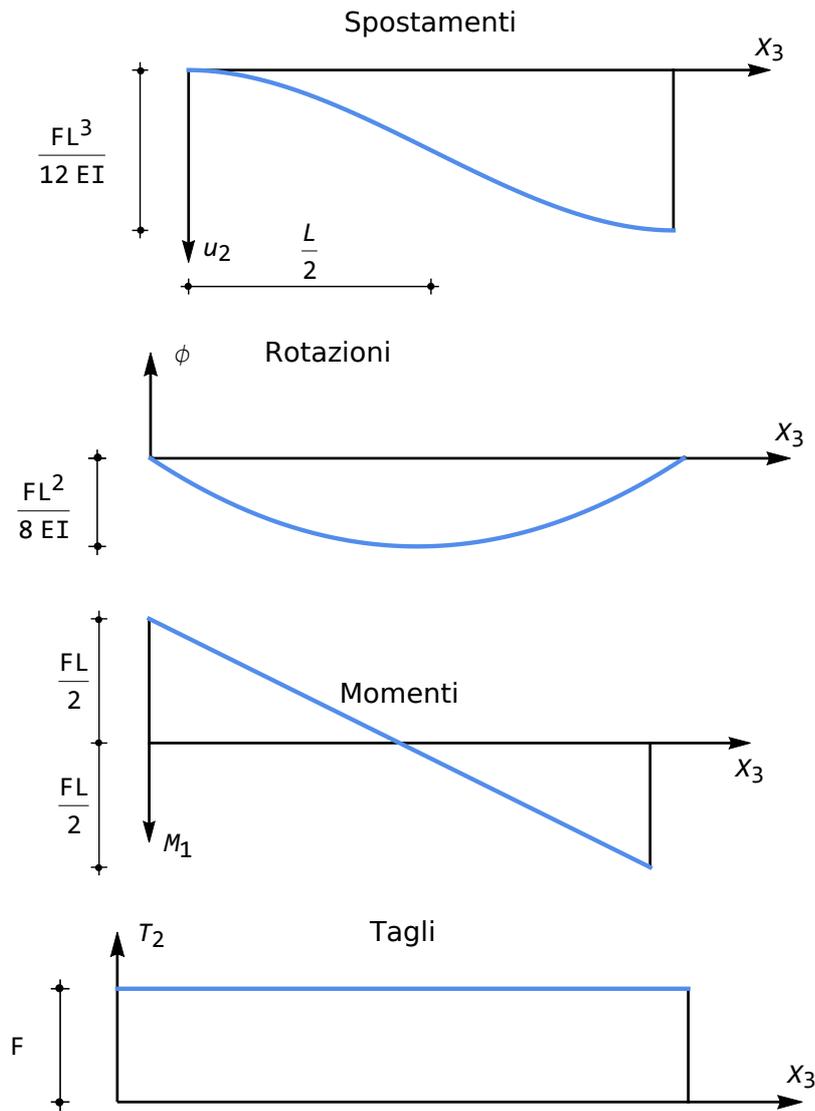


Figura 34.12: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per trave con incastro e bipendolo, soggetta ad una forza sul bipendolo

Capitolo 35

I vincoli imperfetti

In quanto si è detto finora, si è sempre ipotizzato che il vincolo sia in grado di svolgere perfettamente la sua funzione, annullando completamente l'abbassamento e/o la rotazione. Nella realtà, un simile vincolo è difficilmente costruibile, ed occorre prevedere in qualche modo uno schema teorico agli estremi che possa riprodurre più fedelmente ciò che accade nella pratica tecnica.

A questi casi è dedicata il presente Capitolo.

35.1 I cedimenti anelastici

Si incontrano frequentemente vincoli che semplicemente non sono in grado di annullare totalmente lo spostamento e/o la rotazione, nel senso che, all'atto della costruzione, essi *cedono*, subendo un ben quantificato spostamento (o rotazione), che poi resta fisso nel tempo. Si può quindi avere, ad esempio, un appoggio imperfetto, che abbia subito un cedimento di v_0 centimetri, e di esso andrà tenuto debitamente conto nel calcolo della deformata.

In generale, questi cedimenti sono detti cedimenti *anelastici*, e possono dar luogo ai seguenti vincoli imperfetti:

- appoggio imperfetto, per cui $u_2 = v_0$
- bipendolo imperfetto, per cui $\phi = \phi_0$
- incastro imperfetto, per cui $u_2 = v_0$ e/o $\phi = \phi_0$

Non vi è alcuna difficoltà a tenere in conto questa generalizzazione, nello studio di una trave così come condotto nelle lezioni precedenti: le condizioni ai limiti di congruenza dovranno essere modificate, divenendo non omogenee, mentre le condizioni di equilibrio non subiranno modifiche.

35.1.1 Le travi isostatiche

Gli schemi isostatici finora studiati, e quelli più complessi che si studieranno in seguito, hanno la proprietà di non veder sorgere caratteristiche della sollecitazione interna, a seguito di cedimenti anelastici dei loro vincoli. Si consideri

infatti la trave a mensola di Figura 35.1, il cui incastro subisce un cedimento verticale di v_0 ed un cedimento rotazionale di ϕ_0 . Il problema ai limiti relativo a questo schema strutturale vedrà la solita equazione differenziale del quarto ordine, omogenea:

$$EIu_2''''(x_3) = 0 \quad (35.1)$$

insieme alle condizioni ai limiti

$$\begin{aligned} u_2(0) &= v_0 \\ u_2'(0) &= -\phi_0 \\ u_2''(L) &= 0 \\ u_2'''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (35.2)$$

dove già si tenuto conto che $\phi(x_3) = -u_2'(x_3)$.

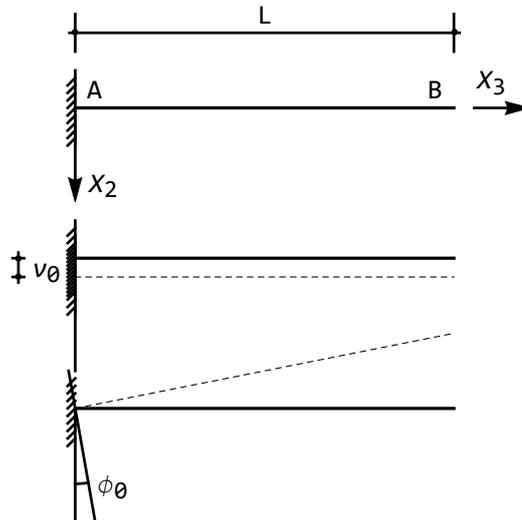


Figura 35.1: Trave a mensola soggetta ad un cedimento anelastico verticale ed un cedimento anelastico rotazionale

L'usuale soluzione cubica dell'equazione differenziale (35.1):

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 \quad (35.3)$$

conduce a trasformare le condizioni ai limiti in quattro equazioni nelle quattro incognite C_i :

$$\begin{aligned} C_1 &= v_0 \\ C_2 &= -\phi_0 \\ 2C_3 + 6C_4L &= 0 \\ 6C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (35.4)$$

Ne segue facilmente che la linea elastica può essere espressa come:

$$u_2(x_3) = v_0 - \phi_0 x_3 \quad (35.5)$$

ed è quindi interpretabile come sovrapposizione di una traslazione rigida di ampiezza v_0 e di una rotazione rigida di ampiezza ϕ_0 . Le caratteristiche, come anticipato, sono identicamente nulle. Analoghi risultati si ottengono dall'analisi di una trave appoggiata soggetta ai cedimenti verticali anelastici di ampiezza v_A e v_B degli appoggi, o dall'analisi di una trave con appoggio e bipendolo soggetta al cedimento verticale v_0 dell'appoggio, ed al cedimento rotazionale ϕ_0 del bipendolo.

35.1.2 Le travi iperstatiche

In una trave iperstatica, la presenza di un cedimento anelastico provoca l'insorgere di caratteristiche della sollecitazione interna, ed esse risultano proporzionali alla rigidezza flessionale EI_{11} , a differenza di quanto accade nei casi finora studiati di travi a vincoli perfetti. A titolo di esempio, si consideri una trave doppiamente incastrata, il cui incastro di destra subisca un cedimento verticale anelastico di ampiezza v_L ed un cedimento rotazionale ϕ_L . Il relativo problema ai limiti è definito dalle condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \\ u_2(L) &= v_L \\ u_2'(L) &= -\phi_L \end{aligned} \quad (35.6)$$

ed ha soluzione:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \frac{x_3^2(3L-2x_3)}{L^3}v_L + \frac{x_3^2(L-x_3)}{L^2}\phi_L \\ \phi(x_3) &= \frac{6x_3(x_3-L)}{L^3}v_L + \frac{x_3(3x_3-2L)}{L^2}\phi_L \\ M_1(x_3) &= -6\frac{EI_{11}}{L^3}(L-2x_3)v_L - 2\frac{EI_{11}}{L^2}(L-3x_3)\phi_L \\ T_2(x_3) &= \frac{12EI_{11}}{L^3}v_L + \frac{6EI_{11}}{L^2}\phi_L \end{aligned} \quad (35.7)$$

I relativi diagrammi sono presentati in Figura 35.2. Si noti che nell'incastro di destra si dovrà avere un abbassamento pari al cedimento imposto v_L , ed una pendenza pari a $-\phi_L$.

35.2 I cedimenti elastici

Nella sezione precedente si sono trattati i casi in cui un vincolo cedeva, per difetto di fabbricazione, per eccesso di carico, per colpa del terreno di fondazione,

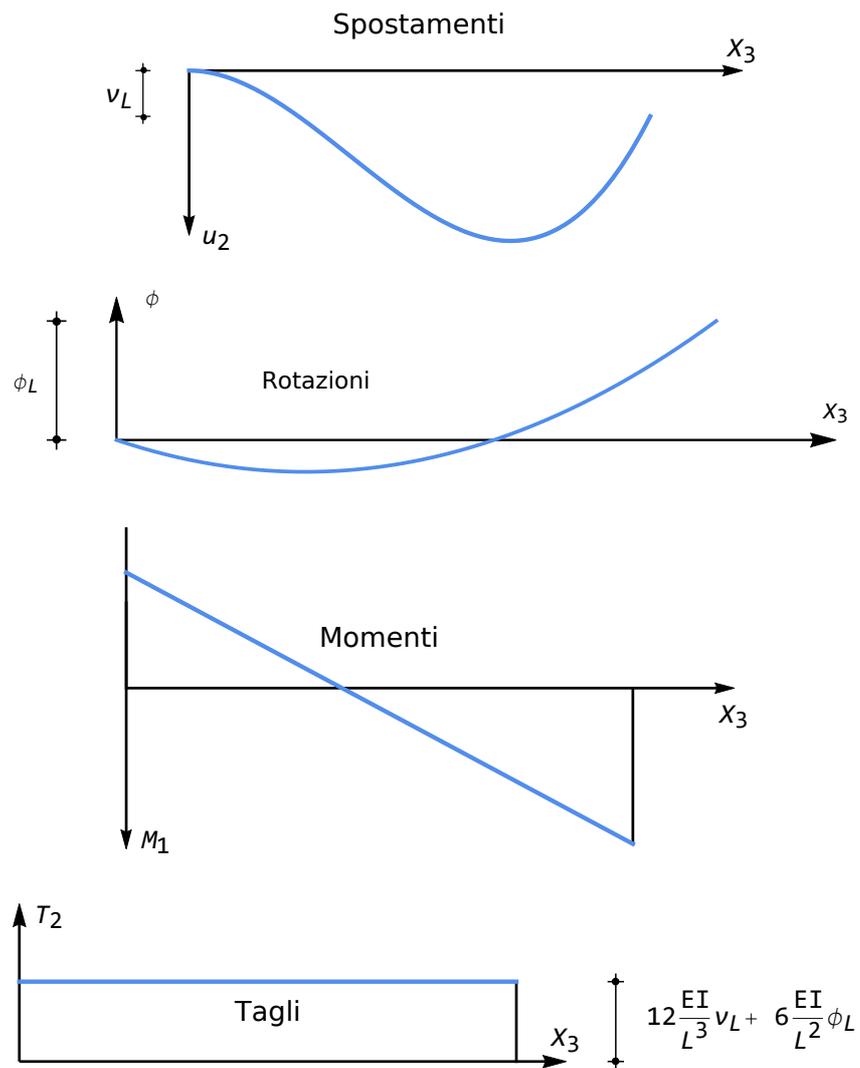


Figura 35.2: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave doppiamente incastrata soggetta a cedimenti anelastici nell'incastro di destra

o per qualsiasi altro motivo. Il risultato era uno spostamento, o una rotazione, non più nulla, ma costante.

In altri casi, invece, il vincolo è costituito da materiale elastico, che permette spostamenti e/o rotazioni in funzione dei carichi, o meglio, delle reazioni ad esso applicate. In tal caso, il vincolo possiede una sua energia di deformazione, che andrà calcolata ed aggiunta all'energia di deformazione inerente alla struttura.

35.2.1 L'energia elastica del vincolo cedevole

Per semplicità, ed anche per ovvie ragioni di coerenza, si ipotizza un legame elastico lineare tra le reazioni ed i corrispondenti spostamenti, in modo da minimizzare le inevitabili complicazioni computazionali.

Se quindi si suppone che ambedue gli estremi della trave possano abbassarsi e ruotare elasticamente, come illustrato schematicamente in Figura 35.3, potranno scriversi le relazioni:

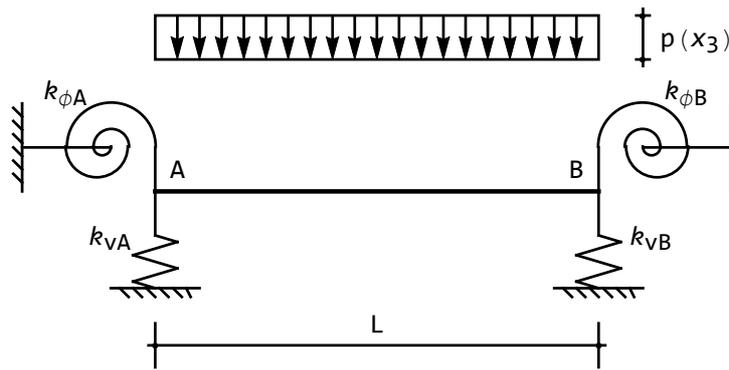


Figura 35.3: La trave su vincoli elasticamente cedevoli

$$\begin{aligned} R_A &= -k_{vA}u_2(0) \\ \mathcal{M}_{rA} &= -k_{\phi A}\phi(0) \end{aligned} \quad (35.8)$$

nell'estremo di sinistra, e:

$$\begin{aligned} R_B &= -k_{vB}u_2(L) \\ \mathcal{M}_{rB} &= -k_{\phi B}\phi(L) \end{aligned} \quad (35.9)$$

nell'estremo di destra, dove R_A ed R_B sono le reazioni verticali agli estremi, e \mathcal{M}_{rA} ed \mathcal{M}_{rB} sono le coppie reattive agli estremi.

Le quattro costanti k_{vA} , k_{vB} , $k_{\phi A}$ e $k_{\phi B}$ sono costanti di *rigidezza*, assiale o rotazionale, rispettivamente, ed hanno dimensione fisica di FL^{-1} nel caso assiale, e di FL nel caso rotazionale.

L'energia di deformazione domiciliata in ciascuno di questi vincoli cedevoli potrà essere calcolata, a partire dalla (35.8) e dalla (35.9). Per i vincoli assialmente cedevoli si avrà:

$$\begin{aligned} L_{vA} &= \frac{1}{2}k_{vA}u_2^2(0) \\ L_{vB} &= \frac{1}{2}k_{vB}u_2^2(L) \end{aligned} \quad (35.10)$$

rispettivamente a sinistra ed a destra, mentre nel caso dei vincoli rotazionali si avrà:

$$\begin{aligned} L_{\phi A} &= \frac{1}{2}k_{\phi A}\phi^2(0) \\ L_{\phi B} &= \frac{1}{2}k_{\phi B}\phi^2(L) \end{aligned} \quad (35.11)$$

nell'estremo di sinistra e, rispettivamente, nell'estremo di destra.

35.2.2 Le condizioni ai limiti in corrispondenza di un vincolo elasticamente cedevole

L'energia potenziale totale di un tronco di trave di luce L , soggetta ad un carico trasversale $p(x_3)$, e vincolata elasticamente come in Figura 35.3, può scriversi come:

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{EI_{11}}{2} \int_0^L u_2''^2(x_3) dx_3 + \frac{1}{2}k_{vA}u_2^2(0) + \frac{1}{2}k_{vB}u_2^2(L) + \frac{1}{2}k_{\phi A}\phi^2(0) + \\ &\quad \frac{1}{2}k_{\phi B}\phi^2(L) - \int_0^L p(x_3) u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (35.12)$$

o anche, ricordando il legame tra rotazione e derivata prima dell'abbassamento, come:

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{EI_{11}}{2} \int_0^L u_2''^2(x_3) dx_3 + \frac{1}{2}k_{vA}u_2^2(0) + \frac{1}{2}k_{vB}u_2^2(L) + \frac{1}{2}k_{\phi A}u_2'^2(0) + \\ &\quad \frac{1}{2}k_{\phi B}u_2'^2(L) - \int_0^L p(x_3) u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (35.13)$$

La variazione prima dell'energia potenziale (35.13) si calcola facilmente come:

$$\begin{aligned} \delta_1 E_t &= EI_{11} \int_0^L u_2'' \delta u_2'' dx_3 + k_{vA}u_2(0)\delta u_2(0) + k_{vB}u_2(L)\delta u_2(L) + \\ &\quad k_{\phi A}u_2'(0)\delta u_2'(0) + k_{\phi B}u_2'(L)\delta u_2'(L) - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (35.14)$$

ed integrando per parti due volte il primo integrale si ha, come già illustrato in precedenza:

$$\begin{aligned} \delta_1 E_t = & [EI_{11}u_2''\delta u_2']_0^L - [EI_{11}u_2'''\delta u_2]_0^L + EI_{11} \int_0^L u_2'''' \delta u_2 dx_3 + \\ & k_{vA}u_2(0)\delta u_2(0) + k_{vB}u_2(L)\delta u_2(L) + k_{\phi A}u_2'(0)\delta u_2'(0) + k_{\phi B}u_2'(L)\delta u_2'(L) - \\ & \int_0^L p\delta u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (35.15)$$

Per il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale, allora, dovrà essere, come usuale:

$$EI_{11}u_2'''' = p \quad (35.16)$$

con le condizioni ai limiti che possono leggersi dalla (35.15), annullando le parti finite:

$$\begin{aligned} [EI_{11}u_2''(L) + k_{\phi B}u_2'(L)] \delta u_2'(L) + [-EI_{11}u_2''(0) + k_{\phi A}u_2'(0)] \delta u_2'(0) + \\ [-EI_{11}u_2'''(L) + k_{vB}u_2(L)] \delta u_2(L) + [EI_{11}u_2'''(0) + k_{vA}u_2(0)] \delta u_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (35.17)$$

Nell'estremo di sinistra, quindi, in $x_3 = 0$, dovrà aversi:

$$\begin{aligned} -EI_{11}u_2''(0) + k_{\phi A}u_2'(0) &= 0 \\ EI_{11}u_2'''(0) + k_{vA}u_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (35.18)$$

mentre in $x_3 = L$, nell'estremo di destra:

$$\begin{aligned} EI_{11}u_2''(L) + k_{\phi B}u_2'(L) &= 0 \\ -EI_{11}u_2'''(L) + k_{vB}u_2(L) &= 0 \end{aligned} \quad (35.19)$$

Ad analoghe conclusioni si arriva per via geometrica, equilibrando i concetti elementari enucleati in corrispondenza degli estremi. Ad esempio, a sinistra si ha, come può leggersi dalla Figura 35.4:

$$\begin{aligned} R_A + T_2(0) &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + M_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (35.20)$$

ed utilizzando le (35.8–35.9) e le relazioni che legano le caratteristiche alle derivate degli spostamenti si giunge a scrivere le (35.18).

La trave con incastro ed appoggio imperfetto

Si consideri la trave di Figura 35.5, incastrata perfettamente a sinistra, ed appoggiata a destra su un appoggio elasticamente cedevole, di rigidità k_{vB} . Poiché il carico si suppone costante su tutta la luce, $p(x_3) = p_0$, la deformata sarà data, come ormai noto, da:

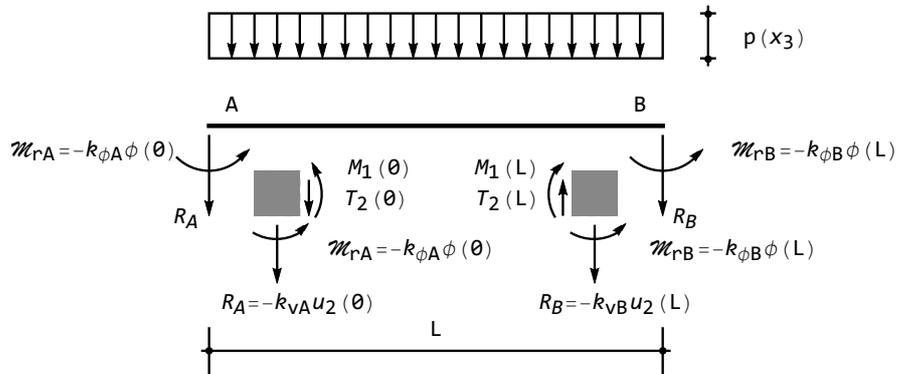


Figura 35.4: Lo schema per la deduzione delle condizioni ai limiti per via geometrica

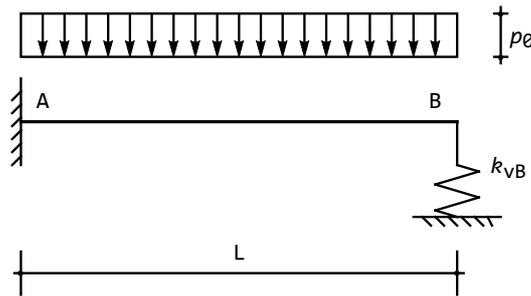


Figura 35.5: Trave con incastro ed appoggio elasticamente cedevole

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2 x_3 + C_3 x_3^2 + C_4 x_3^3 + \frac{p_0 x_3^4}{24EI_{11}} \quad (35.21)$$

mentre le quattro costanti di integrazione si calcolano in base all'imposizione delle seguenti condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \\ u_2''(L) &= 0 \\ -EI_{11}u_2'''(L) + k_{vB}u_2(L) &= 0 \end{aligned} \quad (35.22)$$

Utilizzando la (35.21) e le sue successive derivate, si ottiene il seguente

sistema di quattro equazioni algebriche nelle quattro costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ 6C_4 + \frac{p_0 L}{EI_{11}} - \frac{k_{vB}}{EI_{11}} \left(C_1 + C_2 L + C_3 L^2 + C_4 L^3 + \frac{p_0 L^4}{24EI_{11}} \right) &= 0 \quad (35.23) \\ 2C_3 + 6C_4 L + \frac{p_0 L^2}{2EI_{11}} &= 0 \end{aligned}$$

Risolvendo, si ottiene:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 = 0 \\ C_3 &= -\frac{-12EI_{11}L^2 - k_{vB}L^5}{16EI_{11}(3EI_{11} + k_{vB}L^3)} p_0 \\ C_4 &= -\frac{24EI_{11}L + 5k_{vB}L^4}{48EI_{11}(3EI_{11} + k_{vB}L^3)} p_0 \end{aligned} \quad (35.24)$$

Lo spostamento, quindi, si potrà scrivere:

$$v(x_3) = \frac{6EI_{11}(6L^2 - 4Lx_3 + x_3^2) + L^3(3L^2 - 5Lx_3 + 2x_3^2)k_{vB}}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} \frac{p_0 x_3^2}{48EI_{11}} \quad (35.25)$$

da cui, in cascata, rotazioni, momenti e tagli:

$$\begin{aligned} \phi(x_3) &= -\frac{24EI_{11}(3L^2 - 3Lx_3 + x_3^2) + (6L^2 - 15Lx_3 + 8x_3^2)k_{vB}L^3}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} \frac{p_0 x_3}{48EI_{11}} \\ M_1(x_3) &= -\frac{12EI_{11}(L - x_3) + (L - 4x_3)k_{vB}L^3}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} \frac{p_0}{8} (L - x_3) \\ T_2(x_3) &= \frac{24EI_{11}(L - x_3) + (5L - 8x_3)k_{vB}L^3}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} \frac{p_0}{8} \end{aligned} \quad (35.26)$$

Ponendo $k_{vB} = 0$, si ritrovano i risultati della trave a mensola, mentre il limite per k_{vB} che va all'infinito riproduce l'altro caso limite di trave con incastro ed appoggio.

Le reazioni vincolari possono calcolarsi a partire dallo schema in Figura 35.4:

$$\begin{aligned} R_A = -T_2(0) &= -\frac{24EI_{11}L + 5k_{vB}L^4}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} \frac{p_0}{8} \\ \mathcal{M}_{rA} = -M_1(0) &= \frac{12EI_{11}L + k_{vB}L^4}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} p_0 \frac{L}{8} \\ R_B = -k_{vB}u_2(L) = T_2(L) &= -\frac{3k_{vB}L^4}{3EI_{11} + k_{vB}L^3} \frac{p_0}{8} \end{aligned} \quad (35.27)$$

ed è possibile verificare a posteriori che sono rispettate le equazioni della statica:

$$\begin{aligned} R_A + R_B + p_0 L &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + R_A L + p_0 \frac{L^2}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (35.28)$$

Capitolo 36

Le travi a più campate

L'analisi delle travi a più campate, in linea di principio, non presenta difficoltà insormontabili. Si consideri infatti una trave suddivisa in t tratti, identificando quindi $t-1$ sezioni intermedie in cui una, o più, delle quattro quantità spostamento, rotazione, momento e taglio, subisce una discontinuità. Ciò può essere dovuto alla presenza di un vincolo esterno, oppure di un vincolo interno, oppure ancora di una forza o coppia concentrata, o ancora di una distorsione concentrata.

Per ciascuno dei t tratti si può scrivere una equazione differenziale della linea elastica, la cui soluzione dipende da quattro parametri incognite, ed in questo modo si hanno, in totale, $4t$ parametri da determinare. Per la loro determinazione si possono però scrivere due condizioni ai limiti in ciascuno dei due estremi, e quattro condizioni in ciascuna delle $t-1$ sezioni intermedie di discontinuità. Si giunge in tal modo ad un sistema di $4t$ equazioni in $4t$ incognite, la cui soluzione definisce univocamente la funzione spostamento.

Tuttavia la complessità computazionale di un simile approccio cresce rapidamente all'aumentare del numero di tratti, e pertanto, se non si dispone di un programma di calcolo simbolico, solo le più semplici situazioni possono essere affrontate secondo questa via.

In questo Capitolo si fornisce un catalogo di possibili vincoli intermedi e si danno alcuni esempi che per la loro semplicità possono svolgersi manualmente.

36.1 I vincoli intermedi esterni

Si intende per *vincolo intermedio esterno* un dispositivo di vincolo agente in corrispondenza di una sezione retta non di estremità, e che sia tale da non interrompere la continuità fisica della trave. Nell'ambito delle strutture considerate, sono ipotizzabili due diversi vincoli, in grado rispettivamente di annullare l'abbassamento (appoggio) o la rotazione (bipendolo esterno) della sezione retta cui essi sono applicati. Per far ciò essi esplicheranno sulla trave una reazione verticale — nel caso dell'appoggio — o una coppia reattiva, nel caso del bipendolo.

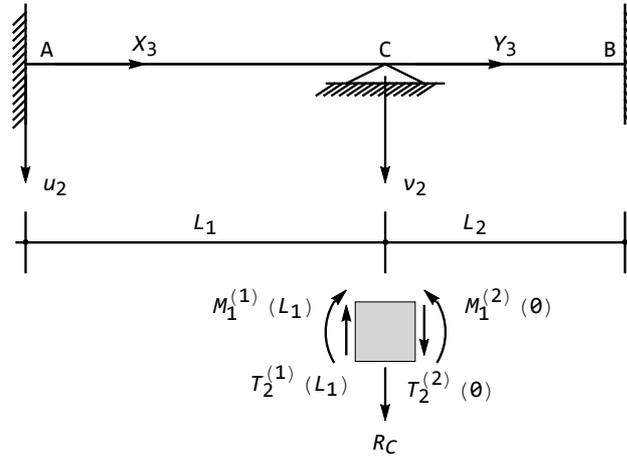


Figura 36.1: Il caso dell'appoggio intermedio

36.1.1 Il caso dell'appoggio

Si consideri una situazione come quella di Figura 36.1, in cui esiste un appoggio intermedio posto a distanza L_1 dalla sezione di sinistra. La trave è quindi suddivisa in due tratti, di luce L_1 ed L_2 , rispettivamente, e conviene definire due sistemi di riferimento locali, ciascuno con origine nel suo estremo di sinistra, così come illustrato in Figura. Il primo sistema, (O_1, x_2, x_3) , ha origine in A ed è definito in $[0, L_1]$, il secondo sistema (O_2, y_2, y_3) ha origine in C ed è definito in $[0, L_2]$.

Si indicheranno con $u_2(x_3)$ e $v_2(y_3)$ le due linee elastiche relative alla prima ed alla seconda luce, rispettivamente, mentre $\phi^{(1)}(x_3)$ e $\phi^{(2)}(y_3)$ saranno le due rotazioni, $M_1^{(1)}(x_3)$ ed $M_1^{(2)}(y_3)$ saranno i due momenti flettenti e $T_2^{(1)}(x_3)$ e $T_2^{(2)}(y_3)$ saranno i due tagli.

Se il prodotto EI_{11} è costante lungo tutta la trave, si possono scrivere le due equazioni della linea elastica:

$$EI_{11}u_2''''(x_3) = p_1(x_3) \quad (36.1)$$

valida in $[0, L_1]$, e:

$$EI_{11}v_2''''(y_3) = p_2(y_3) \quad (36.2)$$

valida in $[0, L_2]$.

Le soluzioni generali di queste equazioni differenziali possono scriversi come:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 + I_1(x_3) \\ v_2(y_3) &= C_5 + C_6y_3 + C_7y_3^2 + C_8y_3^3 + I_2(y_3) \end{aligned} \quad (36.3)$$

con I_1 ed I_2 integrali particolari da calcolare in base al particolare carico agente sulla trave. Le otto costanti di integrazione C_i andranno determinate imponendo

otto condizioni, di congruenza o di equilibrio, nelle tre sezioni A , B e C , e più in dettaglio, scrivendo le usuali condizioni ai limiti nei due estremi A e B , e quattro condizioni nella sezione intermedia C , dove agisce il vincolo.

In corrispondenza di un appoggio intermedio, in particolare, occorre riprodurre analiticamente quanto avviene nella realtà fisica: l'appoggio sicuramente impone che lo spostamento del punto C sia nullo, sia che esso venga considerato come ultimo punto del primo tratto, sia che esso venga considerato il primo punto del secondo tratto. Sarà pertanto:

$$\begin{aligned} u_2(L_1) &= 0 \\ v_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (36.4)$$

Poiché poi l'appoggio non interrompe in alcun modo la continuità della trave, la rotazione in C dovrà essere continua, e quindi:

$$u_2'(L_1) = v_2'(0) \quad (36.5)$$

Queste tre condizioni sono di tipo esclusivamente geometrico, ed esprimono la *congruenza* degli spostamenti e delle rotazioni con il vincolo presente.

Passando all'esame delle caratteristiche, l'appoggio intermedio in C introduce una reazione verticale, incognita, che impedisce di affermare che il taglio in C è unico. Viceversa, il momento in C sarà sicuramente unico, e quindi la quarta ed ultima condizione impone l'uguaglianza dei momenti:

$$-EI_{11}u_2''(L_1) = -EI_{11}v_2''(0) \quad (36.6)$$

Quest'ultima condizione esprime l'*equilibrio* rotazionale della sezione retta in C , come illustrato in Figura 36.1. Dalla stessa Figura si può dedurre che la reazione dell'appoggio sarà data da:

$$R_C = T_2^{(1)}(L_1) - T_2^{(2)}(0) \quad (36.7)$$

36.1.2 Il caso del bipendolo

E' concettualmente possibile introdurre un secondo tipo di vincolo esterno intermedio, duale dell'appoggio, che imponga che la rotazione sia nulla:

$$\begin{aligned} u_2'(L_1) &= 0 \\ v_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (36.8)$$

mentre la continuità degli abbassamenti è garantita dalla ulteriore condizione:

$$u_2(L_1) = v_2(0) \quad (36.9)$$

Un tal tipo di vincolo, per bloccare la rotazione, dovrà reagire con una coppia, incognita, e quindi il momento sarà discontinuo in C . Viceversa, il taglio non subirà discontinuità, e quindi l'ultima condizione (di *equilibrio*) sarà:

$$-EI_{11}u_2'''(L_1) = -EI_{11}v_2'''(0) \quad (36.10)$$

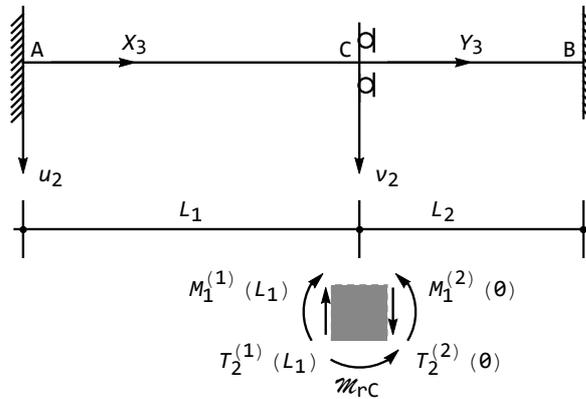


Figura 36.2: Il caso del bipendolo esterno intermedio

Quest'ultima condizione esprime l'*equilibrio* traslazionale della sezione retta in C, come illustrato in Figura 36.2. Dalla stessa figura si può dedurre che la coppia reattiva del bipendolo sarà data da:

$$M_{rC} = M_1^{(1)}(L_1) - M_1^{(2)}(0) \quad (36.11)$$

36.2 Esempi

Si consideri, quale primo esempio, la trave di Figura 36.3, incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, con un ulteriore appoggio intermedio situato ad un terzo della luce complessiva della trave. Ipotizzando che essa sia soggetta al carico uniformemente distribuito di intensità p_0 , l'abbassamento potrà esprimersi come:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 + p_0 \frac{x_3^4}{24EI_{11}} \quad (36.12)$$

lungo il primo terzo di trave, e come:

$$v_2(y_3) = C_5 + C_6y_3 + C_7y_3^2 + C_8y_3^3 + p_0 \frac{y_3^4}{24EI_{11}} \quad (36.13)$$

lungo la restante porzione di trave. Le otto costanti di integrazione si calcolano imponendo le seguenti condizioni ai limiti:

— nell'incastro di sinistra si impongono le due condizioni di congruenza, annullando spostamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (36.14)$$

— sull'appoggio intermedio le condizioni di congruenza impongono l'annullarsi dello spostamento e l'uguaglianza delle rotazioni, mentre per l'equilibrio del

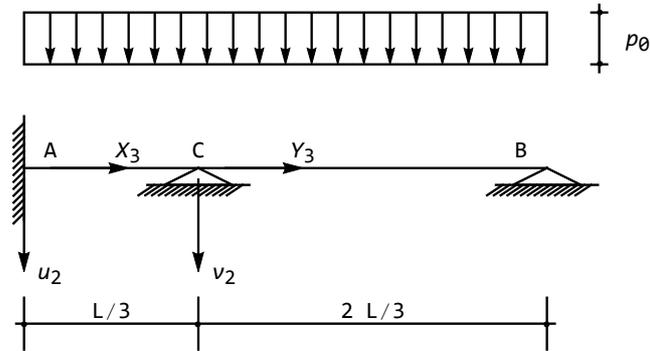


Figura 36.3: La trave incastrata con appoggio ad un terzo della luce, soggetta a carico uniformemente distribuito

concio i momenti flettenti dovranno essere uguali. Se, come in questo caso, la rigidezza flessionale risulta costante, l'ultima condizione equivale ad uguagliare le derivate seconde dell'abbassamento:

$$\begin{aligned}
 u_2 \left(\frac{L}{3} \right) &= 0 \\
 v_2(0) &= 0 \\
 u_2' \left(\frac{L}{3} \right) &= v_2'(0) \\
 u_2'' \left(\frac{L}{3} \right) &= v_2''(0)
 \end{aligned} \tag{36.15}$$

— sull'appoggio di destra la congruenza impone l'annullarsi dello spostamento, e l'equilibrio alla rotazione implica l'annullarsi del momento flettente (ossia della derivata seconda dell'abbassamento):

$$\begin{aligned}
 v_2 \left(\frac{2L}{3} \right) &= 0 \\
 v_2'' \left(\frac{2L}{3} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{36.16}$$

Derivando le (36.12) e (36.13), e valutando nei punti opportuni si giunge così ad una sistema di otto equazioni algebriche nelle otto incognite:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 0 \\
 C_2 &= 0 \\
 C_1 + \frac{L}{3}C_2 + \frac{L^2}{9}C_3 + \frac{L^3}{27}C_4 + \frac{p_0L^4}{1944EI_{11}} &= 0 \\
 C_5 &= 0
 \end{aligned} \tag{36.17}$$

$$\begin{aligned}
C_2 + \frac{2L}{3}C_3 + \frac{L^2}{3}C_4 + \frac{p_0L^3}{162EI_{11}} &= C_6 \\
2C_3 + 2LC_4 + \frac{p_0L^2}{18EI_{11}} &= 2C_7 \\
C_5 + \frac{2L}{3}C_6 + \frac{4L^2}{9}C_7 + \frac{8L^3}{27}C_8 + \frac{2p_0L^4}{243EI_{11}} &= 0 \\
2C_7 + 4LC_8 + \frac{2p_0L^2}{9EI_{11}} &= 0
\end{aligned}$$

la cui soluzione può ottenersi con un qualsiasi metodo di calcolo numerico, per sostituzione, con la regola di Cramer, tramite riduzione alla Gauss, etc ...:

$$\begin{aligned}
C_1 = C_2 = C_5 &= 0 \\
C_3 &= -\frac{p_0L^2}{264EI_{11}} \\
C_4 &= -\frac{p_0L}{396EI_{11}} \\
C_6 &= \frac{5p_0L^3}{1782EI_{11}} \\
C_7 &= \frac{17p_0L^2}{792EI_{11}} \\
C_8 &= -\frac{35p_0L}{528EI_{11}}
\end{aligned} \tag{36.18}$$

Gli spostamenti possono infine scriversi come:

$$\begin{aligned}
u_2(x_3) &= \frac{x_3^2(33x_3^2 - 2Lx_3 - 3L^2)}{792} \frac{p_0}{EI_{11}} \\
v_2(y_3) &= \frac{y_3(40L^3 + 306L^2y_3 - 945Ly_3^2 + 594y_3^3)}{14256} \frac{p_0}{EI_{11}}
\end{aligned} \tag{36.19}$$

da cui, derivando, si possono ottenere rotazioni, momenti e tagli:

$$\begin{aligned}
\phi^{(1)}(x_3) &= -\frac{x_3(22x_3^2 - Lx_3 - L^2)}{132} \frac{p_0}{EI_{11}} \\
\phi^{(2)}(y_3) &= -\frac{(2376y_3^3 - 2835Ly_3^2 + 612L^2y_3 + 40L^3)}{14256} \frac{p_0}{EI_{11}}
\end{aligned} \tag{36.20}$$

$$\begin{aligned}
M_1^{(1)}(x_3) &= -(66x_3^2 - 2Lx_3 - L^2) \frac{p_0}{132} \\
M_1^{(2)}(y_3) &= -(396y_3^2 - 315Ly_3 + 34L^2) \frac{p_0}{792}
\end{aligned} \tag{36.21}$$

$$\begin{aligned}
T_2^{(1)}(x_3) &= (L - 66x_3) \frac{p_0}{66} \\
T_2^{(2)}(y_3) &= (35L - 88y_3) \frac{p_0}{88}
\end{aligned} \tag{36.22}$$

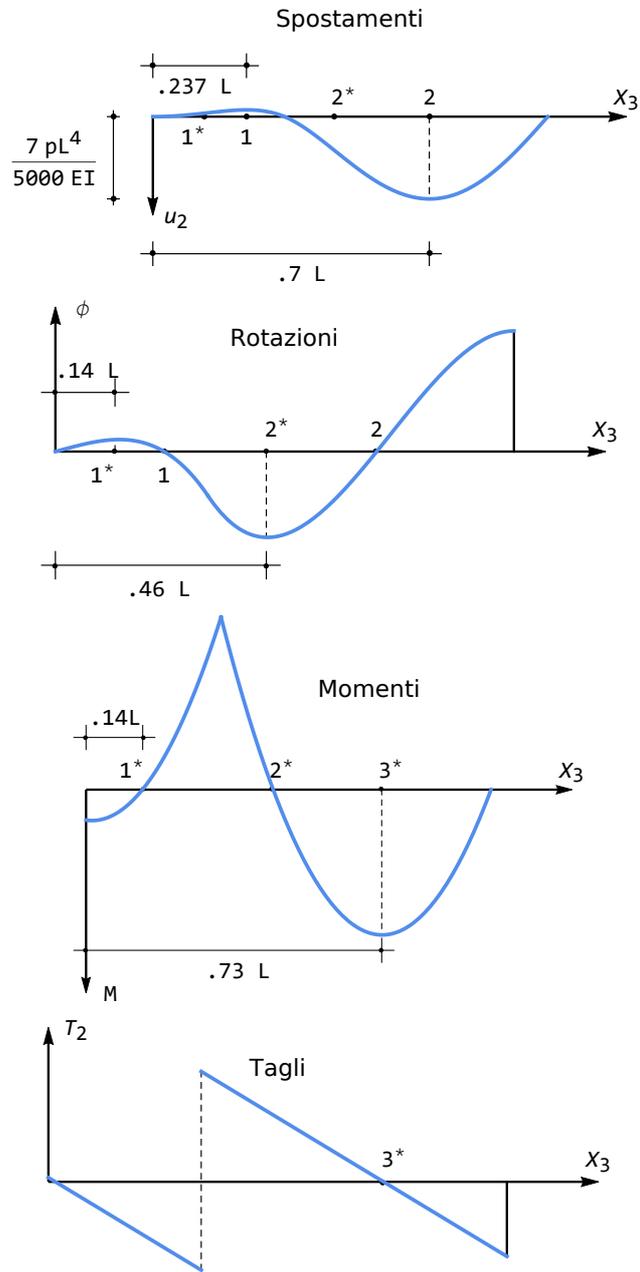


Figura 36.4: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per la trave di Figura 36.3

I relativi diagrammi sono presentati in Figura 36.4, e per il loro tracciamento qualitativo valgono le stesse raccomandazioni valide per le travi ad una sola campata. Si noti solo che i due punti di nullo del diagramma delle rotazioni, 1 e 2, posti rispettivamente alle ascisse $0.237L$ e $0.7L$, corrispondono ai minimi e massimi valori dello spostamento, mentre i punti di nullo del diagramma del momento, 1^* e 2^* , posti rispettivamente a $0.14L$ e $0.46L$, corrispondono a punti di massimo e minimo delle rotazioni, ed a punti di flesso per il diagramma degli spostamenti. Infine, il punto 3^* di nullo del taglio, situato a $0.73L$, corrisponde all'ascissa di massimo momento flettente.

Nella trave in esame sono presenti quattro reazioni vincolari, le tre reazioni verticali in A , B e C , e la coppia reattiva in A , mentre potranno scriversi solo due equazioni di equilibrio, poichè la trave è costituita da un singolo tratto. Ne segue che essa è doppiamente iperstatica, e le reazioni andranno calcolate *a posteriori*:

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2^{(1)}(0) = -\frac{p_0 L}{66} \\ \mathcal{M}_{rA} &= -M_1^{(1)}(0) = -\frac{p_0 L^2}{132} \\ R_B &= T_2^{(2)}\left(\frac{2}{3}L\right) = -\frac{71p_0 L}{264} \\ R_C &= T_2^{(1)}\left(\frac{L}{3}\right) - T_2^{(2)}(0) = -\frac{63p_0 L}{88} \end{aligned} \quad (36.23)$$

36.3 I vincoli interni

Si intende per *vincolo intermedio interno*, o *sconnessione*, un dispositivo di vincolo agente in corrispondenza di una sezione retta non di estremità, e che sia tale da interrompere la continuità fisica della trave. Nell'ambito delle strutture considerate, è ipotizzabile una *sconnessione doppia*, che suddivide la trave in due tronchi indipendenti tra di loro, e due *sconnessioni semplici*: la prima, detta *cerniera*, permette ai due tronchi di trave di ruotare intorno ad essa indipendentemente l'uno dall'altro, mentre impone che i due tronchi conservino lo stesso spostamento trasversale. In altri termini, è ammessa una rotazione relativa $\Delta\phi$ tra le due facce del vincolo. La seconda *sconnessione semplice*, detta *bipendolo interno*, permette ai due tronchi di trave di subire spostamenti trasversali indipendenti l'uno dall'altro, mentre la rotazione dovrà essere la stessa. Equivalentemente, potrà dirsi che il bipendolo interno permette una traslazione relativa Δu_2 tra le sue due facce. Le convenzioni sui segni per gli spostamenti relativi si possono stabilire riconducendo tali spostamenti a spostamenti assoluti, pensando bloccata la parte di sinistra della trave. In tal caso lo spostamento relativo coincide con lo spostamento assoluto della parte di destra, e come tale sarà positivo se antiorario, nel caso della rotazione, e positivo se verso il basso, nel caso dello spostamento. Tutto ciò è riportato nelle Figure 36.5–36.6.

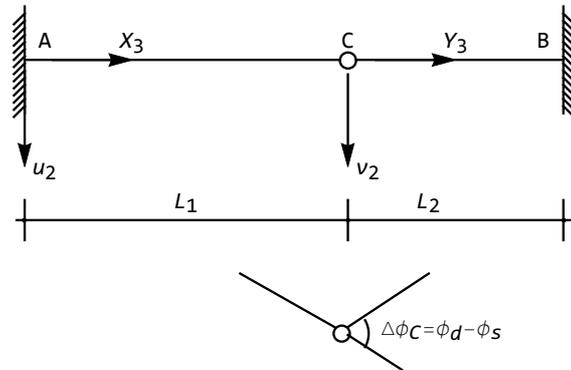


Figura 36.5: La sconnessione semplice del tipo cerniera

36.3.1 Il caso della cerniera

Si consideri il caso della Figura 36.5. Una *cerniera intermedia* a distanza L_1 dall'estremo di sinistra permette ai due tratti adiacenti di ruotare in modo indipendente l'uno dall'altro. Viceversa, lo spostamento in corrispondenza della cerniera è unico, e quindi la prima (ed unica) condizione di congruenza è:

$$u_2(L_1) = v_2(0) \quad (36.24)$$

L'equilibrio della stessa cerniera impone poi che i momenti flettenti siano nulli, e che il taglio abbia valore unico:

$$\begin{aligned} -EI_{11}u_2''(L_1) &= 0 \\ -EI_{11}v_2''(0) &= 0 \\ -EI_{11}u_2'''(L_1) &= -EI_{11}v_2'''(0) \end{aligned} \quad (36.25)$$

36.3.2 Il caso del bipendolo

Duale della cerniera è il *bipendolo interno*, illustrato in Figura 36.6, che permette ai due tratti adiacenti di muoversi verticalmente in modo indipendente l'uno dall'altro. Viceversa, la rotazione in corrispondenza del bipendolo è unica, e quindi la prima (ed unica) condizione di congruenza è:

$$u_2'(L_1) = v_2'(0) \quad (36.26)$$

L'equilibrio impone poi che il momento flettente sia unico, e che il taglio sia nullo:

$$\begin{aligned} -EI_{11}u_2''(L_1) &= -EI_{11}v_2''(0) \\ -EI_{11}u_2'''(L_1) &= 0 \\ -EI_{11}v_2'''(0) &= 0 \end{aligned} \quad (36.27)$$

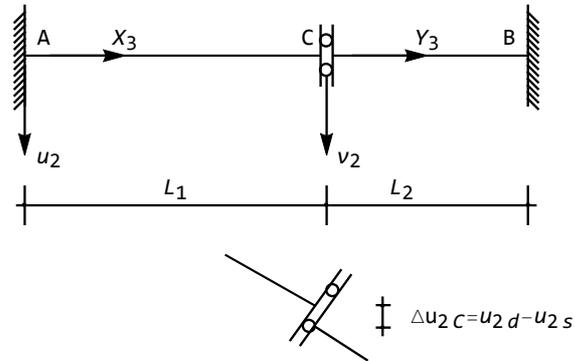


Figura 36.6: La sconnessione semplice del tipo bipendolo

36.4 Esempi

Si consideri la trave di Figura 36.7, incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, con una cerniera in mezzeria, soggetta al carico uniformemente distribuito di intensità p_0 . Introdotti i due soliti sistemi di riferimento, gli spostamenti saranno esprimibili, lungo le due semiluci, dalle (36.12–36.13). Le otto condizioni ai limiti che permettono la determinazione delle otto costanti di integrazione si scrivono:

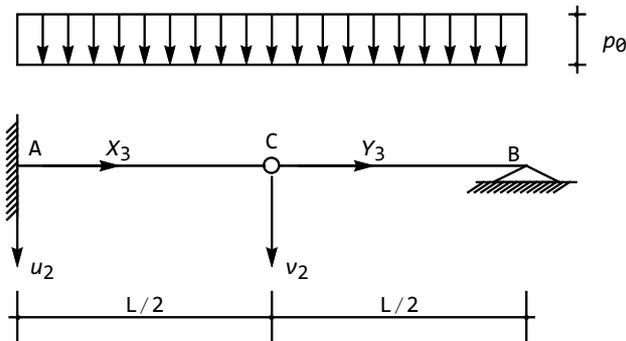


Figura 36.7: Trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, con una cerniera in mezzeria, soggetta al carico uniformemente distribuito

— nell’incastro a sinistra, come usuale, si impongono le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (36.28)$$

— nella cerniera intermedia si scrive la singola equazione di congruenza, che impone la continuità degli spostamenti, e le tre condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 u_2 \left(\frac{L}{2} \right) &= v_2(0) \\
 u_2'' \left(\frac{L}{2} \right) &= 0 \\
 v_2''(0) &= 0 \\
 u_2''' \left(\frac{L}{2} \right) &= v_2'''(0)
 \end{aligned} \tag{36.29}$$

— sull'appoggio di destra, ancora una volta, si annulla lo spostamento ed il momento flettente:

$$\begin{aligned}
 v_2 \left(\frac{L}{2} \right) &= 0 \\
 v_2'' \left(\frac{L}{2} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{36.30}$$

Derivando le (36.12–36.13), e valutando nei punti opportuni si giunge così alle otto equazioni algebriche nelle otto incognite:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 0 \\
 C_2 &= 0 \\
 C_1 + \frac{L}{2}C_2 + \frac{L^2}{4}C_3 + \frac{L^3}{8}C_4 + \frac{p_0L^4}{384EI_{11}} &= C_5 \\
 2C_3 + 3LC_4 + \frac{p_0L^2}{8EI_{11}} &= 0 \\
 C_6 &= 0 \\
 6C_4 + \frac{p_0L}{2EI_{11}} &= 6C_8 \\
 C_5 + \frac{L}{2}C_6 + \frac{L^2}{4}C_7 + \frac{L^3}{8}C_8 + \frac{p_0L^4}{384EI_{11}} &= 0 \\
 2C_7 + 3LC_8 + \frac{p_0L^2}{8EI_{11}} &= 0
 \end{aligned} \tag{36.31}$$

La soluzione del sistema porta alle costanti di integrazione:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_2 = C_7 = 0 \\
 C_3 &= -\frac{p_0L^2}{8EI_{11}} \\
 C_4 &= -\frac{p_0L}{8EI_{11}} \\
 C_5 &= \frac{7}{384} \frac{p_0L^4}{EI_{11}}
 \end{aligned} \tag{36.32}$$

$$C_6 = -\frac{p_0 L^3}{32EI_{11}} \quad (36.33)$$

$$C_8 = -\frac{p_0 L}{24EI_{11}}$$

e ciò permette di esplicitare gli spostamenti come:

$$u_2(x_3) = \frac{x_3^2(x_3^2 - 3Lx_3 + 3L^2)}{24} \frac{p_0}{EI_{11}} \quad (36.34)$$

$$v_2(y_3) = \frac{(7L^4 - 12L^3y_3^2 - 16Ly_3^3 + 16y_3^4)}{384} \frac{p_0}{EI_{11}} \quad (36.35)$$

da cui, derivando, si possono ottenere rotazioni, momenti e tagli:

$$\phi^{(1)}(x_3) = -\frac{x_3(4x_3^2 - 9Lx_3 + 6L^2)}{24} \frac{p_0}{EI_{11}} \quad (36.36)$$

$$\phi^{(2)}(y_3) = -\frac{(16y_3^3 - 12Ly_3^2 - 3L^3)}{96} \frac{p_0}{EI_{11}}$$

$$M_1^{(1)}(x_3) = -(2x_3^2 - 3Lx_3 + L^2) \frac{p_0}{4} \quad (36.37)$$

$$M_1^{(2)}(y_3) = -(2y_3^2 - Ly_3) \frac{p_0}{4}$$

$$T_2^{(1)}(x_3) = (3L - 4x_3) \frac{p_0}{4} \quad (36.38)$$

$$T_2^{(2)}(y_3) = (L - 4y_3) \frac{p_0}{4}$$

I relativi diagrammi sono presentati in Figura 36.8. Il taglio varia con legge lineare, annullandosi a tre quarti della luce, sicchè in questa sezione il diagramma del momento avrà tangente orizzontale, raggiungendo il suo valore massimo:

$$M_{1max} = M_1\left(\frac{3}{4}L\right) = \frac{p_0 L^2}{32} \quad (36.39)$$

Il minimo momento, invece, è raggiunto sull'incastro, e vale:

$$M_{1min} = M_1(0) = -\frac{p_0 L^2}{4} \quad (36.40)$$

Le rotazioni saranno nulle nell'incastro, ed il relativo diagramma presenterà tangente orizzontale laddove il momento è nullo, ossia in mezziera (dove è presente la cerniera) e sull'appoggio. Inoltre, in corrispondenza della cerniera il diagramma sarà discontinuo, indicando con la discontinuità la presenza di una rotazione relativa $\Delta\phi$ tra le due facce della cerniera. Si avrà:

$$\Delta\phi = \phi^{(2)}(0) - \phi^{(1)}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{p_0 L^3}{EI_{11}} \left(\frac{1}{32} + \frac{5}{96}\right) = \frac{p_0 L^3}{12EI_{11}} \quad (36.41)$$

Infine, gli abbassamenti saranno nulli agli estremi, il relativo diagramma presenterà tangente orizzontale nell'incastro, la sua curvatura cambierà di segno in

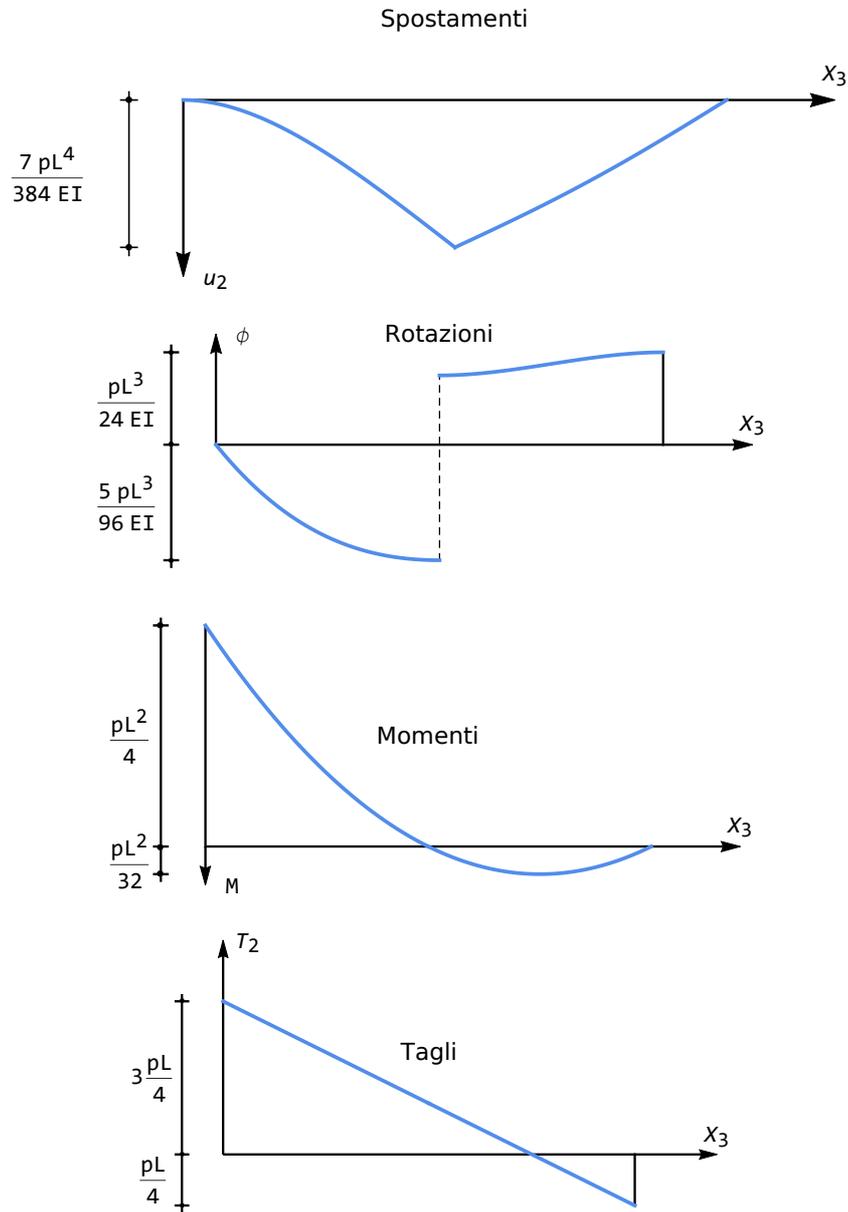


Figura 36.8: Trave incastrata ed appoggiata con cerniera in mezziera. Diagrammi degli spostamenti, delle rotazioni, dei momenti e dei tagli

mezzeria. L'abbassamento della cerniera coincide con l'abbassamento massimo, e vale:

$$u_{2\max} = u_2\left(\frac{L}{2}\right) = v_2(0) = \frac{7}{384} \frac{p_0 L^4}{EI_{11}} \quad (36.42)$$

Le reazioni vincolari possono dedursi dalla conoscenza delle caratteristiche della sollecitazione interna (cfr. 36.9):

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2^{(1)}(0) = -\frac{3}{4} p_0 L \\ R_B &= T_2^{(2)}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{4} p_0 L \\ \mathcal{M}_{rA} &= -M_1^{(1)}(0) = \frac{p_0 L^2}{4} \end{aligned} \quad (36.43)$$

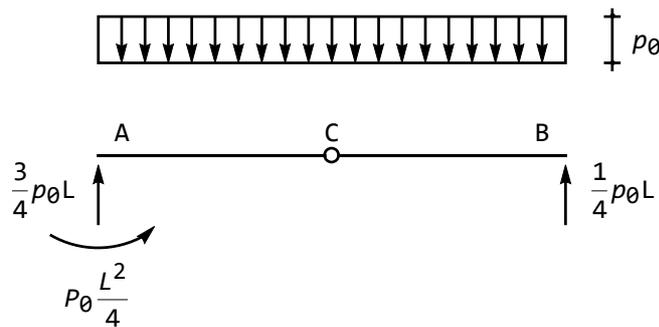


Figura 36.9: Le reazioni per una trave incastrata ed appoggiata con cerniera in mezzeria.

Alternativamente, si consideri che la cerniera spezza la continuità fisica della trave, che può essere vista come un assemblaggio di due travi di luce $L/2$, a patto di applicare al punto C lo sforzo di taglio; per ciascuno dei due tratti devono valere le equazioni di equilibrio per la traslazione verticale e per la rotazione. Si hanno quindi quattro equazioni nelle quattro incognite R_A ed \mathcal{M}_{rA} , T_{2C} ed R_B , e la trave risulta isostatica. Le equazioni di equilibrio (cfr. Figura 36.10) sono:

$$\begin{aligned} R_A + T_{2C} + p_0 \frac{L}{2} &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + R_A \frac{L}{2} + p_0 \frac{L^2}{8} &= 0 \\ -T_{2C} + R_B + p_0 \frac{L}{2} &= 0 \\ -T_{2C} \frac{L}{2} + p_0 \frac{L^2}{8} &= 0 \end{aligned} \quad (36.44)$$

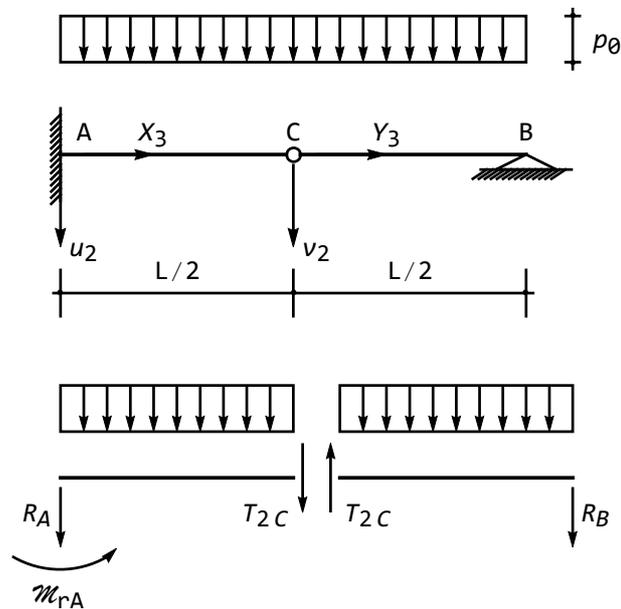


Figura 36.10: Lo schema per il calcolo delle reazioni in una trave incastrata ed appoggiata con cerniera intermedia

e risolvendole si ritrovano i valori (36.43).

Come ulteriore esempio, si consideri la trave di Figura 36.11, appoggiata a sinistra ed incastrata a destra, con un bipendolo interno situato ad un terzo della luce, e soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensità p_0 , agente dall'appoggio fino al bipendolo. Per essa, l'equazione differenziale della linea elastica ha soluzione:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 + p_0 \frac{x_3^4}{24EI_{11}} \quad (36.45)$$

lungo il primo terzo di trave, e:

$$v_2(y_3) = C_5 + C_6y_3 + C_7y_3^2 + C_8y_3^3 \quad (36.46)$$

lungo la restante porzione di trave. Le otto costanti di integrazione si calcolano imponendo le seguenti condizioni ai limiti:

— sull'appoggio di sinistra sono nulli sia gli spostamenti che i momenti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2''(0) &= 0 \end{aligned} \quad (36.47)$$

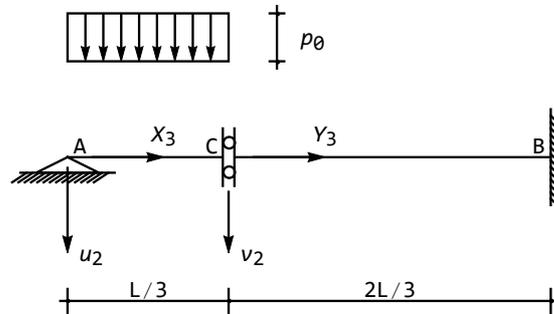


Figura 36.11: Trave appoggiata ed incastrata con bipendolo interno ad un terzo della luce, soggetta a carico uniformemente distribuito sulla sola luce di sinistra

— nel bipendolo interno la rotazione è unica, il momento è unico, ed il taglio è nullo:

$$\begin{aligned}
 u_2' \left(\frac{L}{3} \right) &= v_2'(0) \\
 u_2'' \left(\frac{L}{3} \right) &= v_2''(0) \\
 u_2''' \left(\frac{L}{3} \right) &= 0 \\
 v_2'''(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{36.48}$$

— nell'incastro di destra sono nulli sia gli spostamenti che la rotazione:

$$\begin{aligned}
 v_2 \left(\frac{2L}{3} \right) &= 0 \\
 v_2' \left(\frac{2L}{3} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{36.49}$$

Come sempre, queste otto condizioni si traducono in un sistema di otto equazioni algebriche nelle otto costanti di integrazione con soluzione:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_3 = C_8 = 0 \\
 C_2 &= \frac{4L^3}{81EI_{11}} p_0 \\
 C_4 &= -\frac{L}{18EI_{11}} p_0 \\
 C_5 &= -\frac{L^4}{81EI_{11}} p_0 \\
 C_6 &= \frac{L^3}{27EI_{11}} p_0
 \end{aligned} \tag{36.50}$$

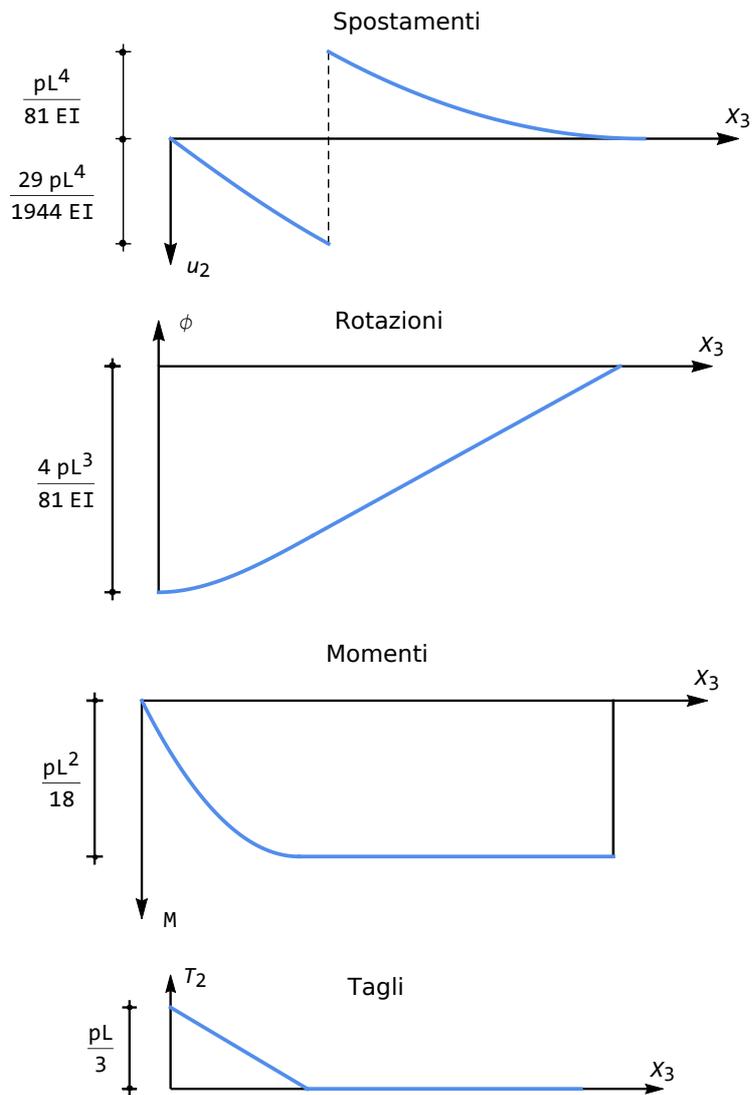


Figura 36.12: Diagrammi degli spostamenti, delle rotazioni, dei momenti e dei tagli per la trave di Figura 36.11

$$C_7 = -\frac{L^2}{36EI_{11}}p_0$$

Gli spostamenti possono allora scriversi:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \frac{x_3(32L^3 - 36Lx_3^2 + 27x_3^3)}{648} \frac{p_0}{EI_{11}} \\ u_2^{(2)}(y_3) &= -\frac{L^2(2L - 3y_3^2)^2}{324} \frac{p_0}{EI_{11}} \end{aligned} \quad (36.51)$$

da cui, derivando, si possono ottenere rotazioni, momenti e tagli:

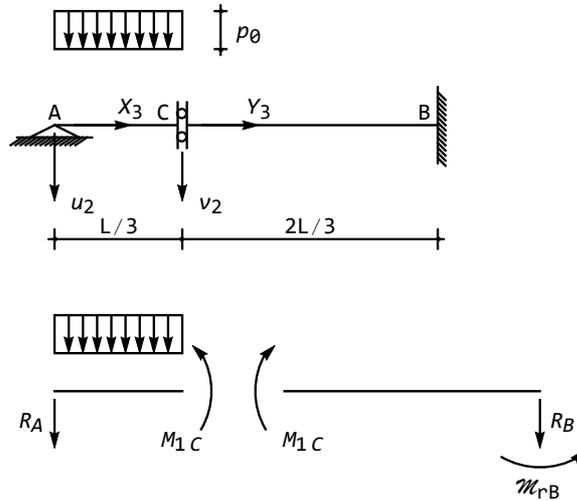


Figura 36.13: Lo schema per il calcolo delle reazioni in una trave appoggiata ed incastrata con un bipendolo interno ad un terzo della luce

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x_3) &= -\frac{(8L^3 - 27Lx_3^2 + 27x_3^3)}{162} \frac{p_0}{EI_{11}} \\ \phi^{(2)}(y_3) &= -\frac{L^2(2L - 3y_3)}{54} \frac{p_0}{EI_{11}} \\ M_1^{(1)}(x_3) &= \frac{p_0}{6}(2L - 3x_3)x_3 \\ M_1^{(2)}(y_3) &= \frac{p_0L^2}{18} \\ T_2^{(1)}(x_3) &= \frac{p_0}{3}(L - 3x_3) \\ T_2^{(2)}(y_3) &= 0 \end{aligned} \quad (36.52)$$

I grafici risultanti sono riprodotti in Figura 36.12, insieme ad alcuni valori notevoli, quali il taglio massimo e la rotazione massima (nell'appoggio), il mo-

mento massimo (lungo il tratto di destra) ed i due valori dello spostamento nelle due facce del bipendolo.

Anche in questo caso la trave risulta isostatica, in quanto essa è composta da due tratti, e quindi si possono scrivere quattro equazioni della statica, necessarie a calcolare la reazione verticale dell'appoggio di sinistra, la reazione verticale e la coppia reattiva dell'incastro a destra, ed il momento agente in C . Si ha quindi la situazione di Figura 36.13, da cui si possono trarre le quattro reazioni:

$$\begin{aligned}R_A + p_0 \frac{L}{3} &= 0 \longrightarrow R_A = -p_0 \frac{L}{3} \\M_{1C} - p_0 \frac{L}{3} \frac{L}{6} &= 0 \longrightarrow M_{1C} = p_0 \frac{L^2}{18} \\R_B &= 0 \\ \mathcal{M}_{rB} - M_{1C} &= 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{rB} = p_0 \frac{L^2}{18}\end{aligned}\tag{36.53}$$

Capitolo 37

Ancora sulle travi a più campate

Nel Capitolo precedente si sono introdotti i vincoli intermedi, suddividendoli in vincoli esterni, che non interrompono la continuità fisica della trave, ma provocano discontinuità nelle caratteristiche della sollecitazione interna, e vincoli interni, che interrompono la continuità fisica della trave, generando quindi discontinuità nelle rotazioni o negli spostamenti.

In questo Capitolo si studieranno invece schemi strutturali caratterizzati dalla presenza di *forze e/o coppie* concentrate, che causano discontinuità nei diagrammi del taglio e/o del momento flettente, mentre un Capitolo successivo sarà dedicato alla presenza di *distorsioni* concentrate, che causano discontinuità nei diagrammi di rotazioni e/o spostamenti, e possono riguardarsi come cedimenti anelastici intermedi.

37.1 Le forze concentrate intermedie

La presenza di una forza o di una coppia concentrate agenti in una ascissa intermedia a distanza L_1 dalla sezione di sinistra induce — come detto — una discontinuità nei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione interna, e quindi risulta opportuno anche in questo caso suddividere l'esame della linea elastica nei due tratti $[0, L_1]$ ed $[L_1, L]$. In corrispondenza della sezione retta su cui agisce la forza e/o la coppia, bisognerà scrivere due condizioni di congruenza, esprimenti il fatto che la continuità fisica della trave non è interrotta, e due condizioni di equilibrio, che dovranno garantire l'equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione tra le forze esterne e le caratteristiche della sollecitazione interna.

Le due condizioni di congruenza si scriveranno quindi:

$$\begin{aligned}u_2(L_1) &= v_2(0) \\ u_2'(L_1) &= v_2'(0)\end{aligned}\tag{37.1}$$

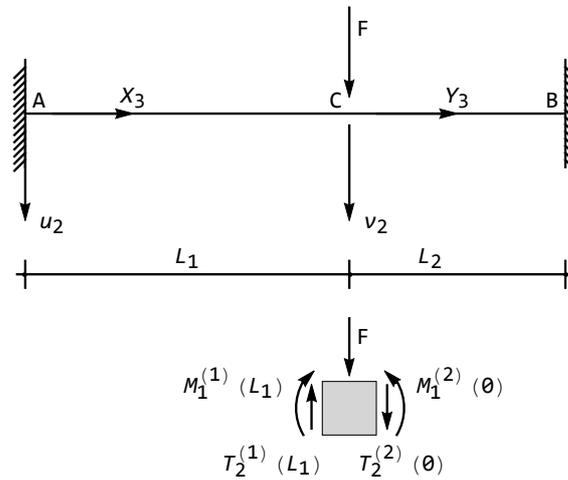


Figura 37.1: La trave in presenza di forza concentrata in una sezione intermedia

mentre le due condizioni di equilibrio possono dedursi dal diagramma di Figura 37.1. Nel caso della forza occorrerà imporre che i momenti non subiscano variazioni, mentre il taglio di sinistra dovrà equilibrare la somma della forza e del taglio di destra:

$$\begin{aligned} M_1^{(1)}(L_1) &= M_1^{(2)}(0) \\ T_2^{(1)}(L_1) - T_2^{(2)}(0) - F &= 0 \end{aligned} \quad (37.2)$$

Se invece agisce una coppia, come in Figura 37.2, il taglio non dovrà subire variazioni, mentre il momento flettente a sinistra dovrà essere pari alla somma della coppia applicata e del momento flettente a destra:

$$M_1^{(1)}(L_1) - M_1^{(2)}(0) - M = 0 \quad (37.3)$$

$$T_2^{(1)}(L_1) = T_2^{(2)}(0) \quad (37.4)$$

37.2 Alcuni esempi

Si consideri una trave doppiamente incastrata di luce L , soggetta ad una forza verticale F agente nella sezione posta a distanza αL dalla sezione di sinistra, con $\alpha \in]0, 1[$.

Come usuale, si definiscono due sistemi di riferimento locali, ciascuno con origine nel suo estremo di sinistra, così come illustrato in Figura 37.3. Il primo sistema, (O_1, X_2, X_3) , ha origine in A ed è definito in $[0, \alpha L]$, il secondo sistema (O_2, Y_2, Y_3) ha origine in C ed è definito in $[0, (1 - \alpha)L]$.

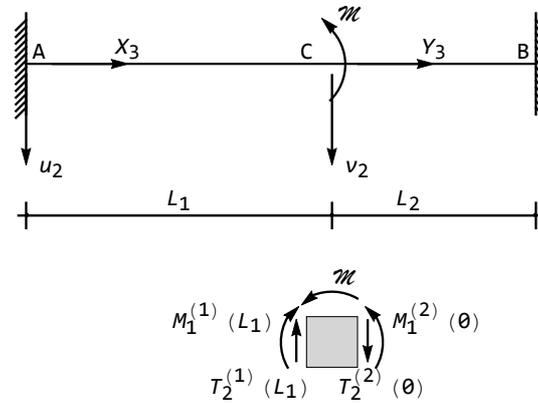


Figura 37.2: La trave in presenza di coppia concentrata in una sezione intermedia

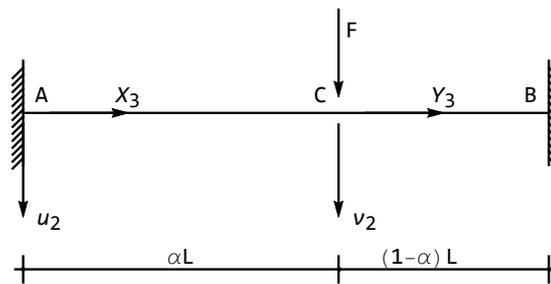


Figura 37.3: Trave doppiamente incastrata con forza concentrata ad una ascissa generica

Se il prodotto EI_{11} è costante lungo tutta la trave, si possono scrivere le due equazioni della linea elastica:

$$EI_{11}u_2''''(x_3) = 0 \quad (37.5)$$

valida in $[0, \alpha L]$, e:

$$EI_{11}v_2''''(y_3) = 0 \quad (37.6)$$

valida in $[0, (1 - \alpha)L]$.

Gli integrali generali rappresenteranno due polinomi cubici, stante l'assenza di carichi distribuiti:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 \\ v_2(y_3) &= C_5 + C_6y_3 + C_7y_3^2 + C_8y_3^3 \end{aligned} \quad (37.7)$$

Le otto costanti di integrazione si calcolano imponendo le seguenti condizioni ai limiti:

— nell'incastro di sinistra:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (37.8)$$

— in corrispondenza della forza le due condizioni di congruenza impongono che spostamenti e rotazioni siano uguali, mentre l'equilibrio del concio impone l'uguaglianza dei momenti, ed una discontinuità nel taglio pari all'intensità della forza applicata:

$$\begin{aligned} u_2(\alpha L) &= v_2(0) \\ u_2'(\alpha L) &= v_2'(0) \\ M_1^{(1)}(\alpha L) &= M_1^{(2)}(0) \longrightarrow u_2''(\alpha L) = v_2''(0) \\ T_2^{(1)}(\alpha L) - T_2^{(2)}(0) - F &= 0 \longrightarrow -u_2'''(\alpha L) + v_2'''(0) - \frac{F}{EI_{11}} = 0 \end{aligned} \quad (37.9)$$

— nell'incastro di destra:

$$\begin{aligned} v_2((1-\alpha)L) &= 0 \\ v_2'((1-\alpha)L) &= 0 \end{aligned} \quad (37.10)$$

Derivando le (37.7), e valutando nei punti opportuni si giunge alle otto equazioni algebriche non omogenee nelle otto incognite:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_1 + L\alpha C_2 + L^2\alpha^2 C_3 + L^3\alpha^3 C_4 &= C_5 \\ C_2 + 2L\alpha C_3 + 3L^2\alpha^2 C_4 &= C_6 \\ 2C_3 + 6L\alpha C_4 &= 2C_7 \\ C_4 - C_8 &= -\frac{F}{6EI_{11}} \\ C_5 + L(1-\alpha)C_6 + L^2(1-\alpha)^2 C_7 + L^3(1-\alpha)^3 C_8 &= 0 \\ C_6 + 2L(1-\alpha)C_7 + 3L^2(1-\alpha)^2 C_8 &= 0 \end{aligned} \quad (37.11)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= \frac{FL(-1+\alpha)^2\alpha}{2EI_{11}} \\ C_4 &= -\frac{F(-1+\alpha)^2(1+2\alpha)}{6EI_{11}} \\ C_5 &= -\frac{FL^3(-1+\alpha)^3\alpha^3}{3EI_{11}} \\ C_6 &= -\frac{FL^2(-1+\alpha)^2\alpha^2(-1+2\alpha)}{2EI_{11}} \end{aligned} \quad (37.12)$$

$$C_7 = -\frac{FL(-1+\alpha)^2\alpha^2}{EI_{11}}$$

$$C_8 = \frac{F(3-2\alpha)\alpha^2}{6EI}$$

Gli spostamenti sono allora deducibili inserendo questi valori nelle (37.7):

$$u_2(x_3) = -\frac{Fx_3^2(-1+\alpha)^2(x_3-3L\alpha+2x_3\alpha)}{6EI_{11}}$$

$$v_2(y_3) = -\frac{F(y_3+L(-1+\alpha))^2\alpha^2(2L(-1+\alpha)\alpha+y_3(-3+2\alpha))}{6EI_{11}} \quad (37.13)$$

con le successive derivate a fornire rotazioni, momenti e tagli:

$$\phi^{(1)}(x_3) = \frac{Fx_3(-1+\alpha)^2(x_3-2L\alpha+2x_3\alpha)}{2EI_{11}}$$

$$\phi^{(2)}(y_3) = \frac{F\alpha^2(4Ly_3(-1+\alpha)^2+y_3^2(-3+2\alpha)+L^2(-1+\alpha)^2(-1+2\alpha))}{2EI_{11}}$$

$$M_1^{(1)}(x_3) = F(-1+\alpha)^2(x_3-L\alpha+2x_3\alpha)$$

$$M_1^{(2)}(y_3) = F\alpha^2(2L(-1+\alpha)^2+y_3(-3+2\alpha))$$

$$T_2^{(1)}(x_3) = F(-1+\alpha)^2(1+2\alpha)$$

$$T_2^{(2)}(y_3) = F\alpha^2(-3+2\alpha) \quad (37.14)$$

Un caso particolarmente interessante si ottiene per $\alpha = \frac{1}{2}$, ossia quando la forza agisce in mezzzeria. In questo caso l'abbassamento massimo si raggiunge al di sotto della forza, e vale:

$$u_{2max} = \frac{FL^3}{192EI_{11}} = \frac{2}{384} \frac{FL^3}{EI_{11}} \quad (37.15)$$

mentre i momenti massimi e minimi si raggiungono in corrispondenza degli incastri e della mezzzeria:

$$M_{1min} = M_1(0) = M_1(L) = -\frac{FL}{8}$$

$$M_{1max} = M_1\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL}{8} \quad (37.16)$$

I diagrammi si presentano come in Figura 37.4. Si noti che le rotazioni massime e minime vengono attinte ad un quarto ed a tre quarti della luce, laddove i momenti flettenti si annullano. La trave è doppiamente iperstatica, e le reazioni possono facilmente calcolarsi a partire dai valori delle caratteristiche della sollecitazione interna agli estremi.

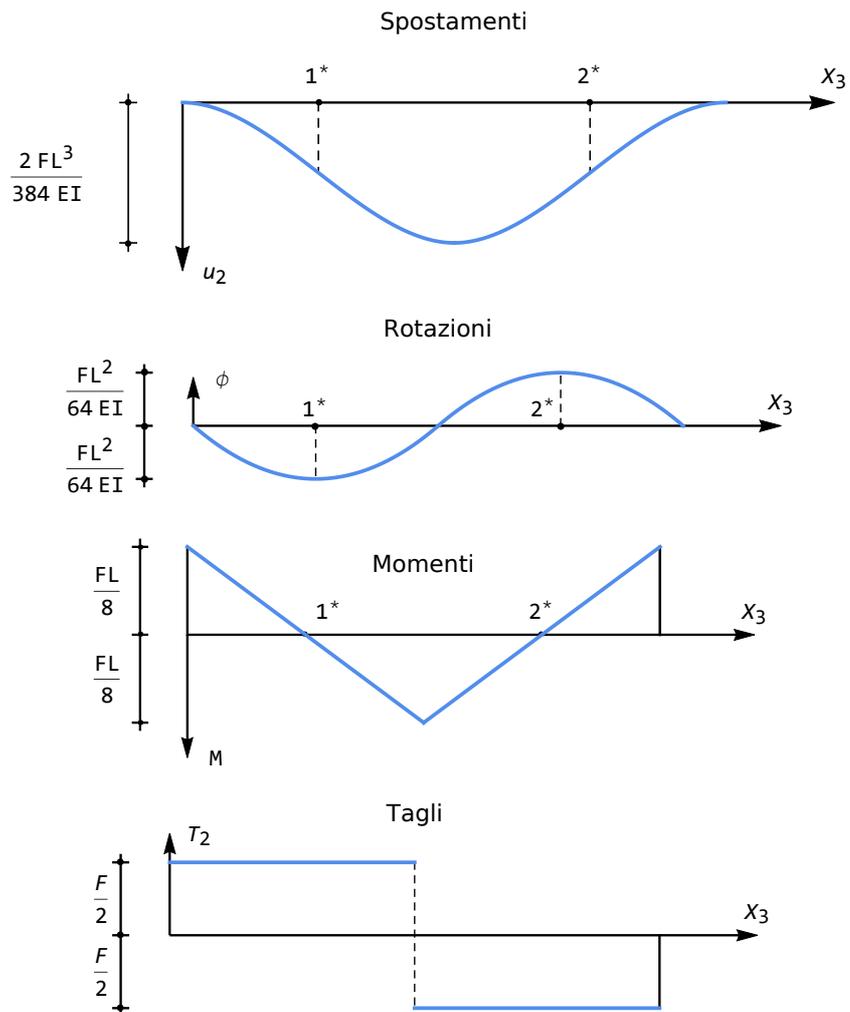


Figura 37.4: La trave doppiamente incastrata in presenza di una forza concentrata in mezziera: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

Capitolo 38

La teoria di Timoshenko

Quali sono i limiti della teoria di Eulero–Bernoulli? Come è possibile migliorare la teoria, senza rinunciare alla semplicità analitica ed alla rapidità computazionale? Per rispondere alla prima domanda, conviene ripensare alla incongruenza di base della teoria di Eulero–Bernoulli, già evidenziata nel Capitolo 31: l'impossibilità di definire lo sforzo di taglio come risultante delle azioni elementari σ_{23} , nulle per ipotesi, e la conseguente necessità di definire il taglio tramite considerazioni di equilibrio.

Affrontando il problema da un'altra ottica, può partirsi dalla definizione del taglio come derivata del momento flettente, e poi applicare la *definizione* di taglio come risultante delle azioni elementari:

$$T_2 = \int_{\Sigma} \sigma_{23} \, dA \quad (38.1)$$

Ipotizzando una distribuzione costante di tensione, ed introducendo un *coefficiente correttivo* κ^1 , si ha:

$$T_2 = \kappa \sigma_{23} A \quad (38.2)$$

e quindi la tensione tangenziale è:

$$\sigma_{23} = \frac{T_2}{\kappa A} \quad (38.3)$$

A questo punto non può evitarsi la contraddizione insita nella legge tensioni–deformazioni, che porterebbe alla deformazione tagliante:

$$e_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \quad (38.4)$$

che invece è nulla per costruzione. Se però il modulo G assume valori molto elevati (materiale poco deformabile a taglio), allora si può ragionevolmente tra-

¹“mi pare che è questa l'espressione, di cui evidentemente ignoro il senso esatto, con la quale l'ingegneria designa il trattamento a cui è sottoposta la matematica affinché essa possa applicarsi alla vita” Fernando Pessoa, *Il libro dell'inquietudine* pag.133)

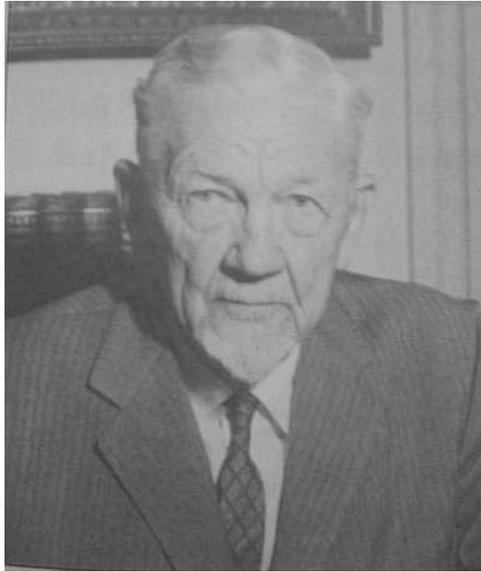


Figura 38.1: S.P. Timoshenko

scurare la deformazione tagliante e_{23} anche in presenza di un valore finito della tensione e del taglio².

Inoltre, una distribuzione costante di tensioni contraddice l'ipotesi di mantello laterale scarico.

Un miglioramento della teoria di Eulero–Bernoulli è stato proposto da Timoshenko, e coniuga semplicità e vantaggi analitici in modo talmente soddisfacente da essere ormai utilizzato in quasi tutti i codici di calcolo agli elementi finiti.

38.1 Le ipotesi di base per la trave di Timoshenko

Si consideri un solido del tipo trave, di lunghezza L , con una sezione retta caratterizzata da un asse di simmetria rispetto all'asse X_1 , soggetto ai carichi distribuiti $p(x_3)$ diretti trasversalmente all'asse della trave, ai carichi distribuiti $t(x_3)$ diretti lungo l'asse, ed alle coppie distribuite $m(x_3)$.

²In realtà, G ha dimensioni fisiche di forza per unità di superficie, e quindi parlare di valori “elevati” non ha molto significato. Più preciso risulta introdurre il fattore adimensionale:

$$\alpha = \frac{GAL^2}{EI_{11}} \quad (38.5)$$

e dire che la teoria di Eulero–Bernoulli è tanto più affidabile quanto più elevato risulta il valore di α .

In generale, seguendo la teoria di De Saint-Venant, si può dire che, per problemi di simmetria e di carico, gli spostamenti $u_1(x_1, x_2, x_3)$ secondo l'asse X_1 sono nulli. Per quanto riguarda le altre due componenti $u_2(x_1, x_2, x_3)$ e $u_3(x_1, x_2, x_3)$, conviene introdurre ipotesi *ad hoc*, che caratterizzano la particolare teoria utilizzata.

Le ipotesi a base della teoria di Timoshenko sono:

1. gli spostamenti verticali ed assiali dei punti dell'asse dipendono solo dalla variabile x_3 : $u_2^a = u_2^a(x_3)$, $u_3^a = u_3^a(x_3)$
2. segmenti normali all'asse si conservano segmenti a seguito della deformazione
3. segmenti normali all'asse *non* si conservano normali all'asse deformato, ma ruotano rispetto ad esso di un angolo addizionale ψ , come illustrato in Figura 38.2.

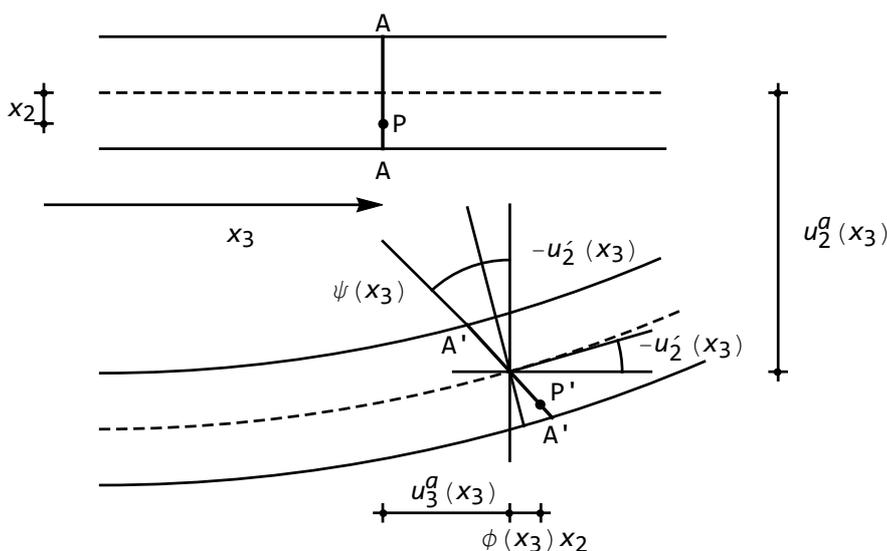


Figura 38.2: Le ipotesi di Timoshenko: $\phi(x_3) = -u_2'(x_3) + \psi$

Segue dalle tre ipotesi appena formulate, che una sezione retta a distanza x_3 dalla base di sinistra subisce un abbassamento $u_2(x_3) = u_2^a(x_3)$, uguale per tutti i punti della sezione, uno spostamento assiale $u_3(x_2, x_3)$, ed una rotazione $\phi(x_3)$ fornita da:

$$\phi(x_3) = -u_2'(x_3) + \psi \quad (38.6)$$

Ne segue che lo spostamento assiale $u_3(x_2, x_3)$ di un punto generico della sezione retta, situato a distanza x_2 dal baricentro, è pari a:

$$u_3(x_2, x_3) = u_3(x_3) + \phi(x_3)x_2 \quad (38.7)$$

dove $u_3(x_3)$ denota lo spostamento assiale dei punti dell'asse della trave.

Il vettore \mathbf{u} della terna di spostamenti è fornito pertanto da:

$$\mathbf{u}^T = \{u_1, u_2, u_3\} = \{0, u_2(x_3), u_3(x_3) + \phi(x_3)x_2\} \quad (38.8)$$

Le corrispondenti deformazioni sono deducibili a partire dalle ben note leggi che legano le deformazioni alle derivate prime degli spostamenti:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\ e_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (u_2'(x_3) + \phi(x_3)) = \frac{1}{2} \psi(x_3) \\ e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{du_3}{dx_3} + x_2 \frac{d\phi}{dx_3} = u_3'(x_3) + x_2 \phi'(x_3) \end{aligned} \quad (38.9)$$

Le componenti di tensione σ_{23} e σ_{33} , in ipotesi di validità della legge di Hooke, sono fornite da:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= E(u_3'(x_3) + x_2 \phi'(x_3)) \\ \sigma_{23} &= G(u_2'(x_3) + \phi(x_3)) \end{aligned} \quad (38.10)$$

Ne segue che le caratteristiche sforzo normale $N(x_3)$, momento flettente $M_1(x_3)$ e taglio $T_2(x_3)$ possono calcolarsi come:

$$N = \int_{\Sigma} E(u_3'(x_3) + x_2 \phi'(x_3)) dA = EAu_3'(x_3) \quad (38.11)$$

$$M_1 = \int_{\Sigma} E(x_2 u_3'(x_3) + x_2^2 \phi'(x_3)) dA = EI_{11} \phi'(x_3) \quad (38.12)$$

$$T_2 = \int_{\Sigma} G(u_2'(x_3) + \phi(x_3)) dA \quad (38.13)$$

Nota - Lo sforzo normale non è influenzato dalla ipotesi di Timoshenko, e la sua trattazione resta disaccoppiata da quella dello sforzo di taglio-momento flettente.

Nota - La seconda delle (38.10) indica che la tensione tangenziale non dipende dalla variabile x_2 , e quindi è in contraddizione con l'ipotesi di De Saint-Venant sulla superficie laterale scarica. Per tener conto della effettiva distribuzione

delle tensioni tangenziali lungo x_2 , si introduce, secondo Timoshenko, un fattore correttivo κ , detto *fattore di taglio*, scrivendo, al posto della (38.13):

$$T_2 = \int_{\Sigma} G (u_2'(x_3) + \phi(x_3)) \, dA = GA\kappa\psi(x_3) \quad (38.14)$$

Si può dimostrare che κ è minore di uno, e spesso si introduce l'area ridotta della sezione retta $A_s = \kappa A$, detta *area efficace a taglio*.

Nota - L'incongruenza della teoria di Eulero–Bernoulli è stata superata, e la condizione di equilibrio:

$$T_2(x_3) = \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} \quad (38.15)$$

non deve più essere utilizzata come definizione, ma si traduce nella relazione:

$$GA\kappa (u_2'(x_3) + \phi(x_3)) = EI_{11}\phi''(x_3) \quad (38.16)$$

38.2 Lo studio della linea elastica

Si parte dalla definizione dell'energia potenziale totale, somma dell'energia elastica e dell'energia potenziale dei carichi. Ipotizzando la presenza di carichi trasversali p , di carichi assiali t e di coppie flettenti distribuite m si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} E_t = & \frac{1}{2} \int_B Ee_{33}^2 \, dV + \frac{1}{2} \int_B 4Ge_{23}^2 \, dV \\ & - \int_0^L p(x_3) u_2(x_3) \, dx_3 - \int_0^L t(x_3) u_3(x_3) \, dx_3 - \int_0^L m(x_3) \phi(x_3) \, dx_3 \end{aligned} \quad (38.17)$$

Utilizzando la (??) e la (38.9), si può esprimere l'energia elastica come:

$$\begin{aligned} E_t = & \frac{1}{2} \int_0^L EAu_3'^2(x_3) \, dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI\phi'^2(x_3) \, dx_3 + \\ & \frac{1}{2} \int_0^L GA_s (u_2'(x_3) + \phi(x_3))^2 \, dV - \int_0^L p(x_3) u_2(x_3) \, dx_3 - \\ & \int_0^L t(x_3) u_3(x_3) \, dx_3 - \int_0^L m(x_3) \phi(x_3) \, dx_3 \end{aligned} \quad (38.18)$$

ed ora la variazione di E_t rispetto alle variabili u_3 , u_3' , u_2 , u_2' , ϕ e ϕ' può

agevolmente essere dedotta, ottenendo:

$$\begin{aligned}
\delta E_t &= E_t(u_3 + \delta u_3, u'_3 + \delta u'_3, u_2 + \delta u_2, u'_2 + \delta u'_2, \phi + \delta\phi, \phi' + \delta\phi') \\
&\quad - E_t(u_3, u'_3, u_2, u'_2, \phi, \phi') = \\
&\quad \frac{1}{2} \int_0^L EA(u'_3 + \delta u'_3)^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11}(\phi' + \delta\phi')^2 dx_3 + \\
&\quad \frac{1}{2} \int_0^L GA_s(u'_2 + \delta u'_2 + \phi + \delta\phi)^2 dx_3 - \\
&\quad \int_0^L p(u_2 + \delta u_2) dx_3 - \int_0^L t(u_3 + \delta u_3) dx_3 - \int_0^L m(\phi + \delta\phi) dx_3 - \\
&\quad \frac{1}{2} \int_0^L EAu_3'^2 dx_3 - \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11}\phi'^2 dx_3 - \frac{1}{2} \int_0^L GA_s(u'_2 + \phi)^2 dx_3 + \\
&\quad \int_0^L pu_2 dx_3 + \int_0^L tu_3 dx_3 + \int_0^L m\phi dx_3
\end{aligned} \tag{38.19}$$

Svolgendo i quadrati e semplificando si ottiene:

$$\begin{aligned}
\delta E_t &= \int_0^L EAu_3'\delta u_3' dx_3 + \int_0^L EI_{11}\phi'\delta\phi' dx_3 + \int_0^L GA_s(u'_2 + \phi)\delta u_2' dx_3 + \\
&\quad \int_0^L GA_s(u'_2 + \phi)\delta\phi dx_3 - \int_0^L p\delta u_2 dx_3 - \int_0^L t\delta u_3 dx_3 - \int_0^L m\delta\phi dx_3 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^L EA\delta u_3'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11}\delta\phi'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L GA_s(\delta u_2' + \delta\phi)^2 dx_3
\end{aligned} \tag{38.20}$$

Ne segue che la variazione dell'energia potenziale totale si esaurisce in due aliquote: la prima, lineare, e la seconda quadratica:

$$\begin{aligned}
\delta_1 E_t &= \int_0^L EAu_3'\delta u_3' dx_3 + \int_0^L EI_{11}\phi'\delta\phi' dx_3 + \int_0^L GA_s(u'_2 + \phi)\delta u_2' dx_3 + \\
&\quad \int_0^L GA_s(u'_2 + \phi)\delta\phi dx_3 - \int_0^L p\delta u_2 dx_3 - \int_0^L t\delta u_3 dx_3 - \int_0^L m\delta\phi dx_3
\end{aligned} \tag{38.21}$$

$$\delta_2 E_t = \frac{1}{2} \int_0^L EA\delta u_3'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11}\delta\phi'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L GA_s(\delta u_2' + \delta\phi)^2 dx_3 \tag{38.22}$$

Per il principio di stazionarietà, la parte lineare si annulla in corrispondenza della soluzione del problema dell'equilibrio elastico, e quindi:

$$\begin{aligned} \delta_1 E_t = & \int_0^L EAu'_3 \delta u'_3 dx_3 + \int_0^L EI_{11} \phi' \delta \phi' dx_3 + \int_0^L GA_s (u'_2 + \phi) \delta u'_2 dx_3 + \\ & \int_0^L GA_s (u'_2 + \phi) \delta \phi dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 - \int_0^L m \delta \phi dx_3 = 0 \end{aligned} \quad (38.23)$$

I primi tre integrali della (38.23) possono integrarsi per parti una volta, ottenendo:

$$\begin{aligned} \int_0^L u'_3 \delta u'_3 dx_3 &= [u'_3 \delta u_3]_0^L - \int_0^L u''_3 \delta u_3 dx_3 \\ \int_0^L \phi' \delta \phi' dx_3 &= [\phi' \delta \phi]_0^L - \int_0^L \phi'' \delta \phi dx_3 \\ \int_0^L (u'_2 + \phi) \delta u'_2 dx_3 &= [(u'_2 + \phi) \delta u_2]_0^L - \int_0^L (u''_2 + \phi') \delta u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (38.24)$$

Inserendo queste relazioni nella (38.23) si giunge a scrivere:

$$\begin{aligned} \int_0^L [(EAu''_3 + t) \delta u_3 + (EI_{11} \phi'' + m - GA_s (u'_2 + \phi)) \delta \phi + \\ (GA_s (u''_2 + \phi') + t) \delta u_2] dx_3 + \\ + [EAu'_3 \delta u_3]_0^L + [EI_{11} \phi' \delta \phi]_0^L + [GA_s (u'_2 + \phi) \delta u_2]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (38.25)$$

Le variazioni δu_3 , $\delta \phi$, e δu_2 sono arbitrarie, e quindi dovranno annullarsi le tre quantità in parentesi, conducendo alle tre equazioni differenziali in u_3 , ϕ , ed u_2 :

$$\begin{aligned} EAu''_3 &= -t \\ EI_{11} \phi'' - GA_s (u'_2 + \phi) &= -m \\ GA_s (u''_2 + \phi') &= -p \end{aligned} \quad (38.26)$$

Le restanti quantità dovranno annullarsi ai due estremi della trave. Per lo spostamento u_3 dovrà quindi essere:

$$\begin{aligned} EAu'_3(0) \delta u_3(0) &= 0 \\ EAu'_3(L) \delta u_3(L) &= 0 \end{aligned} \quad (38.27)$$

mentre per lo spostamento u_2 e la rotazione ϕ sarà necessariamente:

$$\begin{aligned} EI_{11} \phi'(0) \delta \phi(0) &= 0 \\ EI_{11} \phi'(L) \delta \phi(L) &= 0 \end{aligned} \quad (38.28)$$

$$\begin{aligned} GA_s (\phi(0) + u'_2(0)) \delta u_2(0) &= 0 \\ GA_s (\phi(L) + u'_2(L)) \delta u_2(L) &= 0 \end{aligned} \quad (38.29)$$

Nota Lo studio della funzione u_3 degli spostamenti assiali è completamente separato dallo studio delle altre due funzioni, come già detto. Invece le ultime due equazioni delle (38.26) rappresentano un sistema accoppiato di due equazioni differenziali del secondo ordine.

Esercizio 1 - Generalizzare le equazioni (38.26) al caso di trave a sezione variabile.

Esercizio 2 - Utilizzare il principio degli spostamenti virtuali per riottenere le equazioni della linea elastica e le corrispondenti condizioni ai limiti

Esercizio 3 - Utilizzare l'approccio geometrico per riottenere le equazioni della linea elastica

38.2.1 Le condizioni di vincolo

E' inutile studiare il problema assiale, non modificato rispetto al caso di Eulero-Bernoulli. Per quanto riguarda il problema flessionale, invece, in base alla (38.12) ed alla (38.14) le condizioni (38.28) e (38.29) si possono scrivere:

$$\begin{aligned} M_1(0)\delta\phi(0) &= 0 \\ M_1(L)\delta\phi(L) &= 0 \\ T_2(0)\delta u_2(0) &= 0 \\ T_2(L)\delta u_2(L) &= 0 \end{aligned} \tag{38.30}$$

Agli estremi della trave, pertanto, si possono simulare queste condizioni di vincolo:

- Estremo incastrato $\longrightarrow u_2 = 0$ e $\phi = 0$
- Estremo appoggiato $\longrightarrow u_2 = 0$ e $M_1 = 0$, ossia $\phi' = 0$
- Estremo con bipendolo $\longrightarrow \phi = 0$ e $T_2 = 0$, ossia $u_2' + \phi = 0$
- Estremo libero $\longrightarrow M_1 = 0$, ossia $\phi' = 0$ e $T_2 = 0$, ossia $u_2' + \phi = 0$

38.3 La trave a mensola con forza all'estremo libero

Le equazioni da risolvere per il caso illustrato nel titolo sono:

$$\begin{aligned} EI\phi'' - GA_s(u_2' + \phi) &= 0 \\ GA_s(u_2'' + \phi') &= 0 \end{aligned} \tag{38.31}$$

con le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \\ M(L) = EI\phi'(L) &= 0 \\ T(L) = GA_s(\phi(L) + u_2'(L)) &= F \end{aligned} \tag{38.32}$$

dove F è il valore della forza applicata nell'estremo libero. (cfr. Figura 38.3)

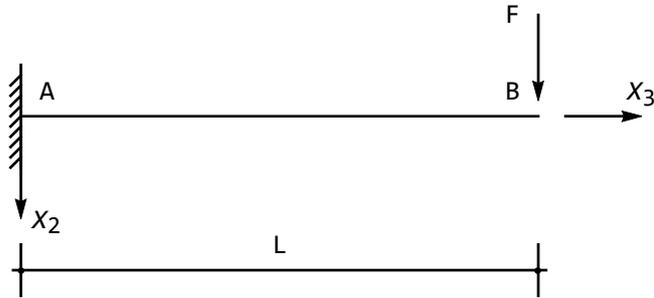


Figura 38.3: Trave a mensola con forza all'estremo

Per affrontare questo problema, si inizi ad integrare la seconda delle (38.31):

$$GA_s (u'_2 + \phi) = C_1 \quad (38.33)$$

e per la quarta condizione ai limiti si ha subito $C_1 = F$. Ne segue che la relazione precedente diviene:

$$GA_s (u'_2 + \phi) = F \quad (38.34)$$

Sostituendo questa relazione nella prima delle (38.31) si ha:

$$EI\phi'' = F \quad (38.35)$$

e quindi subito:

$$\phi' = \frac{Fx_3}{EI} + C_2 \quad (38.36)$$

$$\phi = \frac{Fx_3^2}{2EI} + C_2x_3 + C_3 \quad (38.37)$$

La seconda e terza condizione ai limiti permettono di calcolare le due costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} \phi(0) = 0 &\longrightarrow C_3 = 0 \\ \phi'(L) = 0 &\longrightarrow C_2 = -\frac{FL}{EI} \end{aligned} \quad (38.38)$$

e quindi la rotazione è data da:

$$\phi(x_3) = \frac{Fx_3}{EI} \left(\frac{x_3}{2} - L \right) \quad (38.39)$$

Infine, dalla (38.34) si può scrivere:

$$u'_2 = \frac{F}{GA_s} - \phi = \frac{F}{GA_s} + \frac{Fx_3}{EI} \left(L - \frac{x_3}{2} \right) \quad (38.40)$$

e quindi l'abbassamento è dato da:

$$u_2 = \frac{Fx_3}{GA_s} + \frac{Fx_3^2}{2EI} \left(L - \frac{x_3}{3} \right) + C_4 \quad (38.41)$$

La costante di integrazione, comunque, si annulla per la prima condizione ai limiti, giungendo a:

$$u_2(x_3) = \frac{Fx_3}{GA_s} + \frac{Fx_3^2}{2EI} \left(L - \frac{x_3}{3} \right) \quad (38.42)$$

38.3.1 Discussione dei risultati

La rotazione all'estremo libero è:

$$\phi(L) = -\frac{FL^2}{2EI} \quad (38.43)$$

e quindi coincide con quanto predetto dalla teoria di Eulero–Bernoulli.

L'abbassamento nell'estremo libero è invece fornito da:

$$u_2(L) = \frac{FL}{GA_s} + \frac{FL^3}{3EI} \quad (38.44)$$

Si ha quindi una aliquota flessionale, uguale a quella predetta da Eulero–Bernoulli, ed una aliquota addizionale tagliante, che si viene a sommare alla aliquota classica. Si vede subito che all'aumentare della luce, l'influenza del termine flessionale diviene dominante. Per evidenziare l'influenza del taglio, è opportuno riscrivere l'abbassamento come:

$$u_2(L) = \frac{FL^3}{3EI} \left(1 + \frac{3}{L^2} \frac{EI}{GA_s} \right) = \frac{FL^3}{3EI} \left(1 + \frac{3}{\alpha} \right) \quad (38.45)$$

Si è introdotto il parametro adimensionale:

$$\alpha = \frac{GA_s L^2}{EI} \quad (38.46)$$

che ben misura l'importanza relativa delle deformazioni da taglio rispetto agli effetti flessionali. Per $\alpha \rightarrow \infty$ si ritrovano i risultati classici di Eulero–Bernoulli.

38.3.2 Esempio numerico

Si consideri una trave di luce $L = 5$ metri, a sezione retta rettangolare di base $b = 50$ centimetri ed altezza $h = 80$ centimetri, e quindi con area $A = bh$ ed inerzia $I = b h^3 / 12$. Inoltre, il modulo di Young sia pari a 300.000 Kg/cm^2 , il coefficiente ν di Poisson sia pari a 0.25 , ed il fattore di taglio sia pari a $\kappa = 0.85$.

Per studiare l'influenza relativa del taglio si calcola la parte flessionale dello spostamento all'estremo libero, dovuto ad una forza unitaria:

$$u_f = \frac{L^3}{3EI} = 0.0000651042 \text{ cm} \quad (38.47)$$

ed analogamente la parte tagliante dello stesso spostamento:

$$u_t = \frac{L}{\kappa GA} = 1.2255 \times 10^{-6} \text{ cm} \quad (38.48)$$

L'influenza relativa delle deformazioni taglianti è quindi calcolabile come $\frac{u_t}{u_t + u_f}$, ed è in questo caso pari a circa 1.8 per cento.

38.4 La trave a mensola con carico distribuito

Le equazioni da risolvere per il caso illustrato nel titolo sono:

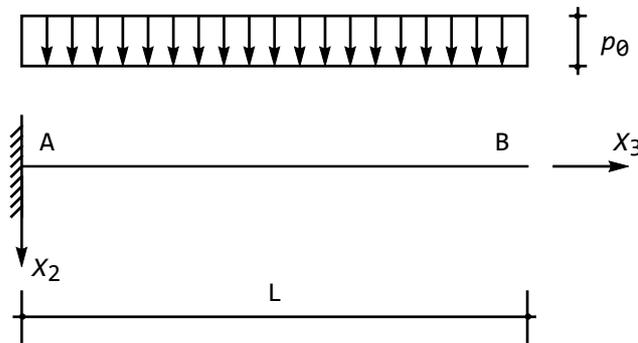


Figura 38.4: Trave a mensola soggetta a carico distribuito

$$\begin{aligned} EI\phi'' - GA_s(u_2' + \phi) &= 0 \\ GA_s(u_2'' + \phi') &= -p \end{aligned} \quad (38.49)$$

con le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \\ M(L) = EI\phi'(L) &= 0 \\ T(L) = GA_s(\phi(L) + u_2'(L)) &= 0 \end{aligned} \quad (38.50)$$

dove p è il valore del carico distribuito. (cfr. Figura 38.4)

Per affrontare questo problema, si inizi ad integrare la seconda delle (38.49):

$$GA_s(u_2' + \phi) = -px_3 + C_1 \quad (38.51)$$

e per la quarta condizione ai limiti si ha subito $C_1 = pL$. Ne segue che l'espressione precedente diviene:

$$GA_s(u_2' + \phi) = p(L - x_3) \quad (38.52)$$

Sostituendo questa relazione nella prima delle (38.49) si ha:

$$EI\phi'' = p(L - x_3) \quad (38.53)$$

e quindi subito:

$$\phi' = \frac{px_3}{EI} \left(L - \frac{x_3}{2} \right) + C_2 \quad (38.54)$$

$$\phi = \frac{px_3^2}{2EI} \left(L - \frac{x_3}{3} \right) + C_2x_3 + C_3 \quad (38.55)$$

La seconda e terza condizione ai limiti permettono di calcolare le due costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} \phi(0) = 0 &\longrightarrow C_3 = 0 \\ \phi'(L) = 0 &\longrightarrow C_2 = -\frac{pL^2}{2EI} \end{aligned} \quad (38.56)$$

e quindi la rotazione è data da:

$$\phi(x_3) = -\frac{px_3}{2EI} \left(L^2 - Lx_3 + \frac{x_3^2}{3} \right) \quad (38.57)$$

Infine, dalla (38.52) si può scrivere:

$$u_2' = \frac{p(L - x_3)}{GA_s} - \phi = \frac{p(L - x_3)}{GA_s} + \frac{px_3}{2EI} \left(L^2 - \frac{Lx_3}{2} + \frac{x_3^2}{3} \right) \quad (38.58)$$

e quindi l'abbassamento è dato da:

$$u_2 = \frac{px_3}{GA_s} \left(L - \frac{x_3}{2} \right) + \frac{px_3^2}{EI} \left(\frac{L^2}{4} - \frac{Lx_3}{6} + \frac{x_3^2}{24} \right) \quad (38.59)$$

annullandosi anche in questo caso la costante di integrazione, per la prima condizione ai limiti.

38.4.1 Discussione dei risultati

La rotazione all'estremo libero è:

$$\phi(L) = -\frac{pL^3}{6EI} \quad (38.60)$$

e quindi coincide con quanto predetto dalla teoria di Eulero-Bernoulli.

L'abbassamento nell'estremo libero è invece fornito da:

$$u_2(L) = \frac{pL^2}{2GA_s} + \frac{pL^4}{8EI} = \frac{pL^4}{8EI} \left(1 + \frac{4}{\alpha} \right) \quad (38.61)$$

38.5 La trave appoggiata con carico distribuito

Le equazioni da risolvere per il caso illustrato nel titolo sono (cfr. Figura 38.5):

$$\begin{aligned} EI\phi'' - GA_s(u_2' + \phi) &= 0 \\ GA_s(u_2'' + \phi') &= -p \end{aligned} \quad (38.62)$$

con le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ \phi'(0) &= 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ \phi'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (38.63)$$

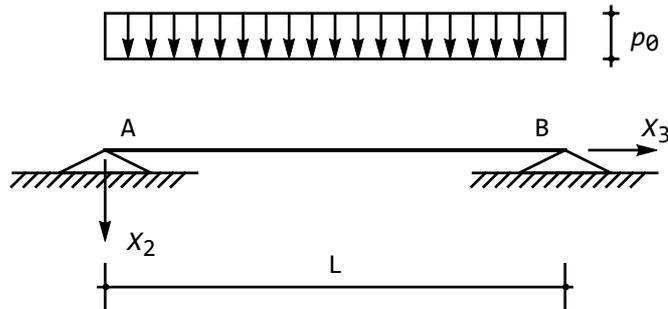


Figura 38.5: Trave appoggiata soggetta a carico distribuito

Per affrontare questo problema, si inizi ad integrare la seconda delle (38.62):

$$GA_s(u_2'' + \phi) = -px_3 + C_1 \quad (38.64)$$

e la si sostituisca nella prima delle (38.62):

$$EI\phi'' + px_3 - C_1 = 0 \quad (38.65)$$

Integrando due volte si ottiene la rotazione:

$$\phi' = -\frac{px_3^2}{2EI} + \frac{C_1x_3}{EI} + C_2 \quad (38.66)$$

$$\phi = -\frac{px_3^3}{6EI} + \frac{C_1x_3^2}{2EI} + C_2x_3 + C_3 \quad (38.67)$$

La seconda e quarta condizione ai limiti permettono di calcolare le due costanti di integrazione C_1 e C_2 :

$$\begin{aligned} \phi'(0) = 0 &\longrightarrow C_2 = 0 \\ \phi'(L) = 0 &\longrightarrow C_1 = \frac{pL}{2} \end{aligned} \quad (38.68)$$

e quindi infine la rotazione può scriversi come:

$$\phi = -\frac{px_3^3}{6EI} + \frac{pLx_3^2}{4EI} + C_3 \quad (38.69)$$

Infine, dalla (38.64) si può scrivere:

$$u_2' = \frac{p(L-x_3)}{GA_s} - \phi = \frac{p(L-x_3)}{GA_s} + \frac{px_3^3}{6EI} - \frac{pLx_3^2}{4EI} - C_3 \quad (38.70)$$

ed integrando si giunge a scrivere l'abbassamento come:

$$u_2 = \frac{px_3}{2GA_s}(L-x_3) + \frac{px_3^4}{24EI} - \frac{pLx_3^3}{12EI} - C_3x_3 + C_4 \quad (38.71)$$

Le condizioni ai limiti su u_2 impongono che sia:

$$\begin{aligned} C_4 &= 0 \\ \frac{pL^4}{24EI} - \frac{pL^4}{12EI} - C_3L + C_4 &= 0 \longrightarrow C_3 = -\frac{pL^3}{24EI} \end{aligned} \quad (38.72)$$

e quindi infine:

$$u_2 = \frac{px_3}{2GA_s}(L-x_3) + \frac{px_3^4}{24EI} - \frac{pLx_3^3}{12EI} + \frac{pL^3x_3}{24EI} \quad (38.73)$$

$$\phi = -\frac{px_3^3}{6EI} + \frac{pLx_3^2}{4EI} - \frac{pL^3}{24EI} \quad (38.74)$$

38.5.1 Discussione dei risultati

La rotazione in corrispondenza degli appoggi è:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= -\frac{pL^3}{24EI} \\ \phi(L) &= \frac{pL^3}{24EI} \end{aligned} \quad (38.75)$$

e quindi coincide con quanto predetto dalla teoria di Eulero-Bernoulli.

L'abbassamento in mezzera è invece fornito da:

$$u_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{pL^2}{8GA_s} + \frac{5}{384} \frac{pL^4}{EI} = \frac{5}{384} \frac{pL^4}{EI} \left(1 + \frac{48}{5\alpha}\right) \quad (38.76)$$

38.6 Il caso della cerniera interna

La trattazione di vincoli intermedi, interni o esterni, o di forze intermedie, siano esse forze o coppie, non presenta particolari problemi concettuali, rispetto al caso delle travi di Eulero-Bernoulli, ma solo una maggiore complessità analitica.

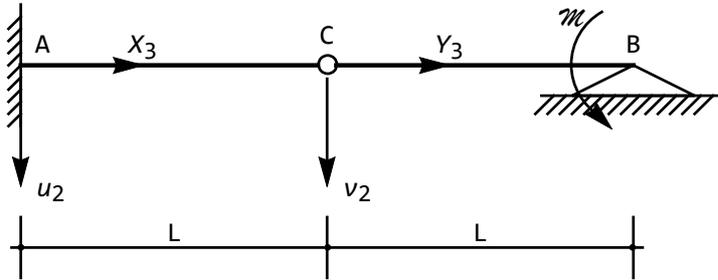


Figura 38.6: Trave incastrata-appoggiata con cerniera in mezzeria

A scopo esemplificativo, si voglia calcolare gli spostamenti e le rotazioni per una trave incastrata a sinistra, appoggiata a destra, con una cerniera interna situata in mezzeria, e soggetta ad una coppia concentrata \mathcal{M} agente sull'appoggio di destra. (cfr. Figura 38.6).

Introdotti, al solito, due sistemi di riferimento con origine nell'incastro e nella cerniera interna, rispettivamente, si hanno le quattro equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}
 EI\phi^{(1)''} - GA_s(u_2' + \phi^{(1)}) &= 0 \\
 GA_s(u_2'' + \phi^{(1)'}) &= 0 \\
 EI\phi^{(2)''} - GA_s(v_2' + \phi^{(2)}) &= 0 \\
 GA_s(v_2'' + \phi^{(2)'}) &= 0
 \end{aligned} \tag{38.77}$$

con le condizioni ai limiti si ha:

— in corrispondenza dell'incastro:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 \phi^{(1)}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{38.78}$$

— in corrispondenza della cerniera intermedia:

$$\begin{aligned}
 u_2(L) &= v_2(0) \\
 M^{(1)}(L) &= 0 \\
 M^{(2)}(0) &= 0 \\
 T^{(1)}(L) &= T^{(2)}(0)
 \end{aligned} \tag{38.79}$$

— in corrispondenza dell'appoggio:

$$\begin{aligned}
 v_2(L) &= 0 \\
 M^{(2)}(L) &= \mathcal{M}
 \end{aligned} \tag{38.80}$$

In termini di spostamenti e rotazioni, si hanno quindi le otto condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 \phi^{(1)}(0) &= 0 \\
 u_2(L) &= v_2(0) \\
 \phi^{(1)'}(L) &= 0 \\
 \phi^{(2)'}(0) &= 0 \\
 \phi^{(1)}(L) + u_2'(L) &= \phi^{(2)}(0) + v_2'(0) \\
 v_2(L) &= 0 \\
 EI\phi^{(2)'}(L) &= \mathcal{M}
 \end{aligned} \tag{38.81}$$

Dalla seconda della (38.77) si ha:

$$GA_s (u_2' + \phi^{(1)}) = C_1 \tag{38.82}$$

ed inserendo nella prima delle (38.77) si ha:

$$EI\phi^{(1)''} = C_1 \tag{38.83}$$

da cui subito:

$$\phi^{(1)'} = \frac{C_1}{EI}x_3 + C_2 \tag{38.84}$$

$$\phi^{(1)} = \frac{C_1}{EI} \frac{x_3^2}{2} + C_2x_3 + C_3 \tag{38.85}$$

Segue dalla (38.82):

$$u_2' = \frac{C_1}{GA_s} - \frac{C_1}{EI} \frac{x_3^2}{2} - C_2x_3 - C_3 \tag{38.86}$$

e quindi infine:

$$u_2 = \frac{C_1x_3}{GA_s} - \frac{C_1}{EI} \frac{x_3^3}{6} - C_2 \frac{x_3^2}{2} - C_3x_3 + C_4 \tag{38.87}$$

Del tutto analogamente si ha anche, per il secondo tratto:

$$\begin{aligned}
 \phi^{(2)'} &= \frac{C_5}{EI}y_3 + C_6 \\
 \phi^{(2)} &= \frac{C_5}{EI} \frac{y_3^2}{2} + C_6y_3 + C_7 \\
 v_2' &= \frac{C_5}{GA_s} - \frac{C_5}{EI} \frac{y_3^2}{2} - C_6y_3 - C_7 \\
 v_2 &= \frac{C_5y_3}{GA_s} - \frac{C_5}{EI} \frac{y_3^3}{6} - C_6 \frac{y_3^2}{2} - C_7y_3 + C_8
 \end{aligned} \tag{38.88}$$

Valutando opportunamente queste funzioni, ed inserendo il risultato nelle condizioni ai limiti si giunge al seguente sistema di otto equazioni nelle otto incognite C_1, C_2, \dots, C_8 :

$$\begin{aligned}
 C_3 &= 0 \\
 C_4 &= 0 \\
 \frac{C_1 L}{GA_s} - \frac{C_1 L^3}{6EI} - \frac{C_2 L^2}{2} - C_3 L + C_4 - C_8 &= 0 \\
 \frac{C_1 L}{EI} + C_2 &= 0 \\
 C_6 &= 0 \\
 C_1 - C_5 &= 0 \\
 \frac{C_5 L}{GA_s} - \frac{C_5 L^3}{6EI} - \frac{C_6 L^2}{2} - C_7 L + C_8 &= 0 \\
 \frac{C_5 L}{EI} + C_6 &= \mathcal{M}
 \end{aligned} \tag{38.89}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\mathcal{M}}{L} \\
 C_2 &= -\frac{\mathcal{M}}{EI} \\
 C_3 &= C_4 = 0 \\
 C_5 &= \frac{\mathcal{M}}{L} \\
 C_6 &= 0 \\
 C_7 &= \frac{2\mathcal{M}}{GA_s L} + \frac{\mathcal{M}L}{6EI} \\
 C_8 &= \frac{\mathcal{M}}{GA_s} + \frac{\mathcal{M}L^2}{3EI}
 \end{aligned} \tag{38.90}$$

Spostamenti e rotazioni sono quindi forniti da:

$$\begin{aligned}
 u_2(x_3) &= \frac{\mathcal{M}x_3}{GA_s L} + \frac{\mathcal{M}x_3^2}{2EI} - \frac{\mathcal{M}x_3^3}{6EIL} \\
 v_2(y_3) &= \frac{\mathcal{M}}{GA_s} \left(1 - \frac{y_3}{L}\right) + \frac{\mathcal{M}L^2}{3EI} - \frac{\mathcal{M}L}{6EI} y_3 - \frac{\mathcal{M}y_3^3}{6EIL} \\
 \phi^{(1)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3}{EI} \left(1 - \frac{x_3}{2L}\right) \\
 \phi^{(2)}(y_3) &= \frac{2\mathcal{M}}{GA_s L} + \frac{\mathcal{M}L}{6EI} + \frac{\mathcal{M}y_3^2}{2EIL} \\
 M^{(1)}(x_3) &= \mathcal{M} \left(-1 + \frac{x_3}{L}\right) \\
 M^{(2)}(y_3) &= \mathcal{M} \frac{y_3}{L}
 \end{aligned} \tag{38.91}$$

$$T^{(1)}(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{L}$$

$$T^{(2)}(y_3) = \frac{\mathcal{M}}{L}$$

Esercizio - Risolvere lo stesso problema in ipotesi di trave di Eulero-Bernoulli, e verificare le differenze.

Capitolo 39

Le distorsioni

Si definisce *distorsione* di un volume elementare una qualsiasi sestupla di deformazioni e_{ij} di origine non elastica, ossia non generata da alcun insieme di tensioni. Nell'ambito della teoria delle travi, ci si limiterà poi alle cosiddette *distorsioni di Volterra*, per cui il generico concio elementare di larghezza Δs si deforma conservando la planeità delle sezioni rette. Considerando fissa la faccia di sinistra del concio, pertanto, l'effetto delle distorsioni si riduce ad uno spostamento assoluto $\Delta \mathbf{s}_G$ del baricentro della sezione di destra, e ad una rotazione assoluta $\Delta \phi$ della sezione di destra intorno ad un asse passante per il suo baricentro.

39.1 Le distorsioni distribuite

Si presuppone che esistano, e siano finiti, i limiti :

$$\begin{aligned}\delta(s) &= - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{s}_G}{\Delta s} \\ \boldsymbol{\mu}(s) &= - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s}\end{aligned}\tag{39.1}$$

I due vettori $\boldsymbol{\delta}(s)$ e $\boldsymbol{\mu}(s)$ si chiamano *distorsione distribuita di traslazione relativa*, e *distorsione distribuita di rotazione relativa*, rispettivamente, mentre l'insieme delle loro sei componenti secondo gli assi si chiamano le *caratteristiche della distorsione distribuita*

39.2 Le distorsioni concentrate

Si consideri la sezione generica S , situata all'ascissa s , e si consideri un concio elementare di larghezza Δs , centrato in S . Siano $\mathbf{D}_G(s) = \boldsymbol{\delta}(s)\Delta s$ e $\mathbf{D}_\phi(s) = \boldsymbol{\mu}(s)\Delta s$ i vettori dello spostamento relativo da distorsione tra le due facce del concio elementare. Se Δs tende a zero, mentre δ e μ vanno all'infinito, in modo



Figura 39.1: Vito Volterra

che il loro prodotto resti costante, si genera nella sezione S una distorsione concentrata le cui caratteristiche sono, in base alle formule precedenti, uguali e contrarie allo spostamento assoluto Δs_G del baricentro della sezione retta S , ed alla rotazione assoluta $\Delta\phi$ della sezione stessa, intorno ad un asse passante per il suo baricentro:

$$\begin{aligned} D_G(s) &= -\Delta s_G(s) \\ D_\phi(s) &= -\Delta\phi(s) \end{aligned} \tag{39.2}$$

39.3 Il caso dei sistemi monodimensionali piani

Nel caso dei sistemi monodimensionali piani, sia (m, n, t) un sistema di assi triortogonale, con l'asse t diretto secondo l'asse della trave, l'asse n diretto secondo la normale, e giacente nel piano della trave, ed infine l'asse m a completare la terna. Le tre componenti della distorsione distribuita δ si riducono a due, annullandosi la componente secondo l'asse m . Più in dettaglio, si avrà la componente secondo l'asse t , detta *distorsione distribuita di traslazione assiale relativa* λ , e la componente secondo n , detta *distorsione distribuita di scorrimento relativo* θ . Delle tre componenti della distorsione distribuita μ sopravvive solo la componente secondo l'asse m , comunemente denotata μ .

Analogamente, le componenti della distorsione concentrata D_G si riducono alle due componenti secondo gli assi t ed n , dette D_η e D_ξ , mentre l'unica

componente non nulla della distorsione concentrata D_ϕ sarà quella secondo l'asse m , e sarà indicata con D_ϕ .

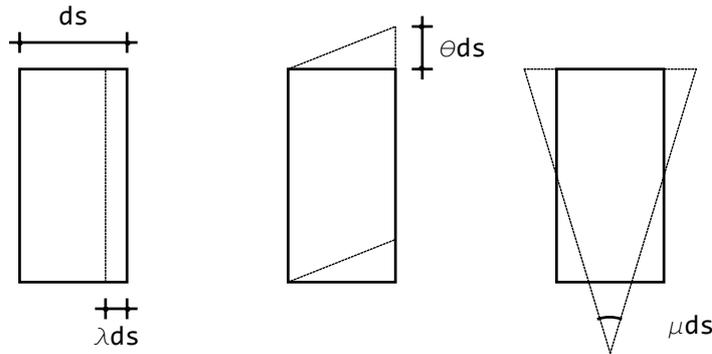


Figura 39.2: Distorsioni di traslazione assiale λ , di scorrimento relativo θ , e di rotazione μ

In Figura 39.2 sono riportate le distorsioni agenti sul concio elementare. Si noti che le caratteristiche della sollecitazione interna compiono lavoro negativo per effetto di distorsioni positive, che λ e θ sono adimensionali (allungamenti percentuali ed angoli taglianti), laddove μ ha dimensioni fisiche L^{-1} (curvatura).

Nell'ambito dell'analisi delle travi rettilinee, l'asse t coincide con l'asse X_3 della trave, l'asse n si sovrappone ad X_2 ed m coincide con X_1 .

39.4 Le distorsioni concentrate ed il metodo della linea elastica

Il metodo della linea elastica ben si presta anche a risolvere i casi in cui una trave, ad una o più campate, sia soggetta a distorsioni concentrate. Focalizzando l'attenzione sul problema flesso-tagliante, si ipotizzi infatti che in una sezione S si verifichi una distorsione di rotazione relativa D_ϕ . In virtù della stessa definizione (39.2) nella sezione S basterà imporre che gli spostamenti siano continui, insieme a momenti e tagli, e che $\phi_{sin} - \phi_{des} = D_\phi$. Analogamente, in presenza di una distorsione di traslazione relativa D_η , basterà imporre che rotazioni, momenti e tagli siano continui, mentre dovrà essere $u_{2sin} - u_{2des} = D_\eta$.

Un semplice esempio è riportato in Figura 39.3, dove una trave di luce L , incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, subisce una distorsione D_ϕ nella sezione a distanza L_1 dall'incastro. Indicando, come usuale, con u_2 e v_2 le due linee elastiche relative ai tratti di sinistra e di destra, rispettivamente, si potrà porre:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= C_1 + C_2x_3 + C_3x_3^2 + C_4x_3^3 \\ v_2(y_3) &= C_5 + C_6y_3 + C_7y_3^2 + C_8y_3^3 \end{aligned} \quad (39.3)$$

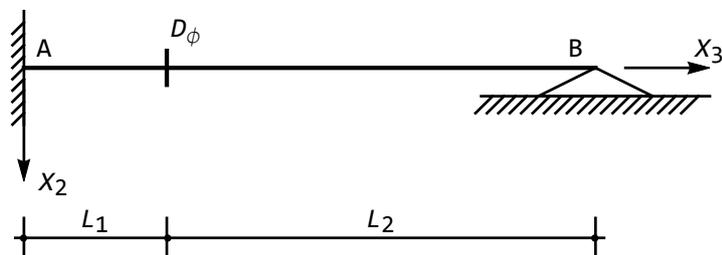


Figura 39.3: Trave incastrata–appoggiata con distorsione di rotazione relativa

Le otto costanti di integrazione si calcolano imponendo le seguenti condizioni ai limiti:

— nell’incastro di sinistra:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (39.4)$$

— in corrispondenza della distorsione:

$$\begin{aligned} u_2(L_1) &= v_2(0) \\ u_2(L_1) - v_2'(0) &= D_\phi \\ M_1^{(1)}(L_1) &= M_1^{(2)}(0) \longrightarrow u_2''(L_1) = v_2''(0) \\ T_2^{(1)}(L_1) &= T_2^{(2)}(0) = 0 \longrightarrow u_2'''(L_1) = v_2'''(0) \end{aligned} \quad (39.5)$$

— nell’appoggio di destra:

$$\begin{aligned} v_2(L_2) &= 0 \\ M_1^{(2)}(L_2) &= 0 \longrightarrow v_2''(L_2) = 0 \end{aligned} \quad (39.6)$$

Derivando le (39.3), e valutando nei punti opportuni si giunge alle otto equazioni algebriche non omogenee nelle otto incognite:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ C_1 + L_1 C_2 + L_1^2 C_3 + L_1^3 C_4 &= C_5 \\ C_2 + 2L_1 C_3 + 3L_1^2 C_4 - C_6 &= D_\phi \\ 2C_3 + 6L_1 C_4 &= 2C_7 \\ C_4 &= C_8 \\ C_5 + L_2 C_6 + L_2^2 C_7 + L_2^3 C_8 &= 0 \\ 2C_7 + 6L_2 C_8 &= 0 \end{aligned} \quad (39.7)$$

con soluzione:

$$C_1 = 0 \quad (39.8)$$

$$C_2 = 0 \quad (39.9)$$

$$C_3 = \frac{3L_2}{2L^2} D_\phi \quad (39.10)$$

$$C_4 = -\frac{L_2}{2L^3} D_\phi \quad (39.11)$$

$$C_5 = \frac{L_1^2 L_2 (2L_1 + 3L_2)}{2L^3} D_\phi \quad (39.12)$$

$$C_6 = -\frac{(2L_1^3 + 3L_1^2 L_2 + 2L_2^3)}{2L^3} D_\phi \quad (39.13)$$

$$C_7 = \frac{3L_2^2}{2L^3} D_\phi \quad (39.14)$$

$$C_8 = -\frac{L_2}{2L^3} D_\phi \quad (39.15)$$

avendo posto, per comodità, $L = L_1 + L_2$.

Gli spostamenti sono allora deducibili inserendo questi valori nelle (39.3):

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \frac{L_2(3L - x_3)x_3^2}{2L^3} D_\phi \\ v_2(y_3) &= \frac{(L_2 - y_3)(2L_1^3 + 3L_1L_2 + L_1y_3(y_3 - 2L_2))}{2L^3} D_\phi \end{aligned} \quad (39.16)$$

con le successive derivate a fornire rotazioni, momenti e tagli:

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x_3) &= \frac{3L_1x_3(x_3 - 2L)}{2L^3} D_\phi \\ \phi^{(2)}(y_3) &= \frac{(2L_1^3 + 3L_1^2L_2 + L_2(2L_2^2 - 6L_2y_3 + 3y_3^2))}{2L^3} D_\phi \\ M_1^{(1)}(x_3) &= -\frac{3EIL_2(L - x_3)}{L^3} D_\phi \\ T_2^{(1)}(x_3) &= \frac{3EIL_2}{L^3} D_\phi \\ M_1^{(2)}(y_3) &= -\frac{3EIL_2(L_2 - y_3)}{L^3} D_\phi \\ T_2^{(2)}(y_3) &= \frac{3EIL_2}{L^3} D_\phi \end{aligned} \quad (39.17)$$

Si osservi subito come ora gli spostamenti e le rotazioni non dipendano dalla rigidezza flessionale della trave, laddove le caratteristiche sono ad essa direttamente proporzionali. In Figura 39.4 si riportano i diagrammi di spostamenti e rotazioni, momenti e tagli per il caso in cui la distorsione si verifica ad un quarto della luce L .

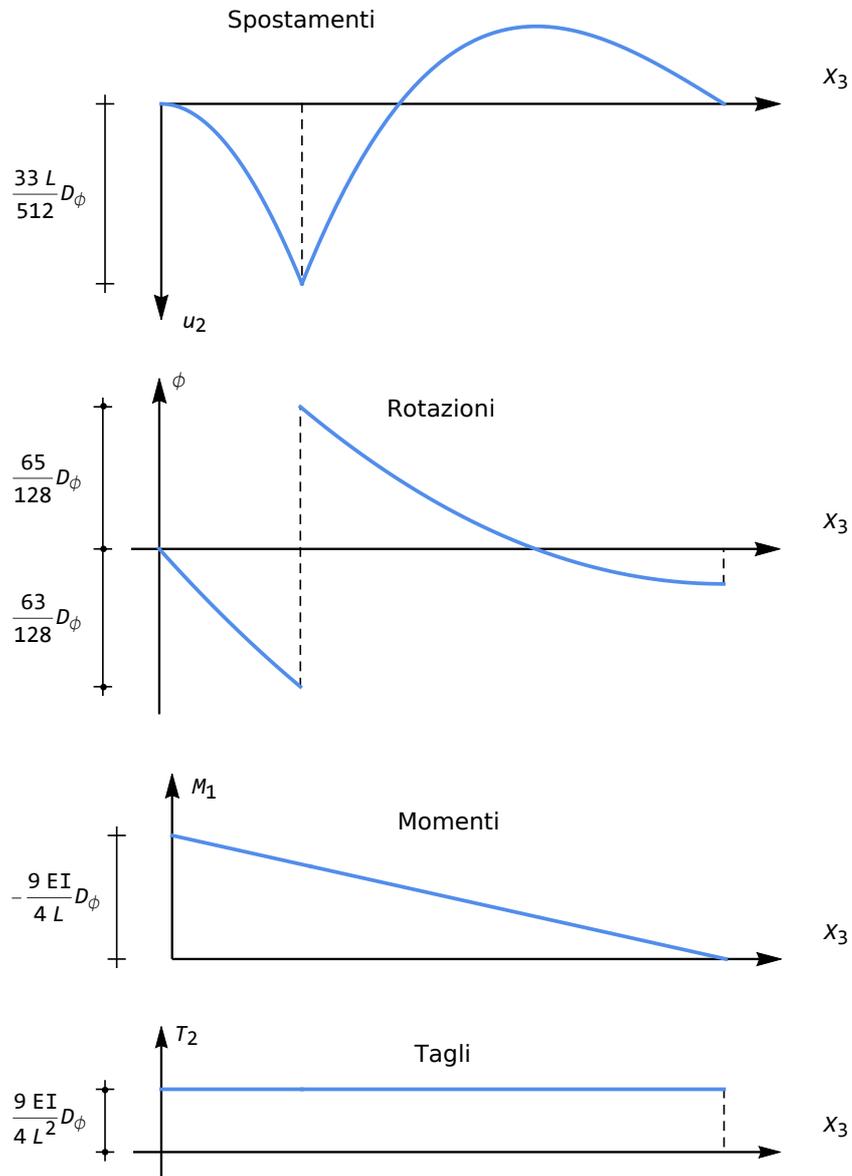


Figura 39.4: Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave incastrata-appoggiata soggetta a distorsione rotazionale ad un quarto della luce

Materiale	α (in K^{-1})
Acciaio	1.2×10^{-5}
Alluminio generico	2.3×10^{-5}
Alluminio puro	2.4×10^{-5}
Ferro	1.2×10^{-5}
Ghisa	1.07×10^{-5}
Oro	1.432×10^{-5}
Ottone	1.9×10^{-5}
Platino	9×10^{-6}
Pyrex	4×10^{-6}
Quarzo fuso	5.9×10^{-7}
Rame	1.7×10^{-5}
Silicio	3×10^{-6}
Tungsteno	5×10^{-6}
Vetro	8×10^{-6}

Tabella 39.1: Il coefficiente di dilatazione termica per vari materiali (tratta da Wikipedia)

39.5 Distorsioni distribuite e variazioni termiche

L'importanza delle distorsioni distribuite risiede in larga parte nella possibilità di tener conto attraverso di esse delle variazioni termiche, frequentemente presenti sulle più comuni strutture. Esistono, in realtà, due tipi di variazioni termiche, che possono essere ridotte a distorsioni assiali di tipo λ e rotazionali, di tipo μ . Il primo caso si verifica quando una trave, o una porzione di essa, subisce una variazione termica ΔT , uniforme, che in caso di aumento di temperatura tenderà ad allungare la trave, mentre effetto contrario produrrà una diminuzione di temperatura. Si potrà quindi porre:

$$\lambda = -\alpha \Delta T \quad (39.18)$$

dove α è il *coefficiente di dilatazione termica*, caratteristico del materiale, ed esprimibile come inverso di gradi. In Tabella 39.1 sono riportati i valori di α per alcuni materiali. Il segno si giustifica poiché un aumento di temperatura provoca una dilatazione del concio elementare, mentre una distorsione λ positiva tende a contrarre il concio.

Il secondo caso, anch'esso frequente, si verifica quando l'estradosso della trave e l'intradosso della trave si trovano a temperatura differente, generando una variazione termica che si può ragionevolmente supporre linearmente variabile lungo l'altezza h della trave. Si consideri allora la situazione di Figura 39.5, in cui una trave di altezza h si trova inizialmente ad una temperatura di riferimento T_0 . In seguito, l'intradosso subisce una variazione termica ΔT_A , positiva, e l'estradosso una variazione termica negativa ΔT_B . In totale, quindi, la variazione

termica tra i due estremi della trave è pari a $\Delta T = \Delta T_A - \Delta T_B$. Supponendo che la temperatura vari linearmente tra i due estremi della trave, ne segue che esisterà una fibra che non subisce variazioni di lunghezza, e resta a temperatura T_0 , mentre le fibre superiori si accorciano e le fibre inferiori si allungano. Potrà porsi, indicando con ds la larghezza del concio elementare:

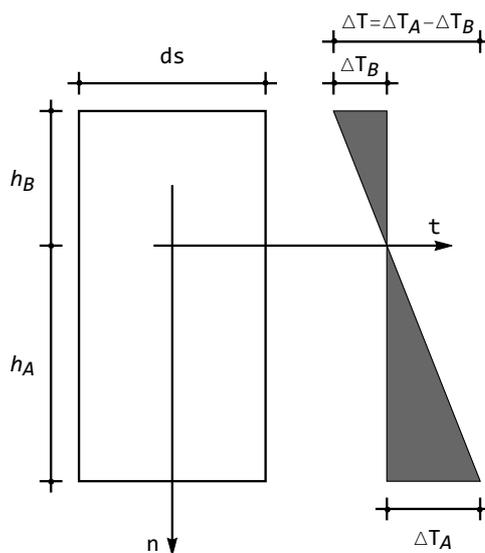


Figura 39.5: Un concio elementare soggetto a variazione termica alla Navier

$$d\phi = \alpha \frac{\Delta T_A}{h_A} ds = \alpha \frac{\Delta T_B}{h_B} ds \quad (39.19)$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} h_A d\phi &= \alpha \Delta T_A ds \\ h_B d\phi &= \alpha \Delta T_B ds \end{aligned} \quad (39.20)$$

e sottraendo membro a membro :

$$d\phi (h_A - h_B) = \alpha (\Delta T_A - \Delta T_B) ds \quad (39.21)$$

da cui:

$$d\phi = \alpha \frac{(\Delta T_A - \Delta T_B)}{(h_A - h_B)} ds = -\alpha \frac{\Delta T}{h} ds \quad (39.22)$$

Ne segue che la descritta variazione termica è equivalente ad una distorsione distribuita di rotazione relativa μ , esprimibile come:

$$\mu = -\alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (39.23)$$

La variazione termica del primo caso è anche detta *variazione termica uniforme*, o assiale, mentre nel secondo caso si parla di *variazione termica flessionale*, o alla Navier. Ambedue questi casi possono trattarsi secondo la metodologia della linea elastica, che ora deve essere generalizzata come indicato nella prossima sezione.

39.6 Le distorsioni distribuite ed il metodo della linea elastica

In presenza di distorsioni distribuite di tipo λ , μ e θ , le usuali equazioni di equilibrio tra carichi e caratteristiche non vengono in alcun modo modificate. Sarà quindi ancora:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dx_3} &= -t(x_3) \\ \frac{dT_2}{dx_3} &= -p(x_3) \\ \frac{dM_1}{dx_3} &= T_2\end{aligned}\tag{39.24}$$

Le equazioni costitutive, invece, vedranno i termini aggiuntivi dovuti alle distorsioni, sicchè occorrerà scrivere:

$$\begin{aligned}N &= EAu_3' + EA\lambda \\ M_1 &= -EIu_2'' + EI\mu\end{aligned}\tag{39.25}$$

e nel caso della teoria di Timoshenko potrà anche porsi, se ψ è l'angolo addizionale da taglio:

$$T_2 = GA_s\psi + GA_s\theta\tag{39.26}$$

Utilizzando le (39.25) nelle (39.24) si giunge quindi alle equazioni differenziali della linea elastica in presenza di distorsioni distribuite:

$$u_3'' = -\frac{t}{EA} - \lambda'\tag{39.27}$$

$$u_2'''' = \frac{p}{EI} + \mu''\tag{39.28}$$

Per la travi di Timoshenko, l'equazione del quarto ordine deve essere sostituita dal sistema di due equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}EI\phi'' + EI\mu' - GA_s(\psi + \theta) &= 0 \\ GA_s(\psi' + \theta') &= -p\end{aligned}\tag{39.29}$$

Si consideri, quale primo esempio, un'asta fissa nell'estremo di sinistra e libera all'estremo di destra (asta isostatica), soggetta ad una variazione termica uniforme positiva $\lambda = -\alpha\Delta T$. L'equazione della linea elastica diviene:

$$u_3'' = 0\tag{39.30}$$

con soluzione :

$$u_3(x_3) = C_0 + C_1 x_3 \quad (39.31)$$

Le condizioni ai limiti da imporre sono, se l'asta ha luce L :

$$\begin{aligned} u_3(0) = 0 &\longrightarrow C_0 = 0 \\ N(L) = 0 &\longrightarrow EA(C_1 - \alpha\Delta T) = 0 \longrightarrow C_1 = \alpha\Delta T \end{aligned} \quad (39.32)$$

In definitiva, l'asta subirà gli spostamenti assiali (positivi in quanto l'asta si allunga):

$$u_3(x_3) = \alpha\Delta T x_3 \quad (39.33)$$

mentre lo sforzo normale sarà identicamente nullo. Se invece l'asta è impedita di muoversi ad ambedue gli estremi (asta iperstatica), allora le condizioni ai limiti forniranno:

$$\begin{aligned} u_3(0) = 0 &\longrightarrow C_0 = 0 \\ u_3(L) = 0 &\longrightarrow C_0 + C_1 L = 0 \longrightarrow C_1 = 0 \end{aligned} \quad (39.34)$$

Quindi gli spostamenti si annulleranno identicamente, mentre lo sforzo normale sarà pari a:

$$N = -EA\alpha\Delta T \quad (39.35)$$

di compressione in quanto l'asta è impedita ad allungarsi.

Come secondo esempio, si consideri una trave a mensola (trave isostatica) soggetta alla variazione termica positiva alla Navier $\mu = -\alpha \frac{\Delta T}{h}$. La distorsione è costante, quindi la linea elastica è rappresentata da un polinomio cubico:

$$u_2(x_3) = C_0 + C_1 x_3 + C_2 x_3^2 + C_3 x_3^3 \quad (39.36)$$

Le condizioni ai limiti forniscono:

$$\begin{aligned} u_2(0) = 0 &\longrightarrow C_0 = 0 \\ u_2'(0) = 0 &\longrightarrow C_1 = 0 \\ M(L) = 0 &\longrightarrow u_2''(L) + \alpha \frac{\Delta T}{h} = 0 \longrightarrow 2C_2 + 6C_3 L = -\alpha \frac{\Delta T}{h} \\ T(L) = 0 &\longrightarrow u_2'''(L) = 0 \longrightarrow C_3 = 0 \end{aligned} \quad (39.37)$$

L'unica costante diversa da zero è $C_2 = -\frac{\alpha}{2} \frac{\Delta T}{h}$, e quindi gli spostamenti saranno forniti dalla parabola quadratica:

$$u_2(x_3) = -\frac{1}{2} \alpha \frac{\Delta T}{h} x_3^2 \quad (39.38)$$

Le corrispondenti rotazioni saranno distribuite con legge lineare:

$$\phi(x_3) = \alpha \frac{\Delta T}{h} x_3 \quad (39.39)$$

mentre le caratteristiche saranno identicamente nulle:

$$\begin{aligned} M_1 &= -EI \left(u_2'' + \alpha \frac{\Delta T}{h} \right) = 0 \\ T_2 &= M_1' = 0 \end{aligned} \quad (39.40)$$

Si noti che la trave subisce spostamenti negativi (innalzamenti) a causa di una variazione termica positiva, in quanto in questo caso l'intradosso ha temperatura superiore all'estradosso, e quindi la fibra all'intradosso si allunga, quella all'estradosso si contrae.

Se invece la trave è iperstatica, ad esempio incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, si hanno le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \longrightarrow C_0 = 0 \\ u_2'(0) &= 0 \longrightarrow C_1 = 0 \\ u_2(L) &= 0 \longrightarrow C_0 + C_1L + C_2L^2 + C_3L^3 = 0 \\ M(L) &= 0 \longrightarrow u_2''(L) + \alpha \frac{\Delta T}{h} = 0 \longrightarrow 2C_2 + 6C_3L = -\alpha \frac{\Delta T}{h} \end{aligned} \quad (39.41)$$

con soluzione :

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\alpha \Delta T}{4h} \\ C_3 &= -\frac{\alpha \Delta T}{4hL} \end{aligned} \quad (39.42)$$

Ne seguono gli spostamenti e le rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \frac{\alpha \Delta T}{4h} x_3^2 \left(1 - \frac{x_3}{L} \right) \\ \phi(x_3) &= -\frac{\alpha \Delta T}{2h} x_3 + \frac{3\alpha \Delta T}{4hL} x_3^2 \end{aligned} \quad (39.43)$$

e le caratteristiche saranno fornite da:

$$\begin{aligned} M_1 &= -EI \left(u_2'' + \alpha \frac{\Delta T}{h} \right) = -\frac{3}{2} EI \alpha \frac{\Delta T}{h} \left(1 - \frac{x_3}{L} \right) \\ T_2 &= M_1' = \frac{3EI}{2L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \end{aligned} \quad (39.44)$$

Capitolo 40

I corollari di Mohr

In questo Capitolo si illustra un metodo per calcolare lo spostamento o la rotazione di un punto di una trave rettilinea isostatica, sfruttando equazioni di equilibrio.

40.1 L'analogia di Mohr

Si consideri una generica trave di Eulero–Bernoulli. Per essa, è ben noto che equilibrando un concio elementare nei riguardi della traslazione verticale e della rotazione si ottengono due relazioni differenziali che legano tra loro il carico verticale applicato $q(x_3)$, lo sforzo di taglio $T_2(x_3)$ ed il momento flettente $M_1(x_3)$:

$$\begin{aligned}\frac{dT_2}{dx_3} &= -q \\ \frac{dM_1}{dx_3} &= T_2\end{aligned}\tag{40.1}$$

Ne segue subito, derivando la seconda, ed usando la prima:

$$\frac{d^2M_1}{dx_3^2} = -q\tag{40.2}$$

D'altro canto, è anche noto che la teoria di Eulero–Bernoulli si basa sull'ipotesi di planeità delle sezioni rette, per cui esiste una relazione lineare tra momento flettente e curvatura della sezione retta:

$$\frac{d\phi}{dx_3} = \frac{M_1}{EI_{11}}\tag{40.3}$$

dove $\phi(x_3)$ rappresenta la rotazione della sezione retta, e la costante di proporzionalità è la rigidezza flessionale EI_{11} , ossia il prodotto tra il modulo di Young E del materiale, ed il momento di inerzia I_{11} della sezione retta. Infine,

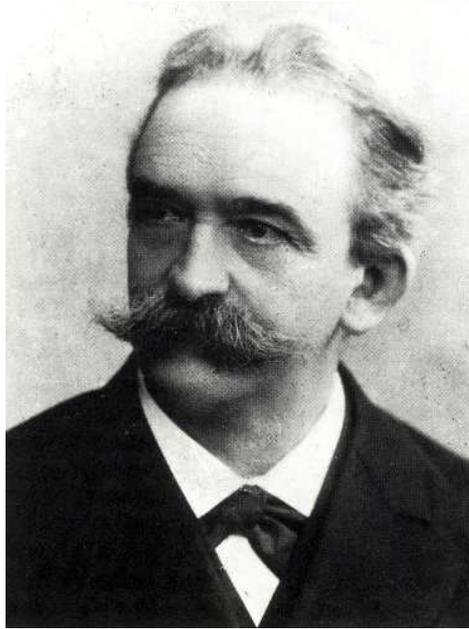


Figura 40.1: Otto Mohr

l'ulteriore ipotesi a base della teoria della trave di Eulero–Bernoulli impone che la sezione retta ruoti dello stesso angolo di cui ruota l'asse neutro, e quindi la rotazione può essere espressa in termini di derivata dello spostamento verticale $u_2(x_3)$:

$$\frac{du_2}{dx_3} = -\phi \quad (40.4)$$

Inserendo la (40.4) nella (40.3) si ha poi la nota equazione:

$$\frac{d^2u_2}{dx_3^2} = -\frac{M_1}{EI_{11}} \quad (40.5)$$

Paragonando la (40.5) con la (40.2) si nota che la funzione $u_2(x_3)$ può essere riguardata come un momento fittizio $M^*(x_3)$:

$$M^*(x_3) = u_2(x_3) \quad (40.6)$$

causato da un carico fittizio:

$$q^* = \frac{M_1}{EI_{11}} \quad (40.7)$$

Dalla (40.3), poi, paragonata alla prima delle (40.1), si trae che le rotazioni possono riguardarsi come l'opposto dello sforzo di taglio fittizio $-T^*$ causato dallo stesso carico fittizio:

$$T^*(x_3) = -\phi(x_3) \quad (40.8)$$

40.1.1 La trave ausiliaria e le condizioni ai limiti

Si è visto che gli spostamenti e le rotazioni possono calcolarsi come se rappresentassero una distribuzione di momenti flettenti e tagli dovuti ad un particolare carico fittizio (40.7). Corrispondentemente, le condizioni di vincolo della trave di partenza devono essere opportunamente modificate, giungendo a definire una *trave ausiliaria* su cui calcolare le caratteristiche. Per ottenere il vincolo fittizio da sostituire al vincolo effettivo, si proceda in questo modo:

1. si scrivano le condizioni di congruenza, sia omogenee che non omogenee
2. le si tramuti in condizioni su momenti e tagli fittizi, in base alle (40.6) e (40.8)
3. si deduca il vincolo fittizio in base a queste prestazioni statiche, così come sintetizzato nel seguito, limitatamente ai casi più comuni. Altri vincoli meno frequenti, come ad esempio i vincoli elasticamente cedevoli, possono trattarsi similmente.

I vincoli di estremità

E' noto che l'estremo A di una trave può essere:

— incastrato — e per esso:

$$\begin{aligned}u_{2A} &= 0 \\ \phi_A &= 0\end{aligned}\tag{40.9}$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il momento fittizio M_A^* ed il taglio fittizio T_A^* , e quindi l'incastrato si trasformerà in una sezione libera

— appoggiato — e per esso:

$$\begin{aligned}u_{2A} &= 0 \\ \phi_A &\neq 0\end{aligned}\tag{40.10}$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il momento fittizio M_A^* mentre il taglio fittizio T_A^* potrà essere diverso da zero, e quindi l'appoggio si trasformerà in un appoggio

— dotato di bipendolo — e per esso:

$$\begin{aligned}u_{2A} &\neq 0 \\ \phi_A &= 0\end{aligned}\tag{40.11}$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il taglio fittizio T_A^* mentre il momento fittizio M_A^* potrà essere diverso da zero, e quindi il bipendolo rimarrà un bipendolo

— libero — e per esso:

$$\begin{aligned}u_{2A} &\neq 0 \\ \phi_A &\neq 0\end{aligned}\tag{40.12}$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà permettere un taglio fittizio T_A^* ed un momento fittizio M_A^* diversi da zero, e quindi l'estremo libero si dovrà trasformare in un incastro

I vincoli esterni intermedi

Anche i vincoli intermedi possono studiarsi nello stesso modo, e quindi essere opportunamente trasformati nella loro controparte fittizia:

Un vincolo locato all'ascissa generica $x_3 = \zeta$ che non interrompa la continuità fisica della trave, può essere:

— un appoggio intermedio — e per esso:

$$\begin{aligned} u_{2\zeta} &= 0 \\ \phi_\zeta &\neq 0 \end{aligned} \quad (40.13)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il momento fittizio M_ζ^* mentre il taglio fittizio T_ζ^* potrà essere diverso da zero, e quindi l'appoggio si trasformerà in una cerniera

— un bipendolo intermedio esterno — e per esso:

$$\begin{aligned} u_{2\zeta} &\neq 0 \\ \phi_\zeta &= 0 \end{aligned} \quad (40.14)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il taglio fittizio T_ζ^* mentre il momento fittizio M_ζ^* potrà essere diverso da zero, e quindi il bipendolo esterno si trasformerà in un bipendolo interno

I vincoli interni intermedi (snodi)

Un vincolo locato all'ascissa generica $x_3 = \zeta$ che interrompa la continuità fisica della trave, può essere:

— una cerniera — e per essa:

$$\begin{aligned} \Delta u_{2\zeta} &= 0 \\ \Delta \phi_\zeta &\neq 0 \end{aligned} \quad (40.15)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà permettere una discontinuità del taglio fittizio T_ζ^* , e quindi la cerniera si trasformerà in un appoggio

— un bipendolo interno — e per esso:

$$\begin{aligned} \Delta u_{2\zeta} &\neq 0 \\ \Delta \phi_\zeta &= 0 \end{aligned} \quad (40.16)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà permettere una discontinuità del momento fittizio M_ζ^* , e quindi il bipendolo interno diverrà un bipendolo esterno

Altri casi di vincolo meno usuali possono trattarsi nell'identico modo.

L'analogia di Mohr trova la sua applicazione più ovvia nel calcolo di singole quantità cinematiche (spostamenti o rotazioni) su travi isostatiche. In questo caso, infatti, la corrispondente trave ausiliaria è anch'essa isostatica, rendendo immediato il calcolo dei momenti e dei tagli fittizi. Ciò non toglie che esso sia estendibile anche alle strutture iperstatiche, che conducono a travi fittizie labili.

40.2 La trave appoggiata

Si consideri una trave appoggiata ad ambedue gli estremi, di luce L , soggetta ad un carico distribuito $q(x_3)$, forze verticali e coppie concentrate, e si vogliano calcolare le rotazioni in corrispondenza dei vincoli ϕ_A e ϕ_B . La trave ausiliaria è ancora appoggiata agli estremi, sicchè le rotazioni richieste possono identificarsi con i tagli in A e B per la trave appoggiata soggetta al carico fittizio q^* :

$$\begin{aligned}\phi_A &= -T_A^* \\ \phi_B &= -T_B^*\end{aligned}\quad (40.17)$$

e poichè, come è noto, il taglio a sinistra è uguale e contrario alla reazione dell'appoggio, mentre a destra il taglio è uguale alla reazione, si può anche scrivere:

$$\begin{aligned}\phi_A &= R_A^* \\ \phi_B &= -R_B^*\end{aligned}\quad (40.18)$$

Nel seguito, si illustrano in dettaglio alcuni carichi particolari:

40.2.1 La trave appoggiata soggetta a forza in mezzzeria

Si consideri la trave semplicemente appoggiata di Figura 40.2, soggetta ad una forza concentrata in mezzzeria.

Le reazioni R_A ed R_B sono fornite da:

$$R_A = R_B = -\frac{F}{2}\quad (40.19)$$

Il momento flettente è distribuito con legge lineare, si annulla ad ambedue gli estremi, e raggiunge un massimo in corrispondenza della forza, dove vale:

$$M_{1\max} = M_1\left(\frac{L}{2}\right) = -R_B\frac{L}{2} = \frac{FL}{4}\quad (40.20)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico bi-triangolare di Figura 40.2, e si calcolino le reazioni:

$$R_A^* = R_B^* = -\frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{FL}{4EI_{11}} = -\frac{FL^2}{16EI_{11}}\quad (40.21)$$

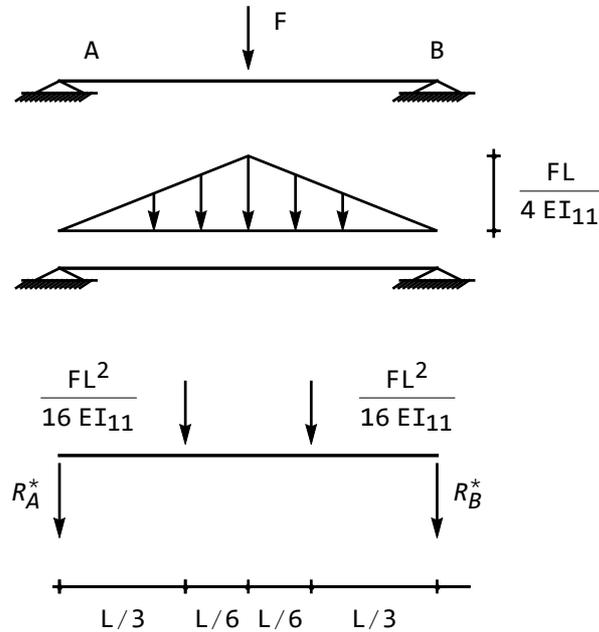


Figura 40.2: Trave appoggiata soggetta a forza concentrata in mezzeria

Infine, le rotazioni si deducono in base alla (40.18):

$$\begin{aligned}\phi_A = R_A^* &= -\frac{FL^2}{16EI_{11}} \\ \phi_B = -R_B^* &= \frac{FL^2}{16EI_{11}}\end{aligned}\quad (40.22)$$

L'abbassamento in mezzeria è ricavabile tramite la (40.6), ossia calcolando il momento flettente sulla trave ausiliaria:

$$u_{2\max} = M_{\max}^* = -R_B^* \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{FL}{4EI_{11}} \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{FL^3}{48EI_{11}} \quad (40.23)$$

40.2.2 La trave appoggiata soggetta a carico uniformemente distribuito

Per questa condizione di carico, le reazioni R_A ed R_B sono fornite da:

$$R_A = R_B = -\frac{qL}{2} \quad (40.24)$$

Il momento flettente è distribuito con legge parabolica, si annulla ad ambedue gli estremi, e raggiunge un massimo in corrispondenza della forza, dove

vale:

$$M_{max} = M_1 \left(\frac{L}{2} \right) = -R_B \frac{L}{2} - \frac{qL}{2} \frac{L}{4} = \frac{qL^2}{8} \quad (40.25)$$

Ne segue che la funzione momento è esprimibile come:

$$M_1(x_3) = \frac{qx_3}{2} (L - x_3) \quad (40.26)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico parabolico:

$$q^*(x_3) = \frac{qx_3}{2EI_{11}} (L - x_3) \quad (40.27)$$

e si calcolino le reazioni, sfruttando la simmetria del sistema:

$$R_A^* = R_B^* = -\frac{1}{2EI_{11}} \int qx_3 \frac{(L - x_3)}{2} dx_3 = -\frac{qL^3}{24EI_{11}} \quad (40.28)$$

Infine, le rotazioni si deducono in base alla (40.18):

$$\begin{aligned} \phi_A &= R_A^* = -\frac{qL^3}{24EI_{11}} \\ \phi_B &= -R_B^* = \frac{qL^3}{24EI_{11}} \end{aligned} \quad (40.29)$$

L'abbassamento in mezzeria è ricavabile tramite la (40.6), ossia calcolando il momento flettente in mezzeria sulla trave ausiliaria. Tenendo conto che il baricentro del carico parabolico è situato a $3/8$ della semiluce si ha (cfr. Figura 40.3)

$$u_{2max} = M_{max}^* = -R_B^* \frac{L}{2} - \frac{qL^3}{24EI_{11}} \frac{3}{8} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI_{11}} \quad (40.30)$$

40.2.3 La trave appoggiata soggetta a coppia concentrata in un estremo

Per il caso di Figura 40.4 le reazioni R_A ed R_B sono fornite da:

$$\begin{aligned} R_A &= -\frac{\mathcal{M}}{L} \\ R_B &= \frac{\mathcal{M}}{L} \end{aligned} \quad (40.31)$$

Il momento flettente è distribuito con legge lineare, si annulla a sinistra, e raggiunge un massimo in corrispondenza della coppia.

Ne segue che la funzione momento è esprimibile come:

$$M_1(x_3) = \mathcal{M} \frac{x_3}{L} \quad (40.32)$$

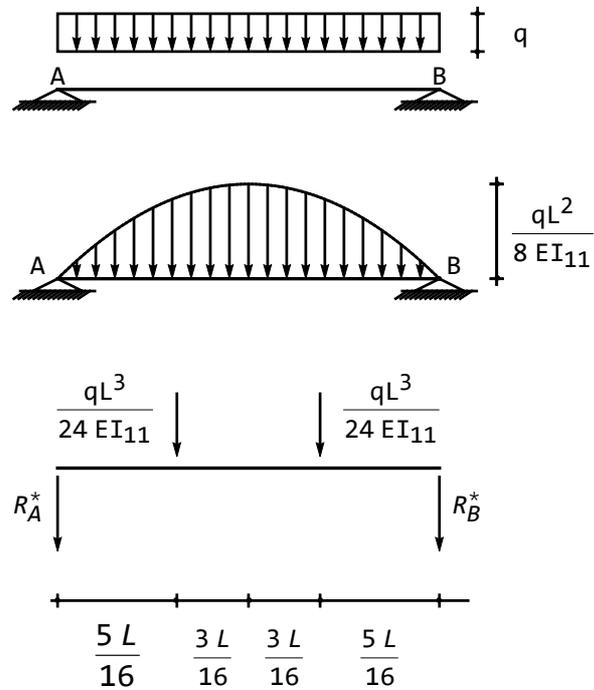


Figura 40.3: Trave appoggiata soggetta a carico distribuito

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico triangolare:

$$q^*(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} \frac{x_3}{L} \quad (40.33)$$

e si calcolino le reazioni, imponendo l'equilibrio alla traslazione ed alla rotazione. Dalla Figura 40.4 hanno le due equazioni:

$$\begin{aligned} R_A^* + R_B^* + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} L &= 0 \\ R_A^* L + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} L \frac{L}{3} &= 0 \end{aligned} \quad (40.34)$$

che possono risolversi a fornire:

$$\begin{aligned} R_A^* &= -\frac{\mathcal{M}L}{6EI_{11}} \\ R_B^* &= -\frac{\mathcal{M}L}{3EI_{11}} \end{aligned} \quad (40.35)$$

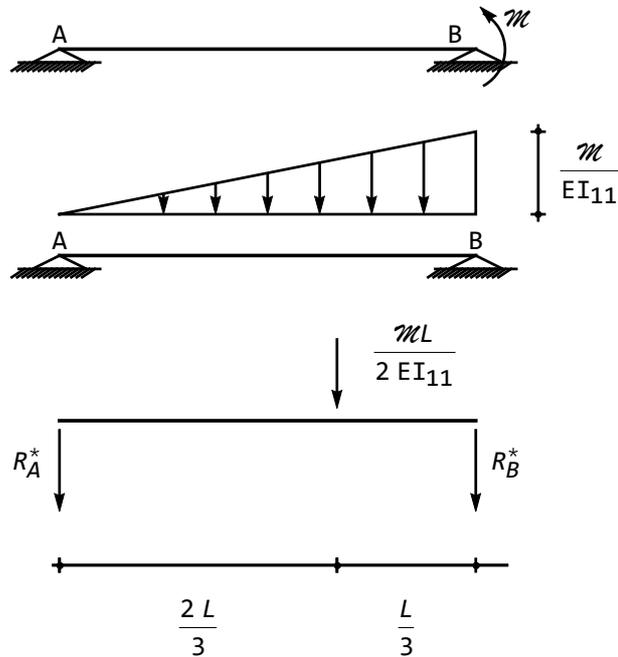


Figura 40.4: Trave appoggiata soggetta a coppia nell'estremo

Infine, le rotazioni si deducono in base alla (40.18):

$$\begin{aligned}\phi_A &= R_A^* = -\frac{ML}{6EI_{11}} \\ \phi_B &= -R_B^* = \frac{ML}{3EI_{11}}\end{aligned}\quad (40.36)$$

40.3 La trave a mensola

Si consideri ora una trave a mensola, di luce L , con incastro a sinistra e libera a destra, soggetta ad un carico distribuito $q(x_3)$, forze verticali e coppie concentrate, e si vogliano calcolare la rotazione ϕ_B e l'abbassamento u_{2B} in corrispondenza dell'estremo libero. La trave ausiliaria è ancora una mensola, in cui però l'estremo libero è a sinistra e l'incastro è a destra, sicchè la rotazione e l'abbassamento richiesti possono identificarsi con il taglio ed il momento in B per la trave libera–incastrata soggetta al carico fittizio q^* :

$$\begin{aligned}\phi_B &= T_B^* \\ u_{2B} &= M_B^*\end{aligned}\quad (40.37)$$

Nel seguito, si illustrano in dettaglio alcuni carichi particolari:

40.3.1 La trave a mensola soggetta a forza nell'estremo libero

Il momento flettente è distribuito con legge lineare, si annulla nell'estremo libero, e raggiunge un minimo in corrispondenza dell'incastro, dove vale:

$$M_{1\max} = M_1\left(\frac{L}{2}\right) = -FL \quad (40.38)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico triangolare di Figura 40.5, e si calcolino le reazioni:

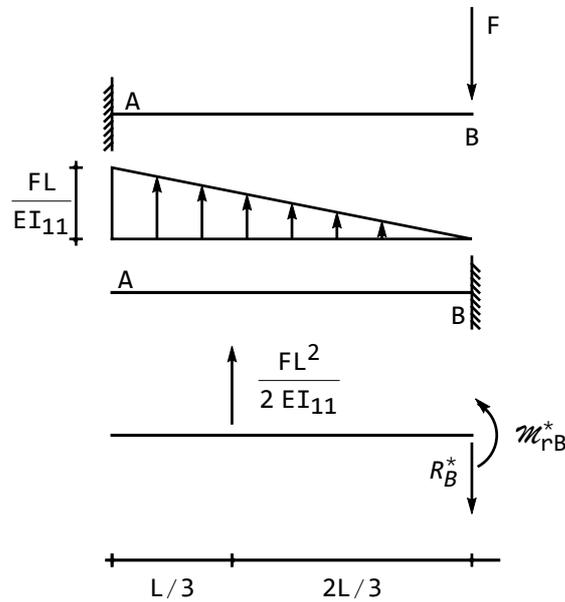


Figura 40.5: Trave a mensola soggetta a forza nell'estremo

$$\begin{aligned} R_B^* &= \frac{1}{2} \frac{FL}{EI_{11}} L = \frac{FL^2}{2EI_{11}} \\ \mathcal{M}_{rB}^* &= \frac{1}{2} \frac{FL}{EI_{11}} L \left(\frac{2}{3}L\right) = \frac{FL^3}{3EI_{11}} \end{aligned} \quad (40.39)$$

Ne segue infine che le richieste rotazioni e spostamenti sono:

$$\begin{aligned} \phi_B &= -\frac{FL^2}{2EI_{11}} \\ u_{2B} &= \frac{FL^3}{3EI_{11}} \end{aligned} \quad (40.40)$$

40.3.2 La trave a mensola soggetta a carico uniformemente distribuito

Le reazioni R_A ed \mathcal{M}_{rA} per lo schema di Figura 40.6 sono fornite da:

$$\begin{aligned} R_A &= -qL \\ \mathcal{M}_{rA} &= \frac{qL^2}{2} \end{aligned} \quad (40.41)$$

Il momento flettente è distribuito con legge parabolica, si annulla nell'estre-

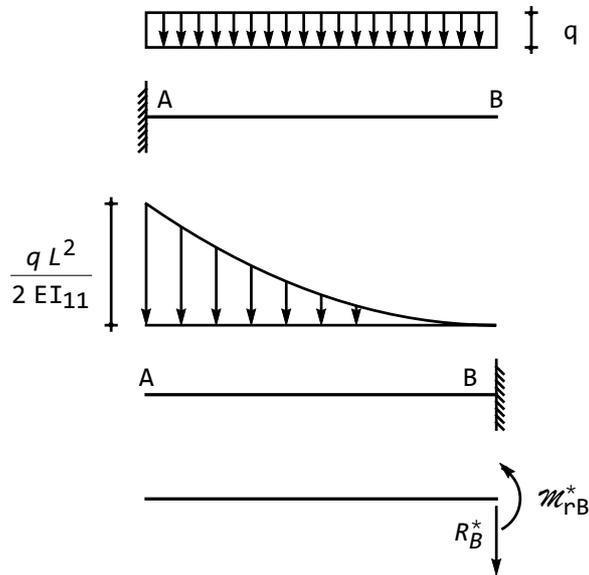


Figura 40.6: Trave a mensola soggetta a carico distribuito

mo libero, insieme alla sua derivata, e raggiunge un minimo in corrispondenza dell'incastro, dove vale:

$$M_{1min} = -\mathcal{M}_{rA} = -\frac{qL^2}{2} \quad (40.42)$$

Ne segue che la funzione momento è esprimibile come:

$$M(x_3) = -\frac{qL^2}{2} + qLx_3 - \frac{q}{2}x_3^2 \quad (40.43)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico parabolico:

$$q^*(x_3) = -\frac{qL^2}{2EI_{11}} + \frac{qL}{EI_{11}}x_3 - \frac{q}{2EI_{11}}x_3^2 \quad (40.44)$$

e si calcolino le reazioni (cfr. Figura 40.6):

$$R_B^* = - \int_0^L q^*(x_3) dx_3 = - \int_0^L \left(-\frac{qL^2}{2EI_{11}} + \frac{qL}{EI_{11}}x_3 - \frac{q}{2EI_{11}}x_3^2 \right) dx_3 = \frac{qL^3}{6EI_{11}} \quad (40.45)$$

$$\mathcal{M}_{rB} = - \int_0^L q^*(x_3)(L-x_3) dx_3 = - \int_0^L \left(-\frac{qL^2}{2EI_{11}} + \frac{qL}{EI_{11}}x_3 - \frac{q}{2EI_{11}}x_3^2 \right) (L-x_3) dx_3 = \frac{qL^4}{8EI_{11}} \quad (40.46)$$

Infine, le rotazioni e gli spostamenti si deducono come:

$$\begin{aligned} \phi_B &= -R_B^* = -\frac{qL^3}{6EI_{11}} \\ u_{2B} &= M_B^* = \frac{qL^4}{8EI_{11}} \end{aligned} \quad (40.47)$$

40.3.3 La trave a mensola soggetta a coppia concentrata in un estremo

Il momento flettente è distribuito con legge costante:

$$M(x_3) = \mathcal{M} \quad (40.48)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico costante:

$$q^*(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} \quad (40.49)$$

e si calcolino le reazioni, imponendo l'equilibrio alla traslazione ed alla rotazione. Si ha:

$$\begin{aligned} R_B^* &= -\frac{\mathcal{M}}{EI_{11}}L \\ \mathcal{M}_{rB}^* &= -\frac{\mathcal{M}L}{EI_{11}}\frac{L}{2} \end{aligned} \quad (40.50)$$

Infine, le rotazioni e gli spostamenti sono forniti da:

$$\begin{aligned} \phi_B &= -R_B^* = \frac{\mathcal{M}L}{EI_{11}} \\ u_{2B} &= M_B^* = -\frac{\mathcal{M}L^2}{2EI_{11}} \end{aligned} \quad (40.51)$$

Capitolo 41

Le equazioni di congruenza

Per definizione, in una trave iperstatica non è possibile calcolare le reazioni vincolari con sole equazioni di equilibrio. In questo Capitolo si illustra un metodo per affrontare lo studio di travi iperstatiche, affiancando alle equazioni della statica opportune equazioni di congruenza.

Si consideri una trave rettilinea costituita da t tratti, intendendo per tratto un segmento di trave non interrotto da vincoli interni, e per cui possano scriversi $2t$ equazioni di equilibrio. Se il numero s di reazioni incognite dei vincoli agenti sulla trave è maggiore di $2t$, ne segue che esse non possono essere calcolate con sole considerazioni di statica.

Sia allora $i = s - 2t > 0$ il grado di iperstaticità della trave. Il metodo proposto evolve secondo i seguenti passi:

1. rimozione di un numero i di dispositivi di vincolo, sostituendo ad essi le relative incognite reattive X_1, X_2, \dots, X_i . E' possibile anche operare opportune sconnessioni interne, aggiungendo le relative caratteristiche incognite. Si identifica in questo modo una struttura isostatica, caricata dai carichi originari, e dalle incognite reattive (dette *incognite iperstatiche*), che in questa fase vanno riguardate come forze applicate di valore incognito.
2. per la struttura così ottenuta si scrivono i equazioni di congruenza, con le quali si ripristina la prestazione cinematica del vincolo soppresso. La struttura isostatica, caricata dalle forze e dalle incognite iperstatiche, e soggetta alle condizioni di congruenza, prende il nome di *sistema isostatico equivalente* (S.I.E.)
3. utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, le i equazioni di congruenza divengono un sistema di i equazioni lineari, nelle i incognite iperstatiche. Se la scelta delle incognite è stata corretta, tale sistema avrà determinante non nullo, e porterà alla determinazione delle i incognite iperstatiche
4. la struttura iperstatica di partenza può ora essere sostituita dalla struttura isostatica, caricata dalle forze originarie, e dalle iperstatiche, ora

note. Su di essa possono calcolarsi le restanti reazioni, i diagrammi delle caratteristiche, etc..

Si nota fin da ora che la scelta delle incognite iperstatiche non è univoca, e può essere più o meno conveniente, da due punti di vista:

1. è spesso utile ricondurre lo schema isostatico ad uno schema noto, su cui operare risulta più familiare. E' tipico, quando possibile, ricondursi ad uno schema a mensola, oppure ad una trave semplicemente appoggiata
2. per strutture ad alto numero di iperstaticità, una buona scelta di incognite iperstatiche conduce ad un sistema di equazioni con matrice dei coefficienti a banda ristretta, con conseguente facilità di soluzione. E' quanto si illustrerà sull'esempio della trave continua su molti appoggi

41.1 Un esempio

Si consideri la trave incastrata ai due estremi di Figura 41.1a, soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensità p_0 . Essa è ovviamente due volte iperstatica, e quindi non è possibile calcolare direttamente le reazioni vincolari, in quanto le due equazioni della statica:

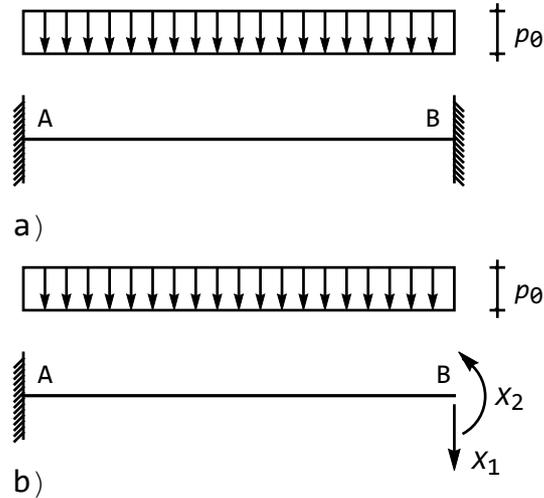


Figura 41.1: Una struttura doppiamente iperstatica ed una possibile scelta delle incognite iperstatiche

$$\begin{aligned} R_A + R_B + p_0 L &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + \mathcal{M}_{rB} + \frac{p_0 L^2}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (41.1)$$

non permettono il calcolo delle quattro incognite. Tuttavia per la trave in esame è possibile scrivere quattro equazioni di congruenza, che esprimono l'annullarsi di spostamenti e rotazioni in corrispondenza degli incastri:

$$\begin{aligned} u_{2A} &= 0 \\ \phi_A &= 0 \\ u_{2B} &= 0 \\ \phi_B &= 0 \end{aligned} \quad (41.2)$$

Utilizzando due di queste quattro equazioni risulta agevole calcolare due reazioni incognite, e ricondurre lo studio della trave iperstatica di partenza allo studio di una trave isostatica equivalente. Si scelgano due reazioni incognite, ad esempio le reazioni dell'incastro di destra, e si ponga:

$$\begin{aligned} R_B &= X_1 \\ \mathcal{M}_{rB} &= X_2 \end{aligned} \quad (41.3)$$

Si ottiene in tal modo la *struttura isostatica equivalente* di Figura 41.1b, ossia la mensola soggetta al carico p_0 , alla forza incognita X_1 ed alla coppia incognita X_2 . Il valore di queste due incognite si calcola imponendo il rispetto delle due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_{2B} &= 0 \\ \phi_B &= 0 \end{aligned} \quad (41.4)$$

Ed infatti, per il principio di sovrapposizione degli effetti, potrà scriversi, come illustrato in Figura 41.2:

$$\begin{aligned} u_{2B} &= u_{2B}^0 + u_{2B}^1 X_1 + u_{2B}^2 X_2 = 0 \\ \phi_B &= \phi_B^0 + \phi_B^1 X_1 + \phi_B^2 X_2 = 0 \end{aligned} \quad (41.5)$$

dove u_{2B}^0 e ϕ_B^0 sono l'abbassamento e la rotazione all'estremo libero di una mensola soggetta al carico p_0 , u_{2B}^1 e ϕ_B^1 sono l'abbassamento e la rotazione all'estremo libero di una mensola soggetta ad una forza di intensità unitaria nell'estremo libero, e u_{2B}^2 e ϕ_B^2 sono l'abbassamento e la rotazione all'estremo libero di una mensola soggetta ad una coppia di intensità unitaria. E' questo un sistema di due equazioni nelle due incognite X_1 ed X_2 , i cui coefficienti sono ormai noti, o possono calcolarsi applicando i corollari di Mohr. Si ha:

$$\begin{aligned} X_1 \frac{L^3}{3EI} - X_2 \frac{L^2}{2EI} + \frac{p_0 L^4}{8EI} &= 0 \\ -X_1 \frac{L^2}{2EI} + X_2 \frac{L}{EI} - \frac{p_0 L^3}{6EI} &= 0 \end{aligned} \quad (41.6)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} X_1 = R_B &= -\frac{p_0 L}{2} \\ X_2 = \mathcal{M}_{rB} &= -\frac{p_0 L^2}{12} \end{aligned} \quad (41.7)$$

Ciò fatto, le ulteriori reazioni possono calcolarsi a partire dalle equazioni della statica (41.1)

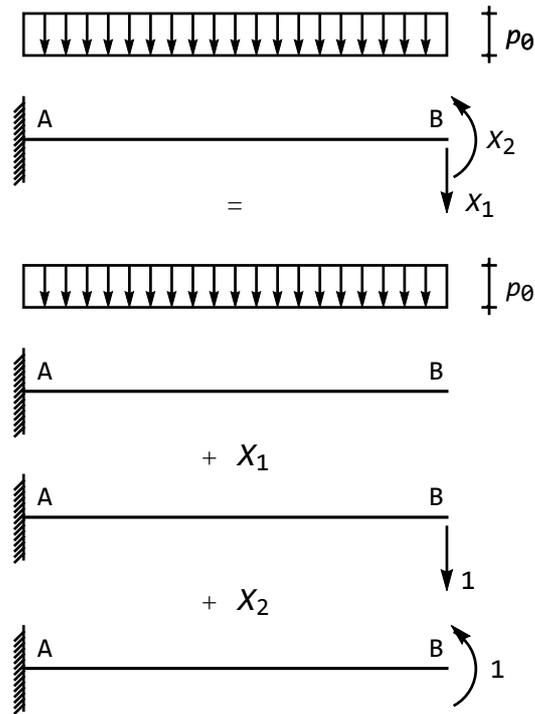


Figura 41.2: Il principio di sovrapposizione degli effetti applicato al calcolo delle iperstatiche

Esercizio 1. - Si risolva ora lo stesso schema utilizzando come incognite iperstatiche le due coppie reattive \mathcal{M}_{rA} ed \mathcal{M}_{rB} , e quindi operando su una struttura isostatica equivalente di trave appoggiata agli estremi

41.2 Le equazioni dei tre momenti

Una delle strutture di più frequente impiego nell'ambito dell'ingegneria civile è la *trave continua* su n appoggi, dallo studio dei solai ai più complessi schemi di ponti a travata su molti piloni. Tale schema può a buon diritto essere considerato il prototipo originale, e fu studiato già dal 1855 da Paul Èmile Clapeyron, in occasione della costruzione del ponte ferroviario di Asnières, sulla Senna.

Si tratta di una struttura $n - 2$ volte iperstatica, e poichè n può assumere anche valori elevati, risulta opportuno scegliere le incognite iperstatiche in modo da poter semplificare al massimo le $n - 2$ equazioni di congruenza. E' evidente infatti che per incognite iperstatiche potrebbero legittimamente scegliersi le $n - 2$



Figura 41.3: Paul Émile Clapeyron

reazioni degli appoggi intermedi, ed in tal modo la trave isostatica equivalente sarebbe la trave appoggiata agli estremi, soggetta al carico q ed a $n - 2$ forze verticali incognite. E' però altrettanto evidente che lo studio di tale sistema non è particolarmente agevole. Se invece si introducono $n - 2$ cerniere intermedie, in corrispondenza degli $n - 2$ appoggi interni, si riduce la trave continua ad una serie di travi appoggiate, l'una indipendente dall'altra, e su di esse le equazioni di congruenza assumono una forma ripetitiva.

Si consideri allora una generica porzione di trave continua, costituita dalle due campate immediatamente precedente e seguente il generico appoggio i -esimo, come illustrato in Figura 41.4.

L' i -esima equazione di congruenza è intesa a ripristinare la continuità delle rotazioni in corrispondenza dell' i -esimo appoggio, e può scriversi simbolicamente:

$$\phi_i^S = \phi_i^D \quad (41.8)$$

esprimendo con essa che la rotazione sull'appoggio i -esimo, considerato appartenente alla campata di sinistra, deve essere uguale alla rotazione dello stesso appoggio considerato appartenente alla campata di destra. Sarà quindi,

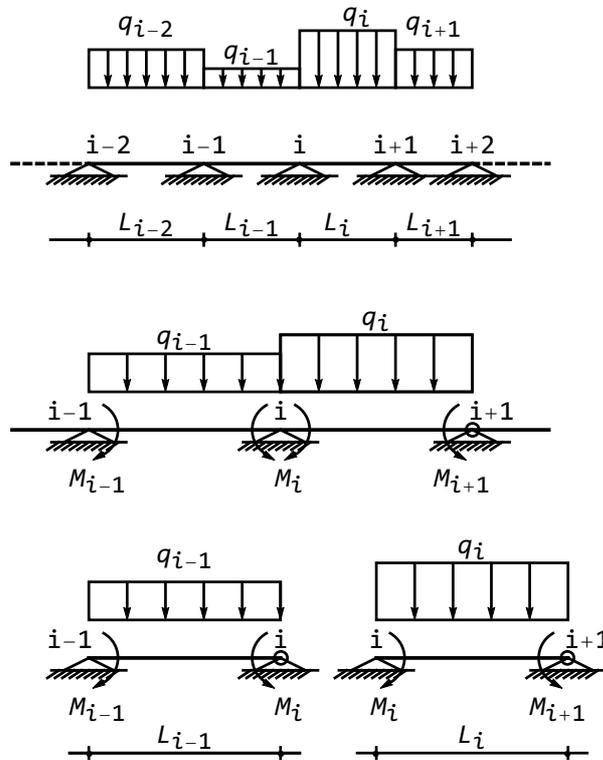


Figura 41.4: Lo schema per la scrittura dell'equazione dei tre momenti

esplicitamente:

$$q_{i-1} \frac{L_{i-1}^3}{24EI} + M_{i-1} \frac{L_{i-1}}{6EI} + M_i \frac{L_{i-1}}{3EI} = -q_i \frac{L_i^3}{24EI} - M_i \frac{L_i}{3EI} - M_{i+1} \frac{L_{i+1}}{6EI} \quad (41.9)$$

ossia:

$$M_{i-1} \frac{L_{i-1}}{6} + \frac{M_i}{3} (L_{i-1} + L_i) + M_{i+1} \frac{L_{i+1}}{6} = -q_{i-1} \frac{L_{i-1}^3}{24} - q_i \frac{L_i^3}{24} \quad (41.10)$$

ed ancora:

$$M_{i-1} L_{i-1} + 2M_i (L_{i-1} + L_i) + M_{i+1} L_{i+1} = -q_{i-1} \frac{L_{i-1}^3}{4} - q_i \frac{L_i^3}{4} \quad (41.11)$$

E' facile osservare che con questa scelta delle incognite iperstatiche la singola equazione di congruenza non contiene più di tre incognite, e quindi la matrice dei coefficienti assume un comodo aspetto tri-diagonale.

Le equazioni appena dedotte sono note come *equazioni dei tre momenti*, o *equazioni di Clapeyron* (1857).

La reazione R_i sul generico appoggio è fornita dalla somma della reazione calcolata per la campata $i - 1$ e della reazione calcolata per la trave i . Si ha allora, per la campata $i - 1$:

$$-R_i L_{i-1} - M_{i-1} + M_i - q_{i-1} \frac{L_{i-1}^2}{2} = 0 \quad (41.12)$$

e per la campata successiva:

$$R_i L_i - M_i + M_{i+1} + q_i \frac{L_i^2}{2} = 0 \quad (41.13)$$

e quindi la reazione complessiva sarà:

$$R_i = -\frac{M_{i-1}}{L_{i-1}} + M_i \left(\frac{1}{L_{i-1}} + \frac{1}{L_i} \right) - \frac{M_{i+1}}{L_i} - q_{i-1} \frac{L_{i-1}}{2} - q_i \frac{L_i}{2} \quad (41.14)$$

Capitolo 42

Il principio dei lavori virtuali nell'analisi delle travi

Si specializza il principio dei lavori virtuali al caso dei sistemi monodimensionali piani, utilizzando i risultati delle teorie tecniche di Eulero–Bernoulli e di Timoshenko. Si ipotizza inizialmente che la struttura sia a vincoli perfetti, e soggetta solo a carichi distribuiti, forze e coppie concentrate, per poi introdurre distorsioni distribuite, cedimenti vincolari anelastici e vincoli elasticamente cedevoli. Il principio così ottenuto viene utilizzato per il calcolo di spostamenti in strutture isostatiche, per il calcolo di incognite iperstatiche, e per il calcolo di spostamenti in strutture iperstatiche. L'intero capitolo deve rifarsi ad Heinrich Müller–Breslau¹

42.1 Il principio dei lavori virtuali

Si consideri una struttura S , costituita da un assemblaggio di travi, per ciascuna delle quali si possano ritenere valide le ipotesi a base delle suddette teorie, e si immagini che tale struttura sia soggetta a carichi di varia natura: è ad esempio possibile immaginare che esistano carichi distribuiti $q'(s)$ con legge generica, coppie distribuite $m'(s)$ con legge generica, un insieme di N_1 forze concentrate F'_i , ed un insieme di N_2 coppie concentrate \mathcal{M}'_i .

Infine, in un primo momento si ipotizza che la struttura è vincolata al suolo con vincoli perfetti.

Si ricorda che l'insieme di queste forze e reazioni deve essere *staticamente ammissibile*, ossia in equilibrio con un insieme di tensioni σ'_{ij} , che a loro volta generano un insieme di momenti M' , sforzi normali N' e tagli T' .

¹Si veda in particolare *La Scienza delle Costruzioni*, Hoepli 1927, in quattro volumi, di cui il secondo ed il terzo interamente dedicati ai sistemi staticamente indeterminati



Figura 42.1: Heinrich Müller-Breslau

Si consideri poi un insieme di spostamenti u_i , *geometricamente ammissibili*, agenti sulla stessa struttura S , e siano M , N e T le c.s.i. corrispondenti a questo stato di spostamenti.

Il lavoro virtuale *esterno* di questo insieme di forze staticamente ammissibile per questo insieme di spostamenti geometricamente ammissibile si scrive:

$$L_e = \int_s q'(s)u_q(s) ds + \int_s m'(s)\phi_m(s) ds + \sum_{i=1}^{N_1} F'_i u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \phi_{mi} \quad (42.1)$$

dove si sono introdotte le seguenti notazioni: $u_q(s)$ rappresenta la componente di spostamento del punto dell'asse in corrispondenza del carico $q'(s)$, misurata nella direzione del carico, $\phi_m(s)$ è la rotazione della sezione relativa ai tratti in cui sono applicate le coppie distribuite $m'(s)$, u_{Fi} è la componente dello spostamento in corrispondenza del punto di applicazione della i - *ma* forza, misurata nella direzione di detta forza, ϕ_{mi} è la rotazione della sezione in corrispondenza della i - *ma* coppia concentrata. Inoltre, si è genericamente indicato con s l'estremo di integrazione, che di volta in volta andrà specificato, suddividendo l'integrale in più aliquote.

La (42.1) può essere considerata la traduzione — in teoria delle travi — del termine:

$$\int_{\partial B_1} p_i u_i ds \quad (42.2)$$

ottenuto nel Capitolo 21 per i solidi tridimensionali. Le forze di massa sono invece assenti.

Il lavoro virtuale interno si scriverà come:

$$L_i = \int_B \left(\sigma'_{33} e_{33} + 2\sigma'_{23} e_{23} \right) dV \quad (42.3)$$

Per esprimere L_i in termini di c.s.i., si possono utilizzare le relazioni che legano le tensioni normali e tangenziali allo sforzo normale, al momento flettente ed al taglio. Per lo stato tensionale σ'_{ij} si avrà:

$$\begin{aligned} \sigma'_{33} &= \frac{N'}{A} + \frac{M'}{I} x_2 \\ \sigma'_{23} &= \frac{T'}{A_s} \end{aligned} \quad (42.4)$$

dove $A_s = \kappa A$ è l'area efficace a taglio, mentre la distribuzione di deformazioni geometricamente ammissibili potrà scriversi come:

$$\begin{aligned} e_{33} &= \frac{N}{EA} + \frac{M}{EI} x_2 \\ 2e_{23} &= \frac{T}{GA_s} \end{aligned} \quad (42.5)$$

dove le due distribuzioni di c.s.i. (M', N', T') ed (M, N, T) non sono in alcun modo collegate tra loro. Utilizzando le (42.4) e le (42.5), il lavoro virtuale interno diviene:

$$L_i = \int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds \quad (42.6)$$

ed infine, il principio dei lavori virtuali si traduce nell'uguaglianza:

$$\begin{aligned} \int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds = \\ \int_s q'(s) u_q(s) ds + \int_s m'(s) \phi_m(s) ds + \sum_{i=1}^{N_1} F'_i u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \phi_{mi} \end{aligned} \quad (42.7)$$

valida per qualunque distribuzione (M', N', T') di caratteristiche della sollecitazione interna, che sia in equilibrio con le forze applicate, e per qualsiasi distribuzione (M, N, T) che sia derivante da spostamenti geometricamente ammissibili

Nota - I tre termini che compaiono a primo membro della (42.7) rappresentano i contributi assiale, flessionale e tagliante del lavoro interno, rispettivamente. Spesso, è possibile trascurare un termine rispetto agli altri: ad esempio, nelle travi snelle si potrà certamente evitare di calcolare l'aliquota tagliante.

Dal principio dei lavori virtuali si possono trarre, secondo la falsariga di quanto fatto per il solido tridimensionale, il principio degli spostamenti virtuali ed il principio delle forze virtuali.

Nel primo caso si sceglieranno un primo sistema di forze reali e di caratteristiche effettive (M', N', T'), ed un secondo sistema di spostamenti virtuali ($\delta u, \delta \phi$) che si annulli in corrispondenza dei vincoli, e che generi le c.s.i. ($\delta M, \delta N, \delta T$). Si ha quindi il principio degli spostamenti virtuali:

$$\int_s N' \frac{\delta N}{EA} ds + \int_s M' \frac{\delta M}{EI} ds + \int_s T' \frac{\delta T}{GA_s} ds = \int_s q'(s) \delta u_q(s) ds + \int_s m'(s) \delta \phi_m(s) ds + \sum_{i=1}^{N_1} F'_i \delta u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \delta \phi_{mi} \quad (42.8)$$

Il principio delle forze virtuali, invece, si scrive partendo dalla distribuzione effettiva di spostamenti (u, ϕ), che generi le c.s.i. (M, N, T) e da una qualsiasi distribuzione di forze (e reazioni) virtuali che sia in equilibrio e che generi le c.s.i. ($\delta N', \delta M', \delta T'$):

$$\int_s \delta N' \frac{N}{EA} ds + \int_s \delta M' \frac{M}{EI} ds + \int_s \delta T' \frac{T}{GA_s} ds = 0 \quad (42.9)$$

42.1.1 La presenza delle distorsioni distribuite

Se il campo di spostamenti geometricamente ammissibile comprende anche distribuzioni $\lambda(s)$, $\mu(s)$ e $\theta(s)$ di distorsioni, il p.l.v. si generalizza, tenendo conto che le caratteristiche staticamente ammissibili compiono lavoro per tali distorsioni, ma che tale lavoro è, per definizione, negativo. Quindi potrà scriversi:

$$\int_s N' \left(\frac{N}{EA} - \lambda \right) ds + \int_s M' \left(\frac{M}{EI} - \mu \right) ds + \int_s T' \left(\frac{T}{GA_s} - \theta \right) ds = \int_s q'(s) u_q(s) ds + \int_s m'(s) \phi_m(s) ds + \sum_{i=1}^{N_1} F'_i u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \phi_{mi} \quad (42.10)$$

42.1.2 La presenza di vincoli cedevoli

Si consideri ora il caso in cui la struttura presenta *cedimenti anelastici* nei vincoli. Se si indicano con η_i e $\theta_{r,i}$ il cedimento assiale e rotazionale del generico vincolo $i - mo$, bisognerà introdurre il lavoro compiute dalle reazioni, calcolate sul sistema staticamente ammissibile, per tali cedimenti. Sarà quindi, in assenza di distorsioni:

$$\int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds = \int_s q'(s) u_q(s) ds + \int_s m'(s) \phi_m(s) ds + \sum_{i=1}^{N_1} F'_i u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \phi_{mi} + \sum_{i=1}^{N_3} R'_i \eta_i + \sum_{i=1}^{N_4} \mathcal{M}'_{r,i} \theta_{r,i} \quad (42.11)$$

avendo ipotizzato che vi siano N_3 cedimenti assiali, ed N_4 cedimenti rotazionali, ed avendo indicato con R'_i le corrispondenti reazioni vincolari, e con \mathcal{M}'_{ri} le corrispondenti coppie reattive

Infine, se la struttura presenta vincoli elasticamente cedevoli nei confronti di traslazione e rotazione, bisognerà introdurre anche il lavoro delle reazioni per il corrispondente spostamento. In assenza di distorsioni si avrà allora:

$$\begin{aligned} & \int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds = \\ & \int_s q'(s)u_q(s) ds + \int_s m'(s)\phi_m(s) ds + \\ & \sum_{i=1}^{N_1} F'_i u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \phi_{mi} + \sum_{i=1}^{N_3} R'_i (\eta_i - c_{ri} R_i) + \sum_{i=1}^{N_4} \mathcal{M}'_{ri} (\theta_{ri} - c_{\phi i} \mathcal{M}_{ri}) \end{aligned} \quad (42.12)$$

dove si sono indicate con c_{ri} e $c_{\phi i}$ le cedibilità assiali e rotazionali del generico vincolo.

Gli ultimi due termini di questa relazione possono essere considerati la traduzione — in teoria delle travi — del termine:

$$\int_{\partial B_2} \sigma_{ij} n_j f_i ds \quad (42.13)$$

ottenuto nel Capitolo 21 per i solidi tridimensionali.

42.2 Il principio dei lavori virtuali per il calcolo degli spostamenti su strutture isostatiche

Si consideri una struttura *isostatica* S , e si voglia calcolare la componente di spostamento di un suo punto P secondo la retta orientata r . A tal fine si può utilizzare il p.l.v. nel seguente modo:

1. si studia la struttura S soggetta ad una forza *fittizia*, e di valore unitario, agente in P in direzione della retta r , e si calcolano le reazioni vincolari (R'_i, \mathcal{M}'_{ri}) e le caratteristiche della sollecitazione interna (M', N', T'). Si assume questa distribuzione di c.s.i. come insieme staticamente ammissibile (sistema 1)
2. si studia la struttura S soggetta alle forze *effettive*, e si calcolano le reazioni vincolari (R_i, \mathcal{M}_{ri}) e le caratteristiche della sollecitazione interna (M, N, T). I corrispondenti campi di spostamenti $u(s)$ e rotazioni $\phi(s)$ sono assunti quali spostamenti geometricamente ammissibili. (sistema 2)
3. si scrive il p.l.v. assumendo come sistema staticamente ammissibile le c.s.i. (M', N', T'), insieme alle reazioni vincolari (R'_i, \mathcal{M}'_{ri}), sicuramente in equilibrio in presenza della forza fittizia, e come sistema di spostamenti

geometricamente ammissibili gli spostamenti effettivi, che generano le c.s.i. (M, N, T) . Si ha:

$$\int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds = 1 \times u_r + \sum_{i=1}^{N_3} R'_i \eta_i + \sum_{i=1}^{N_4} \mathcal{M}'_{ri} \theta_{ri} \quad (42.14)$$

dove u_r è il richiesto spostamento.

Se occorre calcolare la rotazione di una sezione, la struttura andrà fittiziamente caricata da una coppia concentrata di valore unitario, in corrispondenza della sezione in esame

In presenza di cedimenti elastici, caratterizzati da una relazione lineare tra spostamenti e reazioni:

$$\begin{aligned} s_{Ri} &= -c_{ri} R_i \\ \phi_{ri} &= -c_{\phi i} \mathcal{M}_{ri} \end{aligned} \quad (42.15)$$

il principio dei lavori virtuali si scriverà :

$$\int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds = 1u_r + \sum_{i=1}^{N_3} R'_i (\eta_i - c_{ri} R_i) + \sum_{i=1}^{N_4} \mathcal{M}'_{ri} (\theta_{ri} - c_{\phi i} \mathcal{M}_{ri}) \quad (42.16)$$

in quanto le reazioni del primo sistema $(R'_i, \mathcal{M}'_{ri})$ compiranno lavoro per gli spostamenti (42.15) del sistema 2.

42.2.1 Un esempio per il calcolo di uno spostamento su struttura isostatica

Si consideri la trave di Figura 42.2, e si voglia calcolare la rotazione della sezione in corrispondenza dell'appoggio.

Per utilizzare il principio dei lavori virtuali, si sceglie come sistema staticamente ammissibile (sistema 1) la trave caricata da una coppia fittizia in corrispondenza dell'appoggio in D, come riportato in Figura 42.3:

Si sceglie come sistema geometricamente ammissibile (sistema 2) il sistema reale, caricato dalla forza F, ritrovando quindi lo schema di Figura 42.2.

Il principio dei lavori virtuali fornisce, in ipotesi di trave omogenea a sezione costante, e limitandosi al solo contributo flessionale:

$$\frac{1}{EI} \int_0^{3L} M' M dx_3 = 1\phi_D \quad (42.17)$$

Occorre quindi calcolare il momento M' sullo schema 1, ed il momento M sullo schema 2.

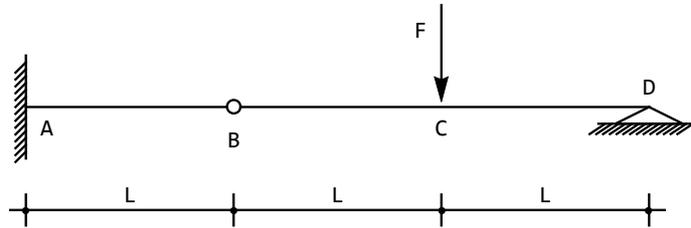


Figura 42.2: Un esempio per il calcolo di uno spostamento su una struttura isostatica

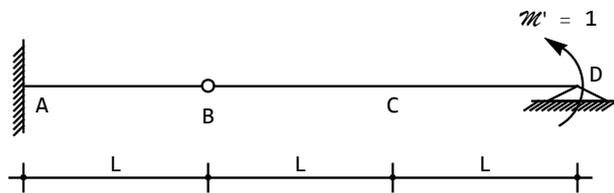


Figura 42.3: Il sistema 1, staticamente ammissibile, su cui calcolare il momento M'

Sullo schema fittizio di forze virtuali, caricato da una coppia, il momento si presenta come un'unica retta, con valore unitario a destra, e con un punto di nullo sulla cerniera, presentandosi come in Figura 42.4.

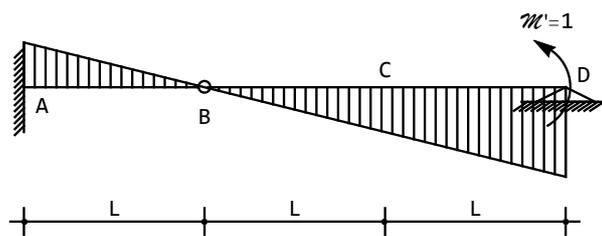
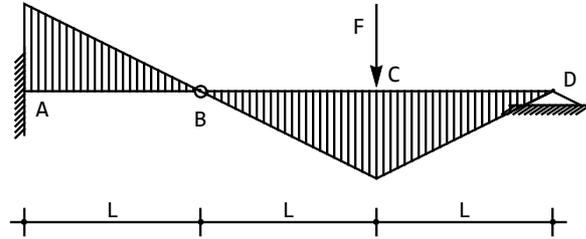


Figura 42.4: Il momento M' sul sistema 1

Sullo schema reale di spostamenti, invece, il diagramma varia linearmente da A a C, per poi proseguire con un'altra inclinazione, annullandosi in D, come illustrato in Figura 42.5.

Figura 42.5: Il momento M , calcolato sul sistema 2

Analicamente, si ottiene:

$$M'(x_3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{x_3}{L} - \frac{1}{2} & x_3 \in [0, 2L]; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x_3}{L} & x_3 \in [0, L]. \end{cases} \quad (42.18)$$

ed analogamente, sul sistema di spostamenti:

$$M(x_3) = \begin{cases} \frac{F}{2} x_3 - \frac{F}{2} L & x_3 \in [0, 2L]; \\ \frac{F}{2} L - \frac{F}{2} x_3 & x_3 \in [0, L]. \end{cases} \quad (42.19)$$

Si noti che il primo diagramma non doveva essere necessariamente suddiviso in due aliquote, ma che si è preferito scrivere le due diverse equazioni da A a C , e da C a D , in quanto il calcolo dell'integrale deve comunque essere separato in due aliquote:

$$\begin{aligned} \phi_D &= \frac{1}{EI} \int_0^{2L} M' M \, dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^L M' M \, dx_3 = \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{2L} \left(\frac{1}{2} \frac{x_3}{L} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{F}{2} x_3 - \frac{F}{2} L \right) \, dx_3 + \right. \\ &\quad \left. \int_0^L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x_3}{L} \right) \left(\frac{F}{2} L - \frac{F}{2} x_3 \right) \, dx_3 \right] = \frac{FL^2}{3EI} \end{aligned} \quad (42.20)$$

Esercizio - Dedurre i diagrammi dei momenti delle Figure 42.4 e 42.5, assieme alla loro distribuzione analitica

Esercizio - Confermare il risultato (42.20) applicando il metodo della linea elastica, oppure il metodo dei corollari di Mohr, oppure ancora il metodo di Saviotti

42.3 Il p.l.v. per la scrittura delle equazioni di congruenza su strutture iperstatiche

Una seconda interessante utilizzazione del principio dei lavori virtuali si ottiene nell'applicazione del metodo delle forze, con la relativa scrittura delle equazioni di congruenza. Sia S una struttura i volte iperstatica, si identifichi una opportuna struttura isostatica equivalente (S.I.E.), in modo da poter scrivere simbolicamente:

$$S = S^{(0)} + \sum_{j=1}^i X_j S^{(j)} \quad (42.21)$$

dove $S^{(0)}$ è la struttura isostatica prescelta, soggetta ai carichi applicati, ed $S^{(j)}$ è la struttura isostatica soggetta ad un carico unitario in corrispondenza della j -ma incognita iperstatica X_j .

Si assuma ora come sistema staticamente ammissibile la struttura $S^{(j)}$, e come sistema geometricamente ammissibile la struttura reale S . Se si assume, per semplicità, che i vincoli siano perfetti e che non siano presenti distorsioni, il p.l.v. si scrive:

$$\int_s M^{(j)} \frac{M}{EI} ds = 0 \quad j = 1, \dots, i \quad (42.22)$$

tenendo conto del solo effetto flessionale. Per il principio di sovrapposizione degli effetti sarà poi:

$$M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + \dots + X_i M^{(i)} \quad (42.23)$$

e quindi la (42.22) diviene :

$$\int_S M^{(j)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + X_1 \int_S M^{(j)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + \dots + X_i \int_S M^{(j)} \frac{M^{(i)}}{EI} ds = 0 \quad j = 1, \dots, i \quad (42.24)$$

Sono queste le i equazioni di congruenza, che permettono il calcolo delle i incognite iperstatiche X_j .

42.3.1 Un esempio

Si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 42.6, per cui $i = 2$.

Si sceglie come struttura isostatica equivalente la trave a mensola incastrata a sinistra e libera a destra, soggetta al carico q , alla forza incognita X_1 a destra, ed alla coppia incognita X_2 a destra. Si può scrivere, formalmente, $S = S^{(0)} + X_1 S^{(1)} + X_2 S^{(2)}$, nel senso che — utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti — tutto ciò che deve essere calcolato sul sistema isostatico equivalente può essere calcolato sui tre schemi $S^{(0)}$, $S^{(1)}$ ed $S^{(2)}$. Ad esempio, il diagramma del momento M sullo schema di Figura 42.6 può calcolarsi come $M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + X_2 M^{(2)}$.

I valori delle due incognite iperstatiche devono essere tali da ripristinare i vincoli in B , e quindi proibire abbassamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned} u_{2B} &= 0 \\ \phi_B &= 0 \end{aligned} \quad (42.25)$$

Si adotti ora come sistema staticamente ammissibile il sistema $S^{(1)}$ di Figura 42.8, e come sistema geometricamente ammissibile il sistema S , o meglio, il suo sistema isostatico equivalente. Il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_0^L M^{(1)} M dx_3 = 0 \quad (42.26)$$

Adottando invece come sistema staticamente ammissibile il sistema $S^{(2)}$ di Figura 42.9, e come sistema geometricamente ammissibile il sistema S , o meglio, il suo sistema isostatico equivalente, il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_0^L M^{(2)} M dx_3 = 0 \quad (42.27)$$

Ora, per il principio di sovrapposizione degli effetti, si potrà scrivere $M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + X_2 M^{(2)}$, e quindi si ottengono due equazioni nelle due incognite X_1 ed X_2 :

$$\begin{aligned} \int_0^L M^{(1)} M^{(0)} dx_3 + X_1 \int_0^L M^{(1)} M^{(1)} dx_3 + X_2 \int_0^L M^{(1)} M^{(2)} dx_3 &= 0 \\ \int_0^L M^{(2)} M^{(0)} dx_3 + X_1 \int_0^L M^{(2)} M^{(1)} dx_3 + X_2 \int_0^L M^{(2)} M^{(2)} dx_3 &= 0 \end{aligned} \quad (42.28)$$

Il momento $M^{(0)}$, da calcolare sullo schema di Figura 42.7, è distribuito con legge parabolica, ed analiticamente può scriversi:

$$M^{(0)}(x_3) = -\frac{q}{2}x_3^2 + qLx_3 - q\frac{L^2}{2} \quad (42.29)$$

Il momento $M^{(1)}$ si deve calcolare sullo schema di Figura 42.8, ed è esprimibile come legge lineare:

$$M^{(1)}(x_3) = x_3 - L \quad (42.30)$$

Infine, $M^{(2)}$ è da calcolare sullo schema di Figura 42.9, ed è pari ad 1:

$$M^{(2)}(x_3) = 1 \quad (42.31)$$

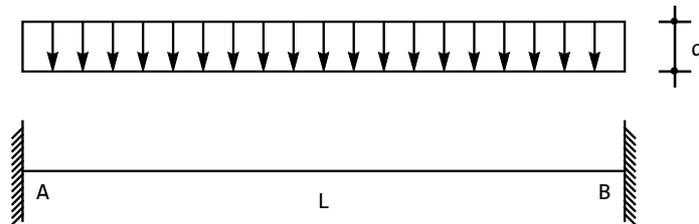


Figura 42.6: Una struttura S doppiamente iperstatica

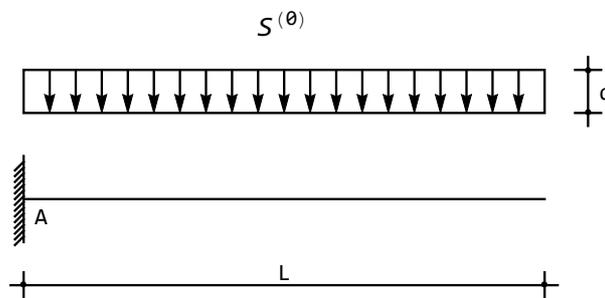


Figura 42.7: Il sistema $S^{(0)}$, isostatico e soggetto al carico uniformemente distribuito

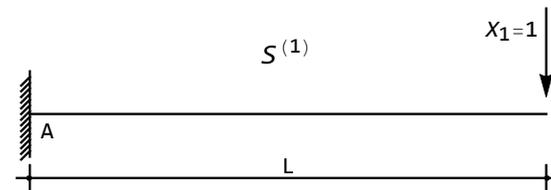


Figura 42.8: Il sistema $S^{(1)}$, isostatico e soggetto all'incognita iperstatica X_1 , posta unitaria

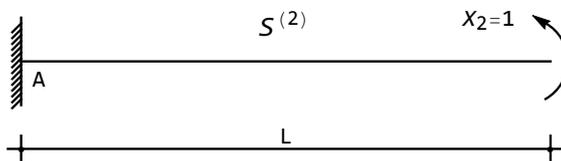


Figura 42.9: Il sistema $S^{(2)}$, isostatico e soggetto all'incognita iperstatica X_2 , posta unitaria

Le (42.28) si scrivono allora :

$$\begin{aligned} \int_0^L (x_3 - L) \left(\frac{-q}{2} x_3^2 + qLx_3 - q\frac{L^2}{2} \right) dx_3 + X_1 \int_0^L (x_3 - L)^2 dx_3 + \\ X_2 \int_0^L (x_3 - L) dx_3 = 0 \\ \int_0^L \left(\frac{-q}{2} x_3^2 + qLx_3 - q\frac{L^2}{2} \right) dx_3 + X_1 \int_0^L (x_3 - L) dx_3 + \\ X_2 \int_0^L dx_3 = 0 \end{aligned} \quad (42.32)$$

ossia, calcolando gli integrali:

$$\frac{L^3}{3} X_1 - \frac{L^2 X_2}{2} X_2 = -\frac{qL^4}{8} \quad (42.33)$$

$$-\frac{L^2 X_1}{2} X_1 + LX_2 = \frac{qL^3}{6} \quad (42.34)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} X_1 &= -q\frac{L}{2} \\ X_2 &= -q\frac{L^2}{12} \end{aligned} \quad (42.35)$$

Capitolo 43

Il teorema di reciprocità e le linee di influenza

Influence line method presents the higher level of analysis of a structure, than the fixed load approach. Good knowledge of influence lines approaches an immeasurable increase in understanding of behaviour of structure. Analyst, who combines both approaches for analysis of a structure in engineering practice, is capable to perform a complex analysis of its behaviour

I.A. Karnovsky, O. Lebed - Advanced Methods of Structural Analysis, Springer 2010

In questo Capitolo si dimostra un principio generale di reciprocità, da cui poter far discendere facilmente i classici teoremi di Maxwell, Betti, Colonnetti e Volterra. Ciò è necessaria premessa allo studio delle linee di influenza, cui viene dedicato il resto del Capitolo

43.1 Il principio generale di reciprocità

Si dimostrerà ora il seguente:

Teorema 18. *Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticità. La trave sia soggetta ad un primo sistema di n_1 forze $F^{(1)}$, ed m_1 tra cedimenti anelastici $\Delta^{(1)}$ e distorsioni $D^{(1)}$, che causa gli spostamenti $s^{(1)}$ e le caratteristiche della sollecitazione interna $C^{(1)}$, e ad un secondo sistema di n_2 forze $F^{(2)}$, ed m_2 tra cedimenti anelastici $\Delta^{(2)}$ e distorsioni $D^{(2)}$, che causa gli spostamenti $s^{(2)}$ e le caratteristiche della sollecitazione interna $C^{(2)}$.*

Il lavoro mutuo del primo sistema di forze, cedimenti e distorsioni, dovuto agli spostamenti $s^{(2)}$ ed alle caratteristiche $C^{(2)}$, è uguale al lavoro mutuo del secondo sistema di forze, cedimenti e distorsioni, dovuto agli spostamenti $s^{(1)}$ ed alle caratteristiche $C^{(1)}$.

Dimostrazione. La dimostrazione consiste nella doppia scrittura del principio dei lavori virtuali, utilizzando una volta il primo sistema di forze ed il secondo sistema di spostamenti, e la seconda volta impiegando il secondo sistema di forze ed il primo sistema di spostamenti.

Nel primo caso il lavoro virtuale interno si scrive:

$$L_i = \int_s N^{(1)} \frac{N^{(2)}}{EA} ds + \int_s M^{(1)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds + \int_s T^{(1)} \frac{T^{(2)}}{GA_s} ds - \int_s N^{(1)} \lambda^{(2)} ds - \int_s M^{(1)} \mu^{(2)} ds - \int_s T^{(1)} \theta^{(2)} ds \quad (43.1)$$

mentre il lavoro esterno sarà fornito da:

$$L_e = \sum_{i=1}^{n_1} F_i^{(1)} s_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{m_1} R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} - \sum_{i=1}^s c_i R_i^{(1)} R_i^{(2)} \quad (43.2)$$

e quindi il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} F_i^{(1)} s_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{m_1} R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} - \sum_{i=1}^s c_i R_i^{(1)} R_i^{(2)} = \\ \int_s N^{(1)} \frac{N^{(2)}}{EA} ds + \int_s M^{(1)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds + \int_s T^{(1)} \frac{T^{(2)}}{GA_s} ds - \\ \int_s N^{(1)} \lambda^{(2)} ds - \int_s M^{(1)} \mu^{(2)} ds - \int_s T^{(1)} \theta^{(2)} ds \end{aligned} \quad (43.3)$$

Si noti che si sono anche introdotti s vincoli elasticamente cedevoli, mentre i cedimenti e le distorsioni concentrate sono stati — per semplicità — riassunti in un unico termine. E' peraltro ovvio che ciascun cedimento (assiale o rotazionale) lavora per la corrispondente reazione o coppia reattiva, mentre ciascuna distorsione lavora per la corrispondente caratteristica della sollecitazione interna.

Nel secondo caso, invece, si avrà:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_2} F_i^{(2)} s_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{m_2} R_i^{(2)} \Delta_i^{(1)} - \sum_{i=1}^s c_i R_i^{(2)} R_i^{(1)} = \\ \int_s N^{(2)} \frac{N^{(1)}}{EA} ds + \int_s M^{(2)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + \int_s T^{(2)} \frac{T^{(1)}}{GA_s} ds - \\ \int_s N^{(2)} \lambda^{(1)} ds - \int_s M^{(2)} \mu^{(1)} ds - \int_s T^{(2)} \theta^{(1)} ds \end{aligned} \quad (43.4)$$

Dalla (43.3) e dalla (43.4) si ha poi, per confronto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} F_i^{(1)} s_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{m_1} R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} + \int_s N^{(1)} \lambda^{(2)} ds + \int_s M^{(1)} \mu^{(2)} ds + \int_s T^{(1)} \theta^{(2)} ds = \\ \sum_{i=1}^{n_2} F_i^{(2)} s_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{m_2} R_i^{(2)} \Delta_i^{(1)} + \int_s N^{(2)} \lambda^{(1)} ds + \int_s M^{(2)} \mu^{(1)} ds + \int_s T^{(2)} \theta^{(1)} ds \end{aligned} \quad (43.5)$$

ossia l'asserto. \square

43.1.1 Il principio di Betti ed il principio di Maxwell

In assenza di cedimenti e distorsioni il principio di reciprocità si riduce al classico teorema di Enrico Betti:

Corollario 1. (Betti 1872) - *Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticità. La trave sia soggetta ad un sistema di n_1 forze $F^{(1)}$, che causa gli spostamenti $u^{(1)}$ e ad un sistema di n_2 forze $F^{(2)}$, che causa gli spostamenti $u^{(2)}$.*

Il lavoro mutuo del primo sistema di forze dovuto agli spostamenti $u^{(2)}$, è uguale al lavoro mutuo del secondo sistema di forze, dovuto agli spostamenti $u^{(1)}$:

$$\sum_{i=1}^{n_1} F_i^{(1)} s_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_2} F_i^{(2)} s_i^{(1)} \quad (43.6)$$

Se inoltre i due insiemi di forze si riducono ambedue ad una sola forza di intensità unitaria, si ha il più antico teorema di reciprocità, dovuto a Maxwell:

Corollario 2. (Maxwell 1864) - *Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticità. La trave sia soggetta ad una forza unitaria all'ascissa ζ che causa gli spostamenti $s^{(1)}$ e ad una forza unitaria all'ascissa η , che causa gli spostamenti $s^{(2)}$.*

Il lavoro mutuo della prima forza, dovuto agli spostamenti $s^{(2)}$, è uguale al lavoro mutuo della seconda forza, dovuto agli spostamenti $s^{(1)}$ e quindi

$$s^{(2)}(\zeta) = s^{(1)}(\eta) \quad (43.7)$$

In altri termini, il principio di Maxwell garantisce che la componente di spostamento del punto η , secondo una retta b , provocato da una forza unitaria agente in un punto ζ , secondo la direzione della retta a , è uguale alla componente di spostamento del punto ζ , secondo la retta a , provocato da una forza unitaria agente nel punto η , secondo la retta b .

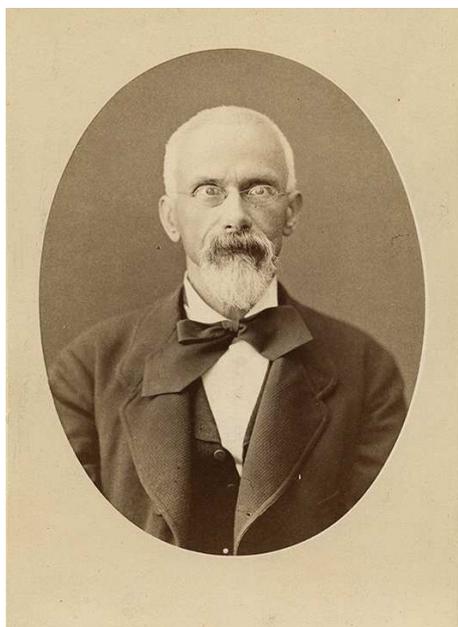


Figura 43.1: EnricoBetti

43.1.2 Il principio di Colonnetti

Annullando le distorsioni ed i cedimenti anelastici del primo sistema, e le forze del secondo sistema, si giunge al secondo principio di reciprocità, dovuto a Gustavo Colonnetti:

Corollario 3. (*Colonnetti*) - Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticità. La trave sia soggetta ad un primo sistema di n_1 forze $F^{(1)}$, che causa gli spostamenti $s^{(1)}$ e le caratteristiche della sollecitazione interna $C^{(1)}$, e ad un secondo sistema di m_2 cedimenti anelastici $\Delta^{(2)}$ e distorsioni $D^{(2)}$, che causa gli spostamenti $s^{(2)}$ e le caratteristiche della sollecitazione interna $C^{(2)}$.

Il lavoro mutuo del primo sistema di forze, dovuto agli spostamenti $s^{(2)}$ ed alle caratteristiche $C^{(2)}$, è nullo:

$$\sum_{i=1}^{n_1} F_i^{(1)} s_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{m_2} R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} + \int_s N^{(1)} \lambda^{(2)} ds + \int_s M^{(1)} \mu^{(2)} ds + \int_s T^{(1)} \theta^{(2)} ds = 0 \quad (43.8)$$

43.1.3 Il principio di Volterra

Annullando le forze sia del primo che del secondo sistema, si giunge al terzo principio di reciprocità, dovuto a Vito Volterra:

Corollario 4. (Volterra) - *Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticità. La trave sia soggetta ad un primo sistema di m_1 cedimenti anelastici $\Delta^{(1)}$ e distorsioni $D^{(1)}$, che causa gli spostamenti $s^{(1)}$ e le caratteristiche della sollecitazione interna $C^{(1)}$, e ad un secondo sistema di m_2 cedimenti anelastici $\Delta^{(2)}$ e distorsioni $D^{(2)}$, che causa gli spostamenti $s^{(2)}$ e le caratteristiche della sollecitazione interna $C^{(2)}$.*

Il lavoro mutuo del primo sistema di cedimenti e distorsioni, dovuto agli spostamenti $s^{(2)}$ ed alle caratteristiche $C^{(2)}$, è uguale al lavoro mutuo del secondo sistema di cedimenti e distorsioni, dovuto agli spostamenti $s^{(1)}$ ed alle caratteristiche $C^{(1)}$.

$$\sum_{i=1}^{m_2} R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} + \int_s N^{(1)} \lambda^{(2)} ds + \int_s M^{(1)} \mu^{(2)} ds + \int_s T^{(1)} \theta^{(2)} ds =$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} R_i^{(2)} \Delta_i^{(1)} + \int_s N^{(2)} \lambda^{(1)} ds + \int_s M^{(2)} \mu^{(1)} ds + \int_s T^{(2)} \theta^{(1)} ds$$
(43.9)

Nota - Quanto detto finora non è limitato alle travi ad asse rettilineo, ma ha lo stesso livello di applicabilità del principio dei lavori virtuali. Nel seguito, invece, per semplicità, ci si limita alle travi ad asse rettilineo.

43.2 Gli enti duali

Dall'esame dei principi di reciprocità emerge una relazione tra enti forza ed enti spostamento: ciascun elemento dell'insieme delle forze è legato ad un elemento dell'insieme degli spostamenti, nel senso che ciascun ente forza compie lavoro per il corrispondente ente spostamento. Si ha quindi la tabella 43.1 di dualità.

Ente Forza	Ente Spostamento
Forza	Spostamento
Coppia	Rotazione
Momento flettente	Distorsione di rotazione relativa
Taglio	Distorsione di scorrimento
Sforzo normale	Distorsione assiale

Tabella 43.1: Gli enti forza ed i loro enti duali

Ciò detto, è essenziale osservare che nella tabella precedente compaiono cinque quantità che è possibile applicare alla trave, ossia forze, coppie e distorsioni, e cinque quantità che vengono da esse generate, ossia spostamenti, rotazioni e

caratteristiche della sollecitazione interna. L'insieme delle forze, coppie e distorsioni verrà collettivamente indicato con C (*cause*), mentre l'insieme degli spostamenti, rotazioni e caratteristiche della sollecitazione interna sarà denotato con E (*effetti*). Infine siano c ed e i generici elementi di questi due insiemi.

Ciò detto, si fornisce ora la seguente:

Definizione 12. *Si dice linea di influenza $e_S^c(x_3)$ di un ente $e \in E$ nella sezione S , provocato da un ente $c \in C$ viaggiante sulla trave, il diagramma la cui ordinata alla generica ascissa x_3 fornisce il valore di e in S quando c , unitaria, agisce in x_3 .*

Si precisa subito che il termine *viaggiante* non si riferisce in alcun modo alla mobilità della causa c , ma solo al poterla situare in una generica ascissa.

Ad esempio, la linea di influenza dello spostamento in una sezione S dovuto ad una forza viaggiante è un diagramma che fornisce, nella generica x_3 , lo spostamento in S quando una forza unitaria agisce in x_3 .

Limitandosi alle travi ad asse rettilineo in regime flesso-tagliante, si hanno quindi le seguenti possibilità:

1. Linee di influenza di spostamenti per forze viaggianti:
 - (a) Linea di influenza η_S^F dello spostamento per forza viaggiante
 - (b) Linea di influenza ϕ_S^F della rotazione per forza viaggiante
 - (c) Linea di influenza η_S^M dello spostamento per coppia viaggiante
 - (d) Linea di influenza ϕ_S^M della rotazione per coppia viaggiante
2. Linee di influenza di caratteristiche per forze viaggianti:
 - (a) Linea di influenza m_S^F del momento per forza viaggiante
 - (b) Linea di influenza t_S^F del taglio per forza viaggiante
 - (c) Linea di influenza m_S^M del momento per coppia viaggiante
 - (d) Linea di influenza t_S^M del taglio per coppia viaggiante
3. Linee di influenza di spostamenti per distorsioni viaggianti:
 - (a) Linea di influenza η_S^μ dello spostamento per distorsione rotazionale viaggiante
 - (b) Linea di influenza ϕ_S^μ della rotazione per distorsione rotazionale viaggiante
 - (c) Linea di influenza η_S^θ dello spostamento per distorsione di scorrimento viaggiante
 - (d) Linea di influenza ϕ_S^θ della rotazione per distorsione di scorrimento viaggiante
4. Linee di influenza di caratteristiche per distorsioni viaggianti:

- (a) Linea di influenza m_S^μ del momento per distorsione rotazionale viaggiante
- (b) Linea di influenza t_S^μ del taglio per distorsione rotazionale viaggiante
- (c) Linea di influenza m_S^θ del momento per distorsione di scorrimento viaggiante
- (d) Linea di influenza t_S^θ del taglio per distorsione di scorrimento viaggiante

I teoremi di reciprocità forniscono la metodologia per il tracciamento dei richiesti diagrammi: il teorema di Betti deve essere applicato per il primo caso, il teorema di Colonnetti si applica nel secondo e nel terzo caso, il teorema di Volterra è utile nel quarto ed ultimo caso.

43.3 L'utilizzo del teorema di Betti: le linee di influenza di spostamenti per forze viaggianti

Caso 1a - Linea di influenza η_S^F dello spostamento in S per forza viaggiante

Si consideri una generica sezione retta S della trave in esame, e si voglia conoscere lo spostamento verticale $u_2(S)$ in S per effetto di una forza unitaria $F_1 = 1$ agente in un'altra sezione retta generica x_3 . Se si applica una forza F nella sezione S e si utilizza il teorema di Betti, si può scrivere:

$$F_1 u_2(S) = F u_2(x_3) \quad (43.10)$$

ed è quindi possibile affermare che il richiesto spostamento $u_2(S)$ può calcolarsi applicando una forza unitaria $F = 1$ in S , leggendo lo spostamento della sezione x_3 . Ne segue che il diagramma degli abbassamenti dovuti alla forza unitaria applicata in S è la linea di influenza η_S^F degli spostamenti in S per forza unitaria viaggiante. Il tracciamento della linea di influenza è così ricondotto ad un problema ben noto, da potersi affrontare, ad esempio, con la scrittura dell'equazione differenziale della linea elastica, o con qualsiasi altro metodo preferito.

A titolo di esempio, si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 43.2, e si voglia la linea di influenza dello spostamento in una sezione S all'ascisa generica ζ per effetto di una forza viaggiante.

Occorre calcolare il diagramma degli spostamenti per una trave doppiamente incastrata caricata con una forza unitaria in S , e tale problema è risolvibile immediatamente a fornire la richiesta linea di influenza:

$$\eta_S^F = \begin{cases} \frac{(L - \zeta)^2 x_3^2 (3L\zeta - Lx_3 - 2\zeta x_3)}{6EIL^3} & x_3 \leq \zeta \\ -\frac{\zeta^2 (L - x_3)^2 (L(\zeta - 3x_3) + 2\zeta x_3)}{6EIL^3} & x_3 \geq \zeta \end{cases} \quad (43.11)$$

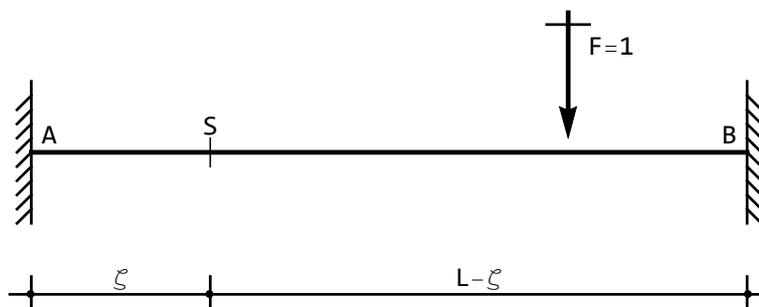


Figura 43.2: Trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante

il cui grafico, per $\zeta = \frac{L}{4}$, si presenta come in Figura 43.3. Si noti che le espressioni (43.11) presuppongono un unico sistema di riferimento, con origine in A.

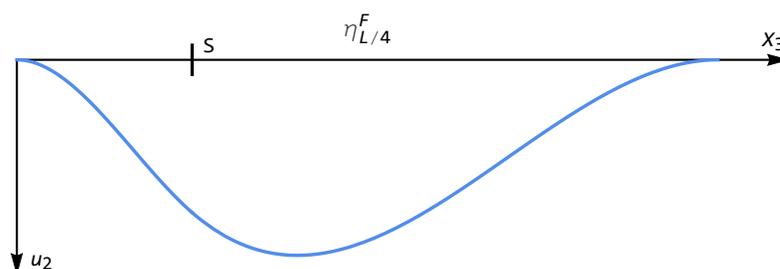


Figura 43.3: Linea di influenza $\eta_{L/4}^F$ per una trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante

Dall'esame della linea di influenza si trae la conclusione, peraltro ovvia in questo caso semplice, che la sezione S subirà comunque spostamenti positivi, ovunque agisca la forza viaggiante. Inoltre, lo spostamento sarà massimo quando la forza agisce proprio in corrispondenza del punto di tangenza orizzontale del diagramma. Ad esempio, per $\zeta = \frac{L}{4}$, lo spostamento massimo in S si ottiene quando la forza agisce a $\frac{2}{5}L$, e vale $\frac{9}{3200} \frac{L^3}{EI}$

Caso 1b - Linea di influenza η_S^M dello spostamento in S per coppia viaggiante

Per ottenere la richiesta linea di influenza bisogna calcolare il diagramma dell'ente duale all'ente viaggiante (e quindi occorre calcolare il diagramma delle rotazioni) dovuto ad un ente unitario che sia duale dell'ente in esame (e quindi

occorre caricare la struttura con una forza unitaria). D'altro canto, considerando la struttura caricata da una coppia \mathcal{M} unitaria nella generica sezione x_3 (primo sistema), e da una forza F in S (secondo sistema), il teorema di Betti permette di scrivere:

$$\mathcal{M}\phi(S) = Fu_2(x_3) \quad (43.12)$$

Come esempio un po' più complicato del precedente, si consideri la trave a due campate di Figura 43.4, e si voglia la linea di influenza dello spostamento nella sezione S situata ad $L/4$, dovuto ad una coppia viaggiante, ossia si voglia tracciare il diagramma delle rotazioni dovute ad una forza unitaria agente ad un quarto della luce.

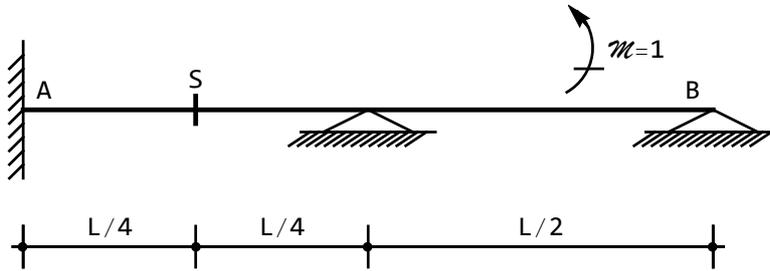


Figura 43.4: Trave a due campate soggetta a coppia viaggiante

Complicazioni analitiche a parte, la metodologia di soluzione del problema strutturale non cambia, e fornisce la richiesta linea di influenza come:

$$\eta_{L/4}^{\mathcal{M}} = \begin{cases} \frac{x_3(-9L + 34x_3)}{112EI} & x_3 \leq \frac{L}{4} \\ -\frac{7L^2 - 38Lx_3 + 44x_3^2}{224EI} & \frac{L}{4} \leq x_3 \leq \frac{L}{2} \\ \frac{11L^2 - 24Lx_3 + 12x_3^2}{448EI} & \frac{L}{2} \leq x_3 \leq L \end{cases} \quad (43.13)$$

Graficamente si ottiene il diagramma di Figura 43.5.

Una interessante applicazione della teoria delle linee di influenza permette il calcolo delle condizioni di carico più sfavorevoli, da applicare su una struttura ai fini di verifica e/o progetto. Se ci si chiede, infatti, dove occorre posizionare la coppia per ottenere i valori massimi e minimi dello spostamento, uno sguardo alla linea di influenza permette di stabilire che il massimo abbassamento si avrà quando la coppia agisce in una ascissa vicina alla mezzeria. Per essere più precisi, basta calcolare l'ascissa di massimo sulla seconda campata, ossia risolvere l'equazione:

$$\frac{d}{dx_3} \left(-\frac{7L^2 - 38Lx_3 + 44x_3^2}{224EI} \right) = 0 \quad (43.14)$$

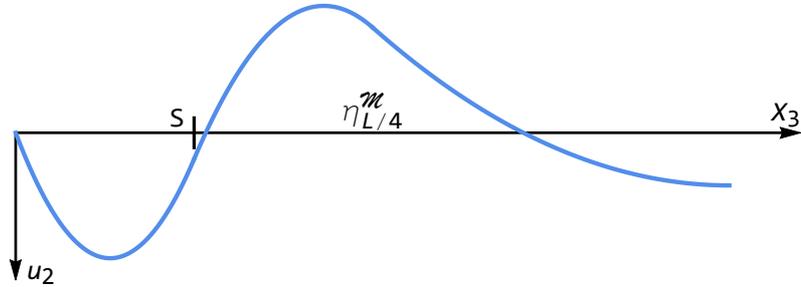


Figura 43.5: Linea d'influenza $\eta_{L/4}^M$ per una trave a due campate soggetta a coppia viaggiante

immediatamente risolvibile a fornire:

$$x_3^{(1)} = \frac{19}{44}L \approx 0.432L \quad (43.15)$$

Analogamente, si osserva che l'ascissa di minimo della linea di influenza ricade nella prima campata, e quindi si ricava:

$$\frac{d}{dx_3} \left(\frac{x_3(-9L + 34x_3)}{112EI} \right) = 0 \quad (43.16)$$

fornendo l'ascissa in cui occorre applicare la coppia per ottenere il minimo abbassamento:

$$x_3^{(2)} = \frac{9}{68}L \approx 0.132L \quad (43.17)$$

Caso 1c - Linea di influenza ϕ_S^F della rotazione in S per forza viaggiante

In questo caso occorre caricare la trave con una coppia unitaria nella sezione S , e calcolare il diagramma degli spostamenti da essa generata. Infatti, considerando la struttura caricata da una forza F unitaria nella generica sezione x_3 (primo sistema), e da una coppia \mathcal{M} in S (secondo sistema), il teorema di Betti permette di scrivere:

$$Fu_2(S) = \mathcal{M}\phi_S(x_3) \quad (43.18)$$

Come semplice esempio, si voglia la linea di influenza della rotazione in mezzeria per una trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, causata da una forza verticale viaggiante (cfr. Figura 43.6).

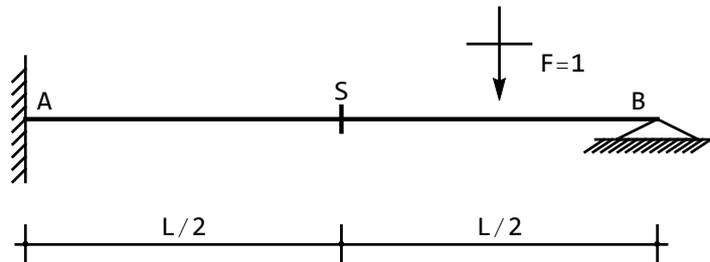


Figura 43.6: Trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra soggetta a forza verticale viaggiante

Per ottenerla, bisogna tracciare il diagramma degli spostamenti dovuti ad una coppia unitaria applicata in mezzeria, giungendo a scrivere:

$$\phi_{L/2}^F = \begin{cases} \frac{(L - 3x_3)x_3^2}{16EIL} & x_3 \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2L^3 - 8L^2x_3 + 9Lx_3^2 - 3x_3^3}{16EIL} & x_3 \geq \frac{L}{2} \end{cases} \quad (43.19)$$

Si ha quindi, in definitiva, il grafico di Figura 43.7.

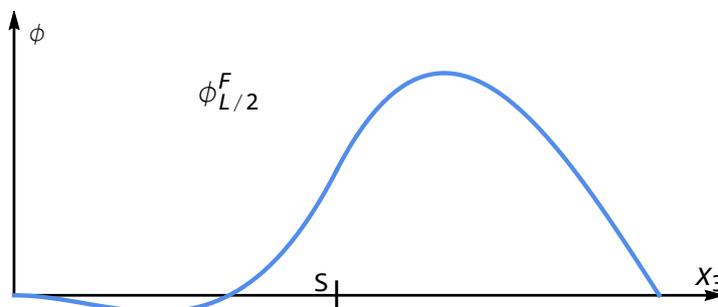


Figura 43.7: Linea d'influenza $\phi_{L/2}^F$ della rotazione in mezzeria per una trave incastrata-appoggiata soggetta a forza viaggiante

Caso 1d - Linea di influenza ϕ_S^M della rotazione in S per coppia viaggiante

In questo caso, come ormai dovrebbe essere chiaro, occorre caricare la trave con una coppia unitaria nella sezione S , e calcolare il diagramma delle rotazioni da essa generato. Infatti, considerando la struttura caricata da una coppia unitaria

M_1 nella generica sezione x_3 (primo sistema), e da una coppia \mathcal{M} in S (secondo sistema), il teorema di Betti permette di scrivere:

$$\mathcal{M}_1 \phi(S) = \mathcal{M} \phi(x_3) \quad (43.20)$$

Come semplice esempio, si voglia la linea di influenza della rotazione nell'estremo di sinistra per una trave appoggiata, causata da una coppia viaggiante (cfr. Figura 43.8).

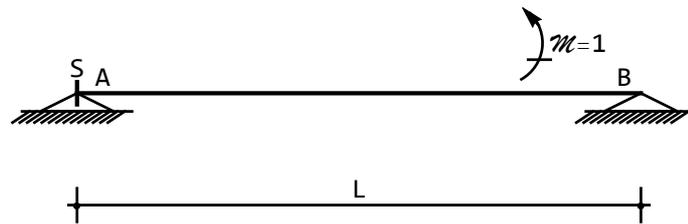


Figura 43.8: Trave appoggiata soggetta a coppia viaggiante: linea di influenza della rotazione a sinistra

Per ottenerla, bisogna tracciare il diagramma delle rotazioni dovuto ad una coppia unitaria applicata nell'estremo di sinistra, giungendo a scrivere:

$$\phi_0^{\mathcal{M}} = \frac{2L^2 - 6Lx_3 + 3x_3^2}{6EIL} \quad (43.21)$$

Ovviamente, per $x_3 = 0$ si ha $\phi_0^{\mathcal{M}} = \frac{L}{3EI}$, mentre per $x_3 = L$ si ha $\phi_0^{\mathcal{M}} = -\frac{L}{6EI}$. Il relativo diagramma è presentato in Figura 43.9

43.4 Il primo utilizzo del teorema di Colonnetti: le linee di influenza delle caratteristiche per forze viaggianti

In questa sezione si vogliono tracciare le linee di influenza di momenti e tagli in una sezione retta S , e poichè gli enti duali delle caratteristiche sono le distorsioni, ne segue che occorre caricare la trave con una distorsione concentrata in S : distorsione di rotazione se si vuole la linea d'influenza del momento, o distorsione di scorrimento se si vuole la linea di influenza del taglio.

Tutto ciò può anche essere confermato dal teorema di Colonnetti. Se ad esempio si vuole la linea di influenza del momento flettente per forza verticale viaggiante, si consideri la trave soggetta ad una forza unitaria agente nella sezione retta generica x_3 (sistema 1), e la stessa trave soggetta ad una distorsione di

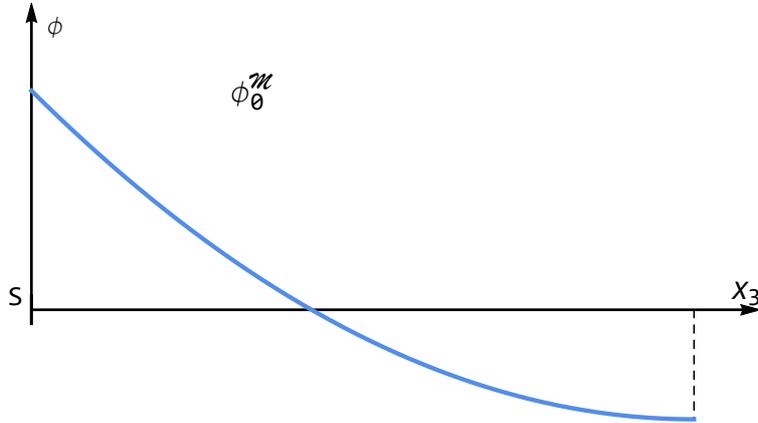


Figura 43.9: Linea d'influenza ϕ_0^M della rotazione a sinistra per una trave appoggiata soggetta a coppia viaggiante

rotazione relativa D_ϕ nella sezione S (sistema 2). Per il teorema di Colonnetti si può scrivere:

$$Fu_2(x_3) + M(S)D_\phi = 0 \quad (43.22)$$

da cui:

$$M(S) = -\frac{u_2(x_3)}{D_{\phi S}} \quad (43.23)$$

Quindi, la linea di influenza m_S^F del momento flettente per forza viaggiante si ottiene caricando la struttura con una distorsione $D_\phi = -1$ nella sezione S , e calcolando il relativo diagramma degli spostamenti.

Caso 2a - Linea di influenza m_S^F del momento in S per forza viaggiante

Si consideri una generica trave, e si voglia tracciare, per una sezione generica S , la linea di influenza del momento flettente per forza viaggiante. In altri termini, per quanto appena detto, occorre calcolare il diagramma degli spostamenti dovuti ad una distorsione D_ϕ di rotazione relativa concentrata nella sezione S . Può a tal fine utilizzarsi la ben nota metodologia della scrittura della linea elastica, ed in corrispondenza della sezione retta S bisognerà scrivere le due condizioni di congruenza:

$$u_2^{sin} = u_2^{des} \quad (43.24)$$

$$\phi^{sin} - \phi^{des} = D_\phi \quad (43.25)$$

e le due condizioni di equilibrio:

$$M_1^{sin} = M_1^{des} \quad (43.26)$$

$$T_2^{sin} = T_2^{des} \quad (43.27)$$

Nel caso delle linee di influenza sarà $D_\phi = -1$, e quindi la seconda condizione di congruenza si scriverà:

$$\phi^{des} - \phi^{sin} = 1 \quad (43.28)$$

A titolo di esempio, si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 43.10, e si voglia la linea di influenza del momento ad un quarto della luce per effetto di una forza viaggiante.

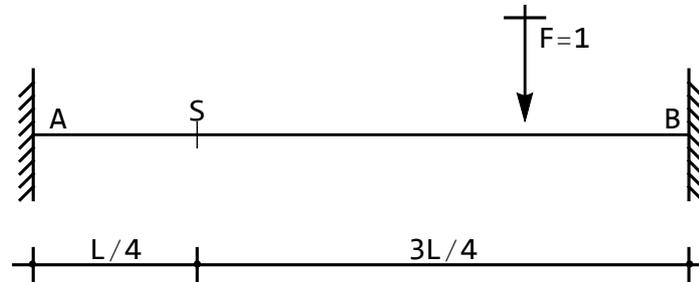


Figura 43.10: Trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante

Occorre calcolare il diagramma degli spostamenti per una trave doppiamente incastrata caricata con una distorsione D_ϕ unitaria e negativa in $L/4$, e tale problema è risolvibile immediatamente a fornire la richiesta linea di influenza:

$$m_{L/4}^F = \begin{cases} \frac{(5L - 2x_3)x_3^2}{4L^2} & x_3 \leq \frac{L}{4} \\ \frac{(L - 2x_3)(L - x_3)^2}{4L^2} & x_3 \geq \frac{L}{4} \end{cases} \quad (43.29)$$

il cui grafico si presenta come in Figura 43.11. Si noti che dalla Figura 43.11 è possibile dedurre subito che forze agenti sulla prima semiluce provocano momenti positivi, mentre forze agenti nella seconda campata provocano momenti negativi in S .

Esercizio - Si deduca la linea di influenza del momento in una sezione posta ad $L/3$, dovuta a forze viaggianti. E' possibile ottenere momenti negativi in S ?

Il caso del solaio

Una classica applicazione della teoria delle linee di influenza si ritrova, storicamente, nell'analisi delle condizioni di carico più gravose da assegnare ai solai. Si

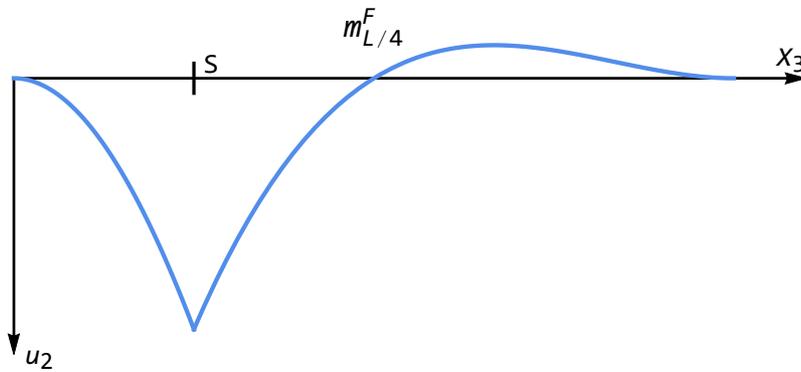


Figura 43.11: Linea di influenza $m_{L/4}^F$ per una trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante

consideri ad esempio il caso di Figura 43.12, relativo ad un solaio a due campate con sbalzi agli estremi, e si vogliono studiare le sezioni più significative, ossia quelle in mezzeria delle campate, e quelle sugli appoggi.

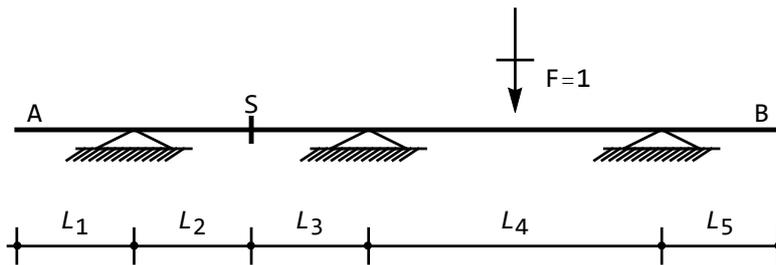


Figura 43.12: Un classico esempio di solaio: linea di influenza per una sezione retta nella prima luce

Se ad esempio si vuole studiare una sezione retta ricadente nella prima campata, occorre scrivere cinque equazioni della linea elastica, ed imporre venti condizioni ai limiti, ottenendo il diagramma degli spostamenti dovuti ad una distorsione unitaria e negativa in S :

$$\begin{aligned}
 m_S^F &= \frac{(L_1 - x_3)}{\Delta} (x_3 - L_1) (L_2^2 - L_2 L_3 - 2L_3 (L_3 + L_4)) \\
 m_S^F &= \frac{1}{\Delta (L_2 + L_3)} (x_3 - L_1) (-L_2^3 + 2L_3^2 (L_3 + L_4) + L_2 ((x_3 - L_1)^2 + \\
 &\quad 3L_3^2 + 2L_3 L_4))
 \end{aligned}
 \tag{43.30}$$

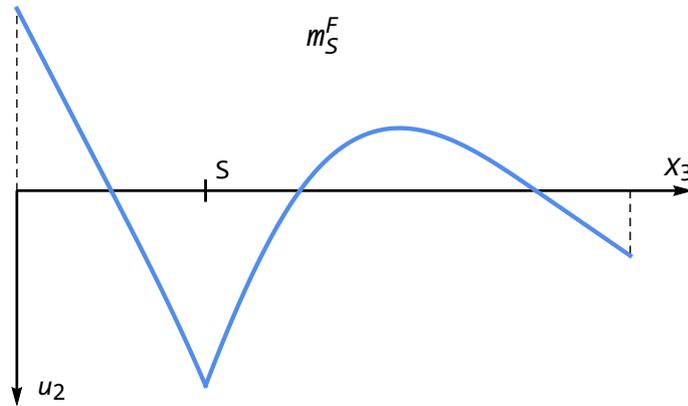


Figura 43.13: La linea di influenza del momento flettente per una sezione retta in mezzeria della prima luce

$$\begin{aligned}
 m_S^F &= \frac{L_2(L_1 + L_2 + L_3 - x_3)}{\Delta(L_2 + L_3)} \left(-L_1^2 + 2(L_2 + L_3)(L_2 + L_3 + L_4) - \right. \\
 &\quad \left. (L_2 + L_3)x_3 - x_3^2 + L_1(L_2 + L_3 + 2x_3) \right) \\
 m_S^F &= -\frac{L_2(x_3 - L_1 - L_2 - L_3)}{\Delta} \left((-x_3 + L_1 + L_2 + L_3)^2 - \right. \\
 &\quad \left. 3(x_3 - L_1 - L_2 - L_3)L_4 + 2L_4^2 \right) \\
 m_S^F &= \frac{L_2L_4}{\Delta} (x_3 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4)
 \end{aligned} \tag{43.31}$$

nelle cinque campate, con:

$$\Delta = 2(L_2 + L_3)(L_2 + L_3 + L_4) \tag{43.32}$$

Se, ad esempio, i due sbalzi sono lunghi due metri, mentre le due campate sono larghe rispettivamente quattro metri e cinque metri, la linea di influenza in mezzeria della prima campata si presenta come:

$$m_S^F = \begin{cases} \frac{7}{18}(-2 + x_3) & 0 \leq x_3 \leq 2 \\ \frac{1}{144}(56 + (-2 + x_3)^2)(-2 + x_3) & 2 \leq x_3 \leq 4 \\ \frac{1}{144}(456 - 76x_3 - 6x_3^2 + x_3^3) & 4 \leq x_3 \leq 6 \\ -\frac{1}{180}(-6 + x_3)(176 - 27x_3 + x_3^2) & 6 \leq x_3 \leq 11 \\ \frac{5}{36}(-11 + x_3) & 11 \leq x_3 \leq 13 \end{cases} \tag{43.33}$$

o, graficamente, come in Figura 43.13.

Volendo invece studiare la linea di influenza del momento per la sezione in corrispondenza del secondo appoggio, si dovranno scrivere quattro equazioni della linea elastica, e sedici condizioni ai limiti, giungendo alla richiesta linea di influenza:

$$\begin{aligned}
 m_S^F &= \frac{(-x_3 + L_1) L_2}{2(L_2 + L_3)} \\
 m_S^F &= \frac{(x_3 - L_1)^3 - (x_3 - L_1) L_2^2}{2L_2(L_2 + L_3)} \\
 m_S^F &= -\frac{(x_3 - L_1 - L_2)((-x_3 + L_1 + L_2)^2 - 3(x_3 - L_1 - L_2)L_3 + 2L_3^2)}{2L_3(L_2 + L_3)} \\
 m_S^F &= \frac{(x_3 - L_1 - L_2 - L_3)L_3}{2(L_2 + L_3)}
 \end{aligned}
 \tag{43.34}$$

nelle quattro campate. Graficamente si ha il diagramma di Figura 43.14.

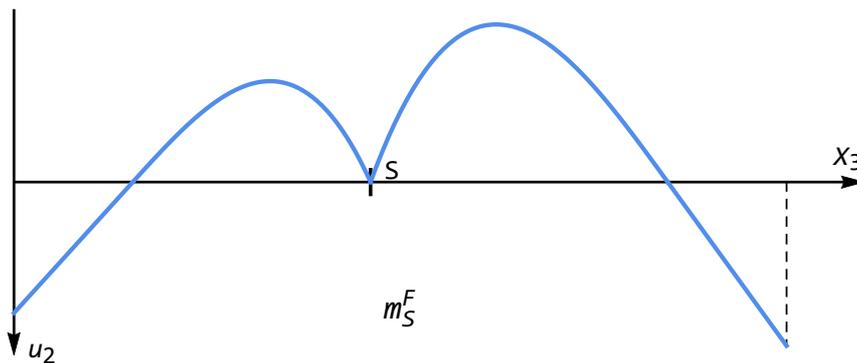


Figura 43.14: La linea di influenza del momento flettente per una sezione retta in corrispondenza del secondo appoggio

Caso 2b - Linea di influenza t_S^F del taglio in S per forza viaggiante

Per ottenere la richiesta linea di influenza bisogna calcolare il diagramma dell'ente duale all'ente viaggiante (e quindi occorre calcolare il diagramma degli apostamenti) dovuto ad un ente unitario che sia duale dell'ente in esame (e quindi occorre caricare la struttura con una distorsione di scorrimento unitaria e negativa).

A titolo di esempio, si consideri la trave di Figura 43.15, e si voglia la linea di influenza del taglio nella sezione di mezzeria S, dovuta ad una forza viaggiante,

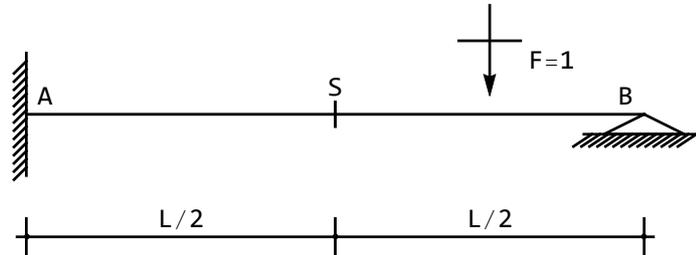


Figura 43.15: Trave incastrata ed appoggiata

ossia si voglia tracciare il diagramma degli spostamenti dovuti ad una distorsione di scorrimento unitaria e negativa agente in mezzeria.

Scrivendo due equazioni differenziali della linea elastica, in mezzeria dovranno allora scriversi le due equazioni di congruenza:

$$u_2^{des} - u_2^{sin} = 1 \quad (43.35)$$

$$\phi^{sin} = \phi^{des} \quad (43.36)$$

e le due condizioni di equilibrio:

$$M_1^{sin} = M_1^{des} \quad (43.37)$$

$$T_2^{sin} = T_2^{des} \quad (43.38)$$

La richiesta linea di influenza è analiticamente definita da:

$$t_{L/2}^F = \begin{cases} \frac{x_3^2(-3L+x_3)}{2L^3} & x_3 \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2L^3-3Lx_3^2+x_3^3}{2L^3} & \frac{L}{2} \leq x_3 \leq L \end{cases} \quad (43.39)$$

Graficamente si ottiene il diagramma di Figura 43.16.

Caso 2c - Linea di influenza m_S^M del momento in S per coppia viaggiante

In questo caso, poichè si vuole la linea di influenza del momento, bisognerà assoggettare la trave ad una distorsione di rotazione unitaria e negativa. Poichè l'ente viaggiante è una coppia, occorre calcolare il diagramma delle rotazioni. Quindi, sulla trave a tre campate diseguali di Figura 43.17, la linea di influenza del momento in mezzeria per effetto di una coppia viaggiante è data da:

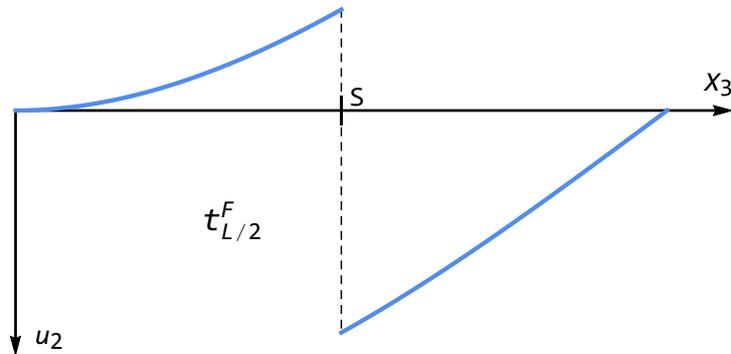


Figura 43.16: Linea d'influenza $t_{L/2}^F$ per una trave incastrata-appoggiata

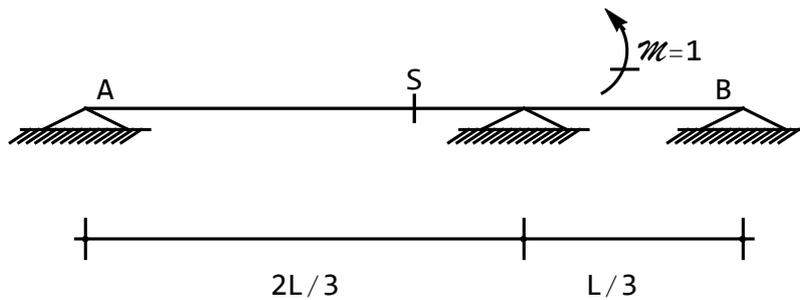


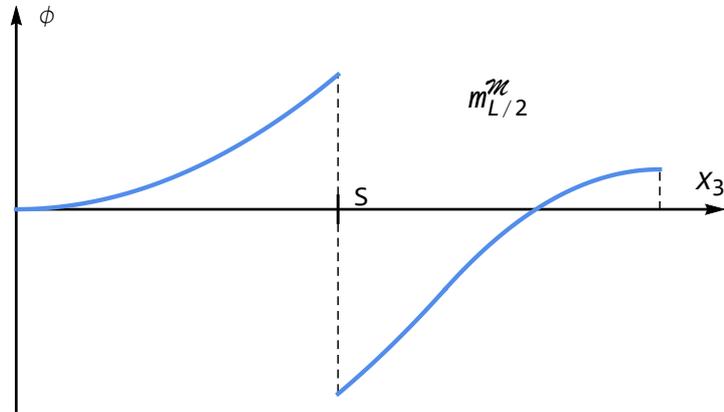
Figura 43.17: Trave a tre appoggi a luci diseguali

$$m_{L/2}^M = \begin{cases} \frac{27x_3^2}{16L^2} & 0 \leq x_3 \leq \frac{L}{2} \\ -1 + \frac{27x_3^2}{16L^2} & \frac{L}{2} \leq x_3 \leq \frac{2}{3}L \\ -\frac{26L^2 - 54Lx_3 + 27x_3^2}{8L^2} & \frac{2}{3}L \leq x_3 \leq L \end{cases} \quad (43.40)$$

mentre graficamente si giunge al diagramma di Figura 43.18.

Caso 2d - Linea di influenza t_S^M del taglio in S per coppia viaggiante

In quest'ultimo caso si dovrà caricare la trave con una distorsione di scorrimento nella sezione S, come sempre unitaria e negativa, e poi calcolare il risultante diagramma delle rotazioni.

Figura 43.18: Linea d'influenza $m_{L/2}^M$ per una trave su tre appoggi

43.5 Il secondo utilizzo del teorema di Colonnetti: le linee di influenza degli spostamenti per distorsioni viaggianti

In questa sezione si vogliono tracciare le linee di influenza di spostamenti (spostamenti verticali o rotazioni) in una sezione retta S , dovuti a distorsioni (di rotazione o di scorrimento) viaggianti. Ne segue che occorrerà caricare la struttura in S con gli enti duali degli spostamenti, ossia con una forza verticale o con una coppia, e bisognerà calcolare il diagramma degli enti duali delle distorsioni, ossia momenti flettenti o tagli

Tutto ciò può anche essere confermato dal teorema di Colonnetti. Se ad esempio si vuole la linea di influenza dello spostamento verticale per distorsione rotazionale viaggiante, si consideri la trave soggetta ad una distorsione rotazionale D_ϕ unitaria nella sezione retta generica x_3 (sistema 1), e la stessa trave soggetta ad una forza verticale F nella sezione S (sistema 2). Per il teorema di Colonnetti si può scrivere:

$$F u_2(S) + M(x_3) D_\phi = 0 \quad (43.41)$$

da cui, essendo la distorsione unitaria:

$$u_2(S) = -\frac{M(x_3)}{F} \quad (43.42)$$

Quindi, la linea di influenza $\eta_S^{D_\phi}$ dello spostamento per distorsione rotazionale viaggiante si ottiene caricando la struttura con una forza unitaria e negativa nella sezione S , e calcolando il relativo diagramma dei momenti

Su strutture isostatiche è spesso immediato calcolare i diagrammi di momenti e tagli, su strutture iperstatiche complesse può essere ancora utile ricorrere alla

scrittura delle equazioni differenziali della linea elastica. Il metodo di soluzione, lo si ribadisce, è del tutto indipendente dalla teoria delle linee di influenza

Caso 3a - Linea di influenza $\eta_S^{D\phi}$ dello spostamento in S per distorsione rotazionale viaggiante

A titolo di esempio, si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 43.19, e si voglia la linea di influenza dello spostamento ad un quarto della luce per effetto di una distorsione rotazionale viaggiante.

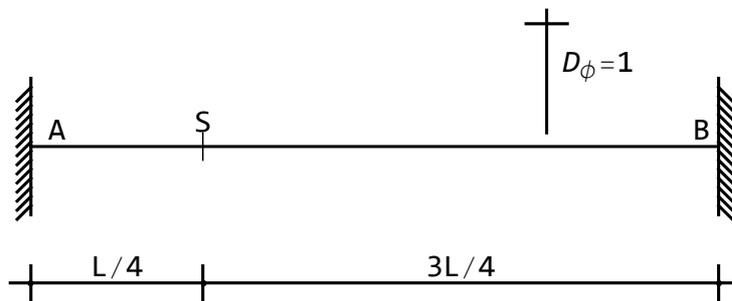


Figura 43.19: Trave doppiamente incastrata soggetta a distorsione rotazionale viaggiante

Occorre calcolare il diagramma dei momenti provocati da una forza unitaria e negativa in $L/4$, e tale problema è risolvibile immediatamente a fornire la richiesta linea di influenza:

$$m_{L/4}^F \begin{cases} \frac{9}{64}(L - 6x_3) & x_3 \leq \frac{L}{4} \\ \frac{1}{64}(-7L + 10x_3) & x_3 \geq \frac{L}{4} \end{cases} \quad (43.43)$$

che graficamente si traduce nel diagramma di Figura 43.20.

Dal diagramma si evince, ad esempio, che se si vuole ottenere il massimo spostamento ad un quarto della luce, bisogna applicare la distorsione nell'incastro di sinistra.

Caso 3b - Linea di influenza $\phi_S^{D\phi}$ della rotazione in S per distorsione rotazionale viaggiante

Per ottenere la richiesta linea di influenza bisogna calcolare il diagramma dell'ente duale dell'ente viaggiante (e quindi occorre calcolare il diagramma dei momenti) dovuto ad un ente unitario che sia duale dell'ente in esame (e quindi occorre caricare la struttura in S con una coppia unitaria e negativa).

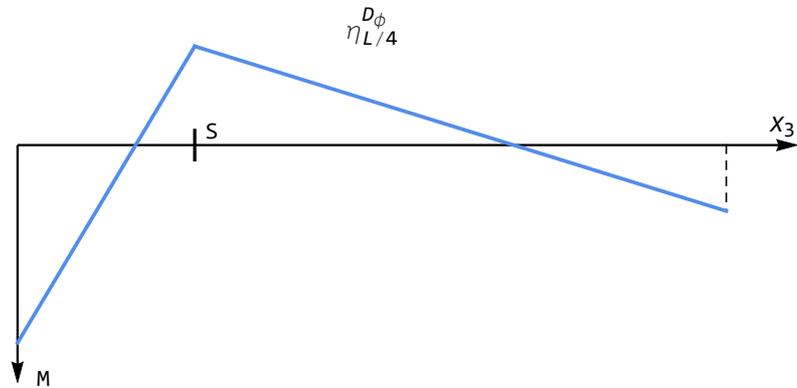


Figura 43.20: Linea di influenza $\eta_{L/4}^{D_\phi}$ dello spostamento per una trave doppiamente incastrata soggetta a distorsione rotazionale viaggiante

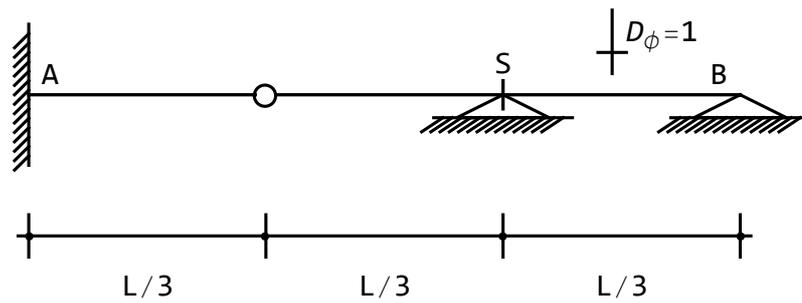
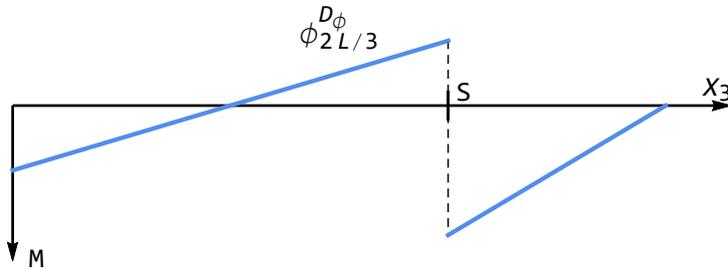


Figura 43.21: Trave incastrata, con cerniera e due appoggi

A titolo di esempio, si consideri la trave di Figura 43.21, e si voglia la linea di influenza della rotazione nella sezione sull'appoggio a due terzi della luce S , dovuta ad una distorsione rotazionale concentrata viaggiante, ossia si voglia tracciare il diagramma dei momenti dovuti ad una coppia unitaria e negativa agente in corrispondenza del suddetto appoggio. Si ha:

$$\phi_{2L/3}^{D_\phi} = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{x_3}{L} & 0 \leq x_3 \leq \frac{2}{3}L \\ = 2 - \frac{2x_3}{L} & \frac{2}{3}L \leq x_3 \leq L \end{cases} \quad (43.44)$$

Graficamente si ottiene il diagramma di Figura 43.22.


 Figura 43.22: Linea d'influenza $\phi_{2L/3}^{D_\phi}$ per la trave di 43.21

Caso 3c - Linea di influenza $\eta_S^{D_\eta}$ dello spostamento in S per distorsione di scorrimento viaggiante

In questo caso, poichè si vuole la linea di influenza dello spostamento, bisognerà assoggettare la trave ad una forza unitaria e negativa. Poichè l'ente viaggiante è una distorsione di scorrimento, occorre calcolare il diagramma del taglio. In Figura 43.23 è presentato il caso di una trave a tre campate con sbalzo, e si vuole tracciare la linea di influenza dello spostamento all'estremo libero per effetto di una distorsione di scorrimento viaggiante. In altri termini, si deve tracciare il diagramma del taglio dovuto ad una forza unitaria e negativa agente nell'estremo libero.

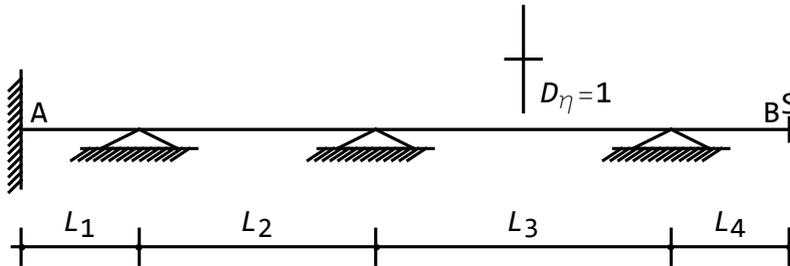


Figura 43.23: Trave a tre campate e sbalzo

L'espressione analitica della richiesta linea di influenza è:

$$\eta_S^{D_\eta} = \frac{3L_2L_3L_4}{2L_1(3L_1(L_2+L_3) + L_2(3L_2+4L_3))} \quad (43.45)$$

$$\eta_S^{D_\eta} = -\frac{3(L_1+2L_2)L_3L_4}{2L_2(3L_1(L_2+L_3) + L_2(3L_2+4L_3))}$$

$$\eta_S^{D_\eta} = \frac{3(2L_2(L_2 + 2L_3) + L_1(2L_2 + 3L_3))L_4}{2L_3(3L_1(L_2 + L_3) + L_2(3L_2 + 4L_3))}$$

$$\eta_S^{D_\eta} = -1$$

nelle quattro campate.

Come si vede, sullo sbalzo la linea di influenza varrà sempre -1 , poi vi sarà un tratto costante e positivo sulla terza e prima campata, alternata ad un valore negativo sulla seconda campata. I valori dipenderanno dalle luci: per il caso particolare $L_1 = 2$, $L_2 = 4$, $L_3 = 5$, $L_4 = 2$ si ha la linea di Figura 43.24.

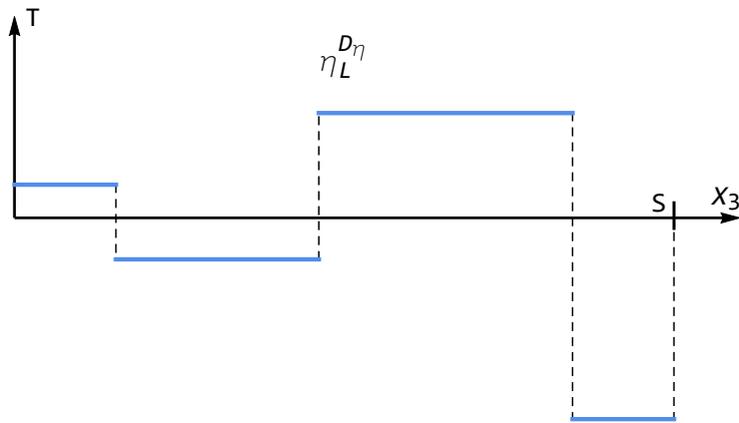


Figura 43.24: Linea d'influenza $\eta_S^{D_\eta}$ per la trave di Figura 43.23

Caso 3d - Linea di influenza $\phi_S^{D_\eta}$ della rotazione in S per distorsione di scorrimento viaggiante

In quest'ultimo caso si dovrà caricare la trave con una coppia di valore unitario e negativo, e poi calcolare il risultante diagramma del taglio. Sullo stesso esempio precedente, bisognerà calcolare il diagramma del taglio dovuto ad una coppia applicata nell'estremo libero. Si ha;

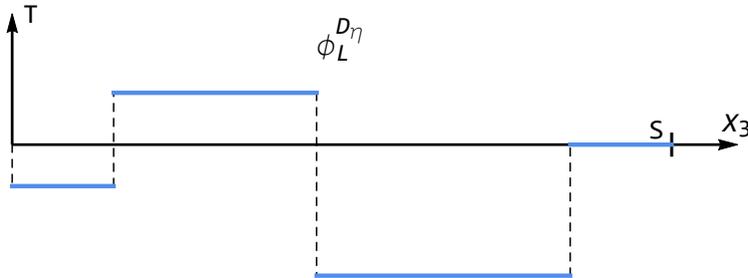
$$\phi_S^{D_\eta} = -\frac{3L_2L_3}{2L_1(3L_1(L_2 + L_3) + L_2(3L_2 + 4L_3))}$$

$$\phi_S^{D_\eta} = \frac{3(L_1 + 2L_2)L_3}{2L_2(3L_1(L_2 + L_3) + L_2(3L_2 + 4L_3))} \quad (43.46)$$

$$\phi_S^{D_\eta} = -\frac{3(2L_2(L_2 + 2L_3) + L_1(2L_2 + 3L_3))}{2L_3(3L_1(L_2 + L_3) + L_2(3L_2 + 4L_3))}$$

$$\phi_S^{D_\eta} = 0$$

Sullo sbalzo la linea di influenza sarà nulla, poi sarà negativa in prima e terza campata, positiva in seconda campata. Con gli stessi valori numerici del caso precedente, si ha il diagramma di Figura 43.25


 Figura 43.25: Linea d'influenza $\phi_L^{D_\eta}$ per la trave di Figura 43.23

43.6 L'utilizzo del teorema di Volterra: le linee di influenza delle caratteristiche per distorsioni viaggianti

In quest'ultima sezione si vogliono tracciare le linee di influenza di caratteristiche (momenti o tagli) in una sezione retta S , dovuti a distorsioni (di rotazione o di scorrimento) viaggianti. Ne segue che occorrerà caricare la struttura in S con gli enti duali delle caratteristiche, ossia con una distorsione di rotazione o di scorrimento, e bisognerà calcolare il diagramma degli enti duali delle distorsioni, ossia momenti flettenti o tagli.

Tutto ciò può anche essere confermato dal teorema di Volterra. Se ad esempio si vuole la linea di influenza del momento per distorsione di scorrimento viaggiante, si consideri la trave soggetta ad una distorsione di scorrimento D_η unitaria nella sezione retta generica x_3 (sistema 1), e la stessa trave soggetta ad una distorsione rotazionale D_ϕ nella sezione S (sistema 2). Per il teorema di Volterra si può scrivere:

$$T(x_3) D_\eta = M(S) D_\phi \quad (43.47)$$

da cui:

$$M(S) = \frac{T(x_3)}{D_\phi} \quad (43.48)$$

Quindi, la linea di influenza $m_S^{D_\eta}$ del momento per distorsione di scorrimento viaggiante si ottiene caricando la struttura con una distorsione di rotazione unitaria in S , e calcolando il relativo diagramma del taglio.

Si noti subito che in presenza di strutture isostatiche l'applicazione di una distorsione concentrata non causa caratteristiche, e quindi le relative linee di influenza vengono ad annullarsi.

Caso 4a - Linea di influenza $m_S^{D\phi}$ del momento in S per distorsione rotazionale viaggiante

Assoggettata la trave ad una distorsione di rotazione relativa unitaria e positiva, si calcola il diagramma dei momenti, ottenendo la richiesta linea di influenza. Per la trave di Figura 43.26, doppiamente incastrata e con appoggio a due terzi della luce, si voglia tracciare la linea di influenza del momento per la sezione di incastro a sinistra, dovuta ad una distorsione rotazionale viaggiante.

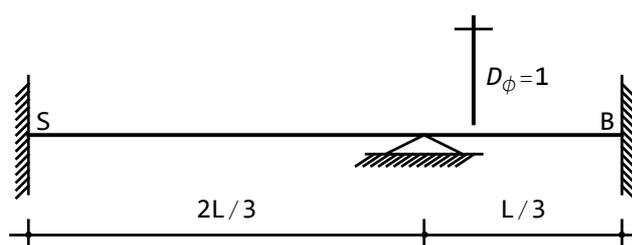


Figura 43.26: Trave doppiamente incastrata con appoggio a due terzi della luce

Per quanto detto, occorre imporre nell'incastro di sinistra una distorsione unitaria e positiva, ossia occorre imporre che sia:

$$D_{\phi 0} = 1 \rightarrow \Delta\phi_0 = -1 \rightarrow \phi_{des} - \phi_{sin} = -1 \rightarrow \phi(x_3 = 0) = -1 \quad (43.49)$$

e calcolare il risultante diagramma del momento. Si ha:

$$\begin{aligned} m_0^{D\phi} &= \frac{EI}{4L^2} (22L - 45x_3) \\ m_0^{D\phi} &= \frac{EI}{L^2} (-8L + 9x_3) \frac{2}{3}L \end{aligned} \quad (43.50)$$

nelle due campate. Graficamente, invece, si giunge al diagramma di Figura 43.27.

Caso 4b - Linea di influenza $t_S^{D\phi}$ del taglio in S per distorsione rotazionale viaggiante

Sulla stessa trave di Figura 43.26, si voglia ora tracciare la linea di influenza del taglio in mezzeria della prima campata (cfr. Figura 43.28), per effetto di una distorsione rotazionale viaggiante, ossia si calcoli il diagramma del momento dovuto ad una distorsione di scorrimento applicata in mezzeria della prima campata. Utilizzando la metodologia della linea elastica, in S bisognerà quindi imporre le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} D_{\eta S} = 1 &\rightarrow \Delta u_{2S} = -1 \rightarrow u_{2S}^{des} - u_{2S}^{sin} = -1 \\ \phi_S^{sin} &= \phi_S^{des} \end{aligned} \quad (43.51)$$

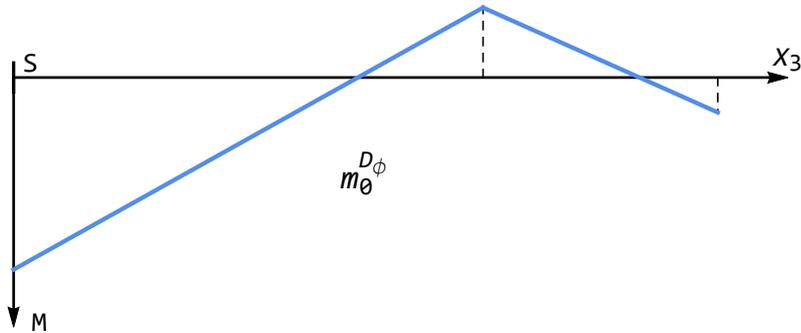


Figura 43.27: Linea di influenza del momento nell'incastro di sinistra per distorsione rotazionale viaggiante

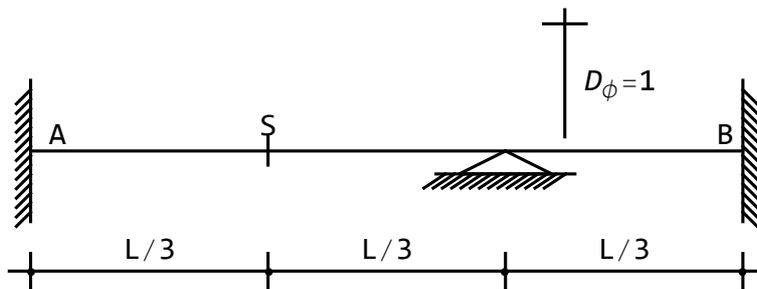


Figura 43.28: Trave doppiamente incastrata con appoggio a due terzi della luce: linea di influenza $t_S^{D_\phi}$

e le due condizioni di equilibrio:

$$M_S^{sin} = M_S^{des} \quad (43.52)$$

$$T_S^{sin} = T_S^{des} \quad (43.53)$$

Si ha, analiticamente:

$$t_S^{D_\phi} = \begin{cases} -\frac{9EI(10L - 27x_3)}{8L^3} & 0 \leq x_3 \leq \frac{2}{3}L \\ \frac{9EI(8L - 9x_3)}{2L^3} & \frac{2}{3}L \leq x_3 \leq L \end{cases} \quad (43.54)$$

mentre graficamente si ha il diagramma di Figura 43.29.

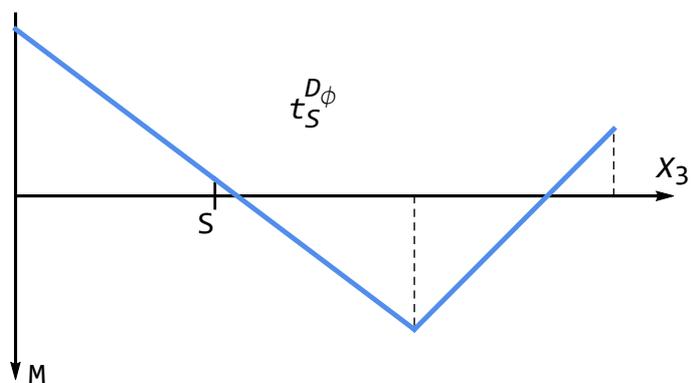


Figura 43.29: Linea di influenza del taglio nella sezione di mezzeria della prima campata per distorsione rotazionale viaggiante

Caso 4c - Linea di influenza $m_S^{D\eta}$ del momento in S per distorsione di scorrimento viaggiante

In questo penultimo caso, occorre assoggettare la trave ad una distorsione rotazionale concentrata in S , unitaria e positiva, e calcolare il risultante diagramma del taglio.

Caso 4d - Linea di influenza $t_S^{D\eta}$ del momento in S per distorsione di scorrimento viaggiante

In quest'ultimo caso, occorre assoggettare la trave ad una distorsione di scorrimento concentrata in S , unitaria e positiva, e calcolare il risultante diagramma del taglio.

Capitolo 44

I carichi assiali sulle travi

Nel Capitolo 31 si è iniziato lo studio della trave snella, o di Eulero–Bernoulli. In particolare, l'energia potenziale totale di una trave di lunghezza L , con sezione retta di area A , e momento di inerzia I , costituita da materiale omogeneo, linearmente elastico ed isotropo, con modulo di Young E , e soggetta ad una distribuzione di carico trasversale distribuito $p(z)$ ed una distribuzione di carico assiale distribuito $t(z)$, è stata calcolata come:

$$E_t = \frac{1}{2} \int_0^L EAu_3'^2(x_3) dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EIu_2''^2(x_3) dx_3 - \int_0^L p(x_3) u_2(x_3) dx_3 - \int_0^L t(x_3) u_3(x_3) dx_3 \quad (44.1)$$

A questa relazione si è giunti per via energetica, utilizzando le deformazioni lineari, ossia confondendo il tensore di Green–Lagrange con la parte simmetrica del gradiente di spostamento, oppure per via geometrica, scrivendo l'equilibrio di un concio *indeformato* soggetto ai carichi esterni ed interni. In questo livello di approssimazione, quindi, lo studio del comportamento flessionale della trave può disaccoppiarsi dallo studio del comportamento assiale.

In realtà, però, la deformazione flessionale della trave causa anche un accorciamento assiale, come può dedursi visivamente dalla Figura 44.1, che non sempre è possibile trascurare. Quando infatti la trave è caricata assialmente, l'accorciamento assiale dovuto alla deformazione flessionale farà compiere lavoro alle forze assiali, e quindi vi sarà un'aliquota supplementare di energia potenziale, che andrà debitamente introdotta nello studio delle linee elastiche.

Questo Capitolo sarà dedicato alla deduzione dell'energia potenziale di un carico assiale F , applicato all'estremo di destra di una trave rettilinea di lunghezza L , come riportato in Figura 44.1. Applicando poi il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale si dedurrà l'equazione differenziale della linea elastica con le opportune condizioni ai limiti.

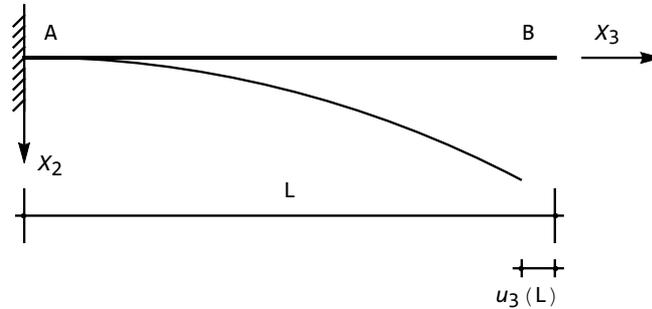


Figura 44.1: L'accorciamento assiale dovuto alla deformazione flessionale

44.1 L'energia potenziale del carico assiale

Si consideri un segmento di trave disteso lungo l'asse X_3 , di lunghezza dx_3 , che a seguito della deformazione si trasformerà in un segmento di lunghezza $d\xi_3$. La lunghezza del segmento deformato $d\xi_3$ potrà calcolarsi a partire da quanto illustrato nel Capitolo 14. In particolare, la lunghezza del segmento deformato è legato alla lunghezza del segmento indeformato attraverso la relazione:

$$|M'N'|^2 = |MN|^2 + 2\mathbf{ds}^T \mathbf{Dds} \tag{44.2}$$

Questa equazione deve essere specializzata, per tener conto che (cfr. Figura 44.2):

$$\begin{aligned} |M'N'| &= |d\xi_3| \\ |MN| &= |dx_3| = dx_3 \\ \mathbf{ds}^T &= (0, 0, dx_3) \end{aligned} \tag{44.3}$$

e quindi diventa:

$$|d\xi_3|^2 = dx_3^2 + 2d_{33}dx_3^2 = (1 + 2d_{33}) dx_3^2 \tag{44.4}$$

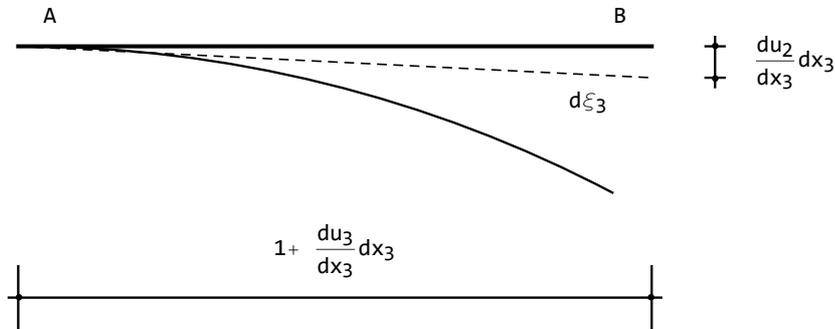
Inoltre, poichè la terna di spostamenti sarà:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= u_2(x_3) \\ u_3 &= u_3(x_2, x_3) \end{aligned} \tag{44.5}$$

la componente d_{33} del tensore di Green-Lagrange si scriverà:

$$d_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left(\frac{du_2}{dx_3} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3^2} \right)^2 \tag{44.6}$$

L'ipotesi fondamentale, a base della trattazione, è quella di *incomprimibilità* della trave durante la deformazione flessionale, per cui dovrà necessariamente


 Figura 44.2: Il segmento deformato $d\xi_3$ e le sue due componenti

risultare $|d\xi_3| = |dx_3|$, o, dalla (44.4):

$$d_{33} = 0 \quad (44.7)$$

Ne segue, dalla (44.7), la fondamentale relazione:

$$\left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2 = 1 \quad (44.8)$$

da cui subito:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \sqrt{1 - \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2} - 1 \quad (44.9)$$

Quest'ultima relazione può essere utilizzata per il calcolo della desiderata aliquota di energia potenziale del carico assiale, come illustrato in Figura 44.3. Ed infatti, poichè l'energia potenziale può calcolarsi come inverso del lavoro, si avrà:

$$P = Fu_3(L) = F \int_0^L \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 = F \int_0^L \left(\sqrt{1 - \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2} - 1 \right) dx_3 \quad (44.10)$$

ed utilizzando lo sviluppo in serie del binomio, si ha infine:

$$P = -\frac{F}{2} \int_0^L \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2 dx_3 = -\frac{F}{2} \int_0^L u_2'^2(x_3) dx_3 \quad (44.11)$$

44.2 La deduzione della linea elastica

Si vogliono ora studiare le configurazioni di equilibrio di una trave soggetta ad una forza di compressione F , applicando il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, e quindi annullando la variazione prima del funzionale:

$$E_t = \frac{1}{2} \int_0^L EI u_2''^2(x_3) dx_3 - \frac{F}{2} \int_0^L u_2'^2(x_3) dx_3 \quad (44.12)$$

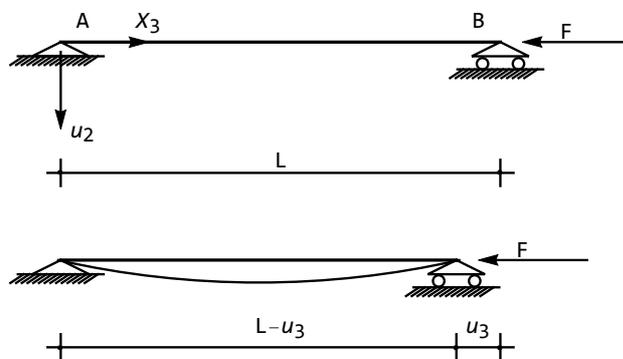


Figura 44.3: L'accorciamento assiale in una trave soggetta a carico di compressione

Come sempre, la variazione totale sarà data da:

$$\begin{aligned}
 \delta E_t &= E_t(u'_2 + \delta u'_2, u''_2 + \delta u''_2) - E_t(u'_2, u''_2) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L EI(u''_2 + \delta u''_2)^2 dx_3 - \frac{F}{2} \int_0^L (u'_2 + \delta u'_2)^2 dx_3 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L EIu''_2{}^2 dx_3 + \frac{F}{2} \int_0^L u'_2{}^2 dx_3 = \\
 &= \int_0^L EIu''_2 \delta u''_2 dx_3 - F \int_0^L u'_2 \delta u'_2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI \delta u''_2{}^2 dx_3 - \frac{F}{2} \int_0^L \delta u'_2{}^2 dx_3
 \end{aligned} \tag{44.13}$$

La variazione prima, da annullare, sarà allora:

$$\delta_1 E_t = \int_0^L EIu''_2 \delta u''_2 dx_3 - F \int_0^L u'_2 \delta u'_2 dx_3 = 0 \tag{44.14}$$

Occorre derivare due volte per parti il primo integrale, come del resto già fatto precedentemente, ed una volta il secondo integrale. Si giunge a scrivere:

$$\delta_1 E_t = \int_0^L (EIu''''_2 + Fu''_2) \delta u_2 dx_3 + [EIu''_2 \delta u'_2]_0^L + [(-Fu'_2 - EIu''''_2) \delta u_2]_0^L = 0 \tag{44.15}$$

Ne segue, per l'arbitrarietà della variazione δu_2 , che dovrà essere soddisfatta la seguente equazione differenziale:

$$EIu''''_2 + Fu''_2 = 0 \tag{44.16}$$

nell'intervallo $[0, L]$, con le condizioni ai limiti tali da annullare i termini finiti della (44.15). In particolare, è immediato verificare che l'unica condizione da modificare, rispetto a quanto detto nel caso classico di carichi trasversali, sarà la

condizione sull'annullarsi del taglio nell'estremo libero, dove questa volta dovrà essere:

$$EIu_2''' + Fu_2' = 0 \quad (44.17)$$

44.3 L'approccio geometrico

Analogamente a quanto detto nel caso classico di forze trasversali, è possibile anche ora utilizzare un approccio geometrico per giungere ai risultati del paragrafo precedente. Volendo calcolare l'effetto del carico assiale in presenza di deformazioni flessionali non nulle, è necessario scrivere le equazioni di equilibrio di un concio *deformato*, ossia estratto da una situazione del tipo di Figura 44.4, e non più di un concio indeformato.

Le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione intorno alla faccia di destra del concio conducono a:

$$-T(x_3) + T(x_3 + dx_3) + p(x_3) dx_3 = 0 \quad (44.18)$$

$$-T(x_3) dx_3 + N(x_3) du_2 - M(x_3) + M(x_3 + dx_3) - p(x_3) dx_3 \frac{dx_3}{2} = 0 \quad (44.19)$$

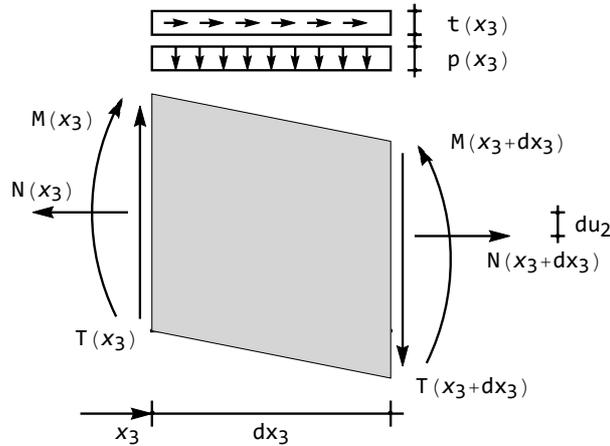


Figura 44.4: Il concio in configurazione deformatata

Utilizzando il solito sviluppo in serie, si può porre:

$$T(x_3 + dx_3) \approx T(x_3) + \frac{dT(x_3)}{dx_3} dx_3 \quad (44.20)$$

$$N(x_3 + dx_3) \approx N(x_3) + \frac{dN(x_3)}{dx_3} dx_3 \quad (44.21)$$

$$M(x_3 + dx_3) \approx M(x_3) + \frac{dM(x_3)}{dx_3} dx_3 \quad (44.22)$$

e quindi le equazioni precedenti divengono:

$$\frac{dT}{dx_3} + p = 0 \quad (44.23)$$

$$-T dx_3 + N du_2 + \frac{dM}{dx_3} dx_3 - p \frac{dx_3^2}{2} = 0 \quad (44.24)$$

L'ultimo termine della seconda equazione può trascurarsi, e dividendo per dx_3 si ha:

$$-T + N \frac{du_2}{dx_3} + \frac{dM}{dx_3} = 0 \quad (44.25)$$

Derivando rispetto a x_3 , supponendo N costante, ed utilizzando la (44.23), si ha:

$$N \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} + \frac{d^2 M}{dx_3^2} + p = 0 \quad (44.26)$$

Infine, utilizzando la ben nota relazione:

$$M = -EI \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} \quad (44.27)$$

si giunge all'equazione differenziale della linea elastica:

$$EI \frac{d^4 u_2}{dx_3^4} - N \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = p \quad (44.28)$$

coincidente con la (44.16) non appena si noti che lo sforzo normale N è pari a $-F$.

La condizione ai limiti sul taglio nell'estremo libero può suscitare delle perplessità. Si consideri tuttavia che nella stessa ottica che ha indotto a scrivere l'equazione differenziale della linea elastica utilizzando la configurazione deformata, occorre ora utilizzare la configurazione deformata anche per imporre l'equilibrio all'estremo libero tra il taglio e la forza assiale. Si ha quindi, come illustrato in Figura 44.5:

$$T_2(L) + F\phi(L) = 0 \quad (44.29)$$

giungendo quindi alla (44.17).

44.4 La soluzione dell'equazione differenziale

La (44.28) si può riscrivere convenientemente come:

$$\frac{d^4 u_2}{dx_3^4} + \alpha^2 \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = 0 \quad (44.30)$$

avendo introdotto il parametro positivo:

$$\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad (44.31)$$

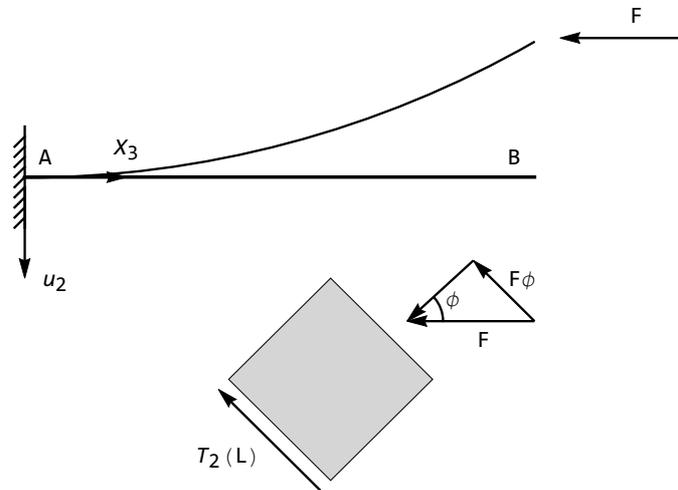


Figura 44.5: L'equilibrio all'estremo libero sulla configurazione deformata

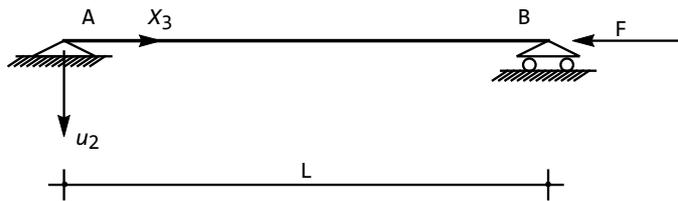


Figura 44.6: La trave appoggiata soggetta ad un carico assiale di compressione

ed il suo integrale generale è fornito da:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2 x_3 + C_3 \cos(\alpha x_3) + C_4 \sin(\alpha x_3) \quad (44.32)$$

Le quattro costanti di integrazione andranno determinate imponendo le condizioni ai limiti. Se ad esempio la trave si suppone appoggiata ad ambedue gli estremi, come in Figura 44.6 allora spostamenti e momenti flettenti dovranno essere nulli agli estremi. Dovrà essere, in altri termini:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2''(0) &= 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ u_2''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (44.33)$$

La derivata seconda dello spostamento (44.32) può calcolarsi facilmente

come:

$$u_2''(x_3) = -\alpha^2 C_3 \cos(\alpha x_3) - \alpha^2 C_4 \sin(\alpha x_3) \quad (44.34)$$

e quindi le (44.33) divengono:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ -\alpha^2 C_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 L + C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \\ -\alpha^2 C_3 \cos(\alpha L) - \alpha^2 C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \end{aligned} \quad (44.35)$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44.36)$$

E' questo un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite C_i , lineare ed omogeneo. Oltre alla soluzione banale, sempre presente, potranno aversi altre configurazioni di equilibrio non identicamente nulle se il determinante dei coefficienti si annulla. Dovrà quindi aversi:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \end{pmatrix} = 0 \quad (44.37)$$

e svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione secolare in α :

$$\sin(\alpha L) = 0 \quad (44.38)$$

con soluzione:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L} \quad (44.39)$$

ed $n \in \mathbb{N}$.

Se quindi la forza assiale attinge uno dei seguenti valori:

$$F_n = n\pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (44.40)$$

allora si può avere una deformata non nulla, di ampiezza non definita, la cui forma può essere dedotta calcolando le quattro costanti C_i .

La prima e la seconda delle (44.33) forniscono $C_1 = 0$ e $C_3 = 0$. Le altre due divengono:

$$\begin{aligned} C_2 L + C_4 \sin(\alpha_n L) &= 0 \\ C_4 \sin(\alpha_n L) &= 0 \end{aligned} \quad (44.41)$$

e quindi dovrà essere anche $C_2 = 0$, mentre C_4 resta non specificata. Le deformate saranno fornite (cfr.eqn. 44.32) da:

$$u_{2n}(x_3) = C_4 \sin(\alpha_n x_3) \quad (44.42)$$

ossia, in definitiva, saranno onde sinusoidali.

44.5 Il concetto di carico critico

Da un punto di vista pratico, i valori (44.40) del carico assumono importanza fondamentale, tale che essi vengono chiamati usualmente i *carichi critici* della trave. Ed infatti si consideri una trave soggetta ad una forza di compressione, che a partire da un valore basso possa crescere a piacimento.

Per bassi valori della forza F , minori del primo carico critico, la trave resta indeformata, con spostamenti identicamente nulli. Quando F raggiunge il valore del primo carico critico, improvvisamente e senza alcun preavviso sorge la possibilità di una deformata non nulla, di ampiezza non ricavabile con la presente trattazione, ma comunque diversa da zero. Il fenomeno, noto come *instabilità euleriana*, è tra i più pericolosi della meccanica strutturale, e come tale ad esso andrà rivolta particolare attenzione.

I valori successivi dei carichi critici hanno invece più limitato interesse pratico, perchè difficilmente potrà incrementarsi il valore del carico assiale oltre il primo carico critico, senza provocare lo sbandamento della trave, con la nascita della prima deformata non nulla.

44.6 Il calcolo del carico critico per differenti vincoli

La trave doppiamente incastrata

Per una trave incastrata ad ambedue gli estremi, come illustrato in Figura 44.7 spostamenti e rotazioni dovranno essere nulli agli estremi. Dovrà essere:

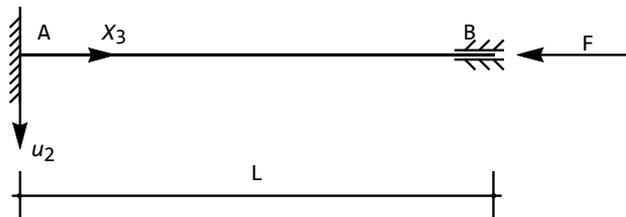


Figura 44.7: La trave incastrata soggetta ad un carico assiale di compressione

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ u_2'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (44.43)$$

La derivata prima dello spostamento (44.32) può calcolarsi facilmente come:

$$u_2'(x_3) = C_2 - \alpha C_3 \sin(\alpha x_3) + \alpha C_4 \cos(\alpha x_3) \quad (44.44)$$

e quindi le (44.43) divengono:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ C_2 + \alpha C_4 &= 0 \\ C_1 + C_2 L + C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \\ C_2 - \alpha C_3 \sin(\alpha L) + \alpha C_4 \cos(\alpha L) &= 0 \end{aligned} \quad (44.45)$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 1 & -\alpha \sin(\alpha L) & \alpha \cos(\alpha L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44.46)$$

E' questo un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite C_i , lineare ed omogeneo. Oltre alla soluzione banale, sempre presente, potranno aversi altre configurazioni di equilibrio non identicamente nulle se il determinante dei coefficienti si annulla. Dovrà quindi aversi:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 1 & -\alpha \sin(\alpha L) & \alpha \cos(\alpha L) \end{pmatrix} = 0 \quad (44.47)$$

e svolgendo i calcoli si ottiene l' equazione secolare in α :

$$2(\cos(\alpha L) - 1) + \alpha L \sin(\alpha L) = 0 \quad (44.48)$$

che può riscriversi, utilizzando le formule di bisezione:

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ \cos x &= 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 1 \end{aligned} \quad (44.49)$$

come:

$$\sin \left(\frac{\alpha L}{2} \right) \left[\frac{\alpha L}{2} \cos \left(\frac{\alpha L}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha L}{2} \right) \right] = 0 \quad (44.50)$$

Questa equazione sarà soddisfatta sia che valga la:

$$\sin \left(\frac{\alpha L}{2} \right) = 0 \quad (44.51)$$

sia la:

$$\frac{\alpha L}{2} \cos \left(\frac{\alpha L}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha L}{2} \right) = 0 \quad (44.52)$$

che si trasforma in:

$$\tan \left(\frac{\alpha L}{2} \right) = \frac{\alpha L}{2} \quad (44.53)$$

La prima equazione fornisce le radici:

$$\frac{\alpha_n L}{2} = n\pi \quad (44.54)$$

da cui subito la prima serie di carichi critici:

$$F_n = 4n^2\pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (44.55)$$

La seconda equazione, la (44.53), può essere risolta solo numericamente. Diagrammando in via preliminare la funzione si ha il grafico di Figura 44.8, che si ottiene attraverso il comando *Mathematica*:

`Plot[Tan[x]-x, {x, 0, 15}]`

ed ingrandendo la parte iniziale si evidenziano, come in Figura 44.9, le prime due radici. Il comando *Mathematica* è:

`Plot[Tan[x]-x, {x, 0, 10}]`

Identificati i due punti di nullo, essi possono calcolarsi attraverso le righe:

`FirstRoot = FindRoot[Tan[x]-x == 0, {x, 3, 5}]`

`FirstRoot = FindRoot[Tan[x]-x == 0, {x, 7, 8}]`

ottenendo $x = 4.49341$ ed $x = 7.72525$.

In corrispondenza di queste due radici si hanno i carichi critici:

$$\begin{aligned} F'_1 &= 4 \times 4.49341^2 \frac{EI}{L^2} \approx 80.76 \frac{EI}{L^2} \\ F'_2 &= 238.7 \frac{EI}{L^2} \end{aligned} \quad (44.56)$$

Il più basso carico critico, quello che, come detto, ha effettiva importanza pratica, sarà pertanto:

$$F_{cr} = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (44.57)$$

La forma della deformata corrispondente alle radici (44.55) si ottiene risolvendo il sistema omogeneo a determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2n\pi}{L} \\ 1 & L & \cos(2n\pi) & \sin(2n\pi) \\ 0 & 1 & -\frac{2n\pi}{L} \sin(2n\pi) & \frac{2n\pi}{L} \cos(2n\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44.58)$$

e quindi $C_1 = -C_3 = C$, e $C_2 = C_4 = 0$. La deformata è perciò data da:

$$u_2(x_3) = C \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{L} x_3 \right) \quad (44.59)$$

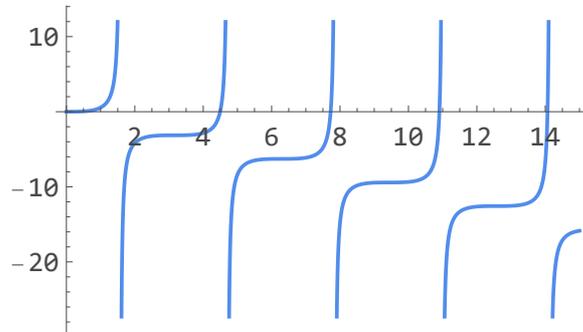


Figura 44.8: Il grafico dell'equazione secolare, come ottenuto da *Mathematica*

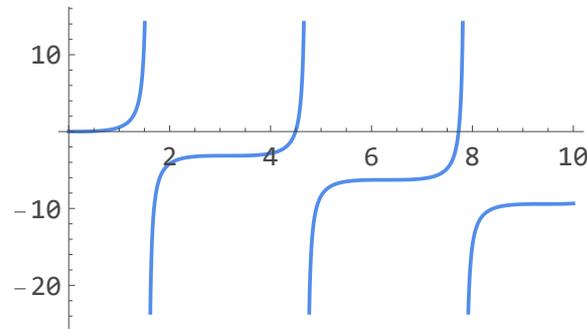


Figura 44.9: Uno zoom del grafico dell'equazione secolare

La trave a mensola

Per una trave incastrata a sinistra e libera a destra, come riportata in Figura 44.10, dovrà essere, come discusso precedentemente:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 u_2'(0) &= 0 \\
 u_2''(L) &= 0 \\
 u_2'''(L) + \alpha^2 u_2'(L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{44.60}$$

Occorrono ora le prime tre derivate della linea elastica:

$$\begin{aligned}
 u_2'(x_3) &= C_2 - \alpha C_3 \sin(\alpha x_3) + \alpha C_4 \cos(\alpha x_3) \\
 u_2''(x_3) &= -\alpha^2 C_3 \cos(\alpha x_3) - \alpha^2 C_4 \sin(\alpha x_3) \\
 u_2'''(x_3) &= \alpha^3 C_3 \sin(\alpha x_3) - \alpha^3 C_4 \cos(\alpha x_3)
 \end{aligned}
 \tag{44.61}$$

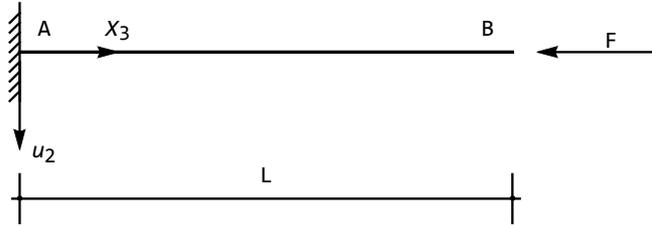


Figura 44.10: La trave a mensola soggetta ad un carico assiale di compressione

e quindi le (44.60) divengono:

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 0 \\
 C_2 + \alpha C_4 &= 0 \\
 C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \\
 \alpha^2 C_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{44.62}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{44.63}$$

E' questo un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite C_i , lineare ed omogeneo. Oltre alla soluzione banale, sempre presente, potranno aversi altre configurazioni di equilibrio non identicamente nulle se il determinante dei coefficienti si annulla. Dovrà quindi aversi:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{44.64}$$

e svolgendo i calcoli si ottiene l' equazione secolare in α :

$$\cos(\alpha L) = 0 \tag{44.65}$$

con radici:

$$\alpha_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi \tag{44.66}$$

da cui subito i carichi critici:

$$F_n = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 \frac{EI}{L^2} \tag{44.67}$$

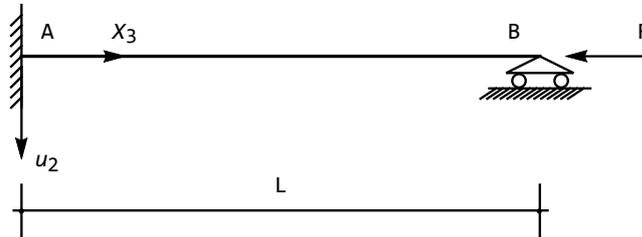


Figura 44.11: La trave incastrata–appoggiata soggetta ad un carico assiale di compressione

Il primo valore sarà quindi:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 L^2} \quad (44.68)$$

La forma della deformata corrispondente alle radici (44.67) si ottiene risolvendo il sistema omogeneo a determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_n L) & \sin(\alpha_n L) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44.69)$$

e quindi $C_1 = -C_3 = C$, e $C_2 = C_4 = 0$. La deformata è perciò data da:

$$u_2(z) = C \left(1 - \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \frac{x_3}{L} \right] \right) \quad (44.70)$$

La trave con incastro ed appoggio

Per una trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra (cfr. Figura 44.11) dovrà essere:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ u_2''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (44.71)$$

Occorrono ora le prime due derivate della linea elastica:

$$\begin{aligned} u_2'(x_3) &= C_2 - \alpha C_3 \sin(\alpha x_3) + \alpha C_4 \cos(\alpha x_3) \\ u_2''(x_3) &= -\alpha^2 C_3 \cos(\alpha x_3) - \alpha^2 C_4 \sin(\alpha x_3) \end{aligned} \quad (44.72)$$

e quindi le condizioni ai limiti divengono:

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 0 \\
 C_2 + \alpha C_4 &= 0 \\
 C_1 + C_2 L + C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \\
 C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0
 \end{aligned} \tag{44.73}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{44.74}$$

Dovrà ora aversi:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \end{pmatrix} = 0 \tag{44.75}$$

e svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione secolare in α :

$$\tan(\alpha L) = \alpha L \tag{44.76}$$

con radici da calcolare numericamente, come già del resto illustrato.

Il carico critico si scrive come:

$$F_{\text{cr}} = (4.49341)^2 \frac{EI}{L^2} \approx 20.19 \frac{EI}{L^2} \tag{44.77}$$

La forma della deformata corrispondente alle radici α_n della (44.76) si ottiene risolvendo il sistema omogeneo a determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_n \\ 1 & L & \cos(\alpha_n L) & \sin(\alpha_n L) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_n L) & \sin(\alpha_n L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{44.78}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned}
 C_4 &= C \\
 C_3 &= -C\alpha_n L \\
 C_2 &= -C\alpha_n \\
 C_1 &= \alpha_n L
 \end{aligned} \tag{44.79}$$

con deformata:

$$u_2(x_3) = C (\alpha_n (L - x_3) - \alpha_n L \cos(\alpha_n x_3) + \sin(\alpha_n x_3)) \tag{44.80}$$

Indice analitico

- Airy George Biddell, 170
allungamento percentuale, 97, 103
analogia di Mohr, 430
 carico fittizio, 430
 i vincoli, 431
 momento fittizio, 430
 taglio fittizio, 430
 trave ausiliaria, 431
angolo specifico di torsione, 261
 per sezioni a corona circolare, 269
 per sezioni circolari, 268
 per sezioni ellittiche, 271
appoggio, 12
 condizioni ai limiti, 312, 374
 intermedio, 374
asse di flessione
 nella flessione deviata, 239
 nella flessione retta, 231
asse di sollecitazione
 nella flessione deviata, 237
 nella flessione retta, 231
asse neutro
 nella flessione composta, 242
 nella flessione deviata, 238
 nella flessione retta, 226
assi centrali di inerzia, 192
 per una sezione ad L, 245
assi di torsione, 262
assi principali di inerzia, 192
assioma di Eulero, *vedi* assioma di separazione
assioma di separazione, 45
asta
 equazione differenziale della linea elastica, 315
 soggetta a carico distribuito, 315
 soggetta a forza concentrata, 317
baricentro
 definizione, 189
 per sezione circolare, 195
 per sezione rettangolare, 193
 per una sezione ad L, 243
Becchi Antonio, 41, 124
Beeckman Isaac, 120
Beltrami Eugenio, 115
Benvenuto Edoardo, 40, 50, 120, 124
Bernoulli Jacob, 299
Betti Enrico, 463
Bianchi Luigi, 116
bipendolo, 12, 24
 condizioni ai limiti, 313, 375
 interno, 381
Boscovich Ruggero Giuseppe, 40
Boussinesq Joseph, 214, 216
Bredt Rudolf, 289
Bridgman Percy Williams, 50
Capecchi Danilo, 41, 176
caratteristiche della sollecitazione esterna, 200
 relazioni tra le, 202
caratteristiche della sollecitazione interna, 202
carico critico, 497
 per trave a mensola, 501
 per trave appoggiata, 496
 per trave con incastro ed appoggio, 503
 per trave incastrata, 499
carrello, 12
Castigliano Alberto, 129
Cauchy Augustin-Louis, 41, 93, 122, 124, 252
Cauchy Augustin-Louis, 58, 155

- Cavallone Sergio, 176
cedibilità assiali, 453
cedibilità rotazionali, 453
cedimenti anelastici, 363, 452
cedimenti elastici, 365, 453
centro assoluto di rotazione, 9
Ceradini Giulio, 41
Cerchi di Mohr, 81
 costruzione, 84
 e direzioni principali, 88
 nella torsione, 264
 utilizzo, 84
Cerchi di Mohr principali, 88
cerniera, 12, 24
 condizioni ai limiti, 381
cerniera ideale, 13
Clapeyron Benoît Paul Émile, 155, 264, 446
Clebsch Alfred, 212
coefficiente di contrazione laterale, *vedi*
 coefficiente di Poisson
coefficiente di dilatazione termica, 423
coefficiente di Poisson, 141, 148
 limiti di validità, 151
 nella teoria dei Eulero–Bernoulli, 303
coefficienti di Chentsov, 142
coefficienti di influenza mutua del primo tipo, 142
coefficienti di influenza mutua del secondo tipo, 142
Colonnetti Gustavo, 176, 185, 464
condizioni di compatibilità, *vedi* equazioni di compatibilità
configurazione, 1
congruenza interna, *vedi* equazioni di compatibilità
convenzione sui segni di Otto Mohr, 82
coordinate lagrangiane, 2
coppie concentrate
 condizioni ai limiti, 394
coppie di sforzo, 47
corollari di Mohr, *vedi* analogia di Mohr
corona circolare
 angolo specifico di torsione, 269
 momenti di inerzia, 195
corpo rigido, 6
Cosserat Eugène–Maurice–Pierre, 47
Cosserat François, 47
costanti di Lamé, 146
costanti ingegneristiche, 141
Coulomb Charles Augustin, 251
curvatura, 228
 relazione approssimata momenti–curvatura, 231
 relazione momenti–curvatura, 228
curvatura anticlastica, 229
Davies Glyn A.O, 176
De Saint–Venant Adhémar–Jean–Claude Barré, 41, 43, 115
deformazione di un segmento, 103, 110
deformazioni
 componenti normali, 104
 componenti tangenziali, 105
 piccole, 109
deformazioni principali, 106
dilatazione cilindrica, 96
direzioni principali
 di tensione, 71
 di deformazione, 106
 per materiali isotropi, 148
Dirichlet Johann Peter Gustav Lejeune, 258, 268
distanza di estinzione, 215
distorsioni, 417
 concentrate, 417
 di Volterra, 417
 distribuite, 417
 linee di influenza, 464
distribuzioni, teoria delle, 43
doppio bipendolo, 13, 23
Duleau Alphonse J. C. B., 251
ellissoide di Lamé, *vedi* ellissoide delle tensioni
ellissoide di tensione, 76
energia complementare, 184
 variazione, 184
energia complementare totale, 185
 principio di stazionarietà, 185
energia di deformazione

- nel taglio, 284
- nella flessione fuori dal piano, 236
- nella flessione retta, 231
- nella torsione, 263
- nella trattazione approssimata del taglio, 296
- nello sforzo normale, 222
- proprietà di ortogonalità, 236
- energia elastica, 182
 - di un vincolo cedevole, 367
 - nelle travi, 216
 - variazione, 182
- energia potenziale dei carichi, 182
 - assiali, 492
- energia potenziale totale, 183
 - in presenza di vincoli cedevoli, 368
 - nella teoria di Timoshenko, 403
 - principio di stazionarietà, 183
- equazione dei tre momenti, 444
- equazione differenziale della linea elastica, 310
 - in presenza di carico assiale, 492
 - in presenza di distorsioni concentrate, 419
 - in presenza di distorsioni distribuite, 425
 - nella teoria di Timoshenko, 405
- equazione secolare, 67, 71, 107
- equazioni cardinali della statica, 18
- equazioni dell'equilibrio elastico, *vedi*
 - equazioni di Navier–Cauchy
- equazioni di Clapeyron, *vedi* equazione dei tre momenti
- equazioni di compatibilità, 114
 - in stato piano di spostamento, 163
 - in stato piano di tensione, 164
- equazioni di congruenza, 442
- equazioni di Navier–Cauchy, 154
 - per le travi, 210
- equazioni indefinite dell'equilibrio, 61, 126
 - nella torsione, 253
 - per le travi, 208
- estremo libero
 - condizioni ai limiti, 314
- Euler Leonhard, 45, 175, 299
- fattore di taglio, 296
 - nella sezione rettangolare, 298
- fattore di torsione, 259
 - nelle corone circolari, 269
 - nelle sezioni circolari, 268
 - nelle sezioni ellittiche, 271, 276
- Fichera Gaetano, 157, 215
- flessione composta, 241
 - asse neutro, 242
 - centro di sollecitazione, 241
 - formula trinomia, 241
- flessione deviata, 237
 - asse di flessione, 239
 - asse neutro, 238
 - formula binomia, 238
 - relazione tra asse di flessione ed asse neutro, 240
 - relazione tra asse di sollecitazione ed asse neutro, 239
- flessione fuori dal piano, 231
 - c.s.e., 234
 - c.s.i., 234
 - energia di deformazione, 236
 - spostamenti, 233
- flessione nel piano, 223
 - c.s.e., 225
 - c.s.i., 225
 - energia di deformazione, 231
 - formula di Navier, 226
 - spostamenti, 224
- flessione non uniforme, *vedi* taglio
- formula di Eulero
 - per i carichi critici, 496
- formula di Green–Riemann, 258, 264
- formula di Jourawsky, 292
- formula di Kharlab, 293
- formula di Navier
 - per la flessione fuori del piano, 235
 - per la flessione nel piano, 226
- forze concentrate
 - condizioni ai limiti, 393
- forze staticamente ammissibili, 449
- Fourier Jean Baptiste Joseph, 53
- Franciosi Vincenzo, 226
- Fresnel Augustin–Jean, 53
- funzione di Airy, 159, 169

- cubica, 172
 quadratica, 170
 funzione di taglio, 280
 funzione di tensione, *vedi* funzione di Airy
 funzione di torsione, 255
 nelle corone circolari, 269
 nelle sezioni circolari, 268
 nelle sezioni ellittiche, 269
 gradiente di deformazione, 96
 gradiente di spostamento, 93
 ipotesi di piccolo, 110
 scomposizione del, 95, 111
 grado di iperstaticità, 34
 grado di labilità, 33
 Green George, 42, 101, 124, 183, 258
 ipotesi di, 126
 Gurtin Morton E., 53, 183, 185
 Hooke Robert, 119
 apparato sperimentale di, 121
 Huygens Christiaan, 190, 244
 identità di Bianchi, 116
 Ieşan Dorin, 218
 incastro, 13
 condizioni ai limiti, 311
 ingobbimento, 260
 invarianti
 di tensione, 71
 di deformazione, 107
 ipotesi di Jourawsky, 291
 ipotesi molecolare, 123
 Jourawski Dmitrij Ivanovič, 289
 Kecs Wilhelm W., 43
 Kharlab V.D., 293
 Kirchhoff Gustav R., 157
 Kupffer A.T., 289
 Kurrer Karl–Eugen, 327
 labilità, *vedi* struttura labile
 Lagrange Joseph–Louis, 101
 Lamé Gabriel, 76, 146, 155
 Laplace Pierre–Simon, 41
 lastra sottile piana, 166
 lastre rettangolari, 170
 in flessione, 173
 in trazione, 172
 soggette a taglio semplice, 172
 legge di Hooke, 119
 generalizzata, 122
 in costanti ingegneristiche, 150
 inversa, 123, 147
 inversa in costanti ingegneristiche, 150
 nella teoria di Eulero–Bernoulli, 305
 nella teoria di Timoshenko, 402
 per le travi, 209
 per materiali anisotropi, 143
 per materiali isotropi, 145
 per stati piani di spostamento, 168
 per stati piani di tensione, 167
 simmetria maggiore, 132
 simmetrie minori, 131
 tensorialità della, 131
 leggi di Huygens, *vedi* teorema di Huygens
 Lekhnitskii Sergei Gheorgievich, 119
 linea di influenza
 classificazione, 466
 definizione, 466
 Love A.E.H. (Augustus Edward Hough), 183
 Martinez Alberto A., 251
 materiale auxetico, 151
 materiale iperelastico, 126
 materiale isotropo, 140, 145
 materiale linearmente elastico, 127
 materiale monoclinico, 132, 145
 materiale ortotropo, 133, 145
 materiale trasversalmente isotropo, 135, 145
 matrice cinematica, 27
 matrice di elasticità, 123
 inversa, 151
 simmetria della, 127
 matrice di rotazione, 187
 matrice statica, 33
 Maxwell James Clerk, 463

- metodo delle forze, 441
- metodo semi-inverso, 210
- Mizel Victor J., 53
- modulo di elasticità longitudinale, *vedi*
 - modulo di Young
- modulo di resistenza a taglio, 148
- modulo di Young, 141, 148
- Mohr Otto, 81
- momenti di inerzia
 - principali, 192
- momento centrifugo, 190
- momento d'inerzia polare
 - definizione, 190
- momento di inerzia
 - baricentrico, 190
 - centrale, 191
 - definizione, 190
 - per corona circolare, 195
 - per sezione circolare, 195
 - per sezione ellittica, 198
 - per sezione rettangolare, 193
 - per sezione triangolare, 196
 - per una sezione ad L, 244
- momento di inerzia polare, 258
- momento flettente
 - definizione, 202
- momento risultante, 18
- momento statico, 188
- momento torcente
 - definizione, 202
- Muskhelishvili Nikoloz, 41, 115
- Musschenbroeck Pieter van, 40
- Müller-Breslau Heinrich, 449

- Navier Claude-Louis, 41, 122, 155, 226
- Newton Isaac, 40, 124
- Noll Walter, 119

- ortogonalità delle direzioni principali, 72
- Ostrogradsky Mikhail Vasilyevich, 289

- parallelepipedo elementare, 61
- Parlett Beresford N., 73
- pendolo, 12, 22
- Pessoa Fernando, 399

- Petty William, 120
- piano di flessione
 - nella flessione retta, 231
- piano di Mohr, 82
- piano di sollecitazione
 - nella flessione retta, 231
- piano neutro, 226
- piccoli spostamenti, 3
- planeità delle sezioni rette, 228
- Poisson Siméon-Denis, 41, 122, 148, 155
- polo, 6
- postulato di De Saint-Venant
 - conseguenze, 214
 - enunciato storico, 211
 - formulazione energetica, 215
- potenziale elastico, 126
 - per materiali isotropi, 148
- pressoflessione, *vedi* flessione composta
- principio degli spostamenti virtuali, 180
 - nella teoria di Eulero-Bernoulli, 304
 - per le travi, 452
- principio dei lavori virtuali
 - in notazione matriciale, 179
 - interpretazione meccanica, 177
 - per corpi deformabili, 175
 - per corpi rigidi, 17
 - per distorsioni distribuite, 452
 - per il calcolo delle iperstatiche, 457
 - per il calcolo di spostamenti, 453
 - per le travi di Eulero-Bernoulli, 449
 - per le travi di Timoshenko, 449
 - per vincoli cedevoli, 452
- principio delle forze virtuali, 181
 - per le travi, 452
- principio di azione locale, 119
- principio di Betti, 463
 - linee di influenza di spostamenti per forze viaggianti, 467
- principio di Colonnetti, 464
 - linee di influenza di caratteristiche per forze viaggianti, 472
 - linee di influenza di spostamenti per distorsioni viaggianti, 480
- principio di determinismo, 119

- principio di indifferenza del riferimento materiale, 119
 principio di reciprocità di Maxwell, 463
 principio di solidificazione, 61
 principio di sovrapposizione, 157, 237, 457
 nel metodo delle forze, 441
 principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale
 in presenza di carichi assiali, 491
 nella teoria di Eulero–Bernoulli, 309
 principio di unicità, 157, 210
 principio di Volterra, 465
 linee di influenza di caratteristiche per distorsioni viaggianti, 485
 principio generale di reciprocità, 461
 problema debole di De Saint–Venant, 205
 problema forte di De Saint–Venant, 200
 problema misto della teoria dell'elasticità, 153

 raggio di curvatura, 229
 reazioni vincolari, 19
 regola di Cramer, 378
 relazione momenti–curvatura, 231
 relazione momento–taglio, 304
 relazione taglio–carichi applicati, 309
 relazioni di Castigliano, 129
 Riemann Georg Friedrich Bernhard, 258
 rigidezza
 assiale, 367
 rotazionale, 367
 rigidità torsionale, 261
 rigidità, vincolo di, 4
 risultante, 18
 Roller Jean, 58
 Ruta Giuseppe, 41

 Saada Adel S., 96
 sconnessione
 doppia, 22
 semplice, 24
 sezione circolare, 194
 momenti di inerzia, 195
 sezione ellittica, 197
 momenti di inerzia, 198
 sezione triangolare, 195
 baricentro, 195
 momenti di inerzia, 196
 sforzo assiale, *vedi* sforzo normale
 sforzo normale, 219
 c.s.e., 221
 c.s.i., 221
 definizione, 202
 energia di deformazione, 222
 spostamenti, 220
 sforzo normale eccentrico, *vedi* flessione composta, 241
 sistema isostatico equivalente, 441
 Slivker V., 293
 solai, 444
 solaio
 linee di influenza, 474
 solido di Cauchy, 47
 solido polare, 47
 spostamenti da deformazione pura, 113
 spostamenti geometricamente ammissibili, 176, 449
 spostamento, 93
 stato monoassiale di deformazione, 161
 stato monoassiale di tensione, 159
 stato piano di spostamento, 162
 equazioni di compatibilità, 163
 equazioni di Navier–Cauchy, 163
 tensioni, 162
 stato piano di tensione, 164
 deformazioni, 164
 equazioni di compatibilità, 164
 Sternberg Eli, 216
 Stokes George, 113
 struttura cinematicamente determinata, 28
 struttura iperstatica, 34
 struttura isostatica, 34
 struttura labile, 28, 33

 taglio, 277
 c.s.e., 282
 c.s.i., 282
 definizione, 202

- divergenza delle tensioni tangenziali, 286
- energia di deformazione, 284
- funzione di taglio, 280
- nella teoria di Eulero–Bernoulli, 304
- rotore delle tensioni tangenziali, 285
- sollecitazione aggiuntiva di torsione, 287
- spostamenti, 280
- tensioni, 283
- trattazione approssimata, *vedi* teoria di Jourawsky
- tensione normale, 48, 58
- tensione tangenziale, 48, 59, 77
- tensione, definizione di, 47
- tensioni principali, 69
- tensioni staticamente ammissibili, 176
- tensioni, componenti speciali di, 49
- tensioni, simmetria del tensore delle, 63
- tensore di Green–Lagrange, 101, 110, 489, 490
- Teodorescu Petre P., 43
- teorema di Cauchy–Poisson, 53, 67, 69, 75, 88, 125, 203
- teorema di Clapeyron, 264
- teorema di Green–Riemann, *vedi* formula di Green–Riemann
- teorema di Huygens, 190, 244
- teorema di Toupin, 217
- teoria della trave, *vedi* teoria di Eulero–Bernoulli
- teoria di Eulero–Bernoulli, 299
 - in presenza di carico assiale, 489
 - ipotesi di base, 301
 - spostamenti, 302
- teoria di Jourawsky, 289
 - energia di deformazione, 296
 - fattore di taglio, 296
 - ipotesi a base della, 291
 - la sezione rettangolare, 296
- teoria di Timoshenko
 - area efficace a taglio, 403
 - coefficiente correttivo, 399
 - equazioni della linea elastica, 405
 - in presenza di distorsioni, 425
 - ipotesi di base, 401
 - limiti di validità, 399
 - spostamenti, 402
 - tensioni, 402
 - trave a mensola, 406
 - trave appoggiata, 411
- tetraedro elementare, 53
- Timoshenko Stephen, 289
- torsione
 - angolo specifico di, 261
 - assi di torsione, 262
 - c.s.e., 258
 - cerchi di Mohr, 264
 - divergenza delle tensioni tangenziali, 262
 - energia di deformazione, 263
 - fattore di torsione, 259
 - integrale di Dirichlet, 258, 268
 - nelle sezioni a corona circolare, 269
 - nelle sezioni circolari, 267
 - nelle sezioni ellittiche, 269
 - problema di Dini–Neumann, 257
 - rigidità torsionale, 261
 - rotore delle tensioni tangenziali, 262
 - spostamenti, 255
 - spostamenti da ingobbimento, 260
- Toupin Richard, 216
- trattazione approssimata del taglio, *vedi* teoria di Jourawsky
- trave
 - a mensola, di Timoshenko, 406
 - appoggiata, di Timoshenko, 411
 - asse, 199
 - definizione, 199
 - fibre, 199, 261
 - mantello, 199
 - sezione retta, 199
- trave a mensola
 - in presenza di carichi assiali, 494
- travi ad una campata, 321, 347
 - trave a mensola, 331, 349
 - trave con appoggio e bipendolo, 342
 - trave con incastro e bipendolo, 338, 359

- trave con incastro ed appoggio im-
perfetto, 369
- trave doppiamente appoggiata, 328,
353
- trave doppiamente incastrata, 322
- trave incastrata–appoggiata, 334,
355
- travi continue
 - soluzione con l'equazione dei tre
momenti, 444
- Trovalusci Patrizia, 41
- Truesdell Clifford A., 39, 119, 149
- variazione angolare, 98, 105, 110
- variazioni termiche, 423
 - alla Navier, 423
 - assiali, 423
 - flessionali, 423
- Villaggio Piero, 43, 216
- vincoli olonomi, 1
- vincolo doppio, 12
 - interno, 24
- vincolo semplice, 11
 - interno, 22
- Voigt Woldemar, 41
- Volterra Vito, 465
- von Mises Richard, 216
- Weisbach Julius, 327
- Williams William O., 53
- Young Thomas, 148
- Zanaboni Osvaldo, 216