Lezioni di Scienza delle Costruzioni

Claudio Franciosi

30 luglio 2018

Indice

Elenco delle figure

Prefazione

Nell'ambito delle discipline di Ingegneria, la Scienza delle Costruzioni è una delle poche materie, se non l'unica, a non aver cambiato nome nel corso degli ultimi decenni. La logica dell'insegnamento non è stata stravolta, ma ciò non vuol dire che i suoi contenuti non abbiano subito mutamenti, cancellazioni ed aggiunte, in conseguenza delle due grandi rivoluzioni degli ultimi anni, l'introduzione dei metodi numerici, ed ultimamente l'utilizzo del calcolo simbolico.

Prima dell'avvento dei personal computer, e si parla di non più di trent'anni fa, era obbligatorio soffermarsi su metodologie grafiche, e limitarsi a semplici esempi strutturali, che comportavano ridottissimi oneri computazionali: un sistema di dieci equazioni lineari era già un formidabile ostacolo. In seguito, la diffusione capillare di potenti computer ha permesso di affrontare problemi di complessità computazionali sempre crescenti, consentendo il calcolo di autovalori per matrici di grandi dimensioni, la soluzione di sistemi di equazioni di centinaia di incognite, il disegno automatizzato di deformate e caratteristiche.

L'ovvia conseguenza è stata il ridimensionamento dell'analisi cinematica attraverso la ricerca dei centri di rotazione, e della ricerca delle reazioni vincolari per via grafica, a favore di un approccio analitico che prevede la scrittura (e la soluzione) delle equazioni di vincolo, nel primo caso, o delle equazioni di equilibrio, nel secondo. Intere discipline, come la statica grafica, sono di fatto scomparse, e pur interessanti teorie, come la teoria dell'ellisse di elasticità, sono state abbandonate. Il metodo delle forze ha visto un declino vistoso, dovuto alla difficoltà di automatizzazione della scelta delle incognite iperstatiche, mentre il metodo degli spostamenti ha vissuto — ed in larga parte vive — un periodo d'oro sotto forma di analisi matriciale delle strutture, e di metodo degli elementi finiti.

Più recente, e forse più profonda, è la rivoluzione dovuta all'introduzione dei grandi software di calcolo simbolico, in grado di calcolare limiti, derivate ed integrali di grande complessità, di affrontare sistemi di equazioni lineari restituendo la soluzione in forma simbolica, di risolvere problemi di autovalori e problemi ai limiti di dimensioni inimmaginabili fino ad un decennio fa. Ciò ha implicato la rinascita di metodi di analisi strutturale che sembravano condannati all'oblio, ed ha permesso l'applicazione di altre metodologie a classi strutturali molto ampie. E' classico il caso della metodologia della linea elastica, in cui occorre scrivere e risolvere un gran numero di equazioni di equilibrio e congruenza, e che ora può essere agevolmente applicato anche ai telai di una certa complessità geometrica, e non solo a travi di due o tre campate. E' anche possibile, con poco sforzo, introdurre nel caso le deformabilità assiali, in modo da poter verificare la loro influenza sul comportamento strutturale. Contemporaneamente, tante metodologie *ad hoc*, che trovavano la loro ragion d'essere nella semplificazione dei calcoli, sono condannate ad un sicuro oblio, così come tante formule approssimate.

Se quanto detto ha avuto influenza profonda sui contenuti del corso di Scienza delle Costruzioni, non minore è stato l'impatto, in Italia, delle numerose riforme universitarie, che si sono succedute nel tempo, talvolta ad intervalli molto ravvicinati, talvolta contraddicendosi l'un l'altra. Nella mia esperienza didattica, ho iniziato con un corso annuale, inserito al terzo anno di un curriculum quinquennale, passando poi ad un corso semestrale di pari impegno didattico. La riforma che ha condotto all'abbandono della laurea quinquennale, a vantaggio della laurea di primo e di secondo livello, ha costretto a spostare il corso di Scienza delle Costruzioni al secondo anno di studi, con le immaginabili conseguenze sul piano didattico, in quanto sono venute a mancare parecchie conoscenze di analisi matematica e fisica matematica. Nel corso degli ultimi anni ho potuto (dovuto) sperimentare corsi semestrali da sei crediti e da nove, corsi annuali da otto e nove crediti, ed ultimamente il mio corso si svolge su un percorso di centoventi ore, e dodici crediti. Ad ognuno di questi corsi è dovuto forzatamente corrispondere un cambio, talvolta radicale, dei contenuti e del modo di affrontarli. Solo per citare un esempio, non è certo possibile dimostrare le equazioni indefinite dell'equilibrio utlizzando il teorema della divergenza, ed è quindi necessario far ricorso alla scrittura diretta delle equazioni di equilibrio sul cosiddetto parralelepipedo elementare.

Ho l'impressione che attualmente le acque si stiano calmando, e forse ci aspetta un periodo di stabilità: ciò mi ha indotto a dare forma definitiva al materiale didattico che da oltre dieci anni è disponibile sul mio sito Internet, e che ha subíto nel tempo varie trasformazioni. Esso é quindi il risultato finale di svariate revisioni, cancellazioni ed aggiunte, parecchie delle quali suggerite dagli studenti che si sono susseguiti negli anni: ad essi il mio sincero ringraziamento.

Mi sia infine permesso di ringraziare l'ateneo di Basilicata, che mi ha garantito per lungi anni alcuni privilegi che uno studioso di Scienza delle Costruzioni è ben qualificato ad apprezzare: equilibrio e stabilità.

Introduzione

Alcuni decenni fa, i testi di Scienza delle Costruzioni erano tanto voluminosi da dover essere suddivisi in più tomi, totalizzando migliaia di pagine: Camillo Guidi scrive cinque volumi, per un totale di 1415 pagine, Odone Belluzzi si limita a quattro voumi, per un totale di ben 2617 pagine, mentre Gustavo Colonnetti sintetizza la materia in due volumi e 1038 pagine. Più recentemente, Riccardo Baldacci opera la stessa scelta, suddividendo il testo in due volumi, di complessive 1151 pagine, mentre i trattati di Alfredo Sollazzo e di Leone Corradi Dell'Acqua sono ambedue divisi in tre volumi, così come il recente testo di Alberto Carpinteri.

La scuola napoletana ha costantemente accresciuto il volume del materiale di studio, dal singolo volume di Carlo Luigi Ricci, di 545 pagine ai tre volumi di Adriano Galli (per complessive 1095 pagine) ed ai cinque volumi in sei tomi della Scienza delle Costruzioni di mio padre Vincenzo Franciosi: 2844 pagine, incorporando la meccanica delle terre, la teoria dei ponti, la plasticitá, e la teoria della stabilitá dell'equilibrio.

Quel periodo è passato, e quelli che potremmo definire "gli anni ruggenti della Scienza delle Costruzioni" sono definitivamente tramontati, e dal grande corpus della disciplina madre sono nati i corsi di Tecnica delle Costruzioni, Geotecnica, Costruzioni di Ponti, Teoria della Plasticità, e tanti altri.

Cosa è rimasto, quale nocciolo duro del corso di Scienza? Sicuramente lo studio del solido elastico tridimensionale, la teoria della trave secondo i dettami di De Saint–Venant, lo studio delle strutture intelaiate piane, attraverso la teoria di Eulero–Bernoulli, e poco altro. In quest'ambito, però, i moderni sviluppi delle tecnologie hanno imposto una profonda riscrittura dei testi: è, ad esempio, sempre più sentita l'esigenza di uscire dall'ambito lineare, ed affrontare l'analisi della tensione e della deformazione senza confondere la configurazione deformata con quella deformata, così come non sembra più sufficiente limitarsi alla ipotesi di elasticità lineare, per giunta svolta per solidi isotropi ed omogenei.

Sorge quindi la necessità di dare maggiore attenzione ai materiali anisotropi ed ai materiali funzionalemnte graduati, mentre l'abbandono della ipotesi di linearità porta ad una maggiore enfasi alla teoria generale delle equazioni costitutive.

Allo stesso modo, sembra ormai imprescindibile dedicare attenzione alle teorie delle travi di ordine superiore, a partire dalla teoria di Timoshenko, che è ormai uno standard per gli approcci numerici agli elementi finiti.

Infine, il recente irrompere delle nanotecnologie impone di introdurre almeno i fondamenti delle teoria nonlocale dell'elasticità di Eringen, che peraltro mostra interessanti analogie con l'antica teoria delle travi soggette a distorsioni distribuite.

La scelta che mi è sembrata didatticamente più naturale ha comportato un primo volume, di Lezioni propriamente dette, in cui vengono presentati gli argomenti classici, nel modo più piano possibile, ed un secondo volume, di Complemeneti, in cui saranno inserite le generalizzazioni appena illustrate.

Più in dettaglio, in questo volume sono riportate una quarantina di Lezioni, quante se ne possono ragionevolmente presentare in un corso da 12 crediti, ed a cui vanno a sommarsi le Esercitazioni.

In una prima parte, ossia nei primi sei capitoli, si parla dell'analisi statica e cinematica del corpo rigido, come necessaria premessa allo studio del solido deformabile. Anche se argomenti simili sono di pertinenza della Fisica Matematica, o almeno lo erano per i vecchi corsi di Meccanica Razionale, ho preferito sintetizzare le nozioni utili al resto del corso, sia per esigenze di completezza, sia per uniformare le notazioni. Inoltre, ci si è limitati a particolari tipi di vincolo, si sono forniti solo pochi elementi relativi al solido tridimensionale, si è cercato di scendere in dettaglio solo per i solidi del tipo trave. Altri sei Capitoli sono dedicati all'analisi dello stato tensionale di un solido deformabile, rinunciando a qualsiasi complicazione matematica che non fosse strettamente necessaria: ad esempio, le equazioni indefinite dell'equilibrio sono dedotte imponendo direttamente l'equilibrio del parallelepipedo elementare, e la ricerca delle tensioni principali è introdotta come ricerca della massima tensione normale in un punto.

I tre successivi Capitoli riguardano lo stato deformativo, con ovvia enfasi sulle deformazioni lineari e sulla decomposizione dello spostamento. Si passa poi alle relazioni costitutive, limitatamente alle leggi di Hooke, e passando poi subito al caso isotropo, per poi concludere con le leggi dell'equilibrio elastico in termini di spostamento. L'esame di alcuni stati particolari di tensione e deformazione offrono l'opportunità di una prima applicazione pratica della teoria presentata. Il Capitolo successivo chiude la seconda parte, presentando alcuni principi variazionali ed energetici, in un approccio che segue da vicino il libro di J.Nečas e I.Hlaváček: *Mathematical Theory of Elastic and Elasto–Plastic Bodies: An Introduction*, Elsevier, 1981, pp. 60–66.

La terza parte, dedicata alla teoria della trave di De Saint-Venant, si apre con un Capitolo preliminare, destinato ad introdurre alcune nozioni di geometria delle aree, che saranno poi necessarie nel seguito: baricentro, momenti statici e di inerzia, leggi di trasformazione dei momenti. Si prosegue con due Capitoli in cui si definisce il solido trave, e si specializzano i risultati generali per tener conto della geometria del solido, e della sua condizione di carico, introducendo anche le ipotesi di De Saint–Venant sullo stato tensiuonale, ed illustrando il postulato di De Saint–Venant. Si è scelto di riportare lunghe citazioni, dello stesso De Saint–Venant e di altri autori, in quanto ritengo che esse chiariscano le motivazioni alla base della teoria meglio di molte moderne trattazioni. I successivi sei capitoli sono una dettagliata esposizione dei casi semplici della teoria della trave, ossia estensione, flessione, torsione e taglio (flessione non uniforme). In ciascuno di questi casi si è partiti da una ipotesi sullo stato tensionale, per poi dedurre le deformazioni e gi spostamenti, e trarre infine le caratteristiche della sollecitazione esterna ed interna. Questo approccio permette di evitare la lunga e complessa procedura di integrazione delle equazioni dell'equilibrio elastico, e contemporaneamente non costringe ad assumere *a priori* le terne di spostamento.

La quarta ed ultima parte è dedicata alla teoria della trave, nella sua classica forma di Eulero–Bernoulli, e nella forma più sofisticata di Timoshenko. In ambedue i casi si deducono le equazioni differenziali che reggono il problema dell'equilibrio attraverso i metodi geometrici ed i metodi variazionali, per poi illustrare in dettaglio le condizioni ai limiti ed i possibili carichi agenti sulle travi stesse. A questo proposito, una certa attenzione è dedicata alle distorsioni, il cui utilizzo permetterà poi di far rientrare la teoria delle linee di influenza nell'ambito della teoria della linea elastica.

Un ultimo Capitolo è classicamente riservato ad alcuni cenni relativi alla teoria di Eulero per la trave caricata di punta.

Colophon

Il testo è stato originariamente scritto in *Mathematica*, il noto software di Stephen Wolfram, sotto forma di Lezioni per il corso di Scienza delle Costruzioni, tutte le formule sono state generate automaticamente dallo stesso programma, e successivamente — ove il caso — modificate per questioni di estetica. Le figure sono state ottenute, salvo casi sporadici, ancora una volta utilizzando *Mathematica*, e poi esportate in formato .eps.

Le Lezioni poi sono state salvate in formato .tex, e combinate in un unico file LaTeX[1] opportunamente editato.

[1] Leslie Lamport: LaTeX: *A Document Preparation System*, Addison–Wesley, 1986

Capitolo 1

La cinematica del corpo rigido

Si ricapitolano alcune nozioni di cinematica dei sistemi di punti materiali, al fine di fornire un collegamento con quanto già noto, uniformando allo stesso tempo le notazioni con quanto seguirà.

1.1 Configurazioni e vincoli

Si consideri un sistema di N punti materiali $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots P^{(N)}$. In un sistema di riferimento $(0, X_1, X_2, X_3)$ ciascun punto $P^{(j)}$ è identificato dalle sue coordinate x_1, x_2, x_3, e l'insieme delle $3N$ coordinate si dice una *configurazione* del sistema di punti materiali. In generale, le $3N$ coordinate possono variare arbitrariamente in una certa regione dello spazio, sicchè il sistema possiede $3N$ *gradi di libertà*, e può assumere ∞^{3N} possibile configurazioni.

Si consideri ora il caso, più frequente, di un sistema *vincolato*, in cui le coordinate dei punti sono costrette ad obbedire ad alcune relazioni analitiche, dette condizioni di vincolo. Più in particolare, considereremo nel seguito solo vincoli *olonomi* e *bilaterali*, esprimibili attraverso equazioni del tipo:

$$f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

Non verrano mai considerati vincoli *anolonomi*, esplicitamente dipendenti dal tempo, o vincoli *unilaterali*, traducibili in disequazioni.

Si assuma, in generale, che il sistema considerato sia soggetto ad s condizioni di vincolo, esprimibili attraverso s equazioni nelle $3N$ coordinate del sistema:

$$f_i\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}\right) = 0 \qquad i = 1, \ldots s \tag{1.2}$$

ed inoltre, si assuma che queste s equazioni siano indipendenti, intendendo con ciò che tra le funzioni f_i non esista alcuna dipendenza funzionale del tipo:

$$\mathcal{F}\left(f_1, f_2, \ldots f_s\right) = 0 \tag{1.3}$$

Se le s condizioni di vincolo sono indipendenti, allora si dirà che il sistema ha $3N - s$ gradi di libertà, e solo $3N - s$ coordinate potranno essere fissate ad arbitrio: le restanti coordinate dovranno invece soddisfare le condizioni di vincolo. Se invece esistono p condizioni del tipo (1.3), allora il sistema avrà $3N - (s - p)$ gradi di libertà.
Nota - Per riconoscere se le s condizioni di vincolo (1.2) sono indipendenti, si può costruire la matrice Jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1^{(1)}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2^{(1)}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3^{(1)}} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3^{(N)}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1^{(1)}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2^{(1)}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3^{(1)}} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3^{(N)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_s}{\partial x_1^{(1)}} & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_2^{(1)}} & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_3^{(1)}} & \dots & \dfrac{\partial f_s}{\partial x_3^{(N)}} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

con s righe e $3N$ colonne, ed $s \leq 3N$.
Se J ha rango massimo, ossia rango pari ad s, allora le equazioni di vincolo sono indipendenti. Se invece il rango di J non è massimo, ma è pari ad $s - p$, allora esisteranno p relazioni funzionali tra le s equazioni di vincolo.

1.2 Le coordinate Lagrangiane

In un sistema con $3N - s$ gradi di libertà, occorrono $3N - s$ variabili per poter descrivere le configurazioni del sistema stesso. Tuttavia, non è necessario che queste variabili coincidano con gli spostamenti degli N punti del sistema, basta che esse siano in grado di determinare univocamente le configurazioni. Nasce così il concetto di coordinate generalizzate, o *coordinate lagrangiane* q_i, $i = 1, \dots, 3N - s$, legate alle coordinate fisiche attraverso equazioni del tipo:

$$x_1^{(i)} = x_1^{(i)} \left(q_1, q_2, \dots q_{3N-s}\right) \tag{1.5}$$

Un esempio classico è quello di un punto M appartenente ad un piano, e costretto a mantenersi a distanza r dall'origine (cfr. Figura 1.1). Si ha quindi un sistema ad un solo grado di libertà, ad esempio la coordinata orizzontale x_1 del punto. La componente verticale deve essere calcolata di conseguenza tenendo conto dell'equazione di vincolo:

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \tag{1.6}$$

Tuttavia, è più opportuno introdurre la coordinata lagrangiana rappresentata dall'angolo θ che la congiungente l'origine col punto forma con l'asse X_1. Ad ogni valore di θ corrisponde la configurazione definita da:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\,\cos(\theta) \\ x_2 &= r\,\sin(\theta) \end{aligned} \tag{1.7}$$

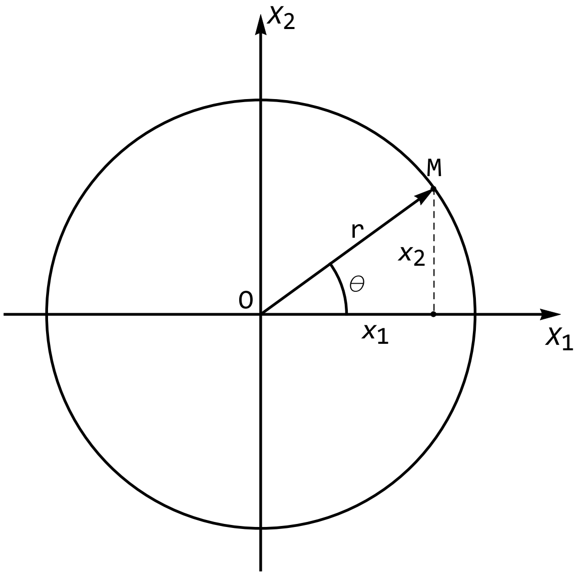


Figura 1.1: Il punto M giace nel piano, ed è vincolato ad appartenere alla circonferenza di raggio r. Esso ha perciò un solo grado di libertà

1.3 L'ipotesi di piccoli spostamenti

Si consideri ora un punto materiale M, di coordinate x_i, e si ipotizzi che a seguito di una qualsiasi causa, esso si porti in M', di coordinate ξ_i. Si definisce *spostamento* di M il vettore $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{MM'}$, di componenti $u_i = \xi_i - x_i$. Spesso, inoltre, si ipotizzerà che lo spostamento del punto M possa considerarsi "piccolo", nel senso che le coordinate di M' potranno convenientemente esprimersi come:

$$\xi_i = x_i + du_i \tag{1.8}$$

ossia $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{du}$, e lo spostamento $\boldsymbol{du}$ andrà considerato infinitesimo.

Nell'ambito dei piccoli spostamenti, le condizioni di vincolo andranno poi adeguatamente semplificate, linearizzando le relative equazioni. Ad esempio, si consideri ancora una volta l'esempio precedente, con l'equazione di vincolo (1.6). Essa deve valere sia per il punto M sia per il suo corrispondente punto spostato M', per cui dovrà anche aversi:

$$(x_1 + du_1)^2 + (x_2 + du_2)^2 = r^2 \tag{1.9}$$

Svolgendo i quadrati si ha:

$$x_1^2 + du_1^2 + 2x_1du_1 + x_2^2 + du_2{}^2 + 2x_2du_2 = r^2 \tag{1.10}$$

Semplificando, le parti finite si cancellano, in base alla (1.6), ed i termini quadratici in du_1 e du_2 possono trascurarsi rispetto alle parti lineari. Si ha infine:

$$x_1 du_1 + x_2 du_2 = 0 \tag{1.11}$$

Tale relazione può anche scriversi:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \tag{1.12}$$

ed esprime l'ortogonalità tra il raggio vettore $\overrightarrow{OM}$ ed il vettore spostamento del punto M. Ciò significa che il punto M, in una approssimazione lineare, si muove lungo la tangente al cerchio, come riportato in Figura 1.2.

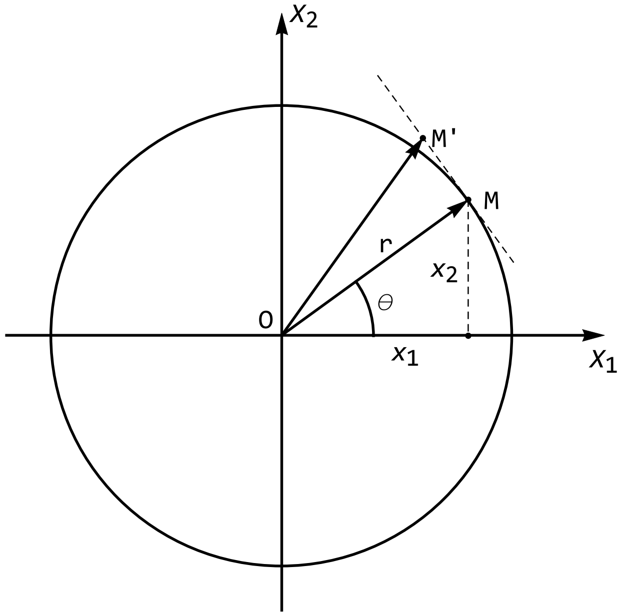


Figura 1.2: Se gli spostamenti sono piccoli, il raggio vettore ed il vettore spostamento devono ritenersi ortogonali

1.4 L'ipotesi di rigidità

Un vincolo di particolare importanza è il cosiddetto vincolo di rigidità, che impone che i punti del sistema in esame conservino la distanza che inizialmente li separa.

Siano allora M ed N due punti di coordinate (m_1,m_2,m_3) ed (n_1,n_2,n_3), (cfr. Figura 1.3) e sia d_{MN} la distanza tra di loro, per cui:

$$\left(n_1 - m_1\right)^2 + \left(n_2 - m_2\right)^2 + \left(n_3 - m_3\right)^2 = d_{MN}^2 \tag{1.13}$$

Se ora M si sposta in M' ed N in N', e se ipotizziamo che tali spostamenti siano piccoli, le coordinate di M' saranno $(m_1 + dm_1, m_2 + dm_2, m_3 + dm_3)$ e le coordinate di N' saranno $(n_1 + dn_1, n_2 + dn_2, n_3 + dn_3)$. La distanza tra M' ed N', per l'ipotesi di rigidità resterà pari a d_{MN}, e quindi:

$$\begin{split}(n_1 + dn_1 - m_1 - dm_1)^2 + (n_2 + dn_2 - m_2 - dm_2)^2 + \\ (n_3 + dn_3 - m_3 - dm_3)^2 = d_{MN}^2\end{split} \tag{1.14}$$

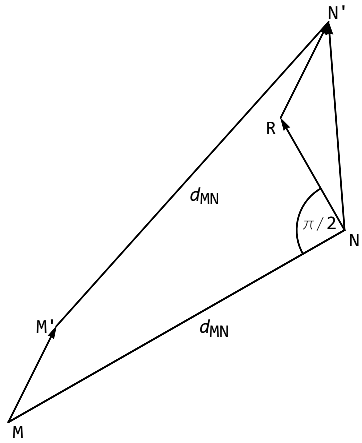


Figura 1.3: Il vincolo di rigidità: $RN' = MM'$ e quindi $NR = NN' - MM'$

Svolgendo i quadrati, si ha:

$$\begin{split}\sum_{i=1}^{3} \left(n_i^2 + dn_i^2 + m_i^2 + dm_i^2 + 2n_i dn_i - 2n_i m_i - 2n_i dm_i - \right. \\ \left. 2m_i dn_i - 2dn_i dm_i + 2m_i dm_i\right) = d_{MN}^2\end{split} \tag{1.15}$$

ed eliminando le parti finite, sfruttando la (1.13):

$$\begin{split}\sum_{i=1}^{3} \left(dn_i^2 + dm_i^2 + 2n_i dn_i - 2n_i m_i - 2n_i dm_i - \right. \\ \left. 2m_i dn_i - 2dn_i dm_i + 2m_i dm_i\right) = 0\end{split} \tag{1.16}$$

Trascurando i termini quadratici in dm_i e dn_i si giunge a scrivere:

$$\sum_{i=1}^{3} (n_i dn_i - n_i m_i - n_i dm_i - m_i dn_i - dn_i dm_i + m_i dm_i) = 0 \tag{1.17}$$

ossia, infine:

$$\sum_{i=1}^{3} (n_i - m_i)(dn_i - dm_i) = 0 \tag{1.18}$$

In termini vettoriale, sarà quindi:

$$\left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\right) \cdot \left(\overrightarrow{NN'} - \overrightarrow{MM'}\right) = 0 \tag{1.19}$$

e poichè $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$, la relazione precedente esprime l'ortogonalità tra il vettore $\overrightarrow{MN}$ ed il vettore spostamento relativo $\overrightarrow{NN'}$-$\overrightarrow{MM'}$:

$$\overrightarrow{MN} \cdot \left(\overrightarrow{NN'} - \overrightarrow{MM'}\right) = 0 \tag{1.20}$$

1.5 Sistemi di punti con vincoli di rigidità

Si consideri un sistema di N punti materiali, con $N \geq 3$, e si ipotizzi che ciascun punto sia vincolato rigidamente. Si dimostrerà ora che tale sistema ha 6 gradi di libertà, indipendentemente dal numero N di punti del sistema.

Ed infatti, si parta da un sistema di tre punti materiali, per cui si hanno $3N = 9$ gradi di libertà, in assenza di vincoli. Poichè poi esistono tre vincoli di rigidità, il sistema con tre punti ha sei gradi di libertà.

Si aggiunga ora un quarto punto, che aggiunge al sistema tre gradi di libertà, ma poi sottrae tre gradi di libertà, corrispondenti ai vincoli di rigidità tra il punto aggiunto ed i tre punti di partenza. Quindi anche per $N = 4$ il sistema ha sei gradi di libertà.

Aggiungendo un altro punto, si introducono altri tre gradi di libertà, e si possono considerare quattro equazioni di vincolo. Tuttavia, è immediato riconoscere che — a parte casi eccezionali — una di queste equazioni è dipendente, e quindi ancora una volta il sistema avrà sei gradi di libertà. In generale, ogni volta che si introduce un punto nel sistema, si incrementano i gradi di libertà di tre, e si possono scrivere tre equazioni di vincolo indipendenti.

1.6 Il corpo rigido

Un corpo rigido può essere riguardato come un insieme di infiniti punti materiali collegati tra loro da vincoli di rigidità, in modo tale da imporre che la mutua distanza tra due qualsiasi punti del corpo rimanga inalterata. Estendendo il precedente ragionamento al caso in cui N va all'infinito, è immediato dedurre che un corpo rigido ha nello spazio sei gradi di libertà.

E' spesso importante specializzare quanto detto finora al caso bidimensionale, in cui i punti sono obbligati a giacere su un piano. In tal caso il sistema di N punti materiali avrebbe $3N - N = 2N$gradi di libertà, in quanto per ciascun punto si potrebbe scrivere l'equazione che lo vincola ad appartenere al piano. Inoltre, il corpo rigido (o meglio, la superficie rigida) ha nel piano tre gradi di libertà.

Per identificare nel modo più conveniente le sei coordinate lagrangiane relative ad un corpo rigido, si scelga ora arbitrariamente un punto P (detto *polo*), e si scriva il vincolo di rigidità che lega il suddetto polo P al generico punto P_i del corpo in esame. Riscrivendo la (1.20) si ha:

$$\overrightarrow{PP_i} \cdot \left(\overrightarrow{P_iP_i'} - \overrightarrow{PP'}\right) = 0 \tag{1.21}$$

che può geometricamente interpretarsi come condizione di ortogonalità tra la congiungente il polo ed il punto P_i (ossia $\overrightarrow{PP_i}$) e lo spostamento relativo del punto P_i rispetto al polo. Tale condizione di ortogonalità può anche scriversi:

$$\overrightarrow{P_iP_i'} - \overrightarrow{PP'} = \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} \times \overrightarrow{PP_i} \tag{1.22}$$

con $\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}$ vettore arbitrario. Lo spostamento del generico punto P_i può allora scriversi come:

$$\overrightarrow{P_iP_i'} = \overrightarrow{PP'} + \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} \times \overrightarrow{PP_i} \tag{1.23}$$

Per esprimere scalarmente tale espressione, si consideri che a primo membro avremo le tre componenti dello spostamento (infinitesimo) del punto P_i :

$$\overrightarrow{P_iP_i'} = \begin{pmatrix} du_1^{(i)} \\ du_2^{(i)} \\ du_3^{(i)} \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

che il vettore $\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}$ ha componenti:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\phi_1 \\ \mathrm{d}\phi_2 \\ \mathrm{d}\phi_3 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

e che il vettore $\overrightarrow{PP_i} = \overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP}$ ha componenti:

$$\overrightarrow{PP_i} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} - x_1 \\ x_2^{(i)} - x_2 \\ x_3^{(i)} - x_3 \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

Ne segue:

$$\begin{pmatrix} du_1^{(i)} \\ du_2^{(i)} \\ du_3^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{d}\phi_3 & \mathrm{d}\phi_2 \\ \mathrm{d}\phi_3 & 0 & -\mathrm{d}\phi_1 \\ -\mathrm{d}\phi_2 & \mathrm{d}\phi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} - x_1 \\ x_2^{(i)} - x_2 \\ x_3^{(i)} - x_3 \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

Per dare un significato fisico al vettore $\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}$, si consideri il caso piano, per cui la relazione precedente si semplifica in:

$$\begin{pmatrix} du_1^{(i)} \\ du_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{d}\phi_3 \\ \mathrm{d}\phi_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} - x_1 \\ x_2^{(i)} - x_2 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

ossia:

$$
\begin{aligned}
du_1^{(i)} &= du_1 - \mathrm{d}\phi_3 \left(x_2^{(i)} - x_2\right) \\
du_2^{(i)} &= du_2 + \mathrm{d}\phi_3 \left(x_1^{(i)} - x_1\right)
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

Ora, dalla Figura 1.4 si evince facilmente che il vettore spostamento relativo $\overrightarrow{P_iP_i'} - \overrightarrow{PP'}$, indicato in Figura con $\overrightarrow{AP_i'}$, ha modulo pari a:

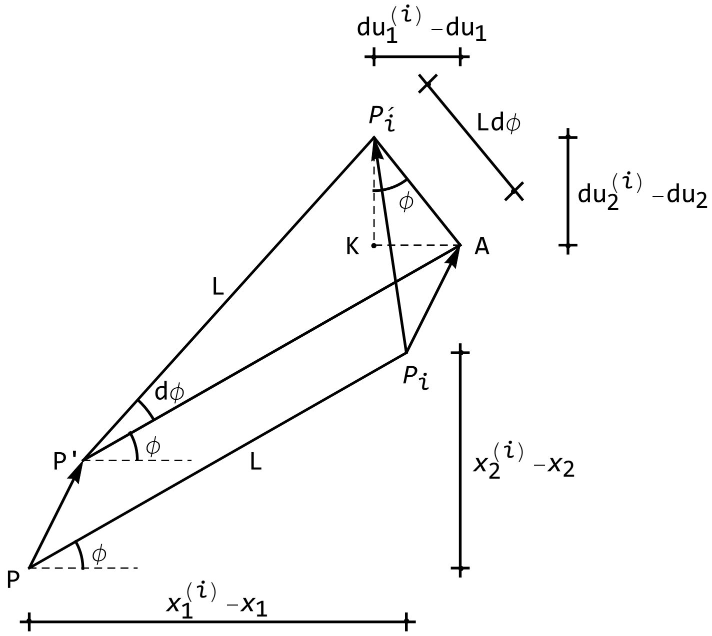


Figura 1.4: Lo spostamento rigido infinitesimo come somma di una traslazione PP' ed una rotazione intorno a P'

$$
AP_i' = L\mathrm{d}\phi \tag{1.30}
$$

dove L è la lunghezza del segmento PP_i e $\mathrm{d}\phi$ è la variazione dell'angolo ϕ che lo stesso segmento PP_i forma con l'asse orizzontale. Le componenti del vettore di spostamento relativo saranno allora fornite da:

$$
\begin{aligned}
du_1^{(i)} - du_1 &= -L\,\mathrm{d}\phi\,\sin(\phi) \\
du_2^{(i)} - du_2 &= L\,\mathrm{d}\phi\,\cos(\phi)
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

Ma è anche:

$$
\begin{aligned}
L\sin(\phi) &= x_2^{(i)} - x_2 \\
L\cos(\phi) &= x_1^{(i)} - x_1
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

e quindi le (1.31) si scrivono:

$$
\begin{aligned}
du_1^{(i)} - du_1 &= -\mathrm{d}\phi \left(x_2^{(i)} - x_2 \right) \\
du_2^{(i)} - du_2 &= \mathrm{d}\phi \left(x_1^{(i)} - x_1 \right)
\end{aligned}
\tag{1.33}
$$

permettendo di dare un significato fisico a $\mathrm{d}\phi_3$: la rotazione del segmento PP_i intorno a P nel piano di normale x_3. Ne segue ancora che:
- *un generico spostamento piano infinitesimo di un corpo rigido può considerarsi composto da una traslazione rigida e da una rotazione intorno ad un asse normale al piano*

Tale spostamento può anche riguardarsi come una rotazione intorno ad un punto C, detto *centro assoluto di rotazione,* identificato come intersezione — in P e P_i' — delle normali ai vettori spostamento PP' e P_iP_i'. Tale rotazione ha ampiezza, riferendosi alla Figura 1.5, pari a:

$$
\mathrm{d}\phi' = \frac{\mid PP' \mid}{\mid CP \mid} = \frac{\mid P_iP_i' \mid}{\mid CP_i \mid}
\tag{1.34}
$$

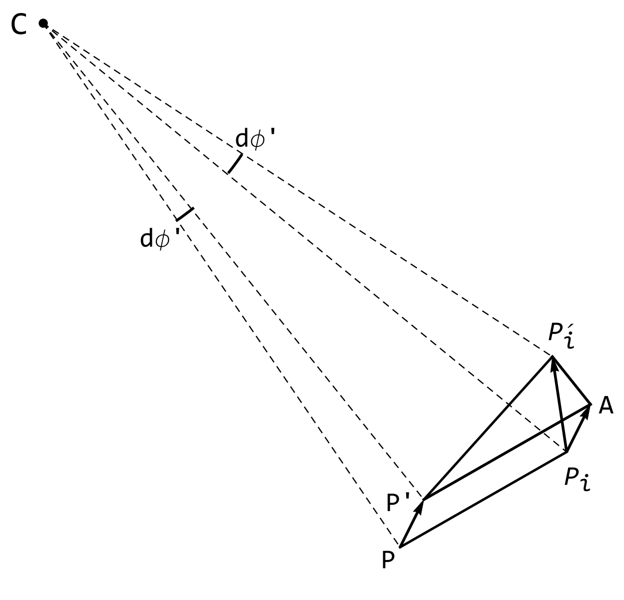


Figura 1.5: Lo spostamento rigido come rotazione intorno al centro istantaneo di rotazione C

In generale, per un corpo rigido tridimensionale può dirsi che un qualsiasi spostamento infinitesimo può riguardarsi come somma di tre traslazioni lungo tre assi coordinati, e tre rotazioni intorno alle rette parallele agli assi e passanti per il punto assunto come polo.

Capitolo 2

I vincoli

Proseguendo nello studio della cinematica del corpo rigido, si vuole fornire in questo Capitolo una classificazione dei possibili vincoli agenti su un corpo rigido, limitatamente al caso piano, che peraltro comprende la maggioranza degli schemi strutturali. Inoltre, i vincoli considerati saranno olonomi, lisci e bilaterali.

2.1 I vincoli piani

Nel piano, il corpo rigido ha tre gradi di libertà, due traslazioni secondo due assi di riferimento, ed una rotazione intorno ad un asse ortogonale al piano, e passante per il polo di riferimento. Se si vuol classificare cinematicamente i vincoli, è quindi ovvio che potranno definirsi vincoli semplici, doppi o tripli, a seconda che essi sopprimano uno, due o tre gradi di libertà al corpo rigido.

2.1.1 I vincoli semplici e la loro rappresentazione meccanica

Si consideri il corpo rigido S, e lo si voglia vincolare nel punto A generico attraverso un vincolo semplice, ossia un vincolo che sopprima un solo grado di libertà. Le tre possibilità immediate sono espresse dalle tre equazioni:

$$\begin{aligned} u_{1A} &= 0 \\ u_{2A} &= 0 \\ \phi_A &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nel primo caso, illustrato nella prima colonna di Figura 2.1, il punto A non può avere spostamenti in orizzontale, e quindi esso è costretto a scorrere lungo l'asse verticale, mentre nel secondo caso sono gli spostamenti verticali ad essere proibiti, e quindi il punto dovrà scorrere in orizzontale. Più in generale, un'equazione di vincolo impone al punto vincolato l'appartenenza ad una retta inclinata genericamente di un angolo α rispetto all'orizzontale, sicchè le sue

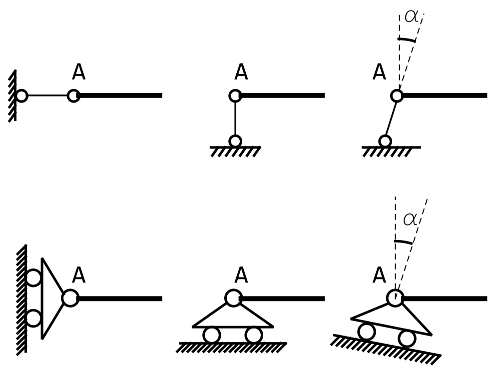


Figura 2.1: I vincoli semplici ed i loro modelli meccanici: in prima colonna il vincolo $u_{1A}= 0$, in seconda colonna $u_{2A} = 0$, in terza $u_{2A} = u_{1A} \tan(\alpha)$

componenti di spostamento dovranno obbedire alla relazione geometrica:

$$u_{2A} = u_{1A} \tan(\alpha) \tag{2.2}$$

Il modello meccanico dei vincoli ora esposti è rappresentato da un pendolo, il cui asse è orientato ortogonalmente alla retta su cui il punto è obbligato a scorrere (prima riga della Figura 2.1), oppure da un carrello con piano di scorrimento parallelo alla retta di vincolo (seconda riga della stessa Figura).

L'ultimo tipo di vincolo permette le traslazioni in qualsiasi direzione, ma proibisce al corpo S di ruotare. Del suo modello meccanico si parlerà alla fine del capitolo.

2.1.2 I vincoli doppi e la loro rappresentazione meccanica

Un vincolo doppio deve, per definizione, eliminare due gradi di libertà, e quindi si hanno due possibilità: un vincolo che proibisce ambedue le traslazioni, lasciando libera la rotazione, oppure un vincolo che proibisce una traslazione e la rotazione, lasciando libero il punto di traslare lungo una direzione. Nel primo caso si parla di *appoggio*, o *cerniera esterna*, nel secondo di *bipendolo*.

L'appoggio, o cerniera

Si consideri il corpo S, e si voglia vincolare un suo punto A in modo da impedire qualsiasi traslazione. E' evidente che basterà imporre che siano nulle le traslazioni secondo due assi ortogonali, che converrà scegliere paralleli agli assi coordinati. Le corrispondenti equazioni di vincolo sono quindi:

$$\begin{aligned} u_{1A} &= 0 \\ u_{2A} &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

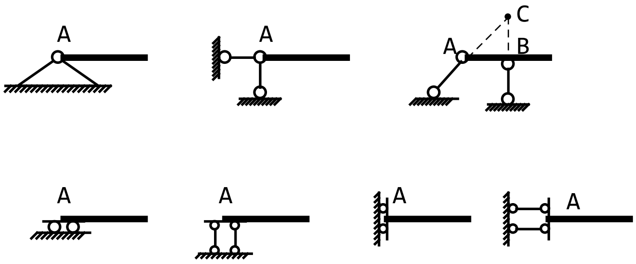


Figura 2.2: I vincoli doppi ed i loro modelli meccanici

Il modello meccanico dell'appoggio è riportato in Figura 2.2. E' immediato realizzare che lo stesso vincolo può rappresentarsi attraverso la presenza contemporanea di due pendoli ad asse verticale ed orizzontale. D'altro canto, quest'ultima rappresentazione offre la possibilità di realizzare una *cerniera ideale*, come illustrato nella stessa Figura 2.2: il corpo non può traslare, ma può solo ruotare intorno al punto ideale C situato all'intersezione tra gli assi dei due pendoli.

Il bipendolo

Il secondo tipo di vincolo doppio proibisce la traslazione lungo una retta, e la rotazione. Meccanicamente, può indicarsi con un bipendolo, come indicato in Figura 2.2, e può realizzarsi attraverso una coppia di pendoli ad asse parallelo tra loro, ed ortogonale alla retta lungo cui può traslare il punto vincolato.

2.1.3 I vincoli tripli e la loro rappresentazione meccanica

Un vincolo triplo impedisce al punto A le tre possibilità di movimento, e quindi può tradursi analiticamente nelle tre equazioni:

$$\begin{aligned} u_{1A} &= 0 \\ u_{2A} &= 0 \\ \phi_A &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Tale tipo di vincolo è meccanicamente rappresentato come un incastro, e può intendersi equivalente alla contemporanea presenza di tre pendoli ad assi non concorrenti in un punto (proprio od improprio) (cfr. Figura 2.3).

2.1.4 Sul doppio bipendolo

Il modello meccanico del vincolo semplice che proibisce la rotazione, permettendo le traslazioni, può essere ora illustrato come in Figura 2.3, giustificando così anche il nome di doppio bipendolo ad esso assegnato.

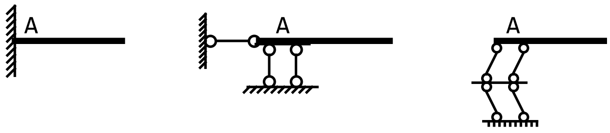


Figura 2.3: Il vincolo triplo, ed il doppio bipendolo

2.2 Le reazioni vincolari

Ad ogni vincolo deve corrispondere una forza che sia in grado di far rispettare il vincolo stesso. Ne segue che il vincolo semplice che proibisce le traslazioni orizzontali è equivalente ad una forza di intensità tale da annullare gli spostamenti orizzontali, e poichè essa può essere vista come l'azione del dispositivo di vincolo sulla trave, la si chiamerà *reazione vincolare*.

Del tutto analogamente, un carrello a piano di scorrimento orizzontale può essere sostituito da una reazione verticale, di valore incognito, capace di annullare gli spostamenti verticali, ed un carrello a piano di scorrimento inclinato corrisponde ad una reazione incognita diretta secondo la normale al piano di scorrimento stesso. Infine, il doppio bipendolo può essere considerato equivalente ad una *coppia reattiva*, che annulla le rotazioni. Si giunge quindi alla rappresentazione statica dei vincoli semplici illustrata in Figura 2.4.

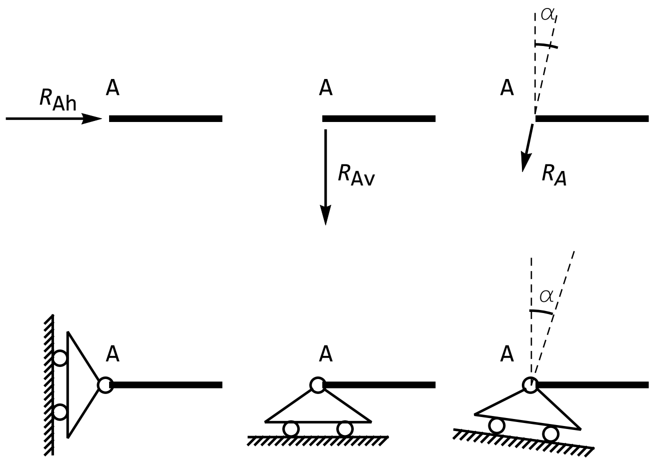


Figura 2.4: Carrelli a piano di scorrimento verticale, orizzontale o inclinato, e loro equivalente statico

I vincoli doppi, dal canto loro, impongono due condizioni cinematiche, e sono equivalenti a due forze/coppie reattive. Così, l'appoggio equivale a due forze reattive dirette secondo gli assi, ed il bipendolo ad una reazione — diretta secondo l'asse del bipendolo — e ad una coppia reattiva. Equivalentemente, e talvolta più utilmente, le due forze nell'appoggio possono pensarsi composte in un'unica forza, passante per l'appoggio, ma di inclinazione incognita, mentre il bipendolo potrà essere sostituito da una forza la cui inclinazione è nota, coincidendo con la normale al piano di scorrimento dei pendoli, ma la cui effettiva posizione resta incognita.

Infine, l'incastro deve essere sostituito da due reazioni ed una coppia. Componendo le due reazioni in un'unica forza inclinata di un angolo incognito, può pensarsi che l'incastro reagisca con una forza passante per esso, ed inclinata di un angolo incognito, e con una coppia. oppure ancora, con una forza di cui non è nota l'inclinazione, e non è noto il punto di applicazione. Tutto ciò è sintetizzato nelle Figure 2.5-2.6

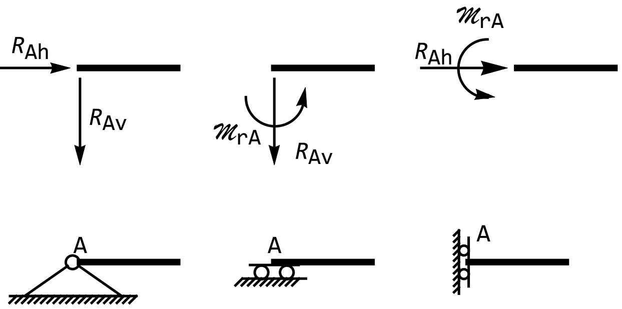


Figura 2.5: Appoggio e bipendolo, e loro equivalente statico

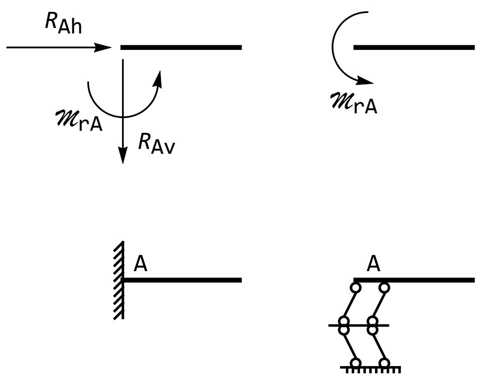


Figura 2.6: Incastro e doppio bipendolo, e loro equivalente statico

Capitolo 3

La statica del corpo rigido

In questa lezione si sintetizzano alcuni risultati di statica del corpo rigido, a partire da un enunciato assiomatico del principio dei lavori virtuali, da cui vengono dedotte le equazioni cardinali della statica.

3.1 Il principio dei lavori virtuali

Si consideri un corpo rigido S, soggetto ad un insieme di M forze $\boldsymbol{F}^{(i)}$. Le condizioni di vincolo cui il corpo S è soggetto siano esprimibili tramite equazioni, e quindi si sia in presenza di vincoli bilaterali. Inoltre, si ipotizzi che i vincoli siano *lisci*, ossia privi di attrito.

Definizione 1. *Si definisce spostamento virtuale del corpo S un insieme di spostamenti infinitesimi dei punti del corpo che sia compatibile con le condizioni di vincolo, compresa la condizione di rigidità.*

Definizione 2. *Si definisce lavoro virtuale della generica forza* $\boldsymbol{F}$*, per effetto dello spostamento virtuale* $\boldsymbol{\delta u}$ *del suo punto di applicazione, il prodotto scalare:*

$$\delta L = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\delta u} \tag{3.1}$$

Si accetta, quale assioma fondante della statica del corpo rigido, il seguente:

Teorema 1. ***(Principio dei lavori virtuali)****: Si consideri un corpo rigido S vincolato con vincoli lisci e bilaterali, soggetto alle forze* $\boldsymbol{F}^{(i)}$*. Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del corpo rigido nella configurazione* C_0 *è che il lavoro virtuale delle forze applicate sia nullo per tutti i possibili spostamenti virtuali a partire da* C_0

Si ricorda anche che, ai fini del calcolo del lavoro virtuale, è possibile sostituire al sistema di forze applicate un qualsiasi altro insieme di forze equivalente, ossia con la stessa risultante e lo stesso momento risultante.

3.2 Le equazioni cardinali della statica

Si consideri ancora un corpo rigido S soggetto ad un insieme di M forze $\boldsymbol{F}^{(i)}$, e siano $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^{(i)}$ gli spostamenti virtuali degli M punti di applicazione delle forze. Il lavoro virtuale sarà allora fornito da:

$$\delta\mathrm{L} = \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{F}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^{(i)} \tag{3.2}$$

Si scelga ora un punto arbitrario O da assumere come polo, e si utilizzi quanto detto finora per esprimere gli spostamenti virtuali in funzione delle tre traslazioni del polo, e delle tre rotazioni:

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}^{(i)} = \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} + \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} \times \overrightarrow{OP_i} \tag{3.3}$$

essendosi indicato con P_i il punto di applicazione della i–ma forza. Introducendo la (3.3) nella (3.2) si ottiene:

$$\delta\mathrm{L} = \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{F}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} + \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{F}^{(i)} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} \times \overrightarrow{OP_i} = \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} \cdot \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{F}^{(i)} + \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} \cdot \sum_{i=1}^{M} \overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{F}^{(i)} \tag{3.4}$$

Si definiscono ora il *vettore risultante* $\mathbf{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{M} \boldsymbol{F}^{(i)} \tag{3.5}$$

ed il *vettore momento risultante* $\mathbf{M}(\mathrm{O})$:

$$\boldsymbol{M(O)} = \sum_{i=1}^{M} \overrightarrow{OP_i} \times \boldsymbol{F}^{(i)} \tag{3.6}$$

giungendo ad esprimere il lavoro virtuale in funzione dei sei parametri lagrangiani del corpo rigido:

$$\delta\mathrm{L} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} + \boldsymbol{M}(O) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} \tag{3.7}$$

Dal principio dei lavori virtuali discendono allora le:
Equazioni cardinali della statica: *Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido è che il sistema di forze su di esso agente sia a risultante nullo ed a momento risultante nullo:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{M}(O) &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.3 Le reazioni vincolari

Quando il corpo rigido è vincolato, tutto quanto detto finora rimane valido, a patto di sostituire ai vincoli le reazioni vincolari, ossia quelle forze incognite in grado di imporre il rispetto delle condizioni di vincoli. Dividendo quindi le forze in attive (e note) e reattive (incognite) si dovranno scrivere le equazioni della statica come:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}^{(a)} + \boldsymbol{R}^{(r)} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{M}^{(a)}(O) + \boldsymbol{M}^{(r)}(O) &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Le (3.9) sono da riguardarsi come sei equazioni nelle incognite reattive.

Capitolo 4

I vincoli interni

Proseguendo nello studio dei corpi rigidi, adotteremo d'ora in poi la seguente classificazione geometrica, necessariamente alquanto vaga: chiameremo *trave, o solido monodimensionale* un corpo rigido in cui una dimensione sia nettamente preponderante rispetto alle altre due, chiameremo *piastre, o solidi bidimensionali*, i solidi caratterizzati da due dimensioni preponderanti rispetto alla terza dimensione, chiameremo infine *solido tridimensionale* un solido in cui le tre dimensioni siano paragonabili tra loro.

4.1 Il solido monodimensionale, o trave

Il modo più semplice di definire un solido monodimensionale del tipo trave è considerare una figura piana che si muove nello spazio conservandosi ortogonale alla curva descritta dal suo baricentro G. La curva suddetta si dirà *asse della trave*, la figura piana suddetta si dirà *sezione retta della trave.*

In generale, l'asse della trave può essere una qualsiasi curva sghemba, ma d'ora in poi considereremo solo travi il cui asse è contenuto in un piano (*piano medio della trave*), così definendo le *travi piane*. Se poi l'asse della trave risulta essere una retta, parleremo di *travi piane ad asse rettilineo.*

Infine, si parlerà di *problema piano* quando si studia una trave piana soggetta a forze e reazioni contenute nel piano medio, e quando la sezione retta della trave è simmetrica rispetto allo stesso piano medio.

E' evidente che un elemento strutturale del tipo trave non può superare certe dimensioni, e quindi il suo utilizzo è limitato ai casi più semplici. D'altro canto, è possibile ovviare a questo inconveniente connettendo tra loro più elementi trave, attraverso connessioni, o vincoli interni, che impediscono alcuni tra i movimenti relativi, e che trasmettono le corrispondenti forze interattive. In tal modo è possibile giungere a strutture a geometria complessa, identificate come un insieme di travi rigide connesse tra loro in un numero discreto di punti attraverso opportune connessioni.

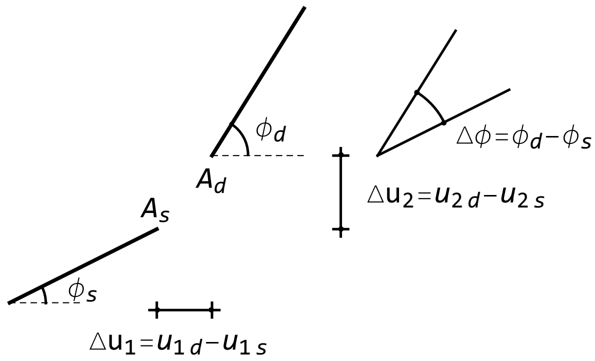


Figura 4.1: I tre possibili movimenti relativi in corrispondenza del punto A

4.2 La cinematica dei vincoli interni

Si consideri una coppia di travi, collegate tra loro nel punto A, dove la sezione retta terminale della prima trave incontra la sezione iniziale della seconda trave. Nel caso spaziale, esistono tre traslazioni relative e tre rotazioni relative tra queste due sezioni. Nel caso piano, invece, i possibili movimenti relativi si riducono a due traslazioni relative Δu_1 e Δu_2 ed una singola rotazione relativa $\Delta\phi$, come illustrato in Figura 4.1.

Si adotta la seguente convenzione sui segni dei movimenti relativi:
assegnato l'elemento di trave di estremi A e B, ed assunto un sistema di riferimento con origine in A, sia C il punto in cui si verifica il movimento relativo. Definendo *elemento di sinistra* la parte di trave AC ed *elemento di destra* la parte di trave CB, si pone:

$$\begin{aligned} \Delta u_{1C} &= u_{1Cdes} - u_{1Csin} \\ \Delta u_{2C} &= u_{2Cdes} - u_{2Csin} \\ \Delta\phi_C &= \phi_{Cdes} - \phi_{Csin} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Si ha quindi che un movimento relativo è positivo se — mantenendo ferma la parte di sinistra — la parte di destra subisce movimenti assoluti positivi.

4.2.1 Vincoli semplici (sconnessioni doppie)

Se le due sezioni contigue sono collegate tra loro in modo che valga la seguente equazione di vincolo:

$$\Delta u_1 = 0 \tag{4.2}$$

allora si dice che nel punto A agisce un vincolo semplice, o — equivalentemente — una sconnessione doppia. Meccanicamente, tale vincolo può rappresentarsi con un pendolo ad asse orizzontale, che visualizza l'obbligo delle due sezioni ad avere lo stesso spostamento orizzontale (cfr. Figura 4.2). Del tutto analogo è il caso in cui $\Delta u_2 = 0$, illustrato da un pendolo ad asse verticale.

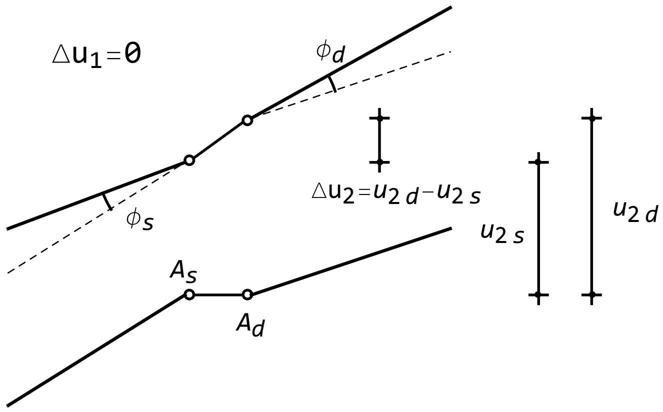


Figura 4.2: Il pendolo ad asse orizzontale ed il suo cinematismo

Un ulteriore esempio di vincolo semplice, o sconnessione doppia, è offerto dalla seguente equazione di vincolo:

$$\Delta\phi = 0 \tag{4.3}$$

Meccanicamente, tale vincolo può rappresentarsi con un doppio bipendolo, che visualizza l'obbligo delle due sezioni ad avere rotazione relativa nulla, come illustrato in Figura 4.3.

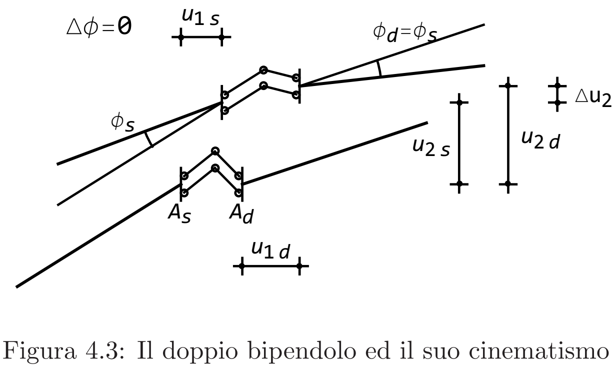


Figura 4.3: Il doppio bipendolo ed il suo cinematismo

4.2.2 Vincoli doppi (sconnessioni semplici)

Se le due sezioni contigue sono collegate tra loro in modo che valgano le seguenti equazioni di vincolo:

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= 0 \\ \Delta u_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

allora si dice che nel punto A agisce un vincolo doppio, o — equivalentemente — una sconnessione semplice. Meccanicamente, tale vincolo può rappresentarsi con una *cerniera*, che visualizza l'obbligo delle due sezioni ad avere lo stesso spostamento, mentre le due travi possono ruotare indipendentemente intorno alla sezione A. Si giunge alla raffigurazione di Figura 4.4.

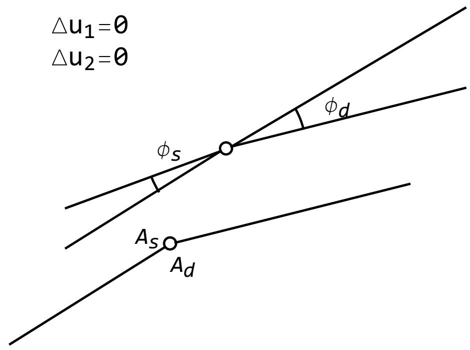


Figura 4.4: La cerniera ed il suo cinematismo

Se le due sezioni contigue sono collegate tra loro in modo che valgano le seguenti equazioni di vincolo:

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= 0 \\ \Delta \phi &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

anche in questo caso si dice che nel punto A agisce un vincolo doppio, o — equivalentemente — una sconnessione semplice. Meccanicamente, tale vincolo può rappresentarsi con un *bipendolo*, ad asse orizzontale, che visualizza l'obbligo delle due sezioni ad avere lo stesso spostamento orizzontale e la stessa rotazione, mentre le due travi possono avere differenti spostamenti verticali. Del tutto analogo è il caso del bipendolo ad asse verticale, o di bipendolo ad asse inclinato. La rappresentazione grafica viene riportata in Figura 4.5.

4.3 La statica dei vincoli interni

Così come discusso per i vincoli esterni, anche i vincoli interni possono considerarsi equivalenti a forze o coppie reattive, di valore incognito, tali da imporre il rispetto del vincolo. Quindi, il pendolo può essere sostituito da due forze, uguali e contrarie, agenti secondo l'asse del pendolo, e tali da annullare lo spostamento relativo lungo l'asse del pendolo, come riportato in Figura 4.6.

Il doppio bipendolo è invece equivalente a due coppie uguali e contrarie, di valore tale da impedire la rotazione relativa, come illustrato in Figura 4.7. La cerniera — ossia un vincolo doppio — è equivalente a due forze orizzontali e due forze verticali, tali da annullare lo spostamento relativo. Il bipendolo —

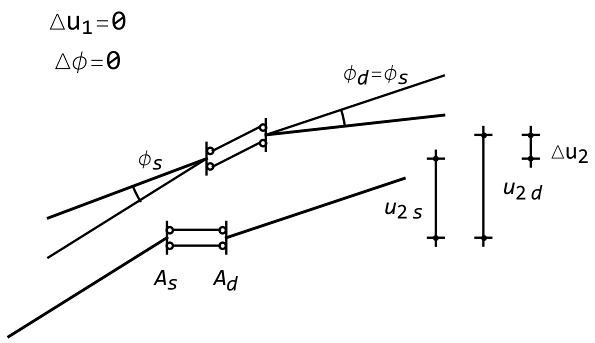


Figura 4.5: Il bipendolo ad asse orizzontale ed il suo cinematismo

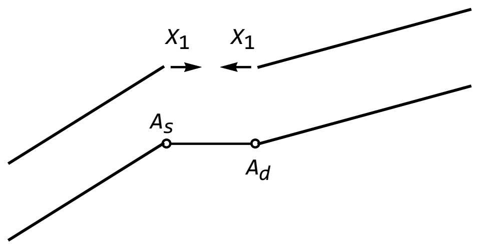


Figura 4.6: Il pendolo ad asse orizzontale ed il suo equivalente statico

anch'esso doppio — è sostituibile con due coppie e due forze dirette lungo l'asse del bipendolo, tali da annullare le rotazioni relative e gli spostamenti relativi lungo l'asse del bipendolo. Tutto ciò viene sintetizzato nelle Figure 4.8–4.9.

Si noti anche, come già fatto per i vincoli esterni, che le forze agenti in una cerniera possono comporsi in un'unica forza inclinata, e passante per la cerniera stessa, mentre la coppia e la forza reattiva del bipendolo possono ricondursi ad un'unica forza parallela all'originale, ma traslata di una opportuna quantit, in modo da generare la coppia reattiva.

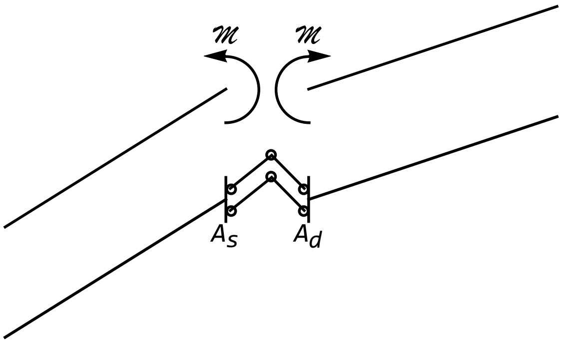


Figura 4.7: Il doppio bipendolo ed il suo equivalente statico

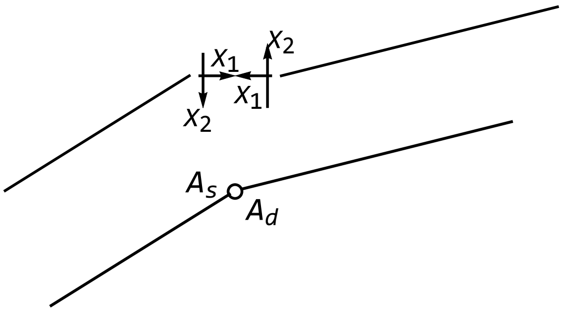


Figura 4.8: La cerniera ed il suo equivalente statico

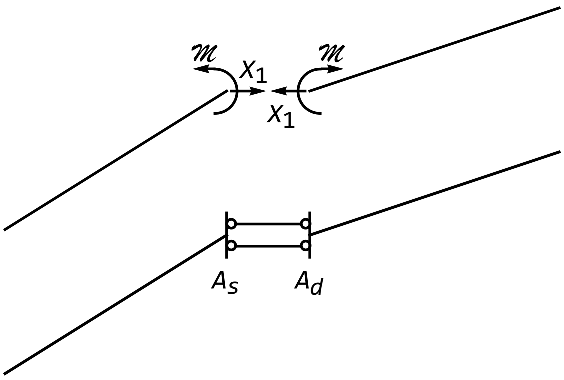


Figura 4.9: Il doppio pendolo ad asse orizzontale ed il suo equivalente statico

Capitolo 5

Analisi cinematica

Si consideri ora una struttura bidimensionale, ossia un insieme di travi collegate tra loro ed al suolo da opportuni vincoli. In questa lezione si vogliono studiare i possibili cinematismi della struttura, ossia i possibili spostamenti infinitesimi della struttura stessa, a partire da una configurazione iniziale.

5.1 La classificazione cinematica delle strutture

Si consideri una struttura costituita da t tratti, intendendo con "tratto" il pezzo di struttura compreso tra due vincoli, interni o esterni che siano. Si immagini ora di eliminare tutti i vincoli, sia esterni che interni. Ci si è ridotti in tal modo ad una insieme di t tratti liberi, ciascuno dei quali è dotato di tre gradi di libertà, due traslazionali ed uno rotazionale, e quindi la struttura non vincolata ha $3t$ possibilità di movimento, o $3t$ *gradi di libertà*. Numerando i tratti da 1 ad t, tali gradi di libertà possono essere convenientemente organizzati in un vettore $\boldsymbol{d}$:

$$\boldsymbol{d}^T = \left(u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, \phi^{(1)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, \phi^{(2)}, \dots u_2^{(t)}, u_3^{(t)}, \phi^{(t)}\right) \tag{5.1}$$

In $\boldsymbol{d}$ trovano quindi posto, tratto per tratto, lo spostamento rigido orizzontale, lo spostamento rigido verticale e la rotazione rigida, calcolata adottando un generico polo di riferimento per ogni tratto.

Siano ora m le equazioni di vincolo che si possono scrivere in base ai dispositivi di vincolo previsti, sicchè m sono i gradi di libertà soppressi dai vincoli stessi. Poichè in ogni tratto si possono esprimere gli spostamenti di un punto generico attraverso i tre parametri u_1, u_2 e ϕ, ne segue che le m equazioni di vincolo potranno esprimersi come equazioni lineari nei $3t$ gradi di libertà incogniti:

$$\mathbf{Cd} = \mathbf{0} \tag{5.2}$$

dove la matrice cinematica $\mathbf{C}$ ha m righe e $3t$ colonne. Si supponga ora che tra le m equazioni di vincolo esistano p relazioni di dipendenza, riducendo ad

$s = m - p$ il numero di equazioni lineramente indipendenti, e si consideri la seguente classificazione:

3t - s $>$ 0 Esistono più gradi di libertà di quanti ne siano stati soppressi dai vincoli, la struttura quindi è in grado di subire uno spostamento rigido. In tal caso si parla di struttura *cinematicamente indeterminata*, o di *struttura labile*, ed occorrerà identificare i possibili meccanismi di moto.

3t - s $=$ 0 I vincoli sono esattamente in numero pari ai gradi di libertà, che quindi vengono tutti proibiti. La struttura non è in grado di subire uno spostamento rigido. In tal caso si parla di struttura *cinematicamente determinata.*

3t - s $<$ 0 I vincoli sono sovrabbondanti ed i gradi di libertà vengono tutti proibiti. La struttura non è in grado di subire uno spostamento rigido, ed anche in tal caso si parla di struttura *cinematicamente determinata.* La distinzione tra questi due casi risulterà evidente quando nella prossima lezione si studierà la classificazione statica delle strutture.

5.2 Esempi ad una singola trave

Si consideri la trave di Figura 5.1a, vincolata al suolo da una cerniera situata in corrispondenza dell'estremo di sinistra. Le condizioni di vincolo dettano:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Scegliendo come gradi di libertà le due traslazioni del punto A, e la rotazione della trave intorno allo stesso punto A, la (5.2) diviene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

La struttura è una volta labile, in quanto il rango della matrice cinematica è pari a 2, ed il corrispondente cinematismo è rappresentato da una rotazione di ampiezza non specificata intorno al punto A.

Si consideri ora la trave di Figura 5.1b, vincolata da una cerniera nell'estremo di sinistra e da un carrello a piano di scorrimento orizzontale nell'estremo di destra. Le condizioni di vincolo dettano:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \\ u_2^B &= 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Scegliendo anche in questo caso come gradi di libertà le due traslazioni del punto A, e la rotazione della trave intorno allo stesso punto A, occorre preventivamente esprimere la terza condizione di vincolo in termini dei tre gradi di

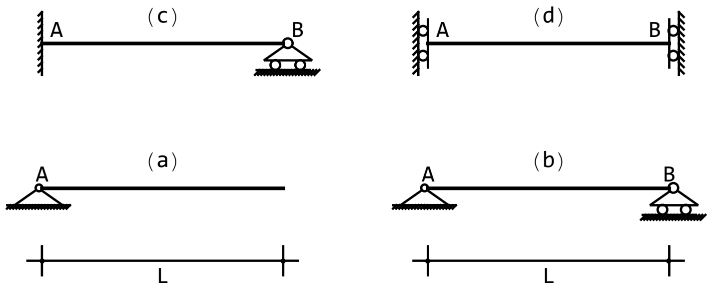


Figura 5.1: Quattro semplici esempi di analisi cinematica

libertà prescelti. E' immediato realizzare che in ipotesi di spostamenti infinitesimi si ha $u_2^B = u_2^A - \phi^A L$, dove L è la luce della trave, e quindi la (5.2) si scriverà ora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

La struttura è cinematicamente determinata, ed esistono tanti vincoli quanti sono i gradi di libertà: $3t - s = 0$, poichè il rango della matrice $\mathbf{C}$ è massimo.

Come terzo esempio, si esamini la trave in Figura 5.1c, incastrata a sinistra ed appoggiata a destra ad un carrello a piano di scorrimento orizzontale. Le condizioni di vincolo sono quattro:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \\ \phi^A &= 0 \\ u_2^B &= 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

e quindi la (5.2) diviene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

La struttura è cinematicamente determinata, in quanto $3t < s$, ed il rango di $\mathbf{C}$ è massimo.

Infine, si consideri la trave di Figura 5.1d, vincolata agli estremi da due bipendoli ad asse di scorrimento verticale. Per essi si avrà:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ \phi^A &= 0 \\ u_3^B &= 0 \\ \phi^B &= 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Ne segue che la struttura è labile, in quanto la matrice $\mathbf{C}$ ha rango 2, e solo due condizioni di vincolo sono efficaci.

5.3 Un esempio più complesso

Si consideri infine il telaio di Figura 5.2, costituito da due piedritti di altezza H_1 ed H_2, rispettivamente, e da un traverso di luce $2L$. All'estremità di sinistra un appoggio blocca ambedue le traslazioni, mentre all'estremità di destra un carrello a piano di scorrimento orizzontale blocca le traslazioni verticali. Inoltre, il traverso è suddiviso in mezzeria da una cerniera.

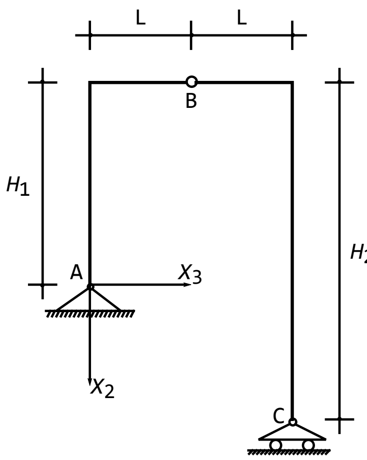


Figura 5.2: Un telaio zoppo di esempio

La struttura è formata da due tratti, ed in assenza di vincoli possiede quindi sei gradi di libertà: nel seguito si scelgono, quali coordinate lagrangiane, le traslazioni u_1^A ed u_2^Adel primo tratto, la rotazione ϕ^A dello stesso tratto intorno all'appoggio, le due traslazioni u_1^C ed u_2^C del secondo tratto, insieme alla rotazione ϕ^C del secondo tratto intorno al carrello di destra. Corrispondentemente, esistono cinque equazioni di vincolo:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \\ u_{3s}^B &= u_{3d}^B \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$
\begin{aligned}
u_{2s}^B &= u_{2d}^B \\
u_2^C &= 0
\end{aligned}
$$

dove u_{3s}^B ed u_{2s}^B sono gli spostamenti orizzontale e rispettivamente verticale del primo tratto in corrispondenza della cerniera interna, mentre u_{3d}^B ed u_{2d}^B sono gli spostamenti orizzontale e rispettivamente verticale del secondo tratto in corrispondenza della stessa cerniera interna.

Occorre ora esprimere queste equazioni in termini dei sei prescelti gradi di libertà. A tal fine si consideri che si potrà scrivere:

$$
\begin{aligned}
u_{3s}^B &= u_3^A - \phi^A H_1 \\
u_{2s}^B &= u_2^A - \phi^A L \\
u_{3d}^B &= u_3^C - \phi^C H_2 \\
u_{2d}^B &= u_2^C + \phi^C L
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

e quindi le (5.11) divengono:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -H_1 & -1 & 0 & H_2 \\
0 & 1 & -L & 0 & -1 & -L \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \\ u_3^C \\ u_2^C \\ \phi^C
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}
\tag{5.13}
$$

E' immediato dedurre che il rango della matrice $\mathbf{C}$ è pari a cinque, e quindi le equazioni di vincolo sono linearmente indipendenti, segnalando che la struttura è una volta labile. Per calcolare il corrispondente meccanismo, si può porre arbitrariamente pari a δ lo spostamento orizzontale del carrello, $u_3^C = \delta$, in modo che le (5.13) si trasformano in cinque equazioni non omogenee a determinante non nullo:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -H_1 & 0 & H_2 \\
0 & 1 & L & -1 & L \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \\ u_2^C \\ \phi^C
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ \delta \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}
\tag{5.14}
$$

con soluzione:

$$
\begin{aligned}
u_3^A &= 0 \\
u_2^A &= 0 \\
\phi^A &= -\frac{\delta}{H_1 + H_2} \\
\phi^C &= \frac{\delta}{H_1 + H_2} \\
u_2^C &= 0
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

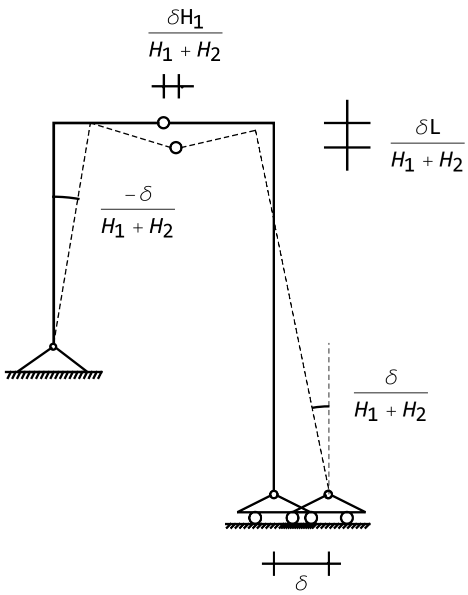


Figura 5.3: Il meccanismo per il telaio di Figura 5.2

Infine, utilizzando le (5.12) si possono ottenere gli spostamenti della cerniera:

$$
\begin{aligned}
u_3^B &= \frac{H_1}{H_1 + H_2}\delta \\
u_2^B &= \frac{L}{H_1 + H_2}\delta
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

In Figura 5.3 è riportato il meccanismo appena identificato.

Capitolo 6

Analisi statica

Si consideri la stessa struttura bidimensionale della lezione precedente, ossia un insieme di travi collegate tra loro ed al suolo da opportuni vincoli. Si vuole ora indagare se la struttura in esame è in equilibrio, o meno, ed eventualmente si vuole indicare un procedimento di calcolo per le reazioni incognite dei vincoli.

6.1 La classificazione statica delle strutture

Si consideri una struttura costituita da t tratti, e si immagini di eliminare tutti i vincoli, sia esterni che interni, sostituendo ad essi le rispettive reazioni vincolari. Ci si è ridotti ad un insieme di t tratti liberi, soggetti ai carichi esterni, noti, ed alle m reazioni vincolari incognite, e poichè per ciascuna di queste tratti è possibile scrivere tre equazioni di equilibrio, sulla struttura non vincolata potranno scriversi $3t$ equazioni di equilibrio nelle m incognite vincolari.

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \tag{6.1}$$

dove la *matrice statica* $\boldsymbol{A}$ ha $3t$ righe ed m colonne. Si supponga ora che le equazioni di equilibrio linearmente indipendenti siano $N \leq 3t$, tenendo conto del fatto che particolari disposizioni dei vincoli possono portare ad equazioni di equilibrio lineramente dipendenti, e si osservi la seguente classificazione:

N - m > 0 Esistono più equazioni che incognite, sicchè le equazioni non possono essere risolte a fornire le reazioni, se non per particolari condizioni di carico, identificabili analiticamente come quelle condizioni di carico che portano ad una matrice orlata ancora di rango N. In tal caso si parla di *struttura labile*, in cui i vincoli sono incapaci di garantire l'equilibrio. Il numero $l = N - m$ è il grado di labilità della struttura. Il corrispondente caso cinematico è quello dei meccanismi.

N - m = 0 Il numero di equazioni di equilibrio linearmente indipendenti è pari al numero delle incognite. Ne segue che la soluzione esiste per qualsiasi condizione di carico, ed è unica. La struttura risulta in equilibrio ed è agevole calcolare le reazioni vincolari. In tal caso si parla di *struttura isostatica*, equivalente della struttura *cinematicamente determinata.*

N - m $<$ **0** Esistono più reazioni vincolari che equazioni di equilibrio, la struttura è in equilibrio, ma in genere non è possibile calcolare le reazioni vincolari con le sole equazioni della statica. La struttura si dice *iperstatica,* il numero $i = m - N$ è il grado di iperstaticità della struttura, ed esistono ∞^i soluzioni possibili.

6.2 La scrittura delle equazioni di equilibrio

Si consideri la trave di Figura 6.1a, vincolata al suolo da una cerniera situata in corrispondenza dell'estremo di sinistra, e soggetta ad una forza verticale F in corrispondenza dell'estremo libero. Sostituendo alla cerniera le due reazioni incognite verticali ed orizzontali R_H ed R_V, come illustrato in alto della stessa Figura 6.1a), si possono scrivere le tre equazioni di equilibrio:

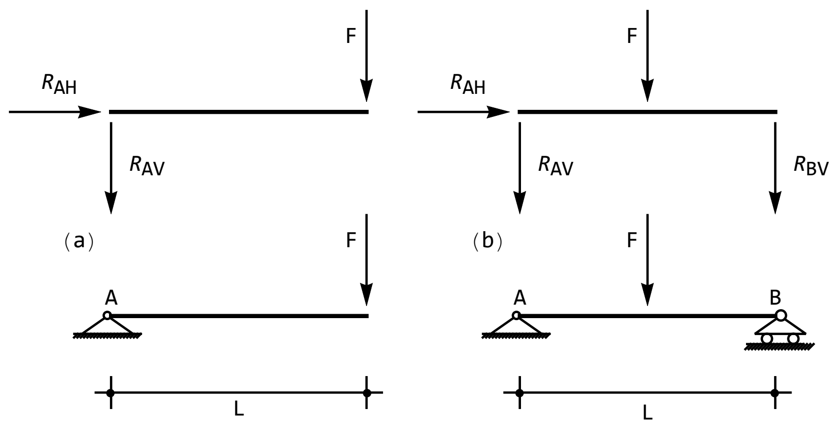


Figura 6.1: Due esempi di analisi statica

$$
\begin{aligned}
R_H &= 0 \\
R_V + F &= 0 \\
R_V L &= 0
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

dove si è assunto come polo l'estremo libero, e dove — come sempre — si sono assunte positive le reazioni dirette secondo gli assi e le coppie antiorarie. Le (6.2) rappresentano tre equazioni nelle due incognite reattive, e non possono essere risolte: la struttura non è in equilibrio, e ruoterà intorno alla cerniera di sinistra.

Si consideri ora la trave di Figura 6.1b, vincolata da una cerniera nell'estremo di sinistra e da un carrello a piano di scorrimento orizzontale nell'estremo di destra, e soggetta ad una forza in mezzeria. I vincoli sono equivalenti a due reazioni R_{AH} ed R_{AV} nell'estremo di sinistra, ed una reazione R_{BV} a destra. Scegliendo come polo l'estremo di sinistra, si possono scrivere le tre equazioni:

$$\begin{aligned} R_{AH} &= 0 \\ R_{AV} + R_{BV} + F &= 0 \\ F\frac{L}{2} + R_{BV}L &= 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{AH} \\ R_{AV} \\ R_{BV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ -F\frac{L}{2} \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

La matrice ha rango massimo, la struttura è isostatica, e le reazioni possono facilmente calcolarsi.

Come terzo esempio, si esamini la trave in Figura 6.2a), incastrata a sinistra ed appoggiata a destra ad un carrello a piano di scorrimento orizzontale, e soggetta ad un carico distribuito su tutta la luce. Le reazioni incognite sono quattro, come illustrato in Figura 6.2c), mentre le equazioni di equilibrio restano tre:

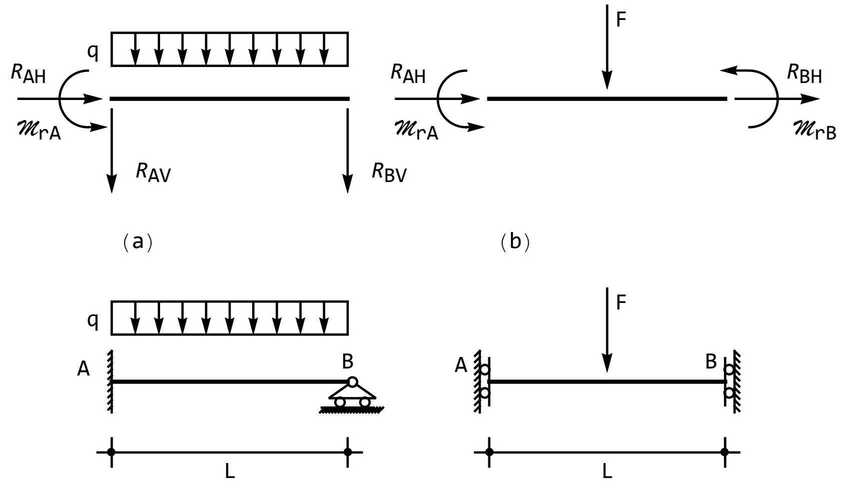


Figura 6.2: Altri due esempi di analisi statica

$$
\begin{aligned}
&R_{AH} = 0 \\
&R_{AV} + R_{BV} + qL = 0 \\
&-q\frac{L^2}{2} - R_{BV}L + \mathcal{M}_{rA} = 0
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

o, matricialmente:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} R_{AH} \\ R_{AV} \\ R_{BV} \\ \mathcal{M}_{rA} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ -qL \\ -q\dfrac{L^2}{2} \end{pmatrix}
\tag{6.6}
$$

La struttura risulta una volta iperstatica, ed esiste una infinità di soluzioni.

Infine, si consideri la trave di Figura 6.2b), vincolata agli estremi da due bipendoli ad asse di scorrimento verticale, e soggetta ad una forza in mezzeria. Per essa si potranno scrivere le tre equazioni di equilibrio:

$$
\begin{aligned}
&R_{AH} + R_{BH} = 0 \\
&F = 0 \\
&\mathcal{M}_{rA} + \mathcal{M}_{rB} - F\frac{L}{2} = 0
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Ne risulta chiaramente che per cattiva disposizione dei vincoli, la struttura non potrà risultare in equilibrio, e più in particolare subirà una traslazione verticale.

6.3 Un esempio più complesso

Si consideri infine il telaio di Figura 6.3, costituito da due piedritti di altezza H_1 ed H_2, rispettivamente, e da un traverso di luce $2L$. Alle due estremità due appoggio bloccano ambedue le traslazioni, ed il traverso è suddiviso in mezzeria per mezzo di una terza cerniera. La struttura è soggetta ad una forza orizzontale in corrispondenza del traverso.

La struttura è formata da due travi, e sostituendo ai vincoli, interni ed esterni, le corrispondenti reazioni (cfr.Figura 6.4), si possono imporre le condizioni di equilibrio per le due travi, scegliendo come poli i punti A e C, rispettivamente:

$$
\begin{aligned}
R_{AH} + R_{BH} + F &= 0 \\
R_{AV} + R_{BV} &= 0 \\
-FH_1 - R_{BH}H_1 - R_{BV}L &= 0 \\
-R_{BH} + R_{HC} &= 0 \\
-R_{BV} + R_{VC} &= 0 \\
R_{BH}H_2 - R_{BV}L &= 0
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

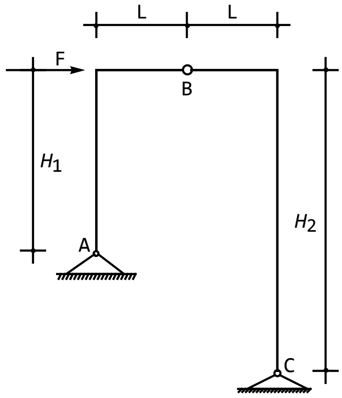


Figura 6.3: Un telaio zoppo per l'analisi statica

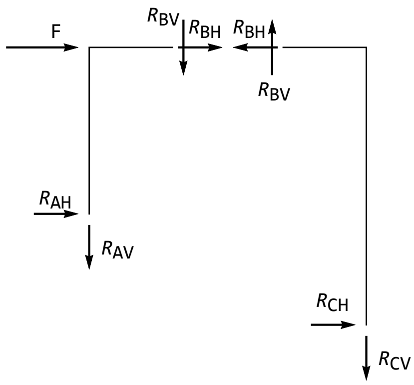


Figura 6.4: Le incognite statiche per il telaio zoppo

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & H_2 & -L & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{AH} \\ R_{AV} \\ R_{BH} \\ R_{BV} \\ R_{HC} \\ R_{VC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ -FH_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

Il determinante della matrice di equilibrio è pari a $-L\,(H_1 + H_2)$ e di conseguenza è diverso da zero, le reazioni possono essere calcolate e l'equilibrio è garantito:

$$
\begin{aligned}
R_{AH} &= F\frac{H_2}{H_1 + H_2} \\
R_{AV} &= -F\frac{H_1 H_2}{(H_1 + H_2)\,L} \\
R_{BH} &= -F\frac{H_1}{H_1 + H_2} \\
R_{BV} &= F\frac{H_1 H_2}{(H_1 + H_2)\,L} \\
R_{HC} &= -F\frac{H_1}{H_1 + H_2} \\
R_{VC} &= -F\frac{H_1 H_2}{(H_1 + H_2)\,L}
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

Capitolo 7

Il concetto di tensione

That the stree principle is not an obvious one, any teacher may convince himself by trying to teach it to students

Clifford Truesdell – Essays in the History of Mechanics, Springer 1968, pag. 188

Si introduce in questa lezione un concetto basilare, quello di tensione in un punto P di un corpo B propriamente vincolato e soggetto a determinate condizioni di carico. E' quindi opportuno premettere qualche considerazione sul tipo di forze agenti sul corpo.

7.1 Il concetto di materia

Al di là delle interpretazioni filosofiche, il concetto di materia sembra essere uno dei più elusivi argomenti della fisica, e costituisce ancora oggi un affascinante capitolo di ricerca: fino a circa trent'anni fa, si credeva che protoni e neutroni fossero particelle elementari, poi si è visto che ambedue sono costituiti a partire dai cosiddetti "quark". Potrebbero i quark, a loro volta, essere costuiti da particelle ancora più piccole? Oppure esistono ragioni teoriche che portino a far credere di aver trovato i blocchi fondamentali della natura?[1]

Qual'è la natura delle forze che tengono unite le particelle, e che sono responsabili dell'aggregazione della materia? Quanti "tipi" di forze diverse esistono? La gravitazionale, l'elettromagnetica, la nucleare debole e la nucleare forte?

[1] "We do have some theoretical reasons for believing that we have, or are very near to, a knowledge of the ultimate building blocks of nature" - Stephen Hawking, *A brief history of time,* Bantam Books, pag.73

Oppure è possibile unificare le ultime tre forze, nella cosiddetta "grand unified theory"? E perchè la gravità deve essere esclusa, e considerata a parte?

Ovviamente, questi problemi non possono preoccupare l'ingegnere, che in qualche modo deve disporre di un modello semplificato di realtà, e deve poter operare su un modello di materia più maneggevole. Sorge quindi la necessità di porre qualche ipotesi semplificatoria, che conduca ad una definizione operativa del mezzo continuo con cui l'ingegnere deve lavorare.

E l'ingegnere strutturista tratta un unico problema: calcolare spostamenti, deformazioni e tensioni in ciascun punto di una struttura soggetta a certi carichi e vincolata in un certo modo, qualunque cosa possa intendersi, per ora, con "deformazione" e "tensione". Inoltre, è possibile limitare lo studio del suddetto problema a valori "ragionevoli" dell'intensità delle forze, quelle che si riscontrano in natura, e non quelle che è possibile generare in laboratorio.

E' anche possibile, e conveniente, suddividere le forze in base alla loro intensità, o meglio, in base al loro effetto sulla struttura: diremo quindi "moderate" le forze che producono effetti reversibili, e "intense" le forze che producono effetti irreversibili, limitandoci, nel seguito, al solo caso di forze moderate.

7.1.1 I primi tentativi di formalizzazione

Tralasciando, come ovvio, le teorie antiche e medievali sulla natura intima delle cose, si può senz'altro affermare che il primo tentativo scientifico di fornire un fondamento al comportamento della materia risalga ad Isacco Newton. Secondo Newton, esisterebbe una forza attrattiva tra gli atomi costituenti i corpi, che potrebbe spiegare la natura fisica dell'elasticità , una sorta di "forza interna" che opererebbe all'interno dei corpi a somiglianza di come la forza di gravitazione opera tra i corpi[2].

Molto più dettagliata, e scientificamente comprensibile, appare l'ipotesi del gesuita Boscovich, che, riprendendo il suggerimento di Newton, aveva formulato l'idea che tra due molecole contigue si sviluppi una forza agente lungo la congiungente le due molecole, e che questa forza potesse essere sia attraente che repulsiva.

Più precisamente, secondo Boscovich la materia sarebbe costituita da elementi materiali senza estensione, veri e propri centri di forza, d'intensità fortemente decrescente con la distanza. La repulsione, per distanze minime, spiega l'impenetrabilità dei corpi; il passaggio da repulsione ad attrazione, e viceversa, per distanze piccole spiega la coesione, il comportamento elastico ed una varia fenomenologia del comportamento dei materiali; infine, l'attrazione decrescente

[2] Il suggerimento di Newton si ritrova nelle note aggiuntive alla seconda edizione dell' Ottica *(Optics or a treatise of the reflections, refractions and colour light)*, del 1717, e venne ripreso da Musschenbroeck nel 1729, con questa straordinaria definizione di forza interna: "Tale forza interna fu introdotta da Dio in tutti i corpi, e il Creatore infinitamente efficace volle che essi operassero in sè secondo quella forza: pertanto la sua presenza è Legge di Natura simile all'altra che vien chiamata gravità". Questa, e simili citazioni, sono riportati nel fondamentale testo di E. Benvenuto, "La scienza delle Costruzioni ed il suo sviluppo storico", Sansoni, cui questa lezione fa costante riferimento.

col quadrato della distanza già sensibile converge alla legge di Newton[3]. Anche Laplace e Poisson utilizzarono questo approccio, il primo in uno studio sui fenomeni di capillarità, il secondo per alcune deduzioni sul comportamento di una lastra inflessa.

7.1.2 La teoria molecolare di Navier-Cauchy

Secondo questa teoria[4], diretta generalizzazione dell'approccio newtoniano, il solido elastico sarebbe formato da numerosissime particelle p_i, che a seguito dell'applicazione delle forze esterne si muovono, modificando la loro mutua distanza, e generando quindi forze reattive interne, di attrazione o repulsione reciproca. Se le particelle sono distribuite in modo disordinato (materiale isotropo), allora è ragionevole pensare che, in media, le forze reattive agenti su una generica particella non mutano quando le molecole vicine si avvicinano o si allontanano. Se invece le particelle sono disposte secondo un certo ordine (materiale anisotropo), allora la risposta all'applicazione delle forze esterne varierà in base alla direzione della sollecitazione.

Rimandando ad un prossimo Capitolo gli sviluppi analitici di una simile ipotesi, si può fin d'ora osservare che essa conduce, almeno nella sua forma originaria, a conclusioni contraddette dagli esperimenti, ma che la sua potenza concettuale è tale da essere stata sostenuta a spada tratta per lunghissimo tempo, ad esempio da B. De Saint Venant. Inoltre, "non bisogna credere che la teoria molecolare conduca a risultati errati e che sia impossibile dedurre da essa il numero corretto di costanti. Il punto è che Cauchy e Poisson applicarono la teoria molecolare in una forma troppo semplificata. Usando moderni concetti della struttura dei materiali si può ottenere il risultato corretto"[5], giungendo alla teoria molecolare di Voigt[6].

[3]La frase su riportata è tratta da "*Sui principi di filosofia naturale che orientarono la ricerca di Saint-Venant*" di E. Benvenuto e A. Becchi , in "Omaggio a Giulio Ceradini", pag. 125–138. Da essa risulta evidente lo sforzo di unificazione delle cause naturali, già allora in atto, e di come lo spirito newtoniano permeasse qualsiasi disciplina scientifica. Non per nulla De Saint Venant definì Boscovich "il più conseguente newtoniano che ci sia e che ci possa essere". Dallo stesso lavoro citato sono tratte varie altre frasi nel seguito del Capitolo. Nella sezione Ricerca del sito http:\\www.scienzadellecostruzioni.co.uk può reperirsi una versione digitale della memoria citata

[4]La teoria fu illustrata originariamente da Navier in una memoria del 14 maggio 1821, data che segna la nascita della moderna teoria dell'elasticità ("Mémoire sur le lois de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques",*Mem.Inst. Nat.*, 7, pp.375–393, 1827), e fu poi generalizzata da Cauchy nel 1828, in due diverse memorie. ("Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollecités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle", *Exercices de Mathématiques*, 3, pp. 188–212, Parigi, 1828, e ancora "De la pression ou tension dans un système de points matériels", ibid. pp. 213–236

[5]N.I.Muskhelishvili, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity" Noordhoff 1953

[6]Per una discussione storica sulle teorie molecolari, vedi D. Capecchi, G. Ruta, P. Trovalusci, "From classical to Voigt's molecular models in elasticity", Arch. Hist. Exact Sci. 525–559 (2010)

Figura 7.1: N.I.Muskhelishvili

7.1.3 La teoria energetica di George Green

Solo un accenno si può dedicare ora alla teoria attualmente accettata in ambito ingegneristico, rimandando al seguito la sua dettagliata illustrazione.

Mentre la teoria molecolare si basa su ragionamenti di carattere microscopico, l'approccio energetico preferisce rivolgere l'attenzione ad una porzione finita di solido, basandosi su alcune ipotesi riguardanti il comportamento macroscopico del corpo in esame.

Più precisamente, l'ipotesi a base della teoria energetica è che il lavoro compiuto dalle forze esterne agenti sul solido si trasformi integralmente in una sorta di energia potenziale interna, che si ritroverà immagazzinata nel corpo. Il calcolo di questa energia, detta energia elastica, è abbastanza agevole, come si vedrà in seguito, se le forze sono applicate molto lentamente, in modo che il processo di deformazione sia isotermo, oppure molto velocemente, in modo che il processo sia adiabatico. Il primo tipo di processo di carico è fondamentale in regime statico, il secondo in regime dinamico.

7.2 La nozione di forza

La nozione di forza è da ritenersi primitiva, nell'ambito della meccanica, mentre da un punto di vista fisico possono distinguersi:

1. ***forze di massa,*** esercitate dall'esterno sul corpo in esame, come ad esempio la gravità

2. ***forze di superficie esterne,*** esercitate sulla frontiera del corpo da altri corpi,

3. ***forze superficiali interne,*** che si esercitano tra le varie porzioni in cui un corpo può idealmente suddividersi

Assegnare le forze di massa, quindi, equivale ad assegnare un campo vettoriale $\mathbf{X}(P)$, continuo, e la loro dimensione fisica è di una forza per unità di volume:

$$[X] = \frac{F}{L^3} \tag{7.1}$$

Le forze superficiali esterne sono definite tramite il campo vettoriale $\mathbf{p}(P)$, definito e continuo sulla parte di frontiera ∂B in cui esse agiscono. La loro dimensione fisica è di una forza su unità di superficie:

$$[p] = \frac{F}{L^2} \tag{7.2}$$

Si noti che si sono escluse le forze concentrate, la cui definizione sia fisica che matematica è troppo complessa per essere trattata in questa sede[7]. D'altro canto, nell'ambito delle scienze matematiche, la nozione di forza era guardata con sospetto già da svariati anni. Scriveva infatti B. De Saint-Venant nel 1866:

> E' ben probabile che le forze, questa sorta di esseri problematici, o piuttosto di aggettivi sostantivati, che non sono nè materia nè spirito, esseri ciechi ed incoscienti e che bisogna tuttavia dotare della meravigliosa facoltà di apprezzare le distanze e di proporzionare puntualmente la loro intensità, siano sempre più espulse e scartate dalle scienze matematiche

Assegnate le forze di massa $\boldsymbol{X}$ e superficiali $\boldsymbol{p}$, la *forza totale* agente su una porzione P del corpo B in esame è pari alla somma della forza superficiale agente sulla frontiera ∂P di P, e della forza di massa esercitata su P dall'esterno:

$$f(P) = \int_{\partial P} \boldsymbol{p}\,\mathrm{d}A + \int_{P} \boldsymbol{X}\,\mathrm{d}v \tag{7.3}$$

Analogamente, il *momento totale* $m(P)$ su P, intorno all'origine O, è dato da:

$$m(P) = \int_{\partial P} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}\,\mathrm{d}A + \int_{P} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{X}\,\mathrm{d}v \tag{7.4}$$

[7] La definizione formale di forza concentrata può essere fornita in termini di *distribuzioni*, e la presenza di un tal tipo di forze complica grandemente l'analisi. Il lettore interessato può comunque consultare il libro di P.P. Teodorescu e W.Kecs, *Distribution Theory,* Wiley–VCH, Weinheim, 2013, oppure l'articolo 39 di P. Villaggio, *Qualitative Methods in Elasticity,* Noordhoff, 1977.

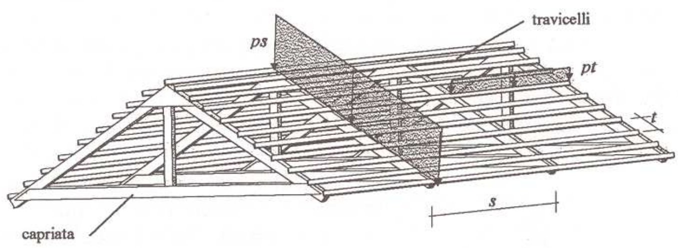


Figura 7.2: Uno schema di copertura in legno

dove $\times$ indica il prodotto vettoriale tra il vettore posizione $\boldsymbol{r}$ ed il vettore delle forze superficiali $\boldsymbol{p}$ ed il vettore delle forze di massa $\boldsymbol{X}$, rispettivamente.

Nel seguito si supporrà che il corpo B sia in equilibrio in presenza delle forze esterne, ossia che si abbia:

$$f(B) = \int_{\partial B} \boldsymbol{p} \, \mathrm{d}A + \int_{B} \boldsymbol{X} \, \mathrm{d}v = 0 \tag{7.5}$$

$$m(B) = \int_{\partial B} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \, \mathrm{d}A + \int_{B} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{X} \, \mathrm{d}v = 0 \tag{7.6}$$

7.2.1 Esempio

Si consideri il tetto in legno di Figura 7.2, schematizzabile con un insieme di travi principali (capriate) collegate tra loro dalle travi secondarie (travicelli), sulle quali poi poggia il tavolato e tutto il pacchetto del tetto, fino alle tegole. Sulla supeficie del tetto graverà quindi il peso proprio delle tavole, di eventuale isolante, di tegole, del vento, della neve, etc.. Tutto ciò può ricondursi ad un singolo carico superficiale p $\left[\mathrm{FL}^{-2}\right]$. A sua volta, il carico superficiale p si tramette ai travicelli, e su ciascun travicello può considerarsi agente il carico della fascia di tetto di larghezza pari all'interasse t tra i travicelli stessi. In definitiva, sul travicello generico agisce il carico per unità di lunghezza $q = pt$, di dimensione fisica $\left[\mathrm{FL}^{-1}\right]$.

I carichi sui travicelli si trasmetteranno a loro volta sulle travi principali. In particolare, in ciascun punto in cui una trave secondaria si appoggia sulla capriata, si avrà uno scarico concentrato, pari alla forza $F = p\,t\,s$, dove s è l'interesse tra le capriate. Se poi l'interasse t tra le travi secondarie è abbastanza piccolo, questi scarichi possono considerarsi come un carico distribuito di intensità ps, agente sulle capriate.

Tutto ciò per quel che riguarda i carichi applicati alle capriate. Esiste poi il peso proprio delle capriate stesse, rappresentato da una forza di volume di dimensioni fisiche $\left[\mathrm{FL}^{-3}\right]$.

Figura 7.3: Leonardo Eulero

7.3 L'assioma di separazione di Eulero

La definizione di tensione fu fornita da Cauchy nel 1823, e si basa su ipotesi preventivamente accettate da Eulero in alcuni studi di meccanica dei fluidi. Più precisamente, si accetta il seguente:

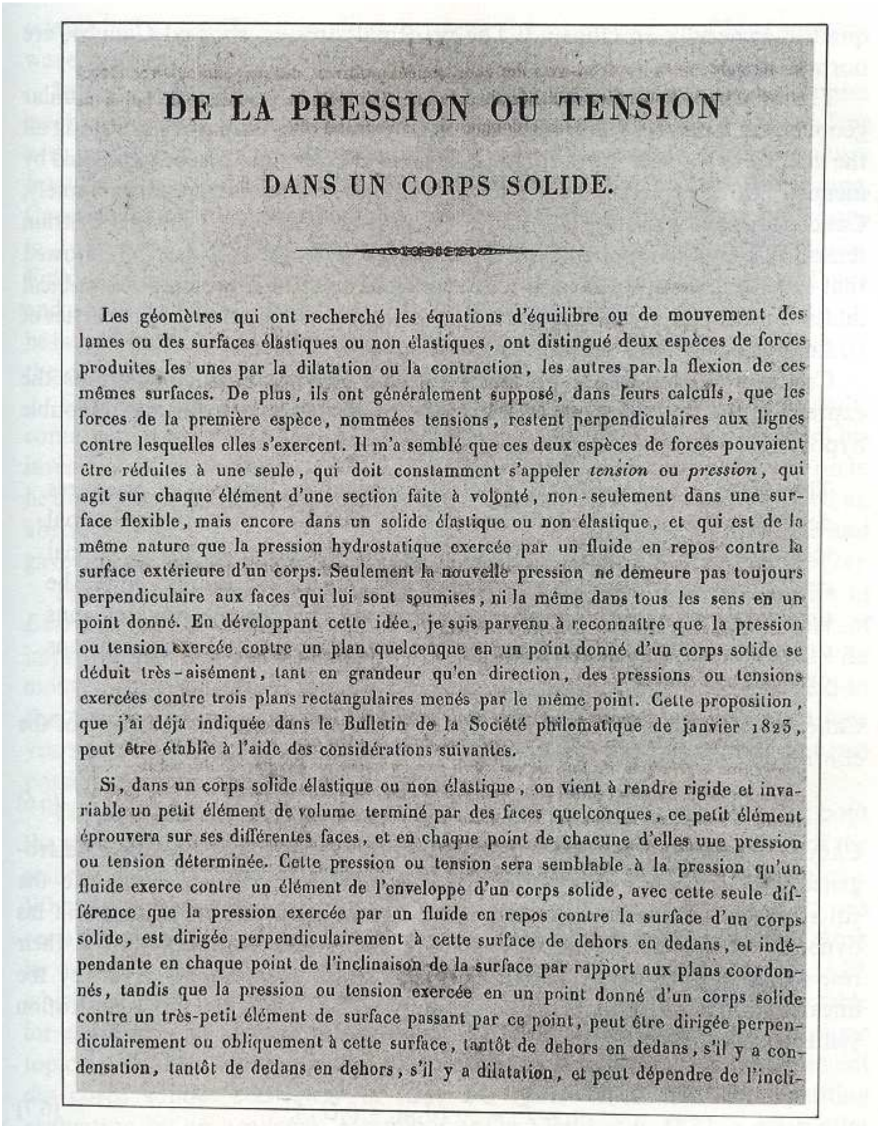
Assioma 1. (*Eulero*) - *Si consideri un corpo* B*, soggetto alle forze di massa* $\boldsymbol{X}$ *e superficiali* $\boldsymbol{p}$*, e si consideri un piano fittizio* Π*, passante per il punto* P*, e che partizioni il corpo* B *in due corpi* B_1 *e* B_2*.*

L'azione esercitata da B_1 *su* B_2 *attraverso un intorno* ΔA *di* P *appartenente al piano* Π*, si suppone equivalente ad un campo di forze interne definito su* ΔA*.*

Per precisare ulteriormente la natura di questo campo di forze è possibile ridurlo preventivamente ad una forza risultante $\boldsymbol{R}$ ed un momento risultante $\boldsymbol{M}$, come suggerito dallo stesso Eulero. La seconda operazione, che consiste nel far decrescere l'area dell'intorno ΔA fino, al limite, a ridurla a zero, conduce alla definizione di tensione secondo Cauchy.

7.4 La definizione del solido di Cauchy

Si consideri un corpo B, soggetto alle forze di massa $\boldsymbol{X}$ e superficiali $\boldsymbol{p}$, e si consideri un piano fittizio Π_n, passante per il punto P e definito dalla sua



DE LA PRESSION OU TENSION

DANS UN CORPS SOLIDE.

Les géomètres qui ont recherché les équations d'équilibre ou de mouvement des lames ou des surfaces élastiques ou non élastiques, ont distingué deux espèces de forces produites les unes par la dilatation ou la contraction, les autres par la flexion de ces mêmes surfaces. De plus, ils ont généralement supposé, dans leurs calculs, que les forces de la première espèce, nommées tensions, restent perpendiculaires aux lignes contre lesquelles elles s'exercent. Il m'a semblé que ces deux espèces de forces pouvaient être réduites à une seule, qui doit constamment s'appeler *tension* ou *pression*, qui agit sur chaque élément d'une section faite à volonté, non-seulement dans une surface flexible, mais encore dans un solide élastique ou non élastique, et qui est de la même nature que la pression hydrostatique exercée par un fluide en repos contre la surface extérieure d'un corps. Seulement la nouvelle pression ne demeure pas toujours perpendiculaire aux faces qui lui sont soumises, ni la même dans tous les sens en un point donné. En développant cette idée, je suis parvenu à reconnaître que la pression ou tension exercée contre un plan quelconque en un point donné d'un corps solide se déduit très-aisément, tant en grandeur qu'en direction, des pressions ou tensions exercées contre trois plans rectangulaires menés par le même point. Cette proposition, que j'ai déjà indiquée dans le Bulletin de la Société philomatique de janvier 1823, peut être établie à l'aide des considérations suivantes.

Si, dans un corps solide élastique ou non élastique, on vient à rendre rigide et invariable un petit élément de volume terminé par des faces quelconques, ce petit élément éprouvera sur ses différentes faces, et en chaque point de chacune d'elles une pression ou tension déterminée. Cette pression ou tension sera semblable à la pression qu'un fluide exerce contre un élément de l'enveloppe d'un corps solide, avec cette seule différence que la pression exercée par un fluide en repos contre la surface d'un corps solide, est dirigée perpendiculairement à cette surface de dehors en dedans, et indépendante en chaque point de l'inclinaison de la surface par rapport aux plans coordonnés, tandis que la pression ou tension exercée en un point donné d'un corps solide contre un très-petit élément de surface passant par ce point, peut être dirigée perpendiculairement ou obliquement à cette surface, tantôt de dehors en dedans, s'il y a condensation, tantôt de dedans en dehors, s'il y a dilatation, et peut dépendre de l'incli-

Figura 7.4: La pagina 42 del "De la pression ou tension dans un corps solide", Exercices dé Mathématiques, **2** (1827) di Cauchy, contenente la definizione di tensione normale $\boldsymbol{n}$, che partizioni il corpo B in due corpi B_1 e B_2. Accettando l'assioma di Eulero, siano $\mathbf{R}_n$ ed $\mathbf{M}_n$ la forza ed il momento risultante agenti sull'area ΔA. Si considerino ora i due rapporti:

$$\begin{gathered}\frac{\mathbf{R}_n}{\Delta \mathrm{A}} \\ \frac{\mathbf{M}_n}{\Delta \mathrm{A}}\end{gathered} \tag{7.7}$$

e si faccia tendere l'area ΔA a zero. L'ipotesi di Cauchy [8] consiste nel ritenere che sia possibile operare i limiti:

$$\begin{gathered}\lim_{\Delta \mathrm{A} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_n}{\Delta \mathrm{A}} \\ \lim_{\Delta \mathrm{A} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}_n}{\Delta \mathrm{A}}\end{gathered} \tag{7.8}$$

che il primo dia un risultato finito, ed il secondo un risultato nullo (cfr. Figura 7.5):

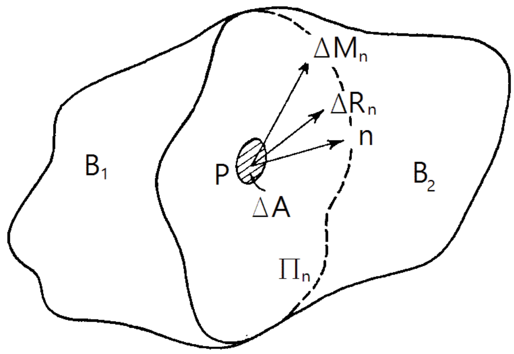


Figura 7.5: La definizione di tensione secondo Cauchy

$$\begin{gathered}\lim_{\Delta \mathrm{A} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_n}{\Delta \mathrm{A}} = \mathbf{t}_n \\ \lim_{\Delta \mathrm{A} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}_n}{\Delta \mathrm{A}} = 0\end{gathered} \tag{7.9}$$

Alla quantità $\mathbf{t}_n$, funzione del punto P e della normale $\boldsymbol{n}$, si dà il nome di *tensione in P relativamente al piano di normale* $\boldsymbol{n}$, ed all'insieme $\{\boldsymbol{t}_n\}$ di tutte le possibili tensioni al variare della normale $\boldsymbol{n}$ si dà il nome di *tensione nel punto P*[9].

[8] La definizione di tensione, ed alcune sue proprietà, possono già leggersi nella memoria di Cauchy, "*De la pression ou tension dans un corps solide*", Exercices de Mathematiques, 60-78, (1827), riportata nella sezione Ricerca del sito http:\\www.scienzadellecostruzioni.co.uk

[9] L'ipotesi che il secondo rapporto sia nullo definisce il cosiddetto *solido di Cauchy*.

7.5 Componenti normali e tangenziali di tensione

Si consideri il piano $PCFB$ di Figura 7.6, di normale $\boldsymbol{n}$, e sia $\boldsymbol{t}_n$ il relativo vettore rappresentativo della tensione agente in P sul piano di normale $\boldsymbol{n}$. Si fissino due assi coordinati l ed m, ortogonali tra loro e giacenti nel piano $PCFB$, in modo da definire un riferimento tri–ortogonale (P, l, m, n). Il vettore tensione $\boldsymbol{t}_n$ può scomporsi secondo questi tre assi, dando luogo alla componente t_{nn}, diretta lungo la normale al piano, ed alle due componenti t_{nl} e t_{nm} giacenti nel piano.

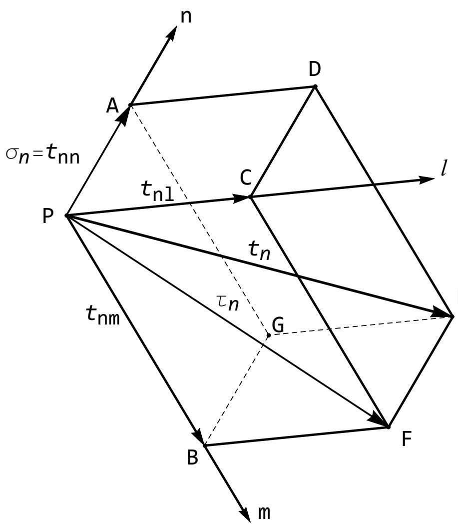


Figura 7.6: Componenti normali e tangenziali di tensione

Data l'importanza di questa scomposizione, la componente t_{nn} si chiama anche *tensione normale* al piano in P, e si denota talvolta con σ_n mentre le altre due tensioni si dicono *tensioni tangenziali.* Spesso, le due componenti t_{nl} e t_{nm} si compongono in un'unica componente, di intensità $\tau_n = \sqrt{t_{nl}^2 + t_{nm}^2}$, diretta come in Figura 7.6. Risulta, ovviamente:

$$t_n = \sqrt{t_{nl}^2 + t_{nm}^2 + t_{nn}^2} = \sqrt{{\tau_n}^2 + \sigma_n^2} \tag{7.11}$$

Esiste anche una diversa formalizzazione, in cui si ammette l'esistenza di un valore finito anche per il secondo rapporto:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\mathbf{R}_n}{\Delta A} &= \mathbf{t}_n \\ \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\mathbf{M}_n}{\Delta A} &= \mathbf{m}_n \end{aligned} \tag{7.10}$$

dando luogo alle *coppie di sforzo* m_n. La conseguente teoria definisce il cosiddetto *solido polare,* o di Cosserat, dal nome dei fratelli Cosserat.

In Figura 7.7 è riportata una diversa rappresentazione del vettore di tensione t_n,

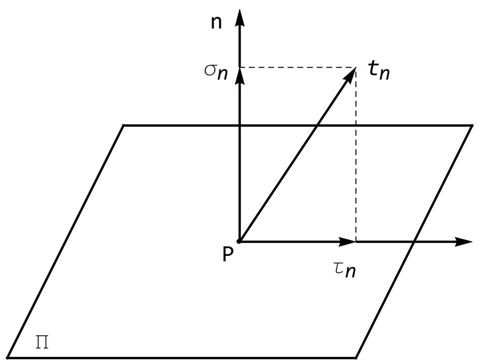


Figura 7.7: Componenti normali e tangenziali di tensione: una diversa rappresentazione

scomposto nella sua componente σ_n, normale al piano Π, e quindi parallelo ad $\boldsymbol{n}$, e nella sua componente τ_n, giacente nel piano Π. A sua volta, scelta una coppia di assi ortogonali (l, m), appartenenti al piano Π, la componente tangenziale τ_n può essere scomposta in due componenti t_{nl} e t_{nm} secondo questi assi, così come riportato in Figura 7.8.

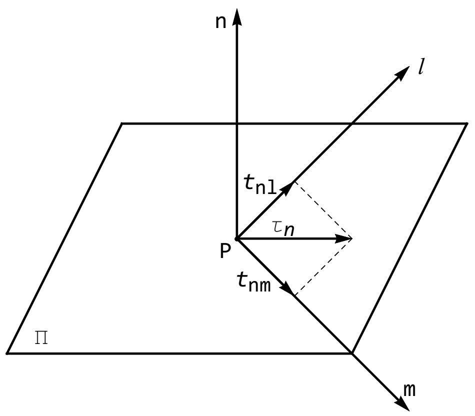


Figura 7.8: La scomposizione della componente tangenziale di tensione

7.6 Componenti speciali di tensione

Si consideri un punto P, appartenente al corpo B in esame, si scelga un sistema di riferimento cartesiano (O, X_1, X_2, X_3), e si enuclei un parallelepipedo di materia, scelto in modo che P ricada nel baricentro, e che le facce del parallelepipedo siano parallele ai piani coordinati. Inoltre, si può far decrescere la lunghezza dei lati del parallelepipedo fino ad ipotizzare che le tensioni agenti sulle sue facce possano considerarsi costanti.

Ciò fatto, si considerino le tre facce con normale uscente positiva, ossia equiverse agli assi, come riportato in Figura 7.9. Su ciascuna di queste facce agirà un vettore tensione, ciascuno con tre componenti lungo gli assi coordinati. Le nove componenti di tensione così identificate si chiamano *componenti speciali di tensione*, e giocheranno un ruolo fondamentale nel seguito. Sul piano $ABCD$, di normale equiversa all'asse X_1, agiscono le tre componenti di tensione σ_{11}, σ_{12} e σ_{13}. Si noti che il primo indice indica la normale al piano su cui agisce la tensione, mentre il secondo indice indica la componente. Analogamente, sul piano $BGHD$, la cui normale è equiversa all'asse X_2, agiranno le tre componenti di tensione σ_{21}, σ_{22} e σ_{23}, mentre sul piano $CDEH$ agiranno le tre componenti di tensione σ_{31}, σ_{32} e σ_{33}.

Per convenzione, le componenti speciali di tensione agenti su piani di normale equiversa agli assi sono positive se equiverse agli assi, quindi come riportati in figura. Sui tre piani di normale negativa, ossia controversa agli assi, le tensioni speciali positive saranno controverse agli assi, come riportato in Figura 7.9, e quindi saranno uguali e contrarie a quelle appena definite.

7.7 Riflessioni critiche sul concetto di tensione

E' evidente la natura altamente teorica della definizione di tensione appena fornita. In particolare, da un punto di vista fisico, la separazione del corpo B è una operazione ideale, poichè non si può certo sperare di operare realmente un taglio senza stravolgere l'originario stato di sollecitazione. Di conseguenza, sembra che non sia possibile un controllo sperimentale dei valori teorici della tensione.

Da un punto di vista matematico, poi, l'operazione di passaggio al limite suscita molti dubbi, non essendo chiaro *come* l'area ΔA debba tendere a zero, e perchè il limite debba esistere ed avere un valore finito.

Tuttavia, la nozione di tensione secondo Cauchy si è rivelata così utile, sia da un punto di vista pratico–sperimentale che da un punto di vista matematico, che parecchi ricercatori hanno cercato di renderne più limpido il concetto. Se è vero che la definizione di tensione è un puro costrutto mentale, è anche vero che lo stato di sforzo può essere visualizzato, nell'ambito della foto–elasticità, e che comunque esso può essere reso evidente tramite le deformazioni che esso produce. Ulteriori giustificazioni del concetto di tensione possono ritrovarsi in ambito epistemologico: citando da Benvenuto [10]

> "Una tensione è per definizione una proprietà dei punti interni di un corpo connessa matematicamente in modo semplice alle forze agenti

[10]P.W. Bridgman, "La logica della fisica moderna", 1927, riportato nel citato libro di Benvenuto, alle pagine 431-433

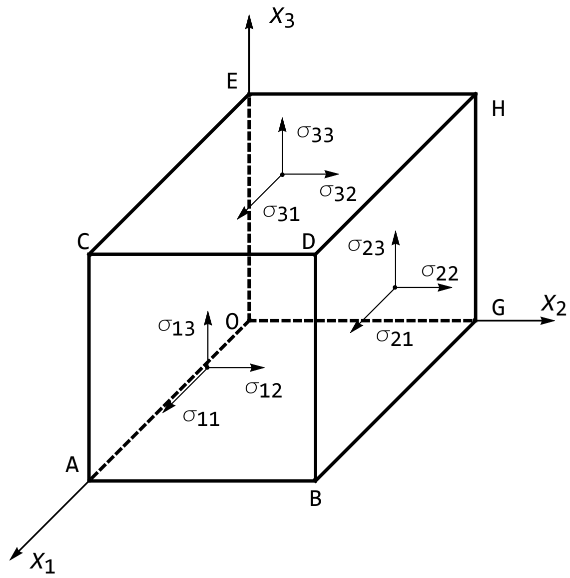


Figura 7.9: Le nove componenti cartesiane di tensione nel punto P agenti sui tre piani di normale positiva

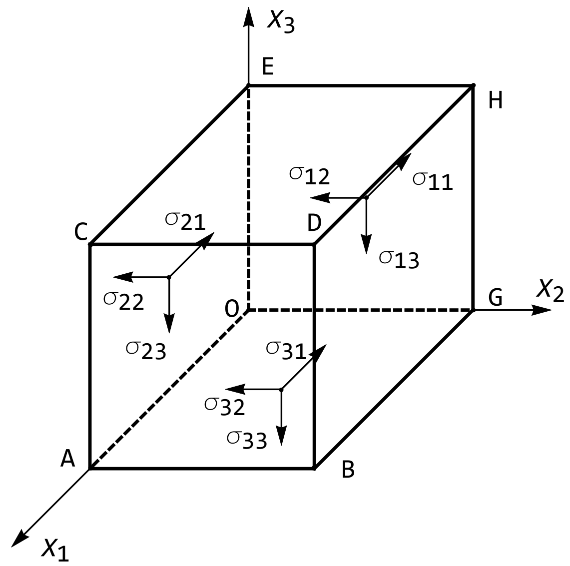


Figura 7.10: Le nove componenti cartesiane di tensione nel punto P agenti sui tre piani di normale negativa

sulla superficie libera del corpo. Una tensione è quindi, per sua natura, sempre al di fuori del raggio dell'esperienza diretta, ed è pertanto un costrutto. L'intera struttura di una tensione non corrisponde a nulla nell'esperienza diretta.

Dobbiamo poi chiederci se la tensione, che abbiamo inventato per risolvere la situazione di un corpo sottoposto a forze, è un buon costrutto. In primo luogo, una tensione ha lo stesso numero di gradi di libertà che compete al fenomeno osservabile, in quanto una delle proposizioni della teoria matematica dell'elasticità asserisce che le condizioni al contorno, le quali costituiscono le variabili sperimentali, determinano univocamente la tensione in un dato corpo; appare ovvio, esaminando le equazioni, che viceversa un sistema possibile di tensioni determina univocamente la tensione nella quantità significativa. Vi è dunque una corrispondenza biunivoca tra una tensione e la situazione fisica che essa è destinata a coprire, pertanto la tensione rappresenta un buon costrutto.

Un corpo sotto tensione è anche in uno stato di sforzo, che può venir determinato dalle deformazioni esterne, oppure lo sforzo nei punti interni può venir reso più evidente mediante quegli effetti ottici della doppia rifrazione nei corpi trasparenti, che ora vengono tanto impiegati in esperimenti dimostrativi; infine, se la tensione è spinta al di là di certi limiti, abbiamo fenomeni nuovi quali la deformazione permanente o addirittura la rottura.

Abbiamo dunque ragione a ritenerci soddisfatti del nostro costrutto della tensione. In primo luogo, dal punto di vista formale, esso rappresenta un buon costrutto perchè si ha una corrispondenza univoca con i dati fisici in termini dei quali è definito; in secondo luogo, abbiamo diritto di attribuirgli una realtà fisica perchè la tensione è connessa in modo unico ad altri fenomeni fisici, indipendenti da quelli considerati nella sua definizione. Quest'ultimo requisito, in effetti, dal punto di vista operativo, non rappresenta altro che una definizione di ciò che intendiamo per realtà delle cose non date direttamente dall'esperienza. L'esperienza mostra che la tensione, oltre che soddisfare i requisiti formali, è utilissima nel correlare i fenomeni, onde noi siamo giustificati nel dare a questo costrutto un posto preminente tra i nostri concetti"

7.8 Conclusioni

La definizione di tensione $\{t_n\}$ in un punto P non è operativa, perchè l'insieme $\{t_n\}$ è infinito. Si vedrà però nel prossimo Capitolo che la conoscenza della tensione per tre distinti valori della normale $\boldsymbol{n}$ permette di determinare immediatamente la tensione per qualsiasi altro valore di $\boldsymbol{n}$.

Capitolo 8

Il teorema di Cauchy–Poisson

Come detto al termine della lezione precedente, occorre ora dare un criterio operativo per poter calcolare la tensione in un punto P relativamente al piano di generica normale $\boldsymbol{n}$, dimostrando il *teorema di Cauchy–Poisson*[1]

8.1 Il tetraedro elementare e le forze su esso agenti

Si consideri un punto generico P all'interno del corpo B e si voglia conoscere la tensione in P secondo il piano di normale generica $\boldsymbol{n}$. In un intorno di P si isoli un tetraedro infinitesimo di materia, di volume dV, con le tre facce ortogonali dA_{x1}, dA_{x2}, dA_{x3} parallele ai tre piani coordinati, e con la faccia obliqua dA avente normale $\boldsymbol{n}$.

Siano $\boldsymbol{t}_n$ la tensione agente in P relativamente al piano obliquo, $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma_2}$ e $\boldsymbol{\sigma}_3$ le tensioni in P relativamente ai tre piani coordinati. Si ammette ora, essendo

[1] L'enunciato originario del teorema, e la sua dimostrazione, si trovano in *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques* Bulletin des Sciences par la Societé Philomatique, pp.9–13, 1823, e più diffusamente in *De la pression ou tension dans un corps solide* Ex. de Math. 2, 42–56, pubblicato nel 1827, ma scritto nel 1822.

Poisson ha dimostrato invece che l'esistenza del tensore delle tensioni implica che il corpo debba essere in equilibrio sotto le forze esterne, cfr.*Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques* Mém. Acad. Sci. Inst. France (2) 8, 357–570.

Il teorema dimostrato in questa lezione è implicitamente accettato anche da A. Fresnel, in un lavoro del 1822 (*Second supplément au mémoire sur la double réfraction* in OEuvres 2, 369-442 (1868)) che però si basa sulle ipotesi di elasticità lineare, ed anche da Fourier, in un lavoro del 1814 sulla conduzione del calore (*Théorie Analytique de la Chaleur*, Paris,Œuvres 1, 1822)). Per una versione moderna dello stesso teorema si può consultare M.E. Gurtin, V.J. Mizel e W.O. Williams, *A note on Cauchy's stress theorem*, J. Math. Anal. Appl. 22, 398–401 (1968).

il tetraedro infinitesimo, che le tensioni in tutti i punti di ciascuna faccia siano uguali[2], giungendo alla situazione di Figura 8.1.

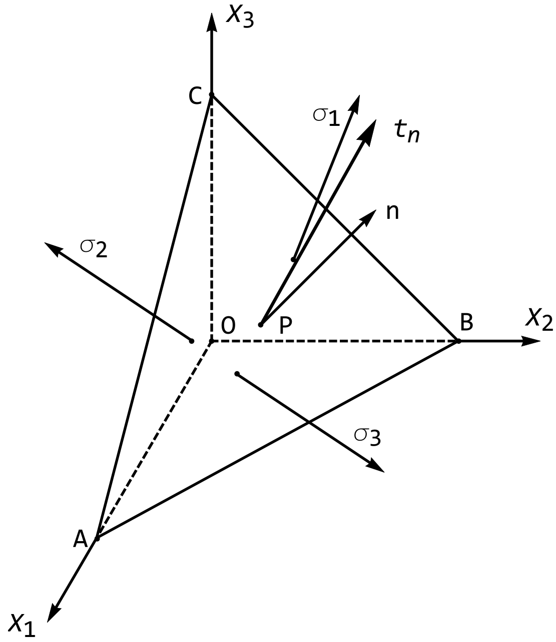


Figura 8.1: Il tetraedro elementare e le forze interne su di esso agenti

[2] Più rigorosamente, si assume che le tensioni varino con continuità, e quindi le componenti della forza agente sulla faccia obliqua ABC saranno esprimibili come $(t_{n1} + \epsilon_1)\, dA$, $(t_{n2} + \epsilon_2)\, dA$, e $(t_{n3} + \epsilon_3)\, dA$, secondo i tre assi. Se poi h denota la distanza tra il piano ABC e l'origine, sarà:

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_1 = 0 \qquad \lim_{h \to 0} \varepsilon_2 = 0 \qquad \lim_{h \to 0} \varepsilon_3 = 0 \tag{8.1}$$

Analoga posizione dovrà essere assunta per le componenti cartesiane di tensione, che daranno luogo alle forze:

$$\begin{array}{lll} (-\sigma_{11} + \varepsilon_{11})\, dA_{x1}, & (-\sigma_{12} + \varepsilon_{12})\, dA_{x2}, & (-\sigma_{13} + \varepsilon_{13})\, dA_{x3} \\ (-\sigma_{21} + \varepsilon_{21})\, dA_{x2}, & (-\sigma_{22} + \varepsilon_{22})\, dA_{x2}, & (-\sigma_{23} + \varepsilon_{23})\, dA_{x2} \\ (-\sigma_{31} + \varepsilon_{31})\, dA_{x3}, & (-\sigma_{32} + \varepsilon_{32})\, dA_{x3}, & (-\sigma_{33} + \varepsilon_{33})\, dA_{x3} \end{array} \tag{8.2}$$

con:

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_{ij} = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{8.3}$$

Infine, le forze di massa saranno fornite dalle espressioni:

$$\left(X_1 + \varepsilon_1'\right) dV \qquad \left(X_2 + \varepsilon_2'\right) dV \qquad \left(X_3 + \varepsilon_3'\right) dV \tag{8.4}$$

con:

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_i' = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{8.5}$$

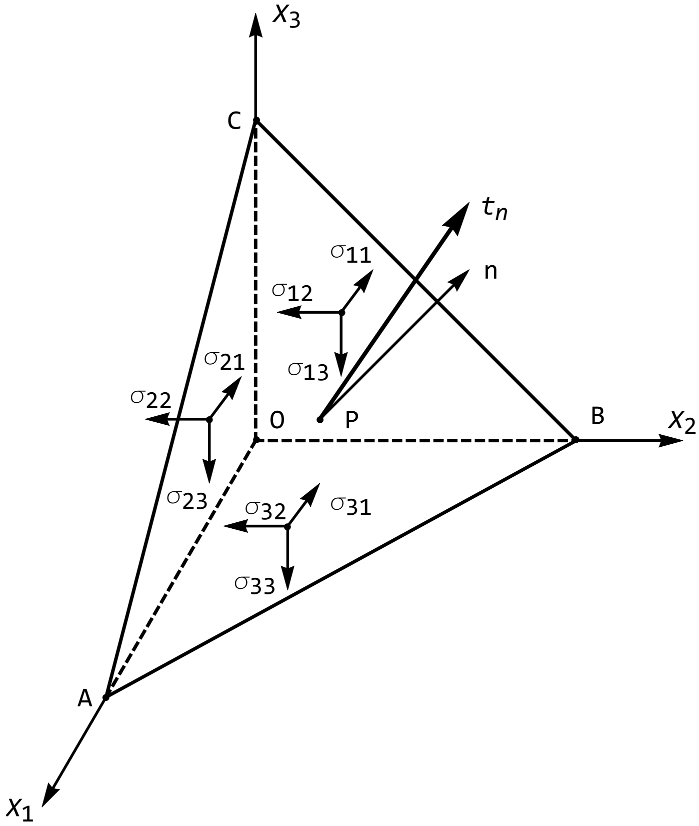


Figura 8.2: Il tetraedro elementare e le componenti delle forze interne su di esso agenti lungo i tre assi coordinati

Siano ora t_{n1}, t_{n2}, t_{n3} le componenti di $\boldsymbol{t}_n$ secondo i tre assi coordinati, σ_{11}, σ_{12} e σ_{13} le componenti di $\boldsymbol{\sigma}_1$ secondo gli stessi assi coordinati, σ_{21}, σ_{22} e σ_{23} le componenti di $\boldsymbol{\sigma}_2$, ed infine σ_{31}, σ_{32} e σ_{33} siano le componenti di $\boldsymbol{\sigma}_3$.

Si noti che il primo indice denota la normale alla faccia su cui opera la tensione, mentre il secondo indice denota la direzione lungo la quale si calcola la componente. Inoltre, per convenzione, la componente di tensione agente su una faccia la cui normale esterna è rivolta secondo il verso positivo di uno dei tre assi sarà positiva se ha verso concorde con gli assi, mentre la componente di tensione agente su una faccia la cui normale esterna è rivolta secondo il verso negativo di uno dei tre assi sarà positiva se ha verso discorde con gli assi.

Infine, nel volume agirà una forza di volume $\boldsymbol{X}$, di componenti X_1, X_2 ed X_3, e quindi, se dV indica il volume del tetraedro, su dV insisteranno anche le forze $X_1 dV$, $X_2 dV$ ed $X_3 dV$.

In complesso, quindi, agiranno le componenti di forze indicate in Figura 8.2.

L'equilibrio alla traslazione secondo l'asse x_1, l'asse x_2 e l'asse x_3, impone che sia:

$$\begin{aligned} t_{n1}dA - (\sigma_{11}dA_{x1} + \sigma_{21}dA_{x2} + \sigma_{31}dA_{x3}) + X_1 dV = 0 \\ t_{n2}dA - (\sigma_{12}dA_{x1} + \sigma_{22}dA_{x2} + \sigma_{32}dA_{x3}) + X_2 dV = 0 \\ t_{n3}dA - (\sigma_{13}dA_{x1} + \sigma_{23}dA_{x2} + \sigma_{33}dA_{x3}) + X_3 dV = 0 \end{aligned} \tag{8.6}$$

e dividendo per dA si ottiene:

$$\begin{aligned} t_{n1} - \left(\sigma_{11}\frac{dA_{x1}}{dA} + \sigma_{21}\frac{dA_{x2}}{dA} + \sigma_{31}\frac{dA_{x3}}{dA}\right) + X_1\frac{dV}{dA} = 0 \\ t_{n2} - \left(\sigma_{12}\frac{dA_{x1}}{dA} + \sigma_{22}\frac{dA_{x2}}{dA} + \sigma_{32}\frac{dA_{x3}}{dA}\right) + X_2\frac{dV}{dA} = 0 \\ t_{n3} - \left(\sigma_{13}\frac{dA_{x1}}{dA} + \sigma_{23}\frac{dA_{x2}}{dA} + \sigma_{33}\frac{dA_{x3}}{dA}\right) + X_3\frac{dV}{dA} = 0 \end{aligned} \tag{8.7}$$

Ora, per la geometria del tetraedro, si ha[3]:

Figura 8.3: Siméon-Denis Poisson

$$\begin{aligned} \frac{dA_{x1}}{dA} = n_1 \\ \frac{dA_{x2}}{dA} = n_2 \\ \frac{dA_{x3}}{dA} = n_3 \end{aligned} \tag{8.13}$$

[3]Sia infatti, dalla Figura 8.1:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} = \vec{r}_1 \\ \overrightarrow{OB} = \vec{r}_2 \\ \overrightarrow{OC} = \vec{r}_3 \end{aligned} \tag{8.8}$$

dove n_1, n_2, n_3 sono i coseni direttori della normale $\boldsymbol{n}$ alla giacitura prescelta:

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos(\boldsymbol{n}, x_1) \\ n_2 &= \cos(\boldsymbol{n}, x_2) \\ n_3 &= \cos(\boldsymbol{n}, x_3) \end{aligned} \tag{8.14}$$

Inoltre, se h è la distanza tra il piano obliquo ABC e l'origine, si ha $dV = \frac{1}{3}hdA$, e per $h \to 0$ le relazioni precedenti divengono:

$$\begin{aligned} t_{n1} &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 \\ t_{n2} &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 \\ t_{n3} &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{aligned} \tag{8.15}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

o, equivalentemente:

$$\boldsymbol{t_n} = \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{n} \tag{8.17}$$

avendo definito la *matrice delle tensioni*:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{8.18}$$

---

sicchè, operando vettorialmente:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \overrightarrow{AC} &= \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \\ \overrightarrow{BC} &= \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Calcolando il prodotto vettoriale tra $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ si ha:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \\ &= \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \times \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_1 \\ &= \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \end{aligned} \tag{8.10}$$

Ora, è noto che il prodotto vettoriale tra due vettori $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ è un vettore ortogonale sia ad $\boldsymbol{x}$ che ad $\boldsymbol{y}$, di modulo pari all'area del parallelogramma di lati $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$, e con verso dettato dalla regola della mano destra. Ne segue che la relazione precedente può scriversi:

$$(dA)\vec{n} = (dA_{x1})\,\vec{\nu}_1 + (dA_{x2})\,\vec{\nu}_2 + (dA_{x3})\,\vec{\nu}_3 \tag{8.11}$$

dove $\vec{\nu}_1$, $\vec{\nu}_2$ e $\vec{\nu}_3$ sono i vettori unitari (versori) ortogonali alle superfici OCB, OCA e OAB, rispettivamente. Infine, dividendo per dA, si ha:

$$\vec{n} = \left(\frac{dA_{x1}}{dA}\right)\vec{\nu}_1 + \left(\frac{dA_{x2}}{dA}\right)\vec{\nu}_2 + \left(\frac{dA_{x3}}{dA}\right)\vec{\nu}_3 \tag{8.12}$$

e quindi i tre coseni direttori della normale sono forniti dalle 8.13.

Utilizzando la notazione indiciale, e la convenzione degli indici ripetuti, potrà anche scriversi:

$$t_{ni} = \sigma_{ji} n_j \tag{8.19}$$

Si è così dimostrato il:

Teorema 2. *(Cauchy–Poisson) - Si consideri il corpo B in equilibrio sotto le forze di massa $\boldsymbol{X}$ e superficiali $\boldsymbol{p}$, ed un punto P situato al suo interno. Assegnate le tensioni in P lungo tre piani di normale x_1, x_2 e x_3, è possibile ricavare la tensione $\boldsymbol{t_n}$ in P lungo un qualsiasi altro piano di normale $\boldsymbol{n}$, tramite la relazione:*

$$\boldsymbol{t_n} = \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{n} \tag{8.20}$$

dove $\boldsymbol{S}$ è la matrice (8.18) delle componenti delle tensioni sui tre piani coordinati, di normale x_1, x_2 e x_3, ed $\boldsymbol{n}$ è il vettore dei coseni direttori della normale rispetto agli assi x_1, x_2 e x_3.

Nota 1 - Si noti che, poichè le forze di massa scompaiono dalla deduzione della (8.20), le stesse valgono sia in regime statico che dinamico.
Nota 2 - Se il punto P prescelto non è interno al volume, ma si trova sulla superficie, e se la normale $\boldsymbol{n}$ è la normale al contorno del corpo, allora il ruolo giocato dalla tensione $\boldsymbol{t}_n$ nel teorema di Cauchy–Poisson è assunto dalla forza superficiale $\boldsymbol{p}$, e le relazioni (8.20) esprimono l'equilibrio tra forze superficiali e tensioni:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{8.21}$$

o, indicialmente:

$$p_i = \sigma_{ji} n_j \tag{8.22}$$

8.2 Le tensioni normali e tangenziali

Utilizzando il teorema di Cauchy–Poisson, appena dimostrato, si può calcolare facilmente la tensione normale agente sul piano di normale $\boldsymbol{n}$. Sarà infatti:

$$t_{nn} = \sigma_n = t_n \cdot n = t_{n1} n_1 + t_{n2} n_2 + t_{n3} n_3 = t_{ni} n_i \tag{8.23}$$

dove il punto indica il prodotto scalare. Utilizzando le (8.19) si ha:

$$\begin{aligned} t_{nn} = \sigma_n = {} & \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + \\ & (\sigma_{12} + \sigma_{21}) n_1 n_2 + (\sigma_{13} + \sigma_{31}) n_1 n_3 + (\sigma_{23} + \sigma_{32}) n_2 n_3 = \sigma_{ij} n_i n_j \end{aligned} \tag{8.24}$$

L'*ampiezza* della tensione tangenziale τ_n puo' calcolarsi considerando che dovrà essere:

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 \tag{8.25}$$

Figura 8.4: Augustin-Louis Cauchy in un dipinto di J.Roller, circa 1840

e quindi:

$$\tau_n^2 = t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 - \sigma_n^2 \tag{8.26}$$

La *direzione* della tensione tangenziale, invece, può calcolarsi determinando i suoi coseni direttori $(n_{\tau 1}, n_{\tau 2}, n_{\tau 3})$. Poichè la somma delle componenti di σ_n e di τ_n in direzione x_1 deve essere uguale a t_{n1}, dovrà essere:

$$\sigma_n n_1 + \tau_n n_{\tau 1} = t_{n1} \tag{8.27}$$

da cui subito:

$$n_{\tau 1} = \frac{t_{n1} - \sigma_n n_1}{\tau_n} \tag{8.28}$$

Del tutto analogamente:

$$\begin{aligned} n_{\tau 2} &= \frac{t_{n2} - \sigma_n n_2}{\tau_n} \\ n_{\tau 3} &= \frac{t_{n3} - \sigma_n n_3}{\tau_n} \end{aligned} \tag{8.29}$$

Capitolo 9

Le equazioni indefinite di equilibrio

In questa lezione si deducono le cosiddette *equazioni indefinite dell'equilibrio,* e si dimostra l'importante proprietà di simmetria della matrice delle tensioni. Ambedue questi risultati vengono raggiunti imponendo l'equilibrio di un tetraedro elementare isolato all'interno del corpo[1], oppure — in modo più rigoroso — a partire dalla scrittura delle equazioni cardinali della statica su un volume arbitrario all'interno del corpo (principio di solidificazione).

9.1 Le forze agenti

Si consideri un corpo B e si isoli, idealmente, al suo interno, un parallelepipedo infinitesimo, con gli spigoli paralleli agli assi coordinati X_1, X_2, X_3. Le componenti di tensione agenti sulle sei facce del parallelepipedo sono riportate in Figura 9.1, positive secondo la convenzione illustrata nei Capitoli precedenti.

Ad esempio, la faccia $EFGH$ ha normale uscente discorde all'asse coordinato X_1, e di conseguenza le tre componenti σ_{11}, σ_{12} e σ_{13} sono positive se controverse agli assi coordinati, come riportato in Figura. Se gli spigoli del parallelepipedo sono lunghi dx_1, dx_2 e dx_3, rispettivamente, allora sulla faccia $EFGH$ agiranno le forze di intensità $\sigma_{11}dx_2dx_3$, $\sigma_{12}dx_2dx_3$ e $\sigma_{13}dx_2dx_3$.

Sulla faccia parallela $ABCD$ la normale uscente è equiversa all'asse X_1, e quindi le componenti di tensione saranno positive se equiverse agli assi. Le forze agenti su questa faccia saranno $\sigma'_{11}dx_2dx_3$, $\sigma'_{12}dx_2dx_3$ e $\sigma'_{13}dx_2dx_3$, dove

[1] La deduzione delle condizioni di equilibrio si trova in Cauchy, *Sur les relations qui existent, dans l'état d'équilibre d'un corp solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices*, Exercises de Mathématiques, 2, pp. 108–111

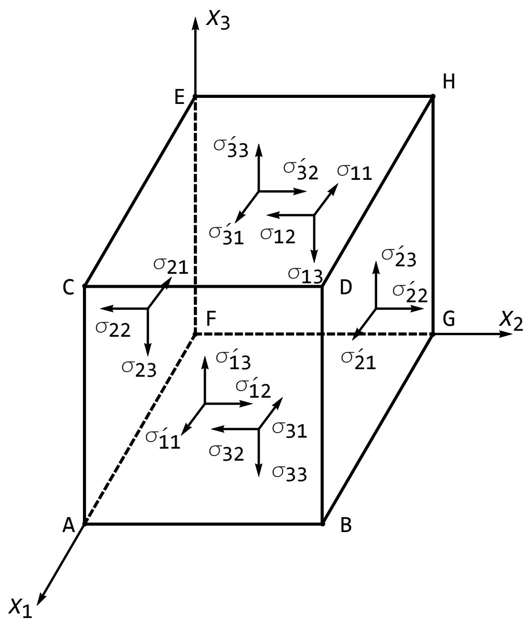


Figura 9.1: Le componenti di tensione positive agenti sulle sei facce del parallelepipedo

le tensioni σ'_{11}, σ'_{12}, σ'_{13} sono legate alle σ_{11}, σ_{12} e σ_{13} dalle relazioni:

$$\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \\
\sigma'_{12} &= \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \\
\sigma'_{13} &= \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} dx_1
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Analogamente, sulla faccia $ACEF$ agiranno le forze $\sigma_{21} dx_1 dx_3$, $\sigma_{22} dx_1 dx_3$ e $\sigma_{23} dx_1 dx_3$, mentre sulla faccia parallela $BDHG$ agiranno le forze $\sigma'_{21} dx_1 dx_3$, $\sigma'_{22} dx_1 dx_3$ e $\sigma'_{23} dx_1 dx_3$, con:

$$\begin{aligned}
\sigma'_{21} &= \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \\
\sigma'_{22} &= \sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 \\
\sigma'_{23} &= \sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Infine, su $ABGF$ agiranno le forze $\sigma_{31} dx_1 dx_2$, $\sigma_{32} dx_1 dx_2$ e $\sigma_{33} dx_1 dx_2$, mentre sulla faccia parallela $CDEH$ agiranno le forze $\sigma'_{31} dx_1 dx_2$, $\sigma'_{32} dx_1 dx_2$ e

$\sigma'_{33} dx_1 dx_2$, con:

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{31} &= \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 \\
\sigma'_{32} &= \sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} dx_3 \\
\sigma'_{33} &= \sigma_{33} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3
\end{aligned}
\tag{9.3}
$$

Le relazioni precedenti sono giustificate nell'ambito di uno sviluppo in serie troncato al primo termine.

9.2 Le equazioni di equilibrio alla traslazione

Se il parallelepipedo infinitesimo è soggetto alla forza di massa $\boldsymbol{X}$, di componenti X_1, X_2 ed X_3, dovrà essere garantito l'equilibrio alla traslazione tra le forze esterne e quelle interne. In direzione X_1, ad esempio, sarà:

$$
\begin{aligned}
&-\sigma_{11} dx_2 dx_3 - \sigma_{21} dx_1 dx_3 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 + \\
&\quad \sigma'_{11} dx_2 dx_3 + \sigma'_{21} dx_1 dx_3 + \sigma'_{31} dx_1 dx_2 + X_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0
\end{aligned}
\tag{9.4}
$$

ed utilizzando le (9.1) si ha:

$$
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 + X_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \tag{9.5}
$$

Poichè la quantità $dx_1 dx_2 dx_3$ è sicuramente non nulla, dovrà essere necessariamente:

$$
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0 \tag{9.6}
$$

Del tutto analogamente, l'equilibrio alla traslazione in direzione X_2 ed in direzione X_3 conduce alle altre due equazioni di equilibrio:

$$
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 = 0 \tag{9.7}
$$

$$
\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0 \tag{9.8}
$$

Le tre equazioni precedenti vanno sotto il nome di *equazioni indefinite dell'equilibrio*.

9.3 Le equazioni di equilibrio alla rotazione

Si imponga ora che il parallelepipedo sia in equilibrio rispetto alle rotazioni intorno ai tre assi, scegliendo come polo dei momenti il baricentro del parallelepipedo. Questa scelta elimina dal gioco le forze di massa, applicate proprio nel baricentro, ed anche le tensioni σ_{11}, σ_{22} e σ_{33}, il cui braccio è nullo, dato che le tensioni si suppongono applicate nei baricentri delle facce del parallelepipedo.

Ciò premesso, si consideri ad esempio l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno all'asse X_3. Si ha:

$$\sigma_{12} dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} + \sigma'_{12} dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} - \sigma_{21} dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} - \sigma'_{21} dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} = 0 \quad (9.9)$$

ed utilizzando le (9.1) e (9.2) si ha:

$$\begin{aligned} &\sigma_{12} dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} \\ &-\sigma_{21} dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} - \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} = 0 \end{aligned} \quad (9.10)$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si giunge alla relazione:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (9.11)$$

Imponendo l'equilibrio alla rotazione anche intorno agli altri due assi si ha, del tutto analogamente:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \sigma_{31} \\ \sigma_{23} &= \sigma_{32} \end{aligned} \quad (9.12)$$

Ne segue, in definitiva, che la matrice delle tensioni è simmetrica, e che le componenti di tensioni si riducono a sei. Le tre tensioni ad indici uguali, σ_{11}, σ_{22} e σ_{33} si dicono *tensioni normali*, mentre le tre tensioni ad indici disuguali, σ_{12}, σ_{13} e σ_{23} si dicono *tensioni tangenziali*.

9.4 La notazione matriciale ed indiciale

Come si è visto, le equazioni di equilibrio alla rotazione implicano la simmetria della matrice delle tensioni $\boldsymbol{S}$, e di conseguenza si potrà scrivere:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (9.13)$$

Molto conveniente risulta l'introduzione del vettore $\boldsymbol{\sigma}$ delle sei componenti di tensioni:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

Utilizzando tale notazione, le equazioni indefinite dell'equilibrio potranno sinteticamente scriversi come:

$$\boldsymbol{\delta\sigma} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \tag{9.15}$$

avendo introdotto la matrice di operatori differenziali:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{9.16}$$

ed il vettore delle forze di massa:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \tag{9.17}$$

Alternativamente, le equazioni indefinite dell'equilibrio potranno scriversi, in notazione indiciale, come:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{9.18}$$

9.5 Un approccio alternativo

Le equazioni di equilibrio appena dedotte in modo diretto possono anche trarsi — in modo matematicamente più corretto — facendo uso del teorema della divergenza[2]. Ed infatti, si consideri un volume V, con frontiera $\delta\mathrm{V}$, contenuto all'interno del corpo, e si esprimano le condizioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione:

$$\int_V \boldsymbol{X}\, \mathrm{d}V + \int_{\delta\mathrm{V}} \boldsymbol{t}_n\, \mathrm{d}s = 0 \tag{9.20}$$

$$\int_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{X}\, \mathrm{d}V + \int_{\delta\mathrm{V}} \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{t}_n\, \mathrm{d}s = 0 \tag{9.21}$$

Si espliciti la (9.20), utilizzando il teorema di Cauchy–Poisson:

$$\int_V X_i\, \mathrm{d}V + \int_{\delta\mathrm{V}} \sigma_{ji} n_j\, \mathrm{d}s = 0, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{9.22}$$

[2]Se V è una regione dello spazio, e se f è un campo scalare continuo e derivabile, si ha

$$\int_{\partial V} f n_i\, \mathrm{d}s = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}V \tag{9.19}$$

dove n è il versore della normale uscente al contorno.

ed utilizzando il teorema della divergenza:

$$\int_V X_i \, \mathrm{d}V + \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \, \mathrm{d}V = 0, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{9.23}$$

Per l'arbitrarietà del volume V, ne seguono le (9.18).

Esplicitando le (9.21) si hanno invece le tre equazioni scalari:

$$\begin{aligned}
&\int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2) \, \mathrm{d}V + \int_{\delta \mathrm{V}} (s_2 t_{n3} - s_3 t_{n2}) \, \mathrm{d}s = 0 \\
&\int_V (r_3 X_1 - r_1 X_3) \, \mathrm{d}V + \int_{\delta \mathrm{V}} (s_3 t_{n1} - s_1 t_{n3}) \, \mathrm{d}s = 0 \\
&\int_V (r_1 X_2 - r_2 X_1) \, \mathrm{d}V + \int_{\delta \mathrm{V}} (s_1 t_{n2} - s_2 t_{n1}) \, \mathrm{d}s = 0
\end{aligned} \tag{9.24}$$

Utilizzando il teorema di Cauchy–Poisson, la prima di queste equazioni diviene:

$$\begin{aligned}
&\int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2) \, \mathrm{d}V + \\
&\int_{\delta \mathrm{V}} \left[s_2 \left(\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 \right) - s_3 \left(\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \right) \right] \mathrm{d}s = 0
\end{aligned} \tag{9.25}$$

e per il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned}
&\int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2) \, \mathrm{d}V + \int_V \left[\frac{\partial \left(r_2 \sigma_{13} \right)}{\partial x_1} + \right. \\
&\left. \frac{\partial \left(r_2 \sigma_{23} \right)}{\partial x_2} + \frac{\partial \left(r_2 \sigma_{33} \right)}{\partial x_3} - \frac{\partial \left(r_3 \sigma_{12} \right)}{\partial x_1} - \frac{\partial \left(r_3 \sigma_{22} \right)}{\partial x_2} - \frac{\partial \left(r_3 \sigma_{32} \right)}{\partial x_3} \right] \mathrm{d}V = 0
\end{aligned} \tag{9.26}$$

Svolgendo i prodotti si ha:

$$\begin{aligned}
&\int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2) \, \mathrm{d}V + \int_V \left[r_2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \right. \\
&\left. r_2 \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{23} + r_2 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} - r_3 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - r_3 \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} - r_3 \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} - \sigma_{32} \right] \mathrm{d}V = 0
\end{aligned} \tag{9.27}$$

Infine, utilizzando le (9.18) si ottiene, per l'arbitrarietà del volume:

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} \tag{9.28}$$

Dalle altre due equazioni si ottiene $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ e $\sigma_{13} = \sigma_{31}$

Capitolo 10

Tensioni e direzioni principali

In questo Capitolo si studierà ciò che avviene alla componente normale di tensione σ_n, al variare del piano Π su cui essa è calcolata. Dopo aver espresso la tensione normale in funzione dei coseni direttori alla normale n al piano Π, la procedura standard per la ricerca dei punti di estremo di una funzione permette di calcolare i valori minimi e massimi della σ_n. Risulta che in corrispondenza di tali valori il vettore $\boldsymbol{t}_n$ della tensione risulta diretto secondo la normale n. Ciò implica che sui piani dove la tensione normale assume un valore estremo, non agisce tensione tangenziale.

Si deduce infine in questa lezione l'equazione secolare per la ricerca delle tensioni principali, assieme alle corrispondenti direzioni principali.

10.1 Tensioni normali e tangenziali, rivisitate

Si riscriva ora il teorema di Cauchy–Poisson, alla nuova luce della simmetria della matrice delle tensioni, ottenendo così le componenti del vettore tensione $\boldsymbol{t}_n$ in forma definitiva:

$$\begin{aligned} t_{n1} &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ t_{n2} &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ t_{n3} &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{aligned} \tag{10.1}$$

La proiezione t_{nl} di $\boldsymbol{t}_n$ secondo una generica retta l si ottiene moltiplicando scalarmente il vettore $\boldsymbol{t}_n$ per il vettore contenente i coseni direttori della retta l. Indicando con $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, l_3)$ i coseni direttori suddetti, si ha:

$$t_{nl} = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{l} = t_{ni}l_i = \sigma_{ij}l_in_j \tag{10.2}$$

Di particolare importanza è il caso in cui $l = n$, ossia il caso in cui si vuol conoscere la componente di $\boldsymbol{t}_n$ secondo la normale n. Si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_n = t_{nn} = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n} = t_{ni} n_i =& \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + \\ & 2\sigma_{12} n_1 n_2 + 2\sigma_{13} n_1 n_3 + 2\sigma_{23} n_2 n_3\end{aligned} \tag{10.3}$$

Per una fondamentale proprietà del vettore dei coseni direttori $\boldsymbol{n}$ della normale, si ha:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \longrightarrow n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2 \tag{10.4}$$

e quindi la tensione normale può esprimersi in funzione delle due sole variabili n_1 ed n_2:

$$\begin{aligned}\sigma_n =& \left(\sigma_{11} - \sigma_{33}\right) n_1^2 + \left(\sigma_{22} - \sigma_{33}\right) n_2^2 + \sigma_{33} + \\ & 2\sigma_{12} n_1 n_2 + 2\left(\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2\right)\left(1 - n_1^2 - n_2^2\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{10.5}$$

Dovendo poi essere:

$$t_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \tag{10.6}$$

si può calcolare l'intensità della tensione tangenziale:

$$\tau_n^2 = t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 - \sigma_n^2 \tag{10.7}$$

10.2 La ricerca della massima e minima tensione normale

La tensione in un punto, come si è visto, è un insieme $\{t_n\}$ di infiniti valori, funzione della normale $\boldsymbol{n}$ al piano passante per P. Ha quindi senso chiedere qual'è il piano per cui la tensione normale σ_n assume il suo valore estremo, massimo o minimo.

Per rispondere a questa domanda occorre imporre le condizioni di stazionarietà:

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_1} = 0 \tag{10.8}$$

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_2} = 0 \tag{10.9}$$

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_3} = 0 \tag{10.10}$$

Utilizzando la (10.5), si potrà scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_1} =& 2\left(\sigma_{11} - \sigma_{33}\right) n_1 + 2\sigma_{12} n_2 + 2\sigma_{13}\left(1 - n_1^2 - n_2^2\right)^{1/2} + \\ & 2\left(\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2\right) \frac{1}{2}\left(1 - n_1^2 - n_2^2\right)^{-1/2}\left(-2n_1\right) = \\ & 2\left(\sigma_{11} - \sigma_{33}\right) n_1 + 2\sigma_{12} n_2 + 2\sigma_{13} n_3 - 2\frac{n_1}{n_3}\left(\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2\right) = \\ & 2\left(\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3\right) - 2\frac{n_1}{n_3}\left(\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23z} n_2 + \sigma_{33} n_3\right) = 0\end{aligned} \tag{10.11}$$

e quindi, in base al teorema di Cauchy–Poisson:

$$\frac{t_{n1}}{n_1} = \frac{t_{n3}}{n_3} \tag{10.12}$$

Del tutto analogamente dovrà anche essere:

$$\frac{t_{n1}}{n_1} = \frac{t_{n2}}{n_2} \tag{10.13}$$

$$\frac{t_{n2}}{n_2} = \frac{t_{n3}}{n_3} \tag{10.14}$$

e quindi, in definitiva, potrà porsi:

$$\frac{t_{n1}}{n_1} = \frac{t_{n2}}{n_2} = \frac{t_{n3}}{n_3} = \sigma \tag{10.15}$$

Dalla (10.3) sarà poi:

$$\sigma_n = t_{n1}n_1 + t_{n2}n_2 + t_{n3}n_3 = \sigma n_1^2 + \sigma n_2^2 + \sigma n_3^2 = \sigma \tag{10.16}$$

e dalla (10.7) risulta immediato dedurre:

$$\tau_n = 0 \tag{10.17}$$

In altri termini: - *un piano su cui la tensione normale è massima, o minima, è anche un piano su cui non agiscono tensioni tangenziali.*

10.3 Le tensioni principali

Si vogliono ora individuare i piani su cui la tensione normale raggiunge il suo valore massimo o minimo, o meglio, si vogliono calcolare i coseni direttori della normale a tali piani.

In base alla (10.17), ciò equivale ad individuare i piani per cui le tensioni tangenziali si annullano. In altri termini, quali sono i piani passanti per il punto P, per cui la tensione $\boldsymbol{t}_n$ è diretta proprio lungo la normale, come illustrato in Figura 10.1?

Se $\boldsymbol{t}_n$ è orientata secondo la normale $\boldsymbol{n}$, allora si avrà, come si osserva dalla Figura 10.2, e come confermato dalla (10.15):

$$t_{n1} = \sigma n_1 \tag{10.18}$$

$$t_{n2} = \sigma n_2 \tag{10.19}$$

$$t_{n3} = \sigma n_3 \tag{10.20}$$

D'altro canto, secondo il teorema di Cauchy–Poisson:

$$\begin{aligned} t_{n1} &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ t_{n2} &= \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ t_{n3} &= \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{aligned} \tag{10.21}$$

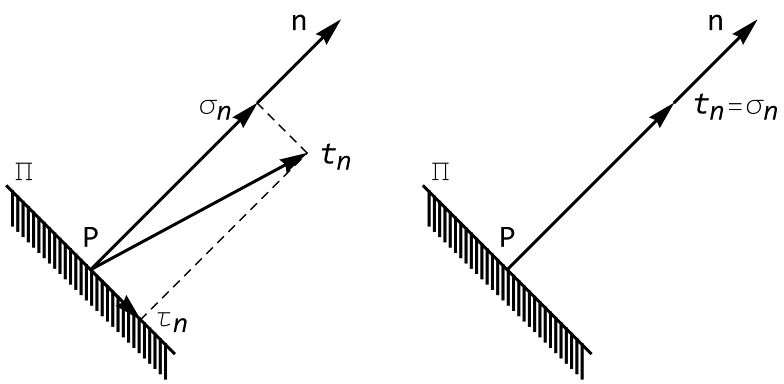


Figura 10.1: a) Il caso usuale, con la tensione t_n e le sue componenti normale e tangenziale. b) Il caso in cui la componente tangenziale si annulla, ed **n** è direzione principale.

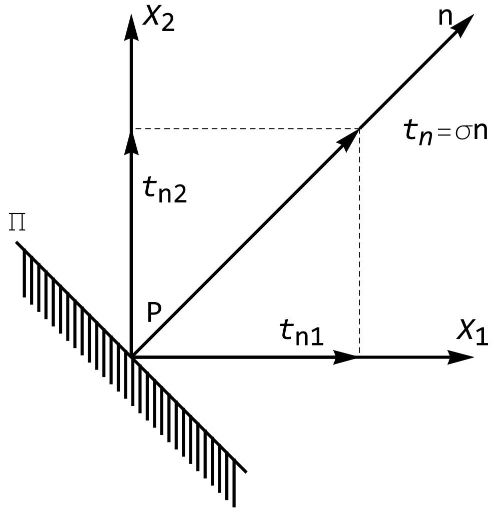


Figura 10.2: Le componenti della tensione principale t_n.

e quindi dovrà essere:

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_{11} - \sigma)\, n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0 \\
&\sigma_{12} n_1 + (\sigma_{22} - \sigma)\, n_2 + \sigma_{23} n_3 = 0 \\
&\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + (\sigma_{33} - \sigma)\, n_3 = 0
\end{aligned}
\tag{10.22}
$$

E' questo un sistema di tre equazioni omogenee nelle tre incognite n_1, n_2, n_3 la cui soluzione banale $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ non ha significato fisico. Ed infatti le n_1, n_2 ed n_3 sono i coseni direttori della normale al piano Π.

Occorre allora calcolare le soluzioni non banali, e definite a meno di costanti, imponendo che sia nullo il determinante dei coefficienti del sistema (10.22):

$$
\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{pmatrix} = 0 \tag{10.23}
$$

e svolgendo i calcoli si ha l'equazione cubica in σ:

$$
-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0 \tag{10.24}
$$

con:

$$
I_1 = \mathrm{Traccia}(\boldsymbol{S}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \tag{10.25}
$$

$$
I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 \tag{10.26}
$$

$$
I_3 = \mathrm{Det}(\boldsymbol{S}) = \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{10.27}
$$

Nota - L'equazione (10.24) si chiama *equazione secolare*, mentre le tre quantità I_1, I_2 ed I_3 prendono il nome di *invariante lineare*, *quadratico* e *cubico* di tensione, ad indicare che il loro valore non cambia al ruotare del sistema di riferimento adottato.

10.4 Le direzioni principali di tensione

Si può dimostrare che — a causa della simmetria della matrice delle tensioni — l'equazione cubica in σ ammette tre radici reali $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ — eventualmente coincidenti — dette *tensioni principali.* In corrispondenza di ciascuno di questi valori il sistema (10.22) diviene indeterminato, ed ammette una infinità di soluzioni non nulle. Tuttavia questa indeterminazione si può eliminare considerando che dovrà comunque essere:

$$
n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \tag{10.28}
$$

Sia $\boldsymbol{n}_I = (n_{11}, n_{21}, n_{31})$ la soluzione che si ottiene in corrispondenza di $\sigma = \sigma_1$, $\boldsymbol{n}_{II} = (n_{12}, n_{22}, n_{32})$ la soluzione che si ottiene in corrispondenza di $\sigma = \sigma_2$,

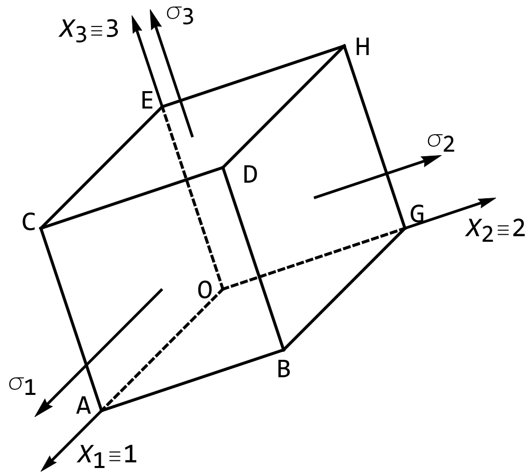


Figura 10.3: L'elemento rettangolare orientato secondo gli assi principali, e quindi soggetto alle sole tensioni normali

ed infine $\boldsymbol{n}_{III} = (n_{13}, n_{23}, n_{33})$ la soluzione che si ottiene in corrispondenza di $\sigma = \sigma_3$.

Si può dimostrare anche che queste tre direzioni $\boldsymbol{n}_I$, $\boldsymbol{n}_{II}$ e $\boldsymbol{n}_{III}$, dette *direzioni principali di tensione*, sono tra loro ortogonali, sicchè, ad esempio:

$$\boldsymbol{n}_I \cdot \boldsymbol{n}_{II} = n_{11}n_{12} + n_{21}n_{22} + n_{31}n_{32} = 0 \tag{10.29}$$

I piani identificati dalle direzioni principali, detti *piani principali*, sono anch'essi mutuamente ortogonali, ed un cubo elementare, contenente il punto P in studio, le cui facce vengano a coincidere coi piani principali, sarà sollecitato da sole tensioni normali, pari alle tensioni principali (cfr. Figura 10.3). Ne segue che se il sistema di riferimento $(O, X_1, X_2\ , X_3)$ viene ruotato fino a portarlo a coincidere col sistema principale (O,1,2,3), la matrice delle tensioni assumerà l'aspetto diagonale:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{10.30}$$

ed i tre invarianti saranno forniti da:

$$I_1 = \text{Traccia}(\boldsymbol{S}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{10.31}$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \tag{10.32}$$

$$I_3 = \text{Det}(\boldsymbol{S}) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \tag{10.33}$$

Nota — L'intera procedura illustrata in questo Capitolo rappresenta un esempio di calcolo di autovalori ed autovettori di una matrice simmetrica di ordine tre.

La teoria generale degli autovalori ed autovettori, le loro proprietà algebriche e geometriche, nonchè i metodi numerici per il loro calcolo, possono ritrovarsi in qualsiasi testo di algebra lineare. Può ad esempio consultarsi B.N. Parlett, *The Symmetric Eigenvalue Problem,* SIAM, 1998.

Capitolo 11

Le tensioni tangenziali

In questo Capitolo si illustrano alcune semplificazioni che si ottengono scegliendo come assi coordinati la terna di assi principali, e quindi avendo una matrice delle tensioni di tipo diagonale. Poi si riformula il teorema di Cauchy–Poisson in questa ipotesi, e si scrive la formula dell'ellissoide delle tensioni. Infine, si studiano le tensioni tangenziali, ricavando i valori minimi e massimi che esse possono attingere in un intorno del punto P. Il procedimento analitico è simile a quello adottato per lo studio delle tensioni normali.

11.1 Il teorema di Cauchy–Poisson rivisitato

Si consideri il generico punto P, situato all'interno del corpo B in esame, e si scelga un sistema di riferimento i cui assi siano coincidenti con gli assi principali, calcolati secondo quanto detto nel Capitolo precedente. La matrice delle tensioni, in questo riferimento, sarà:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

Il teorema di Cauchy–Poisson, in questo sistema di riferimento, fornisce:

$$\begin{aligned} t_{n1} &= \sigma_1 n_1 \\ t_{n2} &= \sigma_2 n_2 \\ t_{n3} &= \sigma_3 n_3 \end{aligned} \tag{11.2}$$

dove ora, ovviamente, i coseni direttori della normale uscente al piano sono calcolati a partire dagli assi principali.

Figura 11.1: Gabriel Lamé

11.2 L'ellissoide delle tensioni

Inserendo i valori dei coseni direttori, ricavabili dalle equazioni precedenti, nella ben nota relazione:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \tag{11.3}$$

si giunge a definire la seguente equazione:

$$\frac{t_{n1}^2}{\sigma_1^2} + \frac{t_{n2}^2}{\sigma_2^2} + \frac{t_{n3}^2}{\sigma_3^2} = 1 \tag{11.4}$$

Dalla (11.4) si deduce che l'estremità del vettore tensione $\boldsymbol{t}_n$, al variare della normale n, descrive una superficie tridimensionale del tipo ellissoide, nota come *ellissoide delle tensioni,* o *ellissoide di Lamè,* i cui tre semi–assi rappresentano le tre tensioni principali.

Conosciute le tre componenti della tensione secondo i tre assi coordinati, è immediato conoscere anche la sua componente secondo la normale. E' infatti:

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \tag{11.5}$$

mentre l'intensità della tensione tangenziale è pari a:

$$\tau_n^2 = t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \left(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2\right)^2 \tag{11.6}$$

oppure, essendo:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \longrightarrow n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2 \tag{11.7}$$

si potrá anche esprimere la tensione tangenziale in funzione dei soli coseni direttori n_1 ed n_2:

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 \left(1 - n_1^2 - n_2^2\right) - \left[\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 \left(1 - n_1^2 - n_2^2\right)\right]^2 \tag{11.8}$$

11.3 La ricerca della massima e minima tensione tangenziale

La tensione in un punto, come si è visto, è un insieme $\{t_n\}$ di infiniti valori, funzione della normale $\mathbf{n}$ al piano passante per P. Abbiamo già visto come individuare i piani su cui la tensione normale ha i suoi valori massimi o minimi. Resta da chiedere anche qual'è il piano, o i piani, su cui la tensione tangenziale τ_n assume il suo valore estremo, massimo o minimo.

Per rispondere a questa domanda occorre imporre le condizioni di stazionarietà:

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial n_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{11.9}$$

Utilizzando la (11.8), si potrá scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau^2}{\partial n_1} =& 2\sigma_1^2 n_1 - 2\sigma_3^2 n_1^2 - 2\left[\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3\left(1 - n_1^2 - n_2^2\right)\right]\left(2\sigma_1 n_1 - 2\sigma_3 n_1\right)\\ =& 2n_1\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)\left[2n_2^2\left(\sigma_3 - \sigma_2\right) + \left(1 - 2n_1^2\right)\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)\right]\end{aligned} \tag{11.10}$$

ed anche:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau^2}{\partial n_2} &= 2\sigma_2^2 n_2 - 2\sigma_3^2 n_2^2 - 2\left[\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3\left(1 - n_1^2 - n_2^2\right)\right]\left(2\sigma_2 n_2 - 2\sigma_3 n_2\right)\\ &= 2n_2\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)\left[2n_1^2\left(\sigma_3 - \sigma_1\right) + \left(1 - 2n_2^2\right)\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)\right]\end{aligned} \tag{11.11}$$

Queste due condizioni devono valere simultaneamente. Una prima soluzione della (11.10) è ovviamente $n_1 = 0$, che sostituita nella (11.11) fornisce:

$$n_2 = 0 \tag{11.12}$$

oppure:

$$1 - 2n_2^2 = 0 \tag{11.13}$$

La soluzione $n_1 = n_2 = 0$, da cui $n_3 = 1$, rappresenta uno dei piani principali, su cui quindi la tensione tangenziale è nulla, e quindi τ_n^2 è minimo. La seconda soluzione, $n_1 = 0$, $1 - 2n_2^2 = 0$ implica:

$$\begin{aligned} n_1 &= 0\\ n_2^2 &= \frac{1}{2}\\ n_3^2 &= \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{11.14}$$

Del tutto analogamente, una soluzione della (11.11) è $n_2 = 0$, che sostituita nella (11.10) fornisce un piano principale, ed una soluzione:

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{1}{2} \\ n_2^2 &= 0 \\ n_3^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{11.15}$$

Poichè sia $n_1 = 0$ che $n_2 = 0$ forniscono soluzioni, c'è da attendersi che anche $n_3 = 0$ fornisca una soluzione. Introducendo questa condizione nella (11.6) si ha:

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 - \left(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2\right)^2 \tag{11.16}$$

oppure, essendo $n_2^2 = 1 - n_1^2$:

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 \left(1 - n_1^2\right) - \left[\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 \left(1 - n_1^2\right)\right]^2 \tag{11.17}$$

La condizione di stazionarietà conduce a scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_n^2}{\partial n_1} =& 2\sigma_1^2 n_1 - 2\sigma_2^2 n_1^2 - 2\left[\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 - \sigma_2 n_1^2\right]\left(2\sigma_1 n_1 - 2\sigma_2 n_1\right) \\ =& 2n_1 \left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 \left(1 - 2n_1^2\right) \end{aligned} \tag{11.18}$$

e quindi o $n_1 = 0$ (ancora un piano principale) oppure:

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{1}{2} \\ n_2^2 &= \frac{1}{2} \\ n_3^2 &= 0 \end{aligned} \tag{11.19}$$

In totale, le soluzioni di interesse sono fornite dalle tre relazioni:

$$n_1^2 = 0 \quad n_2^2 = \frac{1}{2} \quad n_3^2 = \frac{1}{2} \tag{11.20}$$

$$n_1^2 = \frac{1}{2} \quad n_2^2 = 0 \quad n_3^2 = \frac{1}{2} \tag{11.21}$$

$$n_1^2 = \frac{1}{2} \quad n_2^2 = \frac{1}{2} \quad n_3^2 = 0 \tag{11.22}$$

Si consideri la prima di esse. Dovrá essere:

$$\begin{aligned} n_1 &= 0 \\ n_2 &= \frac{1}{\pm\sqrt{2}} \\ n_3 &= \frac{1}{\pm\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{11.23}$$

e quindi essa rappresenta quattro piani, ciascuno parallelo ad un asse principale, ed inclinato di 45 gradi rispetto agli altri due. Considerazioni analoghe valgono per le altre due relazioni, giungendo ad identificare dodici piani su cui la tensione tangenziale è massima.

11.3.1 L'intensità della tensione tangenziale massima

Per calcolare l'intensità della tensione tangenziale massima, non resta che sostituire i valori dei coseni direttori appena calcolati nella (11.6). Utilizzando la (11.23), ad esempio, si ha:

$$\begin{aligned}
\tau_n^2 =&\sigma_1^2 0 + \sigma_2^2 \frac{1}{2} + \sigma_3^2 \frac{1}{2} - \left(\sigma_1 0 + \sigma_2 \frac{1}{2} + \sigma_3 \frac{1}{2}\right)^2 \\
=&\frac{1}{2}\left(\sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{1}{4}\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)^2 = \frac{1}{4}\left(2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3\right) \\
=&\frac{1}{4}\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2
\end{aligned} \tag{11.24}$$

da cui subito:

$$\tau_n = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \tag{11.25}$$

Analogamente, per $n_2 = 0$, si ha:

$$\tau_n = \pm\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \tag{11.26}$$

e per $n_3 = 0$:

$$\tau_n = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{11.27}$$

11.3.2 La tensione normale associata alla massima tensione tangenziale

A differenza di quanto accade per i piani principali, su cui le tensioni normali sono massime e le tensioni tangenziali sono nulle, in corrispondenza dei piani con massima tensione tangenziale si ha contemporanea presenza di tensioni normali. Utilizzando le (11.5) è immediato riconoscere che si avrà:

$$\sigma_n = \begin{cases}
\dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, & \text{per } n_1 = 0,\ n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{2} \\[2ex]
\dfrac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, & \text{per } n_2 = 0,\ n_1^2 = n_3^2 = \frac{1}{2} \\[2ex]
\dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, & \text{per } n_3 = 0,\ n_1^2 = n_2^2 = \frac{1}{2}
\end{cases} \tag{11.28}$$

11.3.3 La direzione della tensione tangenziale massima

La *direzione* della tensione tangenziale massima può calcolarsi determinando i suoi coseni direttori $(n_{\tau 1}, n_{\tau 2}, n_{\tau 3})$, Come noto, è:

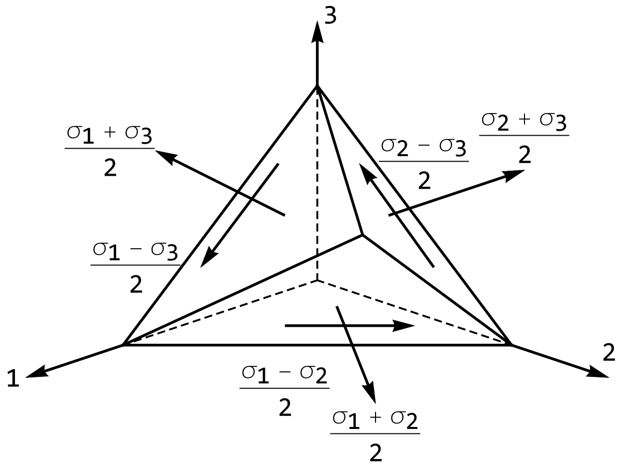


Figura 11.2: Tensioni tangenziali massime e tensioni normali associate

$$n_{\tau 1} = \frac{t_{n1} - \sigma_n n_1}{\tau_n} \tag{11.29}$$

$$n_{\tau 2} = \frac{t_{n2} - \sigma_n n_2}{\tau_n} \tag{11.30}$$

$$n_{\tau 3} = \frac{t_{n3} - \sigma_n n_3}{\tau_n} \tag{11.31}$$

ed utilizzando le (11.2):

$$n_{\tau 1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_n}{\tau_n} n_1 \tag{11.32}$$

$$n_{\tau 2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_n}{\tau_n} n_2 \tag{11.33}$$

$$n_{\tau 3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_n}{\tau_n} n_3 \tag{11.34}$$

Per $n_1 = 0$ si ha $n_{\tau 1} = 0$, mentre per $n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, si ha:

$$n_{\tau 1} = \frac{\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{11.35}$$

Analoghi risultati si hanno per le altre combinazioni di coseni direttori, sicchè può concludersi che ciascuna tensione tangenziale massima è ortogonale ad una delle tensioni principali, ed inclinata dello stesso angolo rispetto alle altre due. In Figura 11.2 è illustrato la situazione limitatamente alla regione di tensioni principali positive.

Capitolo 12

I cerchi di Mohr

In questa lezione si descrive un classico metodo di visualizzazione dello stato tensionale nell'intorno di un punto generico P del corpo in esame. Tale metodo è stato originariamente proposto da Otto Mohr nella seconda metà dell'Ottocento[1], in stretta connessione con l'analisi della tensione; tuttavia esso è facilmente estendibile a casi diversi, quali l'analisi della deformazione ed i problemi di geometria delle masse, ed in ambiti più generali può essere applicato ad un qualsiasi tensore del secondo ordine.

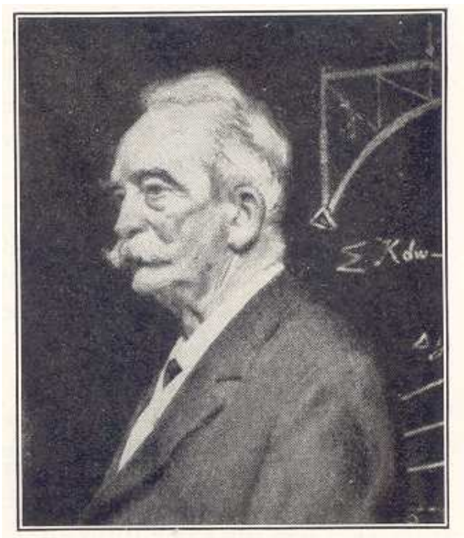


Figura 12.1: Otto Mohr

[1]Si veda O. Mohr, Zivilingenieur, pag. 113 (1882)

12.1 La convenzione sui segni di Otto Mohr

Si consideri un punto P generico, e si fissi una terna cartesiana di riferimento (P, X_1, X_2, X_3). Si vuole ora esaminare come varia il vettore tensione $\boldsymbol{t}_n$ in P sui piani che si appoggiano all'asse X_3, al variare dell'angolo ϕ che definisce il piano generico (cfr. Figura 12.2).

Su ciascun elemento piano così determinato agiscono una tensione normale σ_n ed una tensione tangenziale τ_n di componenti τ_{nm} e τ_{nl}. Nel piano (X_1, X_2), quindi, agiscono le tensioni σ_n e τ_{nm}, come riportato in Figura 12.3. Si noti che in Figura è stata riportata la tensione tangenziale positiva secondo la convenzione di Mohr, *diretta in modo da far ruotare il cubetto elementare in senso orario intorno al suo baricentro*. E' questa una convenzione sui segni molto usata nell'ambito della teoria dei cerchi di Mohr, che si andrà a sviluppare nel paragrafo seguente, convenzione in contrasto con la convenzione usuale sui segni delle componenti cartesiane di tensione σ_{12}. Ed infatti, dalla Figura 12.3 si evince con facilità che quando $\phi = \pi/2$, e quindi $\mathbf{n}$ viene a coincidere con l'asse X_2, la τ_{nm} è pari, in valore e segno, alla tensione σ_{21}, ma che quando $\phi = 0$, e quindi $\mathbf{n}$ coincide con l'asse X_1, si ha che la τ_{nm} è uguale e contraria alla σ_{12}.

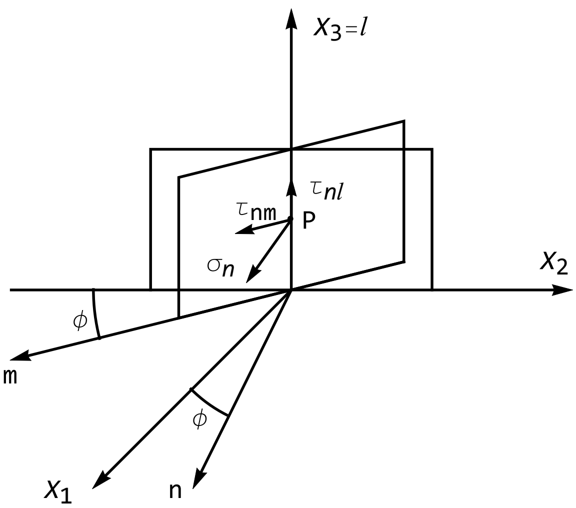


Figura 12.2: I piani per P che si appoggiano all'asse $X_3 = ll$, definiti dall'angolo ϕ e soggetti alla tensione normale σ_n ed alle tensioni tangenziali τ_{nm} e τ_{nl}

12.2 Il teorema di Mohr

Per ciascun elemento piano appoggiato all'asse X_3, e definito dall'angolo ϕ, si riporti in un piano (σ, τ) (*piano di Mohr*) il vettore di componenti σ_n e τ_{nm}.

Si dimostrerà il seguente:

Teorema 3. *(O. Mohr 1882) — Il vettore di componenti* (σ_n, τ_{nm}) *descrive nel piano* $\sigma\tau$ *un cerchio, al ruotare dell'elemento piano intorno all'asse* $l = X_3$.

Dimostrazione. Siano $(m_1, m_2, 0)$ ed $(n_1, n_2, 0)$ i coseni direttori degli assi m ed n, rispettivamente, sicchè si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2 \\ \tau_{nm} &= \sigma_{11} m_1 n_1 + \sigma_{22} m_2 n_2 + \sigma_{12} \left(m_1 n_2 + m_2 n_1 \right) \end{aligned} \tag{12.1}$$

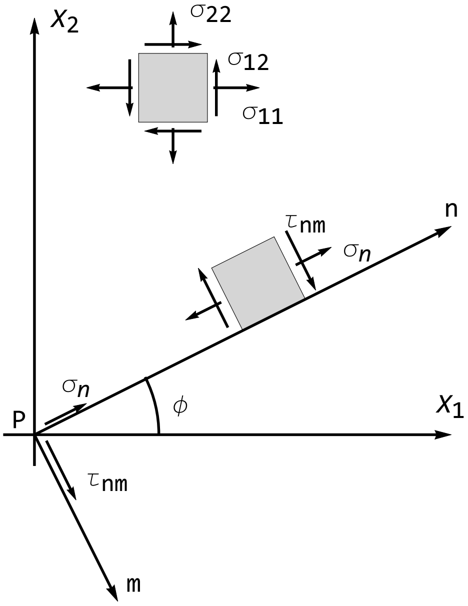


Figura 12.3: Le componenti cartesiane di tensione nel piano X_1X_2, e le componenti secondo gli assi locali m ed n

Esprimendo ora i coseni direttori in funzione dell'angolo ϕ, si ottiene facilmente, dalla Figura 12.3:

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos(nx_1) = \cos(-\phi) = \cos\phi \\ n_2 &= \cos(nx_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi \\ m_1 &= \cos(mx_1) = \cos\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right) = \sin\phi \\ m_2 &= \cos(mx_2) = \cos(\pi + \phi) = -\cos\phi \end{aligned} \tag{12.2}$$

e quindi le (12.1) divengono:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{11}\cos^2\phi + \sigma_{22}\sin^2\phi + 2\sigma_{12}\sin\phi\cos\phi \\ \tau_{nm} &= (\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin\phi\cos\phi + \sigma_{12}\left(\sin^2\phi - \cos^2\phi\right) \end{aligned} \tag{12.3}$$

Un ultimo passaggio consiste nell'esprimere le equazioni precedenti in funzione di 2ϕ, tramite le relazioni trigonometriche:

$$\begin{aligned} \sin\phi\cos\phi &= \frac{1}{2}\sin 2\phi \\ \cos^2\phi - \sin^2\phi &= \cos 2\phi \\ \cos^2\phi &= \frac{1}{2}(1+\cos 2\phi) \\ \sin^2\phi &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\phi) \end{aligned} \tag{12.4}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\cos 2\phi + \sigma_{12}\sin 2\phi \\ \tau_{nm} &= \frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\sin 2\phi - \sigma_{12}\cos 2\phi \end{aligned} \tag{12.5}$$

Infine, si ottiene, quadrando e sommando:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{nm}^2 = \left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2 \tag{12.6}$$

E' questa, come si voleva dimostrare, l'equazione di un cerchio di centro $\left(\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}, 0\right)$ e raggio:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \tag{12.7}$$

□

La costruzione del cerchio si effettua come illustrato in Figura 12.4: riportando con il loro segno i segmenti OB ed OD, rappresentativi di σ_{11} e di σ_{22}, rispettivamente, si ottiene il centro C del cerchio nel punto medio del segmento BD. A partire da D, si riporta in DP il segmento rappresentativo di σ_{12}, verso l'alto se positivo, ottenendo il raggio CP, ed il cosiddetto *polo* P del cerchio.

12.3 L'utilizzo del cerchio di Mohr

Assegnare il piano su cui si vuol calcolare la tensione nel punto in esame equivale, per quanto detto nei paragrafi precedenti, ad assegnare l'angolo ϕ, e quindi ad ogni valore di ϕ corrisponde un preciso valore del segmento di componenti (σ_n, τ_{nm}), ossia un preciso punto T_n di coordinate σ_n e τ_{nm}. Si vuole dedurre in questo paragrafo un metodo grafico per conoscere T_n, una volta assegnato l'angolo ϕ.

Si utilizzi allo scopo il seguente:

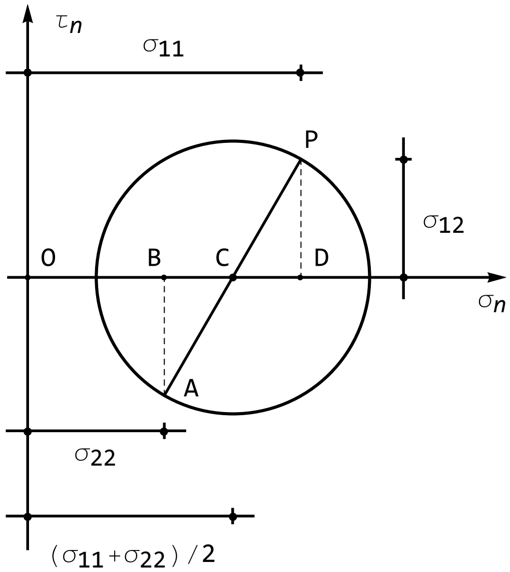


Figura 12.4: La costruzione del cerchio di Mohr

Teorema 4. *(O. Mohr 1882) — Costruito il cerchio di Mohr, si disegni la retta t che unisce il polo P con il punto T_n, supposto per il momento noto. L'angolo tra la verticale e la suddetta retta t è uguale a ϕ.*

Dimostrazione. Ed infatti, detta v la verticale e t la retta che congiunge il polo col punto T_n, si avrà (cfr. Figura 12.5):

$$\tan(vt) = \frac{\sigma_n - \sigma_{11}}{\sigma_{12} - \tau_{nm}} = -\frac{\sigma_n - \sigma_{11}}{\tau_{nm} - \sigma_{12}} \tag{12.8}$$

e sostituendo i valori (12.3) si ha:

$$\begin{aligned} \tan(vt) &= \frac{-\sigma_{11}\left(1 - \cos^2\phi\right) + \sigma_{22}\sin^2\phi + 2\sigma_{12}\sin\phi\cos\phi}{\sigma_{12} - (\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin\phi\cos\phi - \sigma_{12}\left(\sin^2\phi - \cos^2\phi\right)} \\ &= \frac{(\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin^2\phi + 2\sigma_{12}\sin\phi\cos\phi}{(\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin\phi\cos\phi + 2\sigma_{12}\cos^2\phi} \\ &= \frac{\sin\phi\left[(\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin\phi + 2\sigma_{12}\cos\phi\right]}{\cos\phi\left[(\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin\phi + 2\sigma_{12}\cos\phi\right]} \\ &= \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \tan(\phi) \end{aligned} \tag{12.9}$$

□

Ne segue che, assegnato ϕ, per conoscere T_n basta condurre per il polo P una retta t inclinata sulla verticale dello stesso angolo ϕ di cui n è inclinata rispetto

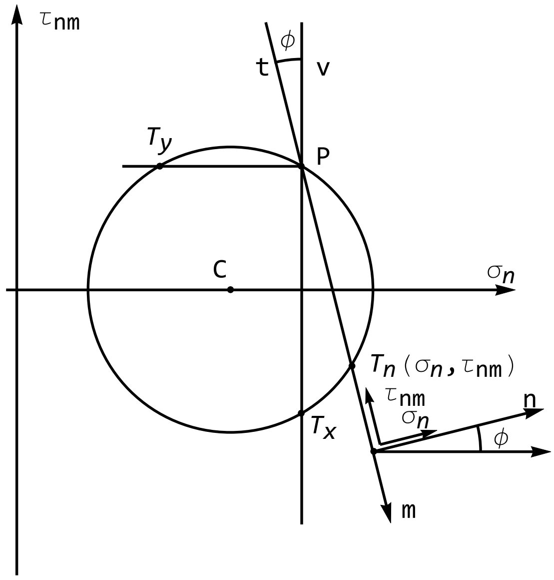


Figura 12.5: L'utilizzo del cerchio di Mohr per il calcolo dello stato tensionale sul generico elemento piano di normale **n**

all'asse X_1. Se gli assi σ,τ sono paralleli ed equiversi agli assi X_1X_2, l'operazione è equivalente a condurre per il polo P la parallela alla traccia dell'elemento piano in esame.

In Figura 12.5, oltre al caso generico, si sono riprodotti anche i due casi particolari in cui la normale al piano coincide con l'asse X_1 ($\phi = 0$) e con l'asse X_2 ($\phi = \pi/2$). Nel primo caso dal polo P si deve condurre la verticale, giungendo al punto T_x di coordinate $\sigma_n = \sigma_{11}$ e $\tau_{nm} = -\sigma_{12}$. Nel secondo caso, invece, occorre portare l'orizzontale per P, giungendo nel punto T_y di coordinate $\sigma_n = \sigma_{22}$ e $\tau_{nm} = \sigma_{12}$. Si ha così conferma di quanto detto, nel primo paragrafo, sulla convenzione dei segni.

Tracciato il cerchio di Mohr, è immediato rispondere ad alcune importanti domande, che consentono lo studio completo dello stato tensionale per tutti i piani che si appoggiano all'asse $l = X_3$:

1. quali sono le giaciture cui corrispondono minime e massime tensioni normali?

2. quali sono le corrispondenti tensioni normali minime e massime?

3. quali sono le giaciture cui corrispondono tensioni tangenziali massime?

4. quanto valgono tali tensioni tangenziali massime, e a quali tensioni normali sono associate?

5. esistono giaciture per cui la tensione è esclusivamente tangenziale, ed in caso affermativo, quanto valgono le tensioni tangenziali in oggetto?

12.3.1 Esempi

Si considera, come primo esempio, uno stato tensionale caratterizzato da $\sigma_{11} > 0$ e $\sigma_{22} > 0$, e da $\sigma_{12} < 0$. Il cerchio di Mohr relativo agli elementi che si appoggiano all'asse X_3 si caratterizza quindi come in Figura 12.6. In esso è

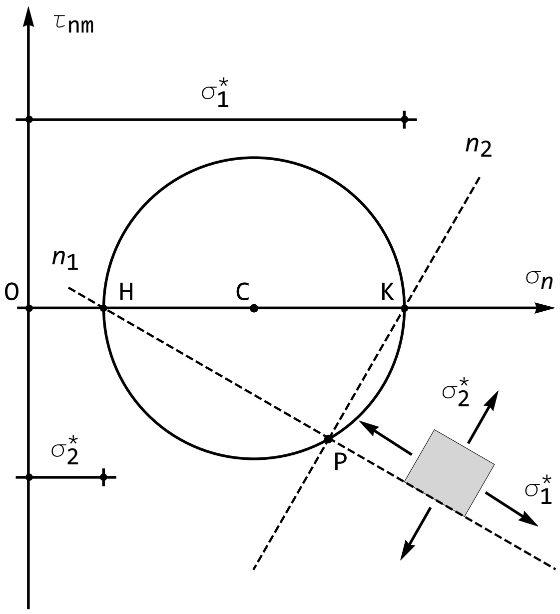


Figura 12.6: Il cerchio di Mohr in un caso per cui σ_{11} e σ_{22} sono positive, mentre σ_{12} è negativo.

evidenziato il polo P, da cui sono state condotte le due rette PH e PK, che identificano le due direzioni $n_1 = PH$ ed $n_2 = PK$. Sul piano di normale n_1 agisce la tensione σ_1^*, massima tra quelle agenti sui piani del fascio in esame; sul piano di normale n_2 agisce la tensione σ_2^*, minima tra quelle agenti sui piani del fascio in esame. Ad esse non si accompagna tensione tangenziale.

Come secondo esempio, invece, si può ipotizzare che σ_{11} sia positivo, mentre σ_{22} è nullo, e σ_{12} è negativo. In questa ipotesi, il cerchio deve necessariamente intersecare l'asse verticale, come indicato in Figura 12.7, e quindi una delle due tensioni estreme è negativa, come evidenziato anche dal cubetto. Inoltre, in questo caso si osserva che sui piani di normale PS e PT agiscono solo tensioni tangenziali. Nel primo caso, sul cubetto di normale PS agisce una tensione tangenziale positiva, tendente quindi a far ruotare il cubetto in senso orario, nel secondo caso, invece, la tensione è negativa, e quindi il cubetto tenderà a ruotare in senso antiorario.

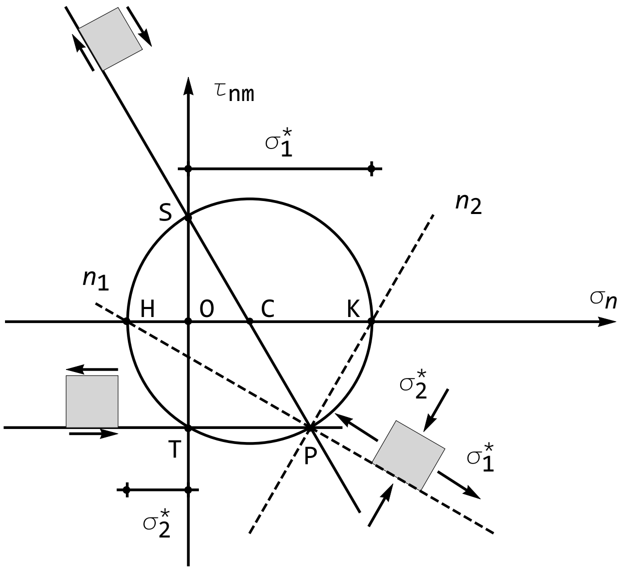


Figura 12.7: Il cerchio di Mohr in un caso per cui σ_{11} è positivo, mentre $\sigma_{22}=$ 0, e σ_{12} è negativo.

12.4 La ricerca delle tensioni e direzioni principali tramite l'utilizzo dei cerchi di Mohr principali

Scrivendo il teorema di Cauchy–Poisson in termini di tensioni principali si ha, come noto:

$$\begin{aligned} t_{n1} &= \sigma_1 n_1 \\ t_{n2} &= \sigma_2 n_2 \\ t_{n3} &= \sigma_3 n_3 \end{aligned} \tag{12.10}$$

Ipotizzando che uno degli assi cartesiani sia principale, ad esempio l'asse X_3, e studiando i piani che si appoggiano all'asse $X_3 \equiv 3$, si deduce subito dalla terza delle equazioni precedenti che si studiano i piani per cui t_{n3} è nulla. In altri termini, sui piani di tale fascio la tensione normale σ_n e la tensione tangenziale τ_{nm} esauriscono lo stato tensionale, e quindi le tensioni estreme, che nel paragrafo precedente si erano battezzate σ_1^* e σ_2^*, assumono ora il significato di tensioni principali σ_1 e σ_2.

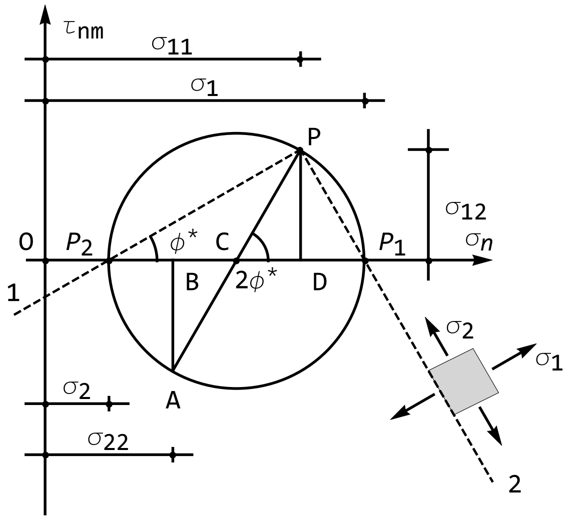


Figura 12.8: Il cerchio principale di Mohr per i fasci che si appoggiano all'asse $X_3 \equiv 3$

Dall'esame di un cerchio di Mohr principale si può anche dedurre graficamente l'espressione analitica delle tensioni principali, assieme all'espressione dell'angolo ϕ^* che definisce le due direzioni principali.

Si ha infatti, dalla Figura 12.8:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \tag{12.11}$$

$$\tan 2\phi^* = 2\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \tag{12.12}$$

Assegnato allora uno stato tensionale:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{12.13}$$

si ricavino le tre tensioni principali, ordinandole come segue:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \tag{12.14}$$

I tre cerchi di Mohr relativi ai tre fasci di piani che si appoggiano alle tre direzioni principali sono immediatamente disegnabili, riportando semplicemente sull'asse orizzontale σ_n i tre segmenti:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= OP_1 \\ \sigma_2 &= OP_2 \\ \sigma_1 &= OP_3 \end{aligned} \tag{12.15}$$

e tracciando i cerchi di centri:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{OP_2 + OP_3}{2} \\ C_2 &= \frac{OP_1 + OP_3}{2} \\ C_3 &= \frac{OP_1 + OP_2}{2} \end{aligned} \tag{12.16}$$

e diametri $(\sigma_2 - \sigma_1)$, $(\sigma_1 - \sigma_3)$ e $(\sigma_1 - \sigma_2)$, rispettivamente, come illustrato in Figura 12.9.

In Figura 12.10 è riportato il caso in cui le tre tensioni principali sono positive, e distinte tra loro. Dal suo esame si possono dedurre parecchie caratteristiche dello stato tensionale nel punto del corpo in esame. Ad esempio, è banale calcolare la tensione tangenziale massima, pari a $(\sigma_1 - \sigma_3)/\,2$, e capire che essa agisce su di un piano del fascio che si appoggia all'asse 2, e precisamente sul piano con traccia che biseca l'angolo 1–3. Ad essa si accompagna la tensione normale $(\sigma_3 + \sigma_1)/\,2$. Si ritrovano così in via grafica i risultati della Lezione precedente. Si studino con cura i segni delle tensioni tangenziali sulle facce del cubetto elementare.

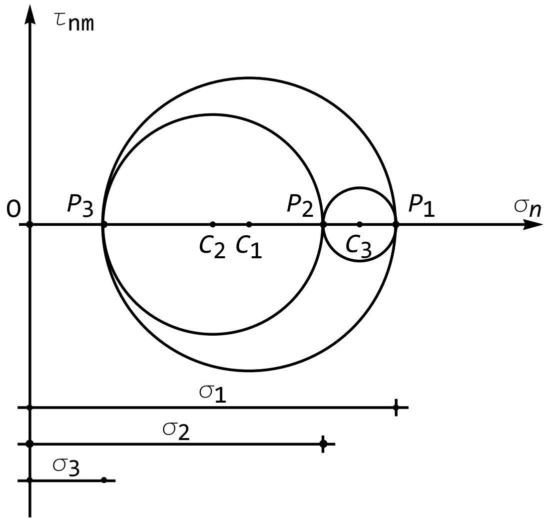


Figura 12.9: I tre cerchi principali di Mohr per i fasci che si appoggiano alle tre direzioni principali

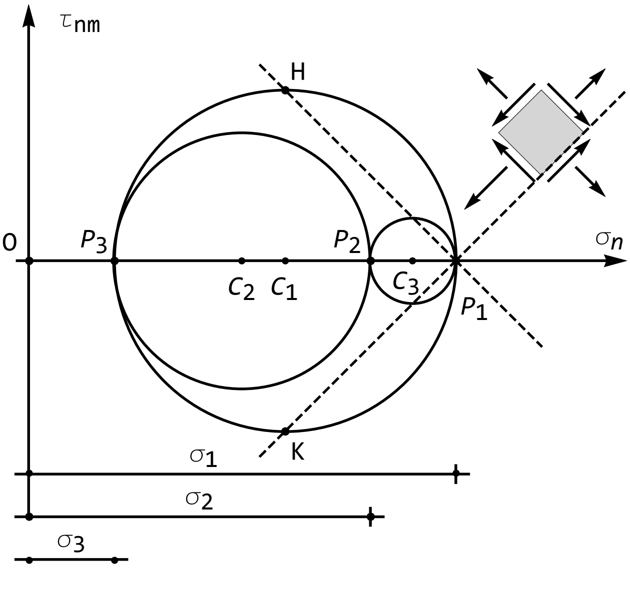


Figura 12.10: Lo stato tensionale corrispondente alla massima tensione tangenziale

Capitolo 13

Il gradiente di deformazione

In questa lezione si comincia ad affrontare l'analisi della deformazione, cui compito principale è rispondere al seguente problema:

- assegnate le coordinate dei punti di un corpo nella sua configurazione iniziale, e nella sua configurazione finale, ricercare la variazione in lunghezza e direzione di un segmento congiungente due punti arbitrari originariamente vicini tra loro.

Anche questo capitolo deve fare riferimento a Cauchy[1]

13.1 Gradiente di spostamento

Si consideri un corpo B, e si fissi un sistema cartesiano di riferimento. Sia M un punto generico del corpo, e siano (x_1, x_2, x_3) le sue coordinate in condizioni indeformate, ossia prima dell'applicazione delle forze.

Applicando le forze, il corpo B subisce una trasformazione, portandosi in B', ed il punto M, a sua volta, si porta in M', di coordinate (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Si può scrivere:

$$\xi_i = x_i + u_i \qquad i = 1, 2, 3 \tag{13.1}$$

o, matricialmente:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} \tag{13.2}$$

Il vettore $\mathbf{u} = \overrightarrow{MM'}$, di componenti (u_1, u_2, u_3) si chiama lo *spostamento* del punto M, come illustrato in Figura 13.1. Per ragioni fisiche, le componenti di spostamento si assumono funzioni continue e derivabili delle coordinate x_1, x_2, ed x_3.

[1]Il problema affrontato da Cauchy si ritrova in *Sur la condensation et la dilatation des corps solides* Exercises de Mathématiques, 2, pp. 82–93, in Opere Complete, II serie, Tomo 7 (1827). Gauthier-Villars, Parigi 1889. Una copia della memoria è reperibile nella sezione Ricerca del sito http:\\www.scienzadellecostruzioni.co.uk.

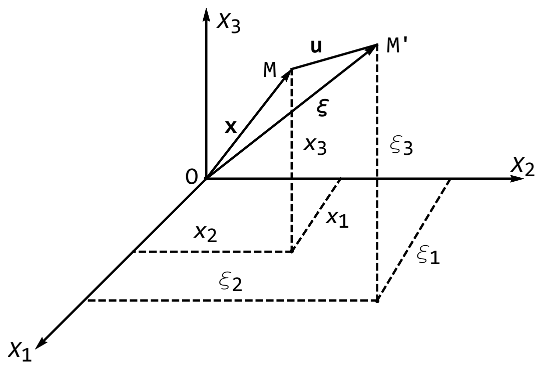


Figura 13.1: Le componenti di spostamento del punto generico M

Si consideri ora un punto N appartenente ad un intorno di M, di coordinate $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$, e sia N' il suo trasformato a seguito dell'applicazione dei carichi. N' avrà coordinate $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$, e potrà anche scriversi:

$$\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NN'} \tag{13.3}$$

o matricialmente:

$$\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{d\xi} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{du} \tag{13.4}$$

avendo introdotto il vettore $\boldsymbol{d\xi}$, di componenti $(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$, ed il vettore $\boldsymbol{du}$, di componenti (du_1, du_2, du_3).

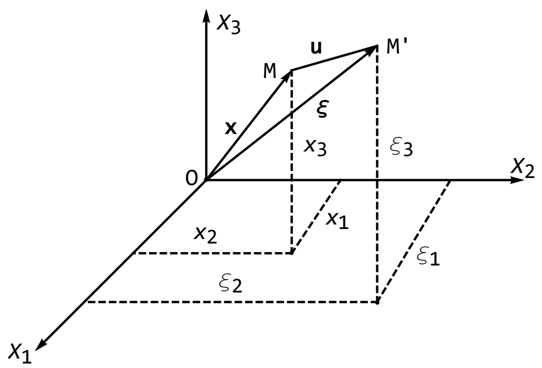


Figura 13.2: Il segmento MN ed il suo trasformato $M'N'$

Poichè, come già detto, le componenti di spostamento sono funzioni continue e derivabili, sarà possibile utilizzare uno sviluppo in serie di Taylor intorno al punto M. Si ipotizza anche di poter arrestare lo sviluppo dopo il primo termine, supponendo quindi che il segmento MN si trasformi in un altro segmento $M'N'$, e non in un arco di curva, come illustrato in Figura 13.2. Si ha:

$$u_i + du_i = u_i + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dx_j \tag{13.5}$$

ossia, per esteso:

$$\begin{aligned}
u_1 + du_1 &= u_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) dx_2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) dx_3 \\
u_2 + du_2 &= u_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) dx_3 \\
u_3 + du_3 &= u_3 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) dx_2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_3
\end{aligned} \tag{13.6}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \tag{13.7}$$

ossia anche, più sinteticamente:

$$\boldsymbol{du} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{dx} \tag{13.8}$$

La matrice $\mathbf{H}$viene definita *matrice delle componenti del gradiente di spostamento:*

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{13.9}$$

ed è di fondamentale importanza nell'analisi delle deformazioni.

La matrice $\mathbf{H}$, come si vede, non gode di proprietà di simmetria. Tuttavia, qualsiasi matrice quadrata può essere scomposta nella somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica, secondo la formula generale:

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T}{2} + \frac{\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}^T}{2} \doteq \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\Omega} \tag{13.10}$$

Esplicitamente si ha:

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{13.11}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{13.12}$$

Nota - E' possibile dimostrare[2] che la parte antisimmetrica $\mathbf{\Omega}$ del gradiente degli spostamenti $\mathbf{H}$ è responsabile delle rotazioni rigide del segmento MN e di una dilatazione cilindrica, mentre la parte simmetrica $\mathbf{E}$ tien conto delle variazioni di lunghezza, ossia delle deformazioni del segmento MN.

13.2 Gradiente di deformazione

Inserendo la (13.8) nella (13.4) si ha:

$$\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{d\xi} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{Hdx} \tag{13.13}$$

e semplificando in base alla (13.2):

$$\boldsymbol{d\xi} = \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{Hdx} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H})\boldsymbol{dx} \doteq \boldsymbol{Fdx} \tag{13.14}$$

La matrice $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}$ è la cosiddetta *matrice delle componenti del gradiente di deformazione.*

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} & 1 + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{13.15}$$

[2] Qualsiasi testo di teoria dell'elasticità o di Scienza delle Costruzioni può servire da riferimento. Tra i più dettagliati si può citare il terzo capitolo di Adel S. Saada, *Elasticity*, Pergamon Press, 1974

Per esteso, la (13.14) si scrive:

$$
\begin{aligned}
d\xi_1 &= \left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}dx_3 \\
d\xi_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1 + \left(1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}dx_3 \\
d\xi_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}dx_2 + \left(1+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)dx_3
\end{aligned}
\tag{13.16}
$$

ossia, utilizzando la convenzione degli indici ripetuti e l'operatore δ di Kronecker:

$$
d\xi_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)dx_j, \qquad \text{i=1,2,3} \tag{13.17}
$$

13.3 Allungamenti percentuali

Si consideri ancora il segmento $\overrightarrow{MN}$, ed il suo trasformato $\overrightarrow{M'N'}$. Si ha la:

Definizione 3. – *Si definisce allungamento percentuale del segmento* $\overrightarrow{MN}$ *il rapporto:*

$$
E_{MN} = \frac{|M'N'| - |MN|}{|MN|} \tag{13.18}
$$

dove, ovviamente, il simbolo $|.|$ *indica la lunghezza del segmento.*

Data questa definizione, si scelga un segmento $\overrightarrow{MN}$ parallelo all'asse X_1, e quindi di componenti $(dx_1, 0, 0)$ e lunghezza dx_1. Applicando la (13.14), si hanno le componenti $(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$ del segmento trasformato:

$$
\begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \\ d\xi_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{F} \begin{pmatrix} dx_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13.19}
$$

ossia:

$$
\begin{aligned}
d\xi_1 &= \left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)dx_1 \\
d\xi_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1 \\
d\xi_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1
\end{aligned}
\tag{13.20}
$$

Il segmento $\overrightarrow{M'N'}$ ha quindi lunghezza:

$$
|M'N'| = \sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2} = |MN|\sqrt{\left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2} \tag{13.21}
$$

L'allungamento percentuale del segmento $\overrightarrow{MN}$, originariamente steso lungo l'asse X_1, ed indicato con E_{x1}, è fornito da:

$$\begin{aligned} E_{x1} &= \frac{|M'N'| - |MN|}{|MN|} \\ &= \frac{|MN|\sqrt{\left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2} - |MN|}{|MN|} \\ &= \sqrt{\left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2} - 1 \end{aligned} \tag{13.22}$$

Del tutto analogamente, si possono ricavare gli *allungamenti percentuali* di segmenti stesi originariamente lungo gli assi X_2 ed X_3. Si ha:

$$\begin{aligned} E_{x2} &= \sqrt{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2} - 1 \\ E_{x3} &= \sqrt{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2} - 1 \end{aligned} \tag{13.23}$$

13.4 Variazione di angolo

Si vuole ora completare lo studio della trasformazione subita dai tre segmenti paralleli agli assi coordinati, calcolando la rotazione che essi subiscono a causa dell'applicazione delle forze. A ciò fare, si possono calcolare i coseni direttori degli elementi trasformati.

L'elemento MN, originariamente parallelo all'asse X_1 si trasforma nell'elemento $M'N'$, e subisce un allungamento percentuale pari a E_{x1}. I tre coseni direttori del segmento $M'N'$ saranno allora forniti da:

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \frac{d\xi_1}{|M'N'|} = \frac{1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{1+E_{x1}} \\ \lambda_{21} &= \frac{d\xi_2}{|M'N'|} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1+E_{x1}} \\ \lambda_{31} &= \frac{d\xi_3}{|M'N'|} = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}{1+E_{x1}} \end{aligned} \tag{13.24}$$

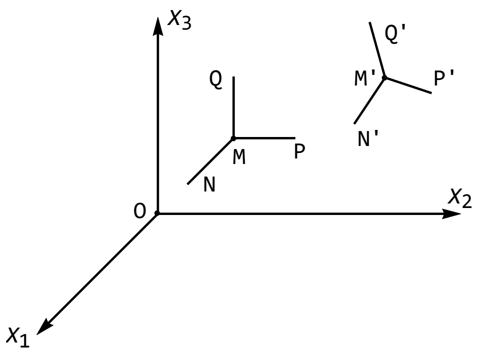


Figura 13.3: La trasformazione subita da una terna di segmenti paralleli agli assi coordinati

mentre nel caso di un segmento originariamente diretto secondo X_2 si ha:

$$\begin{aligned}
\lambda_{12} &= \frac{d\xi_1}{|M'P'|} = \frac{\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1 + E_{x2}} \\
\lambda_{22} &= \frac{d\xi_2}{|M'P'|} = \frac{1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}}{1 + E_{x2}} \\
\lambda_{32} &= \frac{d\xi_3}{|M'P'|} = \frac{\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}}{1 + E_{x2}}
\end{aligned} \tag{13.25}$$

ed infine, nel caso di un segmento originariamente diretto secondo X_3 si ha:

$$\begin{aligned}
\lambda_{13} &= \frac{d\xi_1}{|M'Q'|} = \frac{\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}}{1 + E_{x3}} \\
\lambda_{23} &= \frac{d\xi_2}{|M'Q'|} = \frac{\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}}{1 + E_{x3}} \\
\lambda_{33} &= \frac{d\xi_3}{|M'Q'|} = \frac{1 + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}}{1 + E_{x3}}
\end{aligned} \tag{13.26}$$

Indicialmente, le nove relazioni precedenti si possono compattamente scrivere come:

$$\lambda_{ij} = \frac{\delta_{ij} + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}}{1 + E_{xj}} \tag{13.27}$$

Capitolo 14

Il tensore di Green-Lagrange

In questo Capitolo si generalizza quanto illustrato nel Capitolo, considerando la trasformazione subita da un segmento arbitrariamente orientato nello spazio.

14.1 Il tensore di Green–Lagrange

Si consideri un segmento $\overrightarrow{MN} = \boldsymbol{dx}$, di componenti (dx_1, dx_2, dx_3), e di lunghezza:

$$|MN| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = \sqrt{\boldsymbol{dx}^T \boldsymbol{dx}} \tag{14.1}$$

A seguito della applicazione delle forze, il segmento $\overrightarrow{MN}$ si trasforma nel segmento $\overrightarrow{M'N'} = \boldsymbol{d\xi}$, di componenti $(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$ e lunghezza:

$$|M'N'| = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2} = \sqrt{\boldsymbol{d\xi}^T \boldsymbol{d\xi}} \tag{14.2}$$

Usando la definizione di matrice del gradiente di deformazione si potrà scrivere:

$$\boldsymbol{d\xi} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{dx} \tag{14.3}$$

e quindi:

$$|M'N'| = \sqrt{\boldsymbol{d\xi}^T \cdot \boldsymbol{d\xi}} = \sqrt{\boldsymbol{dx}^T \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{dx}} \tag{14.4}$$

ed ancora:

$$|M'N'|^2 - |MN|^2 = \boldsymbol{dx}^T \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{dx} - \boldsymbol{dx}^T \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{dx}^T \left(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right) \boldsymbol{dx} \tag{14.5}$$

Si introduca ora la quantità, nota come *tensore di Green–Lagrange*[1]:

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right) \tag{14.6}$$

[1] La deduzione del tensore è contenuta in *On the propagation of light in crystallized media* G. Green, Math. Papers 297-311 (1839). Una versione digitale di tale lavoro può essere letta nella sezione Ricerca del sito http:\\www.scienzadellecostruzioni.co.uk

Figura 14.1: Joseph–Louis Lagrange

in modo da poter scrivere:

$$|M'N'|^2 - |MN|^2 = 2\,\boldsymbol{dx}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{dx} \tag{14.7}$$

Si noti che il tensore $\mathbf{D}$ può scriversi anche:

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right) \tag{14.8}$$

da cui, tra l'altro, appare subito evidente la natura simmetrica di $\boldsymbol{D}$. Svolgendo i prodotti matriciali si hanno esplicitamente le sei componenti di $\boldsymbol{D}$:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\\
d_{12} = d_{21} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\\
d_{13} = d_{31} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\\
d_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\\
d_{23} = d_{32} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\\
d_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)
\end{aligned} \tag{14.9}$$

oppure, utilizzando la convenzione degli indici ripetuti:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \tag{14.10}$$

14.2 Gli allungamenti percentuali

L'allungamento percentuale del segmento MN è stato definito come:

$$E_{MN} = \frac{|M'N'| - |MN|}{|MN|} = \frac{|M'N'|}{|MN|} - 1 \tag{14.11}$$

da cui:

$$|M'N'| = (1 + E_{MN})\,|MN| \tag{14.12}$$

Sarà pertanto:

$$|M'N'|^2 - |MN|^2 = (1 + E_{MN})^2\,|MN|^2 - |MN|^2 = E_{MN}\,(2 + E_{MN})\,|MN|^2 \tag{14.13}$$

e paragonando con la (14.7) si ha:

$$E_{MN}\,(2 + E_{MN})\,|MN|^2 = 2\boldsymbol{dx}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{dx} \tag{14.14}$$

Dividendo ora per $2\,|MN|^2$ si ha:

$$E_{MN}\left(1 + \frac{E_{MN}}{2}\right) = \frac{\boldsymbol{dx}^T}{|MN|}\boldsymbol{D}\frac{\boldsymbol{dx}}{|MN|} \tag{14.15}$$

ossia, infine:

$$E_{MN}\left(1 + \frac{E_{MN}}{2}\right) = \boldsymbol{l}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{l} \tag{14.16}$$

avendo introdotto il vettore $\boldsymbol{l}$ dei coseni direttori dell'elemento $\overrightarrow{MN}$:

$$\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{|MN|} \\ \dfrac{dx_2}{|MN|} \\ \dfrac{dx_3}{|MN|} \end{pmatrix} \tag{14.17}$$

Si è quindi dato un significato fisico al tensore di Green–Lagrange: basta conoscere le sue sei componenti ed è possibile calcolare l'allungamento percentuale di un segmento $\overrightarrow{MN}$ orientato in modo arbitrario, e definito attraverso i suoi tre coseni direttori.

14.3 Definizione di deformazione

La formula (14.16) fornisce lo spunto per una definizione di tipo operativo:

Definizione 4. *Dato un punto M del corpo B, la quantità:*

$$\begin{aligned} \epsilon_{MN} &= E_{MN}\left(1 + \frac{E_{MN}}{2}\right) = \boldsymbol{l}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{l} \\ &= d_{ij}l_il_j = d_{11}l_1^2 + d_{22}l_2^2 + d_{33}l_3^2 + 2\,(d_{12}l_1l_2 + d_{13}l_1l_3 + d_{23}l_2l_3) \end{aligned} \tag{14.18}$$

definisce la deformazione in M del segmento $\overrightarrow{MN}$.

Nota - Nella pratica ingegneristica si definisce deformazione la quantità E_{MN}, che viene a coincidere con la precedente solo in certe ipotesi che verranno specificate in seguito.

14.4 Le componenti normali di deformazione

Si consideri un segmento $\overrightarrow{MN} = \boldsymbol{dx}$, parallelo all'asse X_1, e quindi di componenti $(dx_1, 0, 0)$. I coseni direttori di $\overrightarrow{MN}$ sono dati da $(1, 0, 0)$. Di conseguenza, la (14.18) potrà scriversi:

$$\epsilon_{11} = E_{x1}\left(1 + \frac{E_{x1}}{2}\right) = \boldsymbol{l}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{l} \tag{14.19}$$

e svolgendo il triplo prodotto matriciale si giunge ad identificare le componenti del tensore di Green–Lagrange lungo la diagonale principale con le deformazioni dei segmenti originariamente stesi lungo gli assi:

$$\epsilon_{11} = d_{11} \tag{14.20}$$

In termini di allungamenti percentuali, è facile dedurre che sarà:

$$E_{x1}\left(1 + \frac{E_{x1}}{2}\right) = d_{11} \tag{14.21}$$

da cui:

$$E_{x1} = \sqrt{1 + 2d_{11}} - 1 \tag{14.22}$$

Del tutto analogamente:

$$\begin{aligned} E_{x2} &= \sqrt{1 + 2d_{22}} - 1 \\ E_{x3} &= \sqrt{1 + 2d_{33}} - 1 \end{aligned} \tag{14.23}$$

Si può dunque concludere che *gli elementi diagonali del tensore di Green–Lagrange forniscono una misura degli allungamenti percentuali di segmenti passanti per un punto M e paralleli agli assi.*

I tre elementi d_{11}, d_{22} e d_{33} si chiamano *componenti normali della deformazione.*

14.5 Gli angoli taglianti

Occorre ora dare un significato geometrico anche ai restanti tre termini del tensore di Green–Lagrange, ossia a d_{12}, d_{13} e d_{23}. A ciò fare, si considerino due elementi paralleli a due assi coordinati, ad esempio, paralleli ad X_1 ed X_2. Siano essi $\boldsymbol{dx}_1$ e $\boldsymbol{dx}_2$, rispettivamente, con coseni direttori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.

I coseni direttori del segmento trasformato $\boldsymbol{d\xi}_1$ saranno forniti da (cfr.Capitolo precedente):

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} &= \frac{1+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}}{1+E_{x1}} \\
\lambda_{21} &= \frac{\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1+E_{x1}} \\
\lambda_{31} &= \frac{\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}}{1+E_{x1}}
\end{aligned} \tag{14.24}$$

mentre i coseni direttori del segmento trasformato $\boldsymbol{d\xi}_2$ saranno forniti da:

$$\begin{aligned}
\lambda_{12} &= \frac{\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1+E_{x2}} \\
\lambda_{22} &= \frac{1+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}}{1+E_{x2}} \\
\lambda_{32} &= \frac{\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}}{1+E_{x2}}
\end{aligned} \tag{14.25}$$

Ne segue, per una nota formula di geometria, che il coseno dell'angolo formato dai due segmenti trasformati sarà fornito da:

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\boldsymbol{d\xi}_1, \boldsymbol{d\xi}_2\right) = \lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22} + \lambda_{31}\lambda_{32} \\
&= \frac{\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}}{\left(1+E_{x1}\right)\left(1+E_{x2}\right)} \\
&= \frac{2d_{12}}{\left(1+E_{x1}\right)\left(1+E_{x2}\right)}
\end{aligned} \tag{14.26}$$

Se si indica con γ_{12} la variazione angolare tra $\boldsymbol{dx}_1$ e $\boldsymbol{dx}_2$, (cfr. Figura 14.2) si ha anche:

$$\cos\left(\boldsymbol{d\xi}_1, \boldsymbol{d\xi}_2\right) = \frac{2d_{12}}{\left(1+E_{x1}\right)\left(1+E_{x2}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin\gamma_{12} \tag{14.27}$$

Analogamente, si ha

$$\cos\left(\boldsymbol{d\xi}_1, \boldsymbol{d\xi}_3\right) = \frac{2d_{13}}{\left(1+E_{x1}\right)\left(1+E_{x3}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{13}\right) = \sin\gamma_{13} \tag{14.28}$$

$$\cos\left(\boldsymbol{d\xi}_2, \boldsymbol{d\xi}_3\right) = \frac{2d_{23}}{\left(1+E_{x2}\right)\left(1+E_{x3}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{23}\right) = \sin\gamma_{23} \tag{14.29}$$

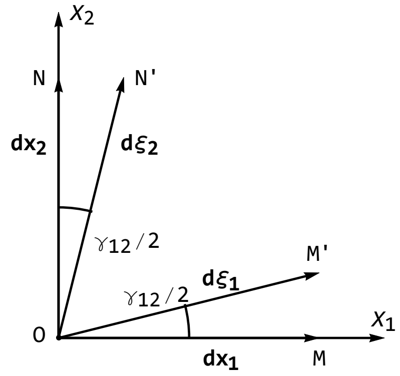


Figura 14.2: L'angolo tagliante γ_{12}

Gli angoli γ_{12}, γ_{13}, γ_{23} si chiamano *angoli taglianti*, mentre le tre componenti d_{12}, d_{13}, d_{23} si chiamano le *componenti tangenziali della deformazione*. Esse descrivono la variazione angolare dell'angolo retto tra elementi passanti per M ed originariamente distesi lungo gli assi.

14.6 Le deformazioni principali

Come si è visto, le componenti tangenziali della deformazione, d_{12}, d_{13} e d_{23} descrivono la variazione angolare tra coppie di segmenti distesi lungo gli assi. Se quindi queste tre quantità fossero nulle, allora gli assi coordinati sarebbero orientati in modo tale che tre segmenti ad essi paralleli subirebbero solo variazioni di lunghezza, ruoterebbero in modo solidale, ma non avrebbero mutue rotazioni. In altri termini la terna (X_1, X_2, X_3) sarebbe una *terna di direzioni principali di deformazione*. In questo caso, gli assi si battezzano $(1, 2, 3)$ e gli allungamenti percentuali si denotano con E_1, E_2, E_3. Inoltre il tensore di Green–Lagrange assume la forma diagonale:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \tag{14.30}$$

e quindi sarà:

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{1 + 2d_1} - 1 \\ E_2 &= \sqrt{1 + 2d_2} - 1 \\ E_3 &= \sqrt{1 + 2d_3} - 1 \end{aligned} \tag{14.31}$$

ed anche:

$$\epsilon_{MN} = d_1 l_1^2 + d_2 l_2^2 + d_3 l_3^2 \tag{14.32}$$

dove, come sempre, l_1, l_2 ed l_3 sono i coseni direttori del segmento $\overrightarrow{MN}$.

14.7 La ricerca delle direzioni principali

In perfetta analogia con quanto svolto nell'analisi della tensione, occorre ricercare quella direzione, o quelle direzioni per cui:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \tag{14.33}$$

ossia, matricialmente:

$$(\boldsymbol{D} - \epsilon \boldsymbol{I})\boldsymbol{l} = \mathbf{0} \tag{14.34}$$

Il sistema, omogeneo, ammette sempre la soluzione banale $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, senza significato fisico. Occorre invece ricercare le soluzioni, definite a meno di una o più costanti, in corrispondenza dei valori nulli del determinante dei coefficienti, imponendo:

$$\mathrm{Det}[(\boldsymbol{D} - \varepsilon \boldsymbol{I})] = 0 \tag{14.35}$$

Svolgendo il determinante si giunge ad una equazione cubica in ϵ, con tre radici reali, che può scriversi come:

$$\epsilon^3 - I_1\epsilon^2 + I_2\epsilon - I_3 = 0 \tag{14.36}$$

dove I_1, I_2 ed I_3 sono i tre *invarianti di deformazione*:

$$\begin{aligned} I_1 &= d_{11} + d_{22} + d_{33} = \mathrm{Tr}[\boldsymbol{D}] \\ I_2 &= d_{11}d_{22} + d_{11}d_{33} + d_{22}d_{33} - d_{12}^2 - d_{13}^2 - d_{23}^2 \\ I_3 &= \mathrm{Det}[\boldsymbol{D}] \end{aligned} \tag{14.37}$$

Siano d_1, d_2 e d_3 le tre radici dell'equazione secolare (14.36) in ϵ. In corrispondenza di ciascuna di queste tre radici, dette *deformazioni principali*, si può calcolare una direzione principale, definita a meno di una costante, ed identificata dalle sue tre componenti.

Sia $\boldsymbol{l}_I = (l_{11}, l_{21}, l_{31})$ la soluzione che si ottiene in corrispondenza di $\epsilon = d_1$, $\boldsymbol{l}_{II} = (l_{12}, l_{22}, l_{32})$ la soluzione che si ottiene in corrispondenza di $\epsilon = d_2$, ed infine $\boldsymbol{l}_{III} = (l_{13}, l_{23}, l_{33})$ la soluzione che si ottiene in corrispondenza di $\varepsilon = d_3$: si può dimostrare anche in questo caso che queste tre direzioni $\boldsymbol{l}_I$, $\boldsymbol{l}_{II}$ ed $\boldsymbol{l}_{III}$, sono tra loro ortogonali.

Capitolo 15

La teoria lineare

In questo Capitolo si esaminano le conseguenze di una ragionevole ipotesi sulla grandezza di alcune quantità di interesse fisico.

15.1 L'ipotesi di piccole deformazioni

E' spesso evidente, nella pratica tecnica, che le variazioni percentuali di lunghezza E_{x1}, E_{x2} ed E_{x3}, assieme con le variazioni angolari γ_{12}, γ_{13} e γ_{23} possono considerarsi quantità piccole rispetto all'unità. Quando ciò sia accettabile, si dirà che si è nell'ambito delle *piccole deformazioni:*

$$\begin{aligned} E_{xi} &\ll 1 \\ \gamma_{ij} &\ll 1 \end{aligned} \tag{15.1}$$

In tale ipotesi si hanno alcune interessanti semplificazioni di svariate formule. Gli allungamenti percentuali dei segmenti stesi lungo gli assi coordinati, dedotti nel Capitolo precedente, e che qui si riportano per comodità:

$$\begin{aligned} E_{x1} &= \sqrt{1 + 2d_{11}} - 1 \\ E_{x2} &= \sqrt{1 + 2d_{22}} - 1 \\ E_{x3} &= \sqrt{1 + 2d_{33}} - 1 \end{aligned} \tag{15.2}$$

si semplificano utilizzando lo sviluppo in serie della radice quadrata, ed arrestandosi al primo termine:

$$\sqrt{1 + 2d_{11}} = 1 + d_{11} - \frac{d_{11}^2}{2} + \frac{d_{11}^3}{2} + O\left[d_{11}^4\right] \tag{15.3}$$

da cui si ha:

$$\begin{aligned} E_{x1} &= d_{11} \\ E_{x2} &= d_{22} \\ E_{x3} &= d_{33} \end{aligned} \tag{15.4}$$

Ne segue che in queste ipotesi *gli elementi diagonali del tensore di Green–Lagrange forniscono direttamente gli allungamenti percentuali di segmenti passanti per un punto M e paralleli agli assi.* Inoltre, per qualsiasi segmento $\overrightarrow{MN}$ la deformazione ϵ_{MN}, data da:

$$\epsilon_{MN} = E_{MN}\left(1 + \frac{E_{MN}}{2}\right) \tag{15.5}$$

si semplifica in:

$$\epsilon_{MN} = E_{MN} \tag{15.6}$$

da cui, come già suggerito, si deduce che la definizione matematica e quella ingegneristica vengono a coincidere.

Infine, occorre semplificare le (14.27–14.29) del Capitolo 14:

$$\begin{aligned}
\sin\gamma_{12} &= \frac{2d_{12}}{(1+E_{x1})(1+E_{x2})}\\
\sin\gamma_{13} &= \frac{2d_{13}}{(1+E_{x1})(1+E_{x3})}\\
\sin\gamma_{23} &= \frac{2d_{23}}{(1+E_{x2})(1+E_{x3})}
\end{aligned} \tag{15.7}$$

I seni degli angoli, come noto, possono confondersi con gli angoli stessi, se gli angoli sono piccoli:

$$\sin\gamma_{12} = \gamma_{12} - \frac{\gamma_{12}^3}{6} + O\left[\gamma_{12}^4\right] \tag{15.8}$$

ed il denominatore a secondo membro può confondersi con l'unità. Si ha quindi:

$$d_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2} \tag{15.9}$$

Quindi, nelle ipotesi semplificative di questa lezione, le tre componenti d_{12}, d_{13}, d_{23} coincidono con la metà della variazione angolare dell'angolo retto tra elementi passanti per M ed originariamente distesi lungo gli assi.

15.2 Piccoli gradienti di spostamento

Una ulteriore ipotesi semplificativa riguarda l'ampiezza delle derivate degli spostamenti. Se si assume che tutte le derivate del tipo $\partial u_1/\partial x_1, \ldots \partial u_3/\partial x_3$ siano tanto piccole da poter trascurare i loro quadrati rispetto ad esse, allora il tensore di Green–Lagrange viene a semplificarsi drasticamente, in quanto nella sua definizione:

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H}\right) \tag{15.10}$$

deve essere trascurato l'ultimo termine, e quindi si ha:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}^T\right) \tag{15.11}$$

In altri termini:
il tensore di Green–Lagrange viene a coincidere con la parte simmetrica del gradiente di spostamento.

15.3 La decomposizione dello spostamento

Nell'ipotesi di piccoli gradienti di spostamento, gli elementi della matrice $\boldsymbol{H}$ dei gradienti di spostamento sono tutti dello stesso ordine di grandezza, così come gli elementi della parte simmetrica $\boldsymbol{E}$ di $\boldsymbol{H}$, e della parte antisimmetrica $\boldsymbol{\Omega}$. Ciò permette una utile decomposizione del processo deformativo in esame.

15.3.1 La rotazione rigida

Si consideri la scomposizione del gradiente di spostamento nella sua parte simmetrica ed antisimmetrica:

$$\boldsymbol{du} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{dx} = (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{dx} \tag{15.12}$$

con:

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{15.13}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{15.14}$$

Si definisca ora il vettore $\boldsymbol{\omega}$ di componenti:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \end{aligned} \tag{15.15}$$

in modo da scrivere:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{15.16}$$

Ora, è noto che il generico atto di moto di un *corpo rigido*, si può scomporre in tre traslazioni u_{01}, u_{02}, u_{03}, rispetto a tre assi cartesiani di riferimento, e in tre rotazioni di ampiezza Ω_1, Ω_2, Ω_3 intorno agli assi passanti per un punto P_0 (detto polo) e paralleli agli assi di riferimento.

A seguito di questo atto di moto, lo spostamento di un generico punto P del corpo, può scriversi:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \\ x_3 - x_{03} \end{pmatrix} \tag{15.17}$$

Ne segue che l'aliquota di spostamento della (15.12):

$$\boldsymbol{du}_r = \boldsymbol{\Omega dx} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{dx} \tag{15.18}$$

è interpretabile come una rotazione rigida con vettore rotazione di componenti:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \end{aligned} \tag{15.19}$$

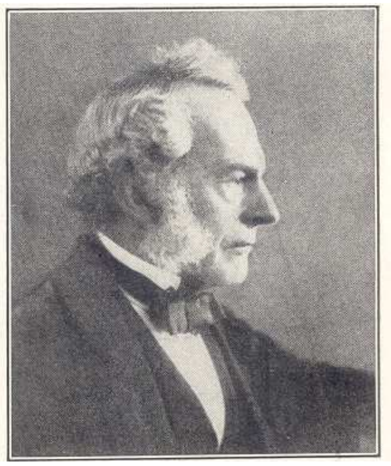


Figura 15.1: G. Stokes

15.3.2 La deformazione pura

La restante aliquota della (15.12):

$$\boldsymbol{du}_e = \boldsymbol{Edx} \tag{15.20}$$

è quindi responsabile dell'effettiva deformazione del segmento $\overrightarrow{MN}$, e la matrice $\boldsymbol{E}$ si dice anche *matrice della deformazione pura*. I corrispondenti spostamenti si dicono *spostamenti da deformazione pura*.
Nota - Il concetto di decomposizione della deformazione, come illustrato in questa sezione, risale a G.Stokes, 1845.

15.4 L'interpretazione fisica delle direzioni principali di deformazione

La (15.20), combinata con la (15.11), permette una semplice interpretazione fisica della ricerca delle deformazioni principali con le corrispondenti direzioni principali di deformazione, operata nel Capitolo precedente sul tensore di Green-Lagrange.

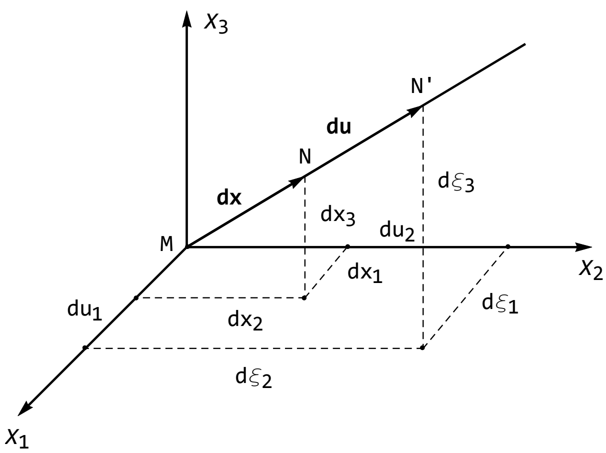


Figura 15.2: Gli spostamenti da deformazione pura e le direzioni principali di deformazione

Si consideri infatti un punto M, e sia p una direzione principale passante per M. Sia poi N un punto appartenente alla retta p, ed a distanza $\boldsymbol{dx}$ da M.

Il punto N, per effetto della deformazione pura, si porta in N', con spostamenti forniti dalla (15.20):

$$\begin{aligned} du_1 &= e_{11}dx_1 + e_{12}dx_2 + e_{13}dx_3 \\ du_2 &= e_{12}dx_1 + e_{22}dx_2 + e_{23}dx_3 \\ du_3 &= e_{13}dx_1 + e_{23}dx_2 + e_{33}dx_3 \end{aligned} \tag{15.21}$$

D'altro canto, poichè N appartiene ad una direzione principale, anche N' dovrà appartenere alla stessa direzione, e quindi MN' deve essere proporzionale ad MN (cfr. Figura 15.2). Sarà perciò possibile scrivere:

$$\begin{aligned} du_1 &= \epsilon dx_1 \\ du_2 &= \epsilon dx_2 \\ du_3 &= \epsilon dx_3 \end{aligned} \tag{15.22}$$

Paragonando le (15.21) e (15.22) si giunge al sistema:

$$\begin{aligned} (e_{11} - \epsilon)\, dx_1 + e_{12} dx_2 + e_{13} dx_3 &= 0 \\ e_{12} dx_1 + (e_{22} - \epsilon)\, dx_2 + e_{23} dx_3 &= 0 \\ e_{13} dx_1 + e_{23} dx_2 + (e_{33} - \epsilon)\, dx_3 &= 0 \end{aligned} \tag{15.23}$$

identico al sistema ottenuto nel Capitolo precedente.

15.5 Le condizioni di compatibilità

In quest'ultima sezione si affronta il seguente problema:
- date le *tre* funzioni spostamento $u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2(x_1, x_2, x_3)$ e $u_3(x_1, x_2, x_3)$, è da esse possibile ricavare, tramite derivazione, le *sei* componenti del tensore di deformazione.
- assegnate le *sei* funzioni $e_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, $i, j = 1, 2, 3$, è sempre possibile ricavare le *tre* funzioni spostamento da cui esse sarebbero generate? In altri termini, assegnate sei funzioni del tipo descritto, sono sempre esse interpretabili come componenti di deformazione, relative ad un campo di spostamenti?

La risposta alla domanda precedente è affermativa, solo quando le sei funzioni sono legate tra loro da tre condizioni, dette *condizioni di compatibilità*.

Si può dimostrare infatti il seguente:

Teorema 5. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le sei funzioni continue ed uniformi $e_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, $i, j = 1, 2, 3$ siano componenti di deformazione lineare è che siano verificate le relazioni:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right) \\ \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}\right) \\ \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}\right) \\ 2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \\ 2\frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} \\ 2\frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} &= \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2} \end{aligned} \tag{15.24}$$

Nota - Prima di iniziare la dimostrazione, si osservi che il gruppo delle prime tre condizioni si può ottenere a partire da una qualsiasi equazione, tramite permutazione circolare degli indici $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$, così come possono ottenersi le altre tre condizioni.

Dimostrazione. Si dimostrerà solo che la condizione è necessaria[1]. Ed infatti il secondo gruppo di condizioni può essere facilmente dimostrato in base alla seguente relazione:

$$\begin{aligned} 2e_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \longrightarrow 2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &= \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_1} + \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) \\ &= \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \end{aligned} \tag{15.25}$$

ed alla permutazione circolare degli indici.

Per dimostrare il primo gruppo di condizioni, si consideri che si ha:

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \longrightarrow \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3}\right) \tag{15.26}$$

$$e_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \longrightarrow \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}\right) \tag{15.27}$$

$$e_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) \longrightarrow \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\right) \tag{15.28}$$

e sommando si ha:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_1 \partial x_1} = \\ &\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\right) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}\right) \\ &\qquad = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \end{aligned} \tag{15.29}$$

[1] Per dimostrare che la condizione è sufficiente, può ad esempio consultarsi N. Muskhelishvili, *Some basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff 1963, pp. 50-51. La necessarietà delle condizioni di compatibilità è stata dimostrata da B. De Saint Venant in una brevissima nota di due pagine, pubblicata nel 1861, mentre la dimostrazione della loro sufficienza è dovuta ad Eugenio Beltrami (*Sull'interpretazione meccanica delle formule di Maxwell*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 3, 1886). Tale nota può anche essere letta sul sito http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk, nella sezione Ricerca.

□

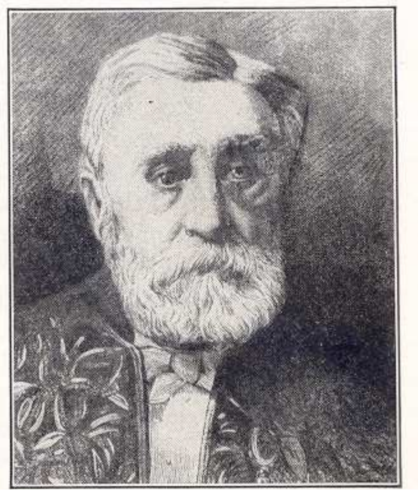


Figura 15.3: Adhémar–Jean–Claude Barré De Saint–Venant

Nota - Le equazioni di congruenza possono sintetizzarsi nell'unica formula:

$$\mathrm{curlcurl}\,\boldsymbol{E} = 0 \tag{15.30}$$

dove la definizione di rotore di un tensore può ritrovarsi in qualsiasi testo di analisi vettoriale

15.6 Le identità di Bianchi

E' facilmente ipotizzabile che non tutte le condizioni di congruenza appena scritte siano indipendenti tra di loro. Ed infatti, si riscrivano le sei condizioni sotto forma di identità a zero:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{33} &= 2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = 0\\
\mathcal{G}_{11} &= 2\frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} = 0\\
\mathcal{G}_{22} &= 2\frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2} = 0\\
\mathcal{G}_{23} &= G_{32} = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_1^2} = 0\\
\mathcal{G}_{31} &= G_{13} = \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_2^2} = 0
\end{aligned} \tag{15.31}$$

$$\mathcal{G}_{12} = G_{21} = \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_3^2} = 0$$

Figura 15.4: Luigi Bianchi

Si può verificare, per sostituzione diretta, che sussistono le cosiddette *identità di Bianchi:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{G}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{G}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_{13}}{\partial x_3} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{G}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{G}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_{23}}{\partial x_3} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{G}_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{G}_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_{33}}{\partial x_3} = 0
\end{aligned} \tag{15.32}$$

che legano tra loro le sei condizioni di congruenza, e facendo sì che solo tre di esse siano indipendenti. Si noti che utilizzando la convenzione degli indici ripetuti, le identità di Bianchi si scrivono:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{ij}}{\partial x_j} = 0, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{15.33}$$

Capitolo 16

Le relazioni costitutive

Da questo Capitolo si inizia lo studio del comportamento del materiale, collegando tra loro l'analisi della tensione e l'analisi della deformazione.

Ci si limiterà, dopo alcuni cenni introduttivi, al legame elastico, che è contemporaneamente il più semplice ed il più diffuso legame tra tensioni e deformazioni. Inoltre, per bassi livelli di sollecitazione quasi ogni materiale obbedisce a questo tipo di legge.

16.1 Introduzione

Si consideri un punto M di un corpo B, siano $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{33}$ le componenti di tensione in M, e siano $e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{33}$ le componenti di deformazione (lineare) in M. Seguendo una simbologia utilizzata originariamente da S.G. Lekhnitskii[1], si introducano ora i due vettori di ordine sei:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\} \tag{16.1}$$

$$\boldsymbol{e}^T = \{e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2e_{12}, 2e_{13}, 2e_{23}\} \tag{16.2}$$

Con questa notazione, si intende per legame costitutivo una relazione del tipo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{f}(\boldsymbol{e}) \tag{16.3}$$

rispettosa almeno dei tre principi fondamentali[2]:

principio di determinismo, secondo cui la tensione in un corpo è determinata al più dalla storia del moto passato del corpo, ma non dalla sua storia futura

[1] In materia di elasticità e di legge di Hooke è da leggere il libro di S.G.Lekhnitskii, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden Day, San Francisco, 1963. In esso vengono stabilite anche le terminologie correntemente in uso.

[2] La teoria delle equazioni costitutive è ardua, e molto al di là dei limiti del presente corso. Per eventuali approfondimenti, si può consultare C. Truesdell e W. Noll, *Non–linear Field Theories of Mechanics*, Springer, Terza Edizione (2004) particolarmente la sezione 26, pagg.56–58

principio di azione locale, secondo cui la tensione in un punto non è influenzata dal moto delle particelle materiali esterne ad un intorno arbitrariamente piccolo della particella in esame.

principio di indifferenza del riferimento materiale, secondo cui due "osservatori" devono poter determinare la stessa tensione, indipendentemente dal riferimento in cui si pongono.

Un legame costitutivo che obbedisce a questi tre principi fornisce risultati logici, ma è ancora troppo generico per poter definire univocamente un materiale. Introducendo ulteriori ipotesi si possono identificare i comportamenti viscosi, plastici, elasto–plastici, elastici, elastici anisotropi, elastici ortotropi, elastici isotropi etc.

16.2 La legge di Hooke e la risposta elastica

Data la gran varietà di materiali esistenti in natura, ed attualmente anche fabbricati industrialmente, una equazione costitutiva che possa riprodurre le differenti risposte fornite dai differenti materiali è una utopia. In questo campo, per ottenere buoni risultati è giocoforza far ricorso ad esperimenti, e limitare l'indagine a singoli materiali.

D'altro canto, le sperimentazioni di laboratorio, attraverso prove a trazione ed a taglio, dimostrano che — almeno per bassi valori delle sollecitazioni — tutti i più comuni materiali da costruzione esibiscono un iniziale *comportamento elastico*, cui ora ci si dedicherà in dettaglio.

E di origine sperimentale sono le prime ipotesi qualitative sul comportamento dei materiali: Isaac Beeckman, nel 1630, in una lettera a padre Mersenne fa osservare come, appendendo un peso ad una molla, più lunga è la molla, e più si abbassa il peso. Successivamente, William Petty, nel 1674, pubblicò la memoria *The Discourse made before the Royal Society concerning the Use of Duplicate Proportion, together with a New Hypothesis of Springing or Elastic Motion* in cui il comportamento elastico del materiale viene spiegato con un complicato sistema di atomi, cui si attribuisce non solo proprietà polari, ma anche caratteristiche sessuali, giustificando tale assunto in base al versetto 1 : 27 della Genesi: *e Dio li creò maschio e femmina*, ed estendendo tale versetto non solo all'umanità, ma anche agli atomi.

A parte queste curiosità — tratte dal testo di E. Benvenuto *An Introduction to the History of Structural Mechanics* Vol.I, pag 263 — la prima pietra della moderna teoria dell'elasticità fu posta da Robert Hooke, nel suo trattato *Lectures de potentia restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies*, pubblicato nel 1678. In esso Hooke dichiara di aver scoperto la sua teoria delle molle ben diciotto anni prima, ma di averla tenuta segreta per motivi di priorità scientifica:

> Circa due anni orsono pubblicai questa Teoria in un anagramma alla fine del mio libro sulla descrizione degli elioscopi, ossia *ceiiinosssttuu*,

> ossia *ut tensio sic vis* (la Potenza in ogni molla sta nella stessa proporzione con la (es)Tensione).

Con Hooke, quindi, si hanno i primi risultati quantitativi, mirabilmente illustrati con una serie di impeccabili esperimenti condotti sull'apparato riprodotto in Figura 16.1:

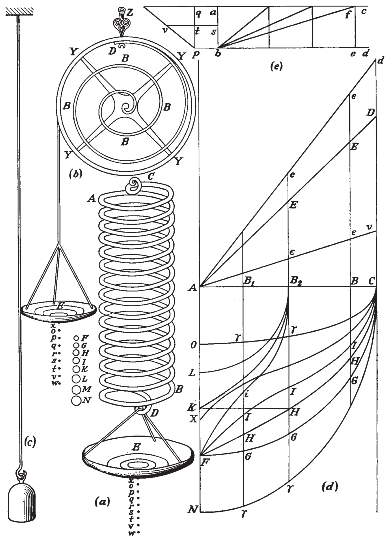


Figura 16.1: L'apparato sperimentale di Robert Hooke

> Si prenda una molla metallica di 20, 30 o 40 piedi, la si appenda verticalmente ad un chiodo, ed all'altra estremità si ponga una scodella per poggiarvi i pesi. Poi con un compasso si misuri la distanza tra il fondo della scodella ed il suolo sottostante, poi si pongano i pesi nella scodella e si misuri l'allungarsi della molla, registrandolo ogni volta. Paragonando i diversi allungamenti della molla, si vedrà che essi saranno sempre proporzionali ai pesi che li hanno causati[3]

Hooke descrive anche esperimenti con molle elicoidali, molle di orologio a spirale, e pezzi di legno in flessione, traendo le seguenti conclusioni:

[3]Take a wire string [Fig. 16.1] of 20, or 30, or 40 ft long, and fasten the upper part thereof to a nail, and to the other end fasten a Scale to receive the weights: Then with a pair of Compasses take the distance of the bottom of the scale from the ground or floor underneath, and set down the said distance, then put in weights into the said scale and measure the several stretchings of the said string, and set them down. Then compare the several stretchings of the said string, and you will find that they will always bear the same proportions one to the other that the weights do that made them.

> E' evidente che la Regola, o Legge di Natura in ogni corpo elastico è, che la forza necessaria a riportarlo alla sua posizione naturale è sempre proporzionale alla distanza che esso ha percorso, sia ciò accaduto per rarefazione, o mutua separazione delle sue parti, o per condensazione, ossia per ammassamento delle sue parti. Nè questo è osservabile solo in questi corpi, ma in qualsiasi altro corpo elastico, sia esso di metallo, legno, argilla, capelli, corni, seta, vetro, ed altri[4]

Nella sua forma generalizzata, invece, la legge di Hooke fu enunciata da Navier il 14 maggio 1821, in una riunione della Paris Academy, e poi pubblicata nel 1827. Infine, essa fu ripresa ed ampliata da Cauchy in due memorie del 1822 e del 1828, e sistemata da Poisson nel 1829.

La traduzione moderna degli esperimenti di Hooke presuppone quindi una proporzionalità lineare tra la forza applicata alla molla, e l'allungamento della molla stessa. Più in generale, si consideri una barra di metallo, di lunghezza iniziale l_0 e sezione circolare di diametro iniziale d_0 ed area A_0, e la si sottoponga a due forze di trazione, uguali e contrarie, applicate agli estremi. All'aumentare dell'intensità della forza F, la barra si allungherà, la sua lunghezza diverrà l, e si potrà riportare in un diagramma l'andamento dell'allungamento percentuale $\epsilon = (l - l_0)/l_0$ in funzione della tensione assiale $\sigma = F/A_0$. Il risultato avrà un aspetto simile a quello riportato in Figura 16.2, confermando che — in un certo intervallo di valori della forza F — la relazione tra tensione σ e deformazione ϵ è una relazione di proporzionalità lineare, mentre al crescere della forza applicata il comportamento del materiale diviene più complesso, ed esula dai nostri interessi.

La generalizzazione degli esperimenti di Hooke, condotti in regime monodimensionale, ai casi in cui sono presenti più tensioni contemporaneamente, porta ad ipotizzare una natura lineare della funzione $\mathfrak{f}$ (cfr. eqn. 16.3), per cui si

[4]It is very evident that the Rule or Law of Nature in every springing body is, that the force or power thereof to restore itself to its natural position is always proportionate to the distance or space it is removed therefrom, whether it be by rarefaction, or the separation of its parts the one from the other, or by a Condensation, or crowding of those parts nearer together. Nor is it observable in these bodies only, but in all other springy bodies whatsoever, whether metal, wood, stones, baked earth, hair, horns, silk, bones, sinews, glass, and the like. Respect being had to the particular figures of the bodies bended, and the advantagious or disadvantagious ways of bending them. From this principle it will be easy to calculate the several strength of Bows ... as also of the Balistae or Catapultae used by the Ancients...

It will be easy to calculate the proportionate strength of the spring of a watch [...] From the same also it will be easy to give the reason of the Isochrone motion of a Spring or extended string, and of the uniform sound produced by those whose vibrations are quick enough to produce an audible sound. From this appears the reason why a spring applied to the balance of a watch doth make the vibrations thereof equal, whether they be greater or smaller... From this it will be easy to make a Philosophical Scale to examine the weight of any body without putting in weights ... This Scale I contrived in order to examine the gravitation of bodies towards the Center of the Earth, viz, to examine whether bodies at a further distance from the center of the earth did not loose somewhat of their power or tendency towards it

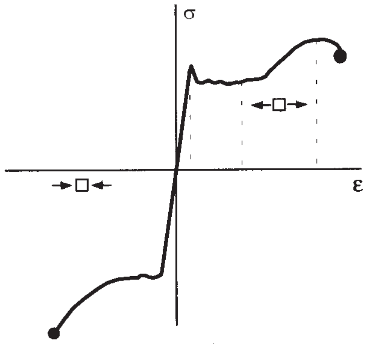


Figura 16.2: Il risultato di un tipico esperimento in regime monoassiale di tensione

giunge alla *legge di Hooke generalizzata*:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1123} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2223} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3323} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1223} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1312} & c_{1313} & c_{1323} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312} & c_{2313} & c_{2323} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{13} \\ 2e_{23} \end{pmatrix} \tag{16.4}$$

o, matricialmente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{e} \tag{16.5}$$

avendo introdotto la *matrice* $\boldsymbol{C}$ di *elasticità*. Indicialmente si ha:

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk} e_{hk} \tag{16.6}$$

Ipotizzando, come usuale, che la matrice $\boldsymbol{C}$ sia invertibile, si giunge facilmente alla *legge di Hooke inversa*, in grado di esprimere le deformazioni in termini di tensioni:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma} \tag{16.7}$$

16.3 L'ipotesi molecolare

Mentre la deduzione della (16.4) può considerarsi una generalizzazione dei classici esperimenti di Hooke, sorge ora il problema di caratterizzare le 36 costanti elastiche della matrice $\boldsymbol{C}$, in modo tale che le eventuali sperimentazioni possano fornire soddisfacenti conferme sull'effettivo comportamento del materiale.

In particolare, sorgono le seguenti domande:

— quante costanti possono fissarsi con ragionamenti validi per qualunque corpo, ossia in base a sole considerazioni fisico-matematiche, che non coinvolgano la natura del materiale?

— esistono in natura, ed ancor più in tecnica, una varietà di materiali con direzioni privilegiate, quali ad esempio le fibre dei tronchi di legname, o le fibre di carbonio. Come si riflette la presenza di queste direzioni privilegiate sulla matrice $\boldsymbol{C}$?

— esistono in natura alcuni materiali per cui non esiste una direzione privilegiata, ed in questa categoria rientrano alcuni materiali di uso comune in edilizia, come ad esempio l'acciaio. Quante costanti sono necessarie per definire il comportamento di un simile materiale? E qual è l'aspetto della matrice $\boldsymbol{C}$, in questa ipotesi?

Come già accennato nella prima lezione, l'ipotesi fisica originariamente accettata era una generalizzazione dell'ipotesi di Newton sulle forze di attrazione–repulsione. Secondo questa teoria, Cauchy dimostrò che, in generale, solo 15 costanti sono necessarie per definire un materiale, ed inoltre, che basta una singola costante per definire un materiale senza direzioni privilegiate.

Un seguito di esperimenti ha dimostrato che questa ipotesi uni–costante non permette una buona rispondenza con la realtà, e questo ha condotto al graduale abbandono della teoria molecolare, a favore della teoria energetica[5].

16.4 L'ipotesi di George Green

La teoria energetica di George Green, ora universalmente accettata ed utilizzata, si basa su di una ipotesi astratta dalle profonde conseguenze matematiche, e conduce a conclusioni teoriche che si sono rivelate essere in buon accordo con i dati sperimentali.

Basandosi sul principio di conservazione dell'energia, l'ipotesi di base è stata così espressa dallo stesso Green[6]:

> Qualunque sia il modo in cui le particelle elementari di un corpo agiscono le une sulle altre, se tutte le forze interne sono moltiplicate per gli spostamenti elementari nelle rispettive direzioni, la somma globale per ciascuna porzione del corpo sarà sempre il differenziale esatto di qualche funzione. Ma una volta che questa funzione è nota, possiamo immediatamente applicare i metodi generali forniti dalla *Mécanique Analytique*, e che sembrano particolarmente ben applicabili a problemi riguardanti il moto di sistemi composti da un numero enorme di particelle mutuamente interagenti. Uno dei vantaggi di questo metodo, di grande importanza, è che conduce con meri passaggi matematici a tutte le equazioni e condizioni che

[5] Per chi desideri maggiori dettagli è consigliata la lettura di *Sui principi di filosofia naturale che orientarono la ricerca di Saint-Venant*, di E. Benvenuto e A. Becchi, riportata nel sito http:\\www.scienzadellecostruzioni.co.uk, nella sezione Ricerca

[6] L'ipotesi si trova formulata in *On the laws of reflexion and refraction of light*, Trans. Cambridge Philosophical Society, 1838, ed è riportata in *Mathematical papers of the late George Greene*, p. 245, London 1871. Una copia può essere letta nel sito http:\\www.scienzadellecostruzioni.co.uk, nella sezione Ricerca

> sono necessarie e sufficienti per la soluzione completa di qualsiasi problema cui possa essere applicato

L'ipotesi di Green, tradotta in linguaggio più moderno, significa che il lavoro delle tensioni (le *forze interne*), compiuto per unità di volume, in corrispondenza di una variazione infinitesima di deformazione (*gli spostamenti elementari*), è il differenziale esatto di una funzione.

Il calcolo di questa funzione è abbastanza agevole se le forze sono applicate molto lentamente, in modo che il processo di deformazione sia isotermo, oppure molto velocemente, in modo che il processo di deformazione sia adiabatico. Il primo tipo di processo di carico è fondamentale in regime statico, il secondo in regime dinamico.

Figura 16.3: Il mulino di famiglia di George Green

In ambedue i casi, infatti, le leggi della termodinamica assicurano che il processo di deformazione vedrà tutto il lavoro delle forze esterne tramutarsi in energia interna.

Si consideri allora un corpo B, soggetto alle forze di massa $\boldsymbol{X}$ ed alle forze superficiali $\boldsymbol{p}$, e siano $\boldsymbol{\sigma}$ ed $\mathbf{e}$ i vettori delle tensioni e delle deformazioni. Per effetto di una variazione di spostamento $\boldsymbol{du}$, le forze esterne compieranno il lavoro:

$$dW = \int_B X_i du_i \, \mathrm{d}V + \int_{\partial B} p_i du_i \, \mathrm{d}s \tag{16.8}$$

Utilizzando il teorema di Cauchy–Poisson si ha:

$$dW = \int_B X_i du_i \, \mathrm{d}V + \int_{\partial B} \sigma_{ij} n_j du_i \, \mathrm{d}s \tag{16.9}$$

ed applicando il teorema della divergenza si ha:

$$dW = \int_B X_i du_i \,\mathrm{d}V + \int_B \frac{\partial\left(\sigma_{ij} du_i\right)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}V \tag{16.10}$$

Svolgendo la derivata del prodotto si ottiene:

$$dW = \int_B X_i du_i \,\mathrm{d}V + \int_B \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} du_i \,\mathrm{d}V + \int_B \sigma_{ij} \frac{\partial du_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}V \tag{16.11}$$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio garantiscono che il lavoro delle forze esterne si riduce a:

$$dW = \int_B \sigma_{ij} \frac{\partial du_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}V \tag{16.12}$$

E' possibile infine scrivere:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial du_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \sigma_{ij}\left(de_{ij} + \mathrm{d}\omega_{ij}\right) = \sigma_{ij} de_{ij} \tag{16.13}$$

in quanto $\sigma_{ij}\mathrm{d}\omega_{ij} = 0$, per il carattere di simmetria delle tensioni e quello di antisimmetria delle ω_{ij}. In definitiva, quindi, un incremento di spostamento $\boldsymbol{du}$ causa un incremento di deformazioni $\boldsymbol{de}$, ed il lavoro delle forze esterne è esprimibile in termini di tensioni come:

$$dW = \int_B \sigma_{ij} de_{ij} dV \tag{16.14}$$

L'ipotesi di George Green implica l'esistenza di un *potenziale elastico* ϕ, tale da poter scrivere:

$$dW = \int_B \mathrm{d}\phi dV = \int_B \sigma_{ij} de_{ij} dV \tag{16.15}$$

e $\mathrm{d}\phi$ deve essere un differenziale esatto. Da quest'ultima relazione si può dedurre:

$$\mathrm{d}\phi = \sigma_{11} de_{11} + \sigma_{22} de_{22} + \sigma_{33} de_{33} + 2\sigma_{12} de_{12} + 2\sigma_{13} de_{13} + 2\sigma_{23} de_{23} = \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{e} \tag{16.16}$$

e affinchè $\mathrm{d}\phi$ sia un differenziale esatto, dovrà essere:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{11}} de_{11} + \frac{\partial \phi}{\partial e_{22}} de_{22} + \frac{\partial \phi}{\partial e_{33}} de_{33} + 2\frac{\partial \phi}{\partial e_{12}} de_{12} + 2\frac{\partial \phi}{\partial e_{13}} de_{13} + 2\frac{\partial \phi}{\partial e_{23}} de_{23} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{ij}} de_{ij}\end{aligned} \tag{16.17}$$

e quindi, dal confronto tra queste due espressioni, si ha:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial e_{ij}}, \qquad \text{i,j=1,2,3} \tag{16.18}$$

Definizione 5. *Un materiale per cui venga accettata l'ipotesi di Green si chiama materiale iperelastico.*

16.5 Il materiale linearmente elastico

L'esistenza di un potenziale elastico non implica necessariamente una relazione lineare tra tensioni e deformazioni. Se però si suppone che un corpo dotato di potenziale elastico è anche linearmente elastico, allora può dimostrarsi il:

Teorema 6. *La matrice di elasticità:*

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1123} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2223} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3323} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1223} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1312} & c_{1313} & c_{1323} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312} & c_{2313} & c_{2323} \end{pmatrix} \tag{16.19}$$

è simmetrica, e quindi le costanti elastiche divengono 21.

Dimostrazione. Ed infatti, in ipotesi di elasticità lineare si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{1111}e_{11} + c_{1122}e_{22} + c_{1133}e_{33} + 2c_{1112}e_{12} + 2c_{1113}e_{13} + 2c_{1123}e_{23} \\ \sigma_{22} &= c_{2211}e_{11} + c_{2222}e_{22} + c_{2233}e_{33} + 2c_{2212}e_{12} + 2c_{2213}e_{13} + 2c_{2223}e_{23} \end{aligned} \tag{16.20}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial e_{22}} &= c_{1122} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial e_{11}} &= c_{2211} \end{aligned} \tag{16.21}$$

D'altro canto, si è anche ipotizzata l'esistenza di un potenziale elastico, per cui:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{11}} \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial \phi}{\partial e_{22}} \end{aligned} \tag{16.22}$$

da cui subito, per il teorema di Schwartz:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial e_{22}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial e_{11} \partial e_{22}} = \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial e_{11}} \tag{16.23}$$

ed infine:

$$c_{1122} = c_{2211} \tag{16.24}$$

Del tutto analogamente, si ottiene:

$$c_{ijhk} = c_{hkij} \tag{16.25}$$

□

Nota - Questa è la prima discrepanza tra la teoria molecolare, che prevede al più 15 diverse costanti elastiche indipendenti, e la teoria energetica, che ne prevede 21. Sembra che, sperimentalmente, sia possibile dimostrare che la cosiddetta *pietra blu* possegga 21 costanti elastiche distinte.

16.6 Il potenziale elastico e la linearità elastica

Si vuol ora dimostrare che si può giungere alla legge di Hooke anche esprimendo il potenziale elastico in termini di deformazioni, e poi limitandosi alla parte lineare del risultante sviluppo in serie.

Infatti, utilizzando uno sviluppo in serie di potenze, si può scrivere il potenziale come somma di un termine costante, un termine lineare nelle deformazioni, un termine quadratico nelle deformazioni, etc:

$$\phi(\boldsymbol{e}) = \phi_0 + \phi_1(\boldsymbol{e}) + \phi_2(\boldsymbol{e}) + \phi_3(\boldsymbol{e}) + \ldots \tag{16.26}$$

La parte costante ϕ_0 può trascurarsi, perchè, come usuale, ci si interessa di

Figura 16.4: Carlo Alberto Castigliano

variazioni di energia, e non di valori assoluti.

La parte lineare ϕ_1, se presente, darebbe luogo, tramite le (16.18), a termini costanti nelle tensioni, in palese contraddizione con la supposta esistenza di uno stato naturale, caratterizzato da assenza di tensioni e deformazioni. Infine, termini superiori al quadratico non porterebbero più ad una relazione lineare tensioni–deformazioni. Ne segue che il potenziale elastico, in ipotesi di validità della legge di Hooke, dovrà essere una forma quadratica nelle deformazioni:

$$\phi = \frac{1}{2} c_{ijhk} e_{ij} e_{hk} \tag{16.27}$$

o ancora, matricialmente:

$$\phi = \frac{1}{2}\boldsymbol{e^T}\mathbf{C}\mathbf{e} \tag{16.28}$$

Utilizzando la legge di Hooke inversa si hanno due espressioni alternative del potenziale. La prima esprime il potenziale come forma bilineare nelle tensioni e nelle deformazioni:

$$\phi = \frac{1}{2}\boldsymbol{e^T}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij} \tag{16.29}$$

La seconda invece esprime il potenziale come forma quadratica delle tensioni:

$$\phi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma^T}\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}a_{ijhk}\sigma_{ij}\sigma_{hk} \tag{16.30}$$

Dalla (16.30) si ottengono le *relazioni di Castigliano*:

$$e_{ij} = \frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}}, i, j = 1, 2, 3 \tag{16.31}$$

duali delle (16.18), ma in realtà valide in un ambito più ristretto, quello dei materiali linearmente elastici.

Capitolo 17

Il solido anisotropo

La formulazione più generale della legge di Hooke passa attraverso l'introduzione di 81 costanti:

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk} e_{hk} \tag{17.1}$$

il cui carattere di tensorialità é garantito dalla regola del quoziente. Si ha quindi un tensore del quarto ordine, detto *tensore di elasticità*, il cui aspetto dipende dal tipo di materiale che si sta esaminando. Alcune restrizioni sono comunque di carattere generale:

— la simmetria del tensore delle tensioni implica che:

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk} e_{hk} = \sigma_{ji} = c_{jihk} e_{hk} \tag{17.2}$$

e quindi esiste simmetria rispetto ai primi due indici:

$$c_{ijhk} = c_{jihk} \tag{17.3}$$

— la simmetria del tensore delle deformazioni implica che esiste simmetria anche rispetto agli altri due indici:

$$c_{ijhk} = c_{ijkh} \tag{17.4}$$

Ed infatti, si consideri uno stato deformativo in cui la solo componente non nulla sia $e_{12} = e_{21}$. Per esso, la legge di Hooke fornisce lo stato tensionale:

$$\sigma_{ij} = c_{ij12} e_{12} + c_{ij21} e_{21} = \left(c_{ij12} + c_{ij21}\right) e_{12} = 2\bar{c}_{ij12} e_{12} \tag{17.5}$$

avendo definito la nuova costante:

$$\bar{c}_{ij12} = \frac{1}{2}\left(c_{ij12} + c_{ij21}\right) \tag{17.6}$$

simmetrica rispetto al terzo e quarto indice. Le due proprietà (17.3) e (17.4) si dicono *proprietà di simmetria minore*, e riducono a 36 il numero delle costanti elastiche. Infine, si è dimostrato che in ipotesi di esistenza di un potenziale elastico vale anche la proprietà di simmetria maggiore:

$$c_{ijhk} = c_{hkij} \tag{17.7}$$

e quindi le costanti elastiche si riducono a 21. Sfruttando queste tre proprietà di simmetria, in definitiva, la legge di Hooke si scriverà:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1123} \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2223} \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3323} \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1223} \\ c_{1113} & c_{2213} & c_{3313} & c_{1213} & c_{1313} & c_{1323} \\ c_{1123} & c_{2223} & c_{3323} & c_{1223} & c_{1323} & c_{2323} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{13} \\ 2e_{23} \end{pmatrix} \tag{17.8}$$

Infine, si ricordi che il carattere di tensorialità delle costanti elastiche implica che esse varino, al variare del sistema di riferimento, secondo la relazione:

$$c'_{ijkl} = l_{im} l_{jn} l_{kp} l_{lq} c_{mnpq} \qquad i, j, k, l, m, n, p, q = 1, 2, 3 \tag{17.9}$$

dove **L** è la matrice che contiene, in colonna, i coseni direttori dei nuovi assi rispetto ai vecchi assi.

17.1 I materiali monoclini

Si consideri un materiale che abbia simmetria di comportamento rispetto ad un piano Π, ossia un materiale *monoclino.* Si assuma che Π sia il piano $OX_1 - OX_2$, e si completi la terna di riferimento con un terzo asse OX_3, ortogonale a Π: il tipo di simmetria che si sta studiando implica che le costanti elastiche non mutano al variare del sistema di riferimento da (O, X_1, X_2, X_3) a (O, X_1, X_2, X'_3), come illustrato in Figura 17.1.

La matrice **L** dei coseni direttori dei vecchi assi rispetto ai nuovi è fornita da:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{17.10}$$

Applicando la legge di variazione (17.9) si ottiene:

$$c'_{1111} = l_{1m} l_{1n} l_{1p} l_{1q} c_{mnpq} = c_{1111} \tag{17.11}$$

e risultati simili si hanno per tutti i coefficienti elastici in cui non compare il pedice 3, oppure per tutti i coefficienti elastici in cui il pedice 3 compare un numero pari di volte (due o quattro volte). Se invece il pedice tre compare un numero dispari di volte, (una volta o tre volte), allora si ha, ad esempio:

$$c'_{1113} = l_{1m} l_{1n} l_{1p} l_{3q} c_{mnpq} = -c_{1113} \tag{17.12}$$

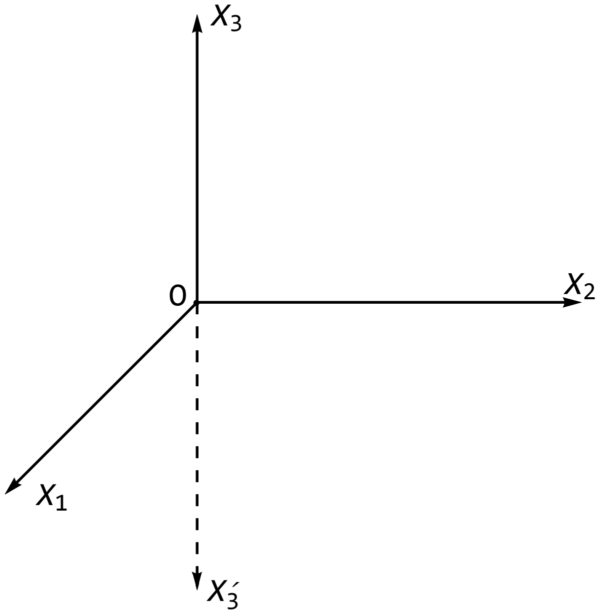


Figura 17.1: La simmetria esibita dai materiali monoclini: nulla varia ribaltando l'asse verticale

Poichè, per la richiesta simmetria, dovrà anche essere $c'_{1113} = c_{1113}$, ne segue che c_{1113} deve essere nullo, così come nulli sono tutti i coefficienti con un numero dispari di pedice 3. In definitiva, la matrice delle costanti elastiche per un materiale monoclino si scrive in funzione di 13 quantità, come segue:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & c_{3312} & 0 & 0 \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & c_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & c_{1323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1323} & c_{2323} \end{pmatrix} \tag{17.13}$$

Si noti che una rotazione degli assi di riferimento modifica l'aspetto della matrice, distruggendone l'aspetto ma preservando la simmetria e la possibilità di definire il materiale in termini di 13 costanti elastiche.

17.2 I materiali ortotropi

Si consideri un materiale che abbia simmetria di comportamento rispetto a due piani ortogonali tra loro, ossia un materiale *ortotropo*.

Si assuma che i piani di simmetria siano i piani coordinati $OX_1 - OX_2$, ed $OX_2 - OX_3$: il tipo di simmetria che si sta studiando implica che le costanti elastiche non mutano al variare del sistema di riferimento da (O, X_1, X_2, X_3) a (O, X_1', X_2, X_3'), come illustrato in Figura 17.2.

La matrice **L** dei coseni direttori dei vecchi assi rispetto ai nuovi è fornita da:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{17.14}$$

Applicando la legge di variazione (17.9), ed utilizzando i coseni direttori (17.14) si nota che dovranno essere nulli i coefficienti elastici i cui pedici contengono una combinazione di 1 e 3 in numero dispari, giungendo quindi alla matrice delle costanti elastiche in termini di 9 quantità, come segue:

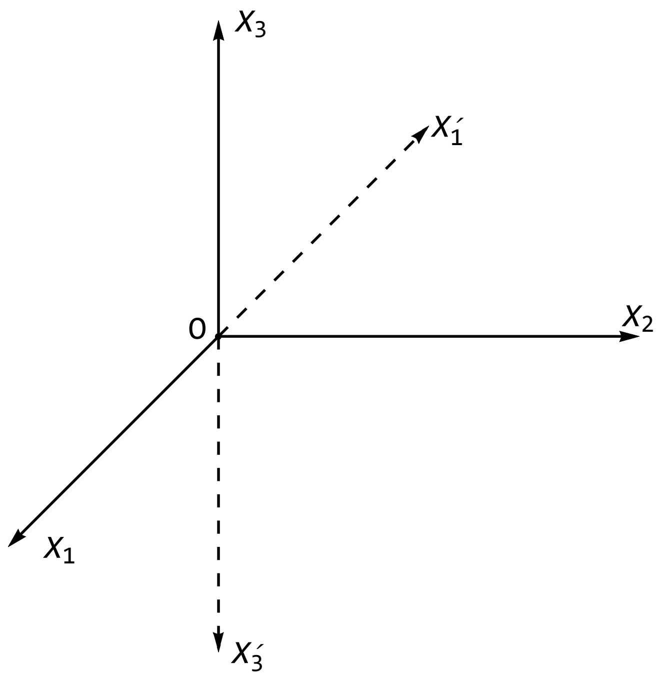


Figura 17.2: La simmetria esibita dai materiali ortotropi: nulla varia ribaltando gli assi X_1 ed X_3

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{2323} \end{pmatrix} \tag{17.15}$$

Ovviamente, l'inversa della matrice **C** ha lo stesso aspetto della matrice **C**, sicchè per un materiale ortotropo l'applicazione di una tensione normale causa solo l'insorgere di deformazioni normali, e l'applicazione di una tensione tangenziale causa l'insorgere della sola corrispondenza deformazione tagliante. Questa caratteristica è tuttavia valida solo per questo particolare sistema di riferimento.

17.3 I materiali trasversalmente isotropi

Si consideri ora un materiale *trasversalmente isotropo*, ossia un materiale che possiede un asse di simmetria, e sia esso OX_3. La simmetria di rotazione rispetto ad esso significa quindi che i coefficienti elastici non devono mutare al ruotare degli assi OX_1 ed OX_2 di un arbitrario angolo ϕ, come illustrato in Figura 17.3.

La matrice dei coseni direttori dei nuovi assi rispetto ai vecchi è fornita da:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17.16}$$

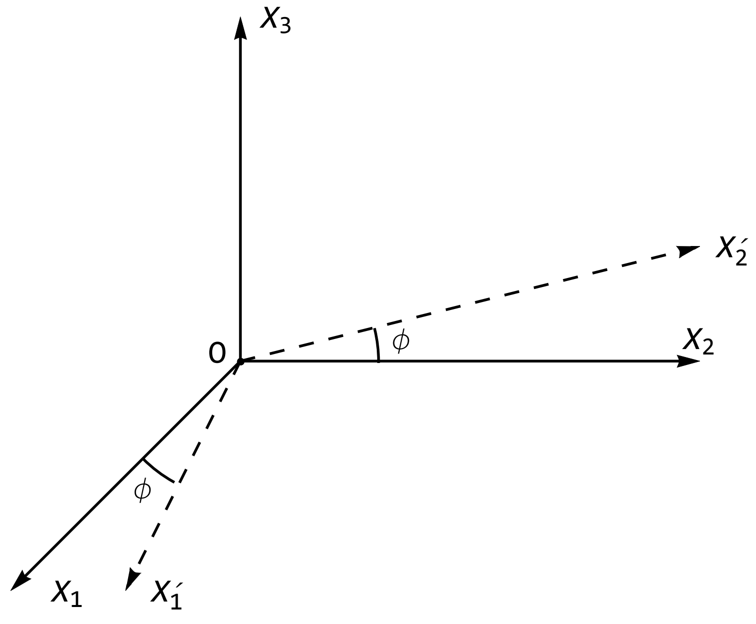


Figura 17.3: La simmetria nei materiali trasversalmente isotropi: nulla varia a seguto di una rotazione intorno all'asse X_3

Per dedurre le restrizioni imposte ai coefficienti elastici da questo tipo di simmetria, si consideri che la legge di Hooke si scriverà:

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk} e_{hk} \tag{17.17}$$

nel sistema di riferimento originario, e:

$$\sigma'_{pq} = c_{pqrs} e'_{rs} \tag{17.18}$$

nel sistema di riferimento ruotato. Mentre i coefficienti elastici dovranno rimanere costanti, tensioni e deformazioni si trasformano secondo le leggi di trasformazione dei tensori del secondo ordine. Sarà quindi $\sigma'_{pq}= l_{pi} l_{qj} \sigma_{ij}$, ed esplicitando:

$$\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= l_{1i} l_{1j} \sigma_{ij} = l_{11} l_{11} \sigma_{11} + 2 l_{11} l_{12} \sigma_{12} + l_{12} l_{12} \sigma_{22} \\
&= \sigma_{11} \cos^2\phi + 2\sigma_{12} \cos\phi \sin\phi + \sigma_{22} \sin^2\phi \\
\sigma'_{12} &= l_{1i} l_{2j} \sigma_{ij} = l_{11} l_{21} \sigma_{11} + l_{11} l_{22} \sigma_{12} + l_{12} l_{21} \sigma_{12} + l_{12} l_{22} \sigma_{22} \\
&= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \cos\phi \sin\phi + \sigma_{12} \left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right) \\
\sigma'_{22} &= l_{2i} l_{2j} \sigma_{ij} = l_{21} l_{21} \sigma_{11} + 2 l_{21} l_{22} \sigma_{12} + l_{22} l_{22} \sigma_{22} \\
&= \sigma_{11} \sin^2\phi - 2\sigma_{12} \cos\phi \sin\phi + \sigma_{22} \cos^2\phi \\
\sigma'_{13} &= l_{1i} l_{3j} \sigma_{ij} = l_{11} l_{33} \sigma_{13} + l_{12} l_{33} \sigma_{23} = \sigma_{13} \cos\phi + \sigma_{23} \sin\phi \\
\sigma'_{23} &= l_{2i} l_{3j} \sigma_{ij} = l_{21} l_{33} \sigma_{13} + l_{22} l_{33} \sigma_{23} = -\sigma_{13} \sin\phi + \sigma_{23} \cos\phi \\
\sigma'_{33} &= l_{3i} l_{3j} \sigma_{ij} = l_{33} l_{33} \sigma_{33} = \sigma_{33}
\end{aligned} \tag{17.19}$$

con risultati analoghi per le deformazioni. Si scriva ora *in extenso* la relazione che fornisce σ'_{11}:

$$\sigma'_{11} = c_{1111} e'_{11} + c_{1122} e'_{22} + c_{1133} e'_{33} + 2c_{1112} e'_{12} + 2c_{1113} e'_{13} + 2c_{1123} e'_{23} \tag{17.20}$$

e la si esprima in termini di tensioni σ_{ij} e deformazioni e_{ij}:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} \cos^2\phi + 2\sigma_{12} \cos\phi \sin\phi + \sigma_{22} \sin^2\phi = \\
&\quad c_{1111} \left(e_{11} \cos^2\phi + 2e_{12} \cos\phi \sin\phi + e_{22} \sin^2\phi\right) + \\
&\quad c_{1122} \left(e_{11} \sin^2\phi - 2e_{12} \cos\phi \sin\phi + e_{22} \cos^2\phi\right) + c_{1133} e_{33} + \\
&\quad 2c_{1112} \left((e_{22} - e_{11}) \cos\phi \sin\phi + e_{12} \left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right)\right) + \\
&\quad 2c_{1113} \left(e_{13} \cos\phi + e_{23} \sin\phi\right) + 2c_{1123} \left(-e_{13} \sin\phi + e_{23} \cos\phi\right)
\end{aligned} \tag{17.21}$$

D'altro canto, si ha anche:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= c_{1111} e_{11} + c_{1122} e_{22} + c_{1133} e_{33} + 2c_{1112} e_{12} + 2c_{1113} e_{13} + 2c_{1123} e_{23} \\
\sigma_{22} &= c_{2211} e_{11} + c_{2222} e_{22} + c_{2233} e_{33} + 2c_{2212} e_{12} + 2c_{2213} e_{13} + 2c_{2223} e_{23} \\
\sigma_{12} &= c_{1211} e_{11} + c_{1222} e_{22} + c_{1233} e_{33} + 2c_{1212} e_{12} + 2c_{1213} e_{13} + 2c_{1223} e_{23}
\end{aligned} \tag{17.22}$$

e quindi la (17.21) può esprimersi interamente in termini di deformazioni:

$$
\begin{aligned}
&\left(c_{1111}e_{11} + c_{1122}e_{22} + c_{1133}e_{33} + 2c_{1112}e_{12} + 2c_{1113}e_{13} + 2c_{1123}e_{23}\right)\cos^2\phi + \\
&2\left(c_{1211}e_{11} + c_{1222}e_{22} + c_{1233}e_{33} + 2c_{1212}e_{12} + 2c_{1213}e_{13} + 2c_{1223}e_{23}\right)\cos\phi\sin\phi + \\
&\left(c_{2211}e_{11} + c_{2222}e_{22} + c_{2233}e_{33} + 2c_{2212}e_{12} + 2c_{2213}e_{13} + 2c_{2223}e_{23}\right)\sin^2\phi = \\
&c_{1111}\left(e_{11}\cos^2\phi + 2e_{12}\cos\phi\sin\phi + e_{22}\sin^2\phi\right) + \\
&c_{1122}\left(e_{11}\sin^2\phi - 2e_{12}\cos\phi\sin\phi + e_{22}\cos^2\phi\right) + \\
&c_{1133}e_{33} + 2c_{1112}\left(\left(e_{22} - e_{11}\right)\cos\phi\sin\phi + e_{12}\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right)\right) + \\
&2c_{1113}\left(e_{13}\cos\phi + e_{23}\sin\phi\right) + 2c_{1123}\left(-e_{13}\sin\phi + e_{23}\cos\phi\right)
\end{aligned}
\tag{17.23}
$$

Uguagliando a zero il coefficiente di e_{11} si ottiene:

$$
c_{1211} = 0 \tag{17.24}
$$

Uguagliando a zero il coefficiente di e_{22} si ottiene:

$$
2c_{1222}\cos\phi + c_{2222}\sin\phi = c_{1111}\sin\phi + 2c_{1112}\cos\phi \tag{17.25}
$$

e quindi si può dedurre:

$$
\begin{aligned}
c_{1222} &= c_{1112} \\
c_{2222} &= c_{1111}
\end{aligned}
\tag{17.26}
$$

Uguagliando a zero il coefficiente di e_{33} si ottiene:

$$
c_{1133}\cos^2\phi + 2c_{1233}\cos\phi\sin\phi + c_{2233}\sin^2\phi = c_{1133} \tag{17.27}
$$

ossia:

$$
\begin{aligned}
c_{2233} &= c_{1133} \\
c_{1233} &= 0
\end{aligned}
\tag{17.28}
$$

Uguagliando a zero il coefficiente di e_{12} si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&4c_{1212}\cos\phi\sin\phi + 2c_{2212}\sin^2\phi = \\
&2c_{1111}2\cos\phi\sin\phi - 2c_{1122}\cos\phi\sin\phi - 2c_{1112}\sin^2\phi
\end{aligned}
\tag{17.29}
$$

da cui è possibile dedurre:

$$
\begin{aligned}
c_{1212} &= \frac{1}{2}\left(c_{1111} - c_{1122}\right) \\
c_{2212} &= -c_{1112}
\end{aligned}
\tag{17.30}
$$

e dal confronto con la prima delle (33) si ha anche:

$$
c_{2212} = c_{1112} = 0 \tag{17.31}
$$

Uguagliando a zero il coefficiente di e_{13} si ottiene:

$$c_{1113}\cos^2\phi + 2c_{1213}\cos\phi\sin\phi + c_{2213}\sin^2\phi = c_{1113}\cos\phi - c_{1123}\sin\phi \quad (17.32)$$

e quindi si può dedurre:

$$\begin{aligned} c_{1113} &= 0 \\ c_{1213} &= 0 \\ c_{2213} &= 0 \end{aligned} \quad (17.33)$$

Infine, uguagliando a zero il coefficiente di e_{23} si ottiene:

$$c_{1123}\cos^2\phi + 2c_{1223}\cos\phi\sin\phi + c_{2223}\sin^2\phi = c_{1113}\sin\phi + c_{1123}\cos\phi \quad (17.34)$$

da cui:

$$\begin{aligned} c_{1123} &= 0 \\ c_{1223} &= 0 \\ c_{2223} &= 0 \end{aligned} \quad (17.35)$$

La matrice delle costanti elastiche si è così semplificata:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1122} & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ c_{1133} & c_{1133} & c_{3333} & 0 & c_{3313} & c_{3323} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(c_{1111} - c_{1122}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3313} & 0 & c_{1313} & c_{1323} \\ 0 & 0 & c_{3323} & 0 & c_{1323} & c_{2323} \end{pmatrix} \quad (17.36)$$

Si scriva ora la relazione che lega la σ'_{33} alla σ_{33}:

$$\begin{aligned} &c_{3311}e'_{11} + c_{3322}e'_{22} + c_{3333}e'_{33} + 2c_{3312}e'_{12} + 2c_{3313}e'_{13} + 2c_{3323}e'_{23} = \\ &\quad c_{3311}e_{11} + c_{3322}e_{22} + c_{3333}e_{33} + 2c_{3312}e_{12} + 2c_{3313}e_{13} + 2c_{3323}e_{23} \end{aligned} \quad (17.37)$$

ossia:

$$\begin{aligned} &c_{3311}\left(e_{11}\cos^2\phi + 2e_{12}\cos\phi\sin\phi + e_{22}\sin^2\phi\right) + \\ &c_{3322}\left(e_{11}\sin^2\phi - 2e_{12}\cos\phi\sin\phi + e_{22}\cos^2\phi\right) + c_{3333}e_{33} + \\ &2c_{3312}\left(\left(e_{22} - e_{11}\right)\cos\phi\sin\phi + e_{12}\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right)\right) + \\ &2c_{3313}\left(e_{13}\cos\phi + e_{23}\sin\phi\right) + \\ &2c_{3323}\left(-e_{13}\sin\phi + e_{23}\cos\phi\right) = \\ &c_{3311}e_{11} + c_{3322}e_{22} + c_{3333}e_{33} + 2c_{3312}e_{12} + 2c_{3313}e_{13} + 2c_{3323}e_{23} \end{aligned} \quad (17.38)$$

Annullando i coefficienti di e_{13} si giunge a scrivere:

$$c_{3313}\cos\phi - c_{3323}\sin\phi = c_{3313} \quad (17.39)$$

da cui:

$$
\begin{aligned}
c_{3313} &= 0 \\
c_{3323} &= 0
\end{aligned}
\tag{17.40}
$$

e la matrice delle costanti elastiche si è così ulteriormente semplificata:

$$
\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix}
c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\
c_{1122} & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\
c_{1133} & c_{1133} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(c_{1111} - c_{1122}\right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & c_{1323} \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_{1323} & c_{2323}
\end{pmatrix}
\tag{17.41}
$$

Scrivendo infine la relazione che lega σ'_{13} a σ_{13} si giunge alla forma finale della matrice di elasticità per materiali trasversalmente isotropi. Si ha infatti, da un lato:

$$
\begin{aligned}
& c_{1311}e'_{11} + c_{1322}e'_{22} + c_{1333}e'_{33} + 2c_{1312}e'_{12} + 2c_{1313}e'_{13} + 2c_{1323}e'_{23} = \\
& (c_{1311}e_{11} + c_{1322}e_{22} + c_{1333}e_{33} + 2c_{1312}e_{12} + 2c_{1313}e_{13} + 2c_{1323}e_{23}) \cos\phi + \\
& (c_{2311}e_{11} + c_{2322}e_{22} + c_{2333}e_{33} + 2c_{2312}e_{12} + 2c_{2313}e_{13} + 2c_{2323}e_{23}) \sin\phi
\end{aligned}
\tag{17.42}
$$

ed esprimendo le e'_{ij} in termini di e_{ij}:

$$
\begin{aligned}
& c_{1311}\left(e_{11}\cos^2\phi + 2e_{12}\cos\phi\sin\phi + e_{22}\sin^2\phi\right) + \\
& c_{1322}\left(e_{11}\sin^2\phi - 2e_{12}\cos\phi\sin\phi + e_{22}\cos^2\phi\right) + c_{1333}e_{33} + \\
& 2c_{1312}\left((e_{22} - e_{11})\cos\phi\sin\phi + e_{12}\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right)\right) + \\
& 2c_{1313}\left(e_{13}\cos\phi + e_{23}\sin\phi\right) + 2c_{1323}\left(-e_{13}\sin\phi + e_{23}\cos\phi\right) \\
& = (c_{1311}e_{11} + c_{1322}e_{22} + c_{1333}e_{33} + 2c_{1312}e_{12} + 2c_{1313}e_{13} + 2c_{1323}e_{23}) \cos\phi + \\
& (c_{2311}e_{11} + c_{2322}e_{22} + c_{2333}e_{33} + 2c_{2312}e_{12} + 2c_{2313}e_{13} + 2c_{2323}e_{23}) \sin\phi
\end{aligned}
\tag{17.43}
$$

Annullando il coefficiente di e_{13} si ottiene:

$$
2c_{1313}\cos\phi - 2c_{1323}\sin\phi = 2c_{1313}\cos\phi + 2c_{2313}\sin\phi \tag{17.44}
$$

e quindi:

$$
c_{1323} = 0 \tag{17.45}
$$

mentre l'annullarsi del coefficiente di e_{23} implica:

$$
c_{1313}\sin\phi + c_{1323}\cos\phi = c_{1323}\cos\phi + c_{2323}\sin\phi \tag{17.46}
$$

ossia:

$$
c_{1313} = c_{2323} \tag{17.47}
$$

Si è giunti così alla forma finale della matrice di elasticità per *materiali trasversalmente isotropi*:

$$
\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix}
c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\
c_{1122} & c_{1111} & c_{1133} & 0 & 0 & 0 \\
c_{1133} & c_{1133} & c_{3333} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(c_{1111} - c_{1122}\right) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{1313}
\end{pmatrix} \tag{17.48}
$$

Come si vede, il materiale trasversalmente isotropo può definirsi attraverso l'introduzione di 5 costanti elastiche indipendenti.

17.4 I materiali isotropi

Si è così giunti al caso piú stringente di simmetria, quella posseduta dai materiali indifferenti alla scelta del riferimento. Equivalentemente, si considerano ora i materiali che godono della proprietà di simmetria rotazionale rispetto a due assi mutuamente ortogonali, i cosiddetti *materiali isotropi*. Per essi, un ragionamento identico a quello svolto per il materiale trasversalmente isotropo porta a concludere che dovrà essere:

$$
\begin{aligned}
c_{1313} &= \frac{1}{2}\left(c_{1111} - c_{1122}\right) \\
c_{3333} &= c_{1111} \\
c_{1133} &= c_{1122}
\end{aligned} \tag{17.49}
$$

e quindi il solido isotropo è definito da due costanti elastiche, e dalla matrice di elasticità:

$$
\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix}
c_{1111} & c_{1122} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\
c_{1122} & c_{1111} & c_{1122} & 0 & 0 & 0 \\
c_{1122} & c_{1122} & c_{1111} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{c_{1111} - c_{1122}}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{1111} - c_{1122}}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{1111} - c_{1122}}{2}
\end{pmatrix} \tag{17.50}
$$

E' infine usuale, seguendo Lamè, definire le due costanti elastiche:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= c_{1122} \\
\mu &= \frac{1}{2}\left(c_{1111} - c_{1122}\right)
\end{aligned} \tag{17.51}
$$

da cui subito:

$$
c_{1111} = \lambda + 2\mu \tag{17.52}
$$

e la matrice di elasticità assume la forma canonica:

$$
\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{17.53}
$$

17.5 Le costanti ingegneristiche per i materiali anisotropi

Volendo dedurre i valori delle costanti elastiche, ed assegnare loro un chiaro significato fisico, è possibile assoggettare un provino di materiale a due insiemi di test, in cui viene indotto uno stato tensionale monoassiale di tensione, o uno stato di taglio puro, rispettivamente. Nel primo caso lo stato tensionale sarà del tipo:

$$
\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17.54}
$$

mentre nel secondo insieme di test si avranno stati tensionali del tipo:

$$
\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17.55}
$$

Per materiali anisotropi, in ogni caso sorgeranno sei componenti di deformazione. Per lo stato tensionale (17.54) si potrà misurare la deformazione assiale e_{11}, direttamente proporzionale alla tensione σ_{11} :

$$
e_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} \tag{17.56}
$$

Si è introdotto in tal modo il primo modulo di Young E_{11}. Le altre due deformazioni normali saranno esprimibili come:

$$
\begin{aligned}
e_{12} &= -\nu_{12} e_{11} = -\nu_{12}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}} \\
e_{13} &= -\nu_{13} e_{11} = -\nu_{13}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}}
\end{aligned} \tag{17.57}
$$

introducendo i due coefficienti di Poisson ν_{12} e ν_{13}. Infine, sorgeranno le tre deformazioni tangenziali, che potranno misurarsi attraverso i rispettivi angoli taglianti:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{12} &= \eta_{11,12} e_{11} = \eta_{11,12}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}} \\
\gamma_{13} &= \eta_{11,13} e_{11} = \eta_{11,13}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}} \\
\gamma_{23} &= \eta_{11,23} e_{11} = \eta_{11,23}\frac{\sigma_{11}}{E_{11}}
\end{aligned} \tag{17.58}
$$

Si sono introdotti i *coefficienti di influenza mutua del secondo tipo* $\eta_{11,12}$, $\eta_{11,13}$ ed $\eta_{11,23}$. Essi sono definiti da quattro indici, la prima coppia si riferisce alla tensione applicata, la seconda coppia all'angolo tagliante che si sta misurando.

Ripetendo il test per gli altri due stati monoassiali di tensione lungo X_2 ed X_3, si possono misurare altri due moduli di Young E_{22} ed E_{33}, altri quattro coefficienti di Poisson ν_{21}, ν_{23} e ν_{31}, ν_{32}, ed altri sei coefficienti di influenza mutua del secondo tipo $\eta_{22,12}$, $\eta_{22,13}$, $\eta_{22,23}$ e $\eta_{33,12}$, $\eta_{33,13}$, $\eta_{33,23}$.

Passando ai test di taglio, si supponga di partire dallo stato tensionale (17.55). Per esso, è immediato calcolare il corrispondente angolo tagliante:

$$\gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \tag{17.59}$$

introducendo il primo modulo a taglio G_{12}. Gli altri due angoli taglianti saranno definiti attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned} \gamma_{13} &= \mu_{12,13}\gamma_{12} = \mu_{12,13}\frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \\ \gamma_{23} &= \mu_{12,23}\gamma_{12} = \mu_{12,23}\frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \end{aligned} \tag{17.60}$$

definendo i due *coefficienti di Chentsov* $\mu_{12,13}$ e $\mu_{12,23}$. Anch'essi sono definiti da quattro indici, la prima coppia si riferisce alla tensione applicata, la seconda coppia all'angolo tagliante che si sta misurando. Infine, in un materiale anisotropo una tensione tangenziale causerà anche deformazioni normali, che potranno essere definite attraverso l'introduzione dei *coefficienti di influenza mutua del primo tipo*:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \eta_{12,11}\gamma_{12} = \eta_{12,11}\frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \\ e_{22} &= \eta_{12,22}\gamma_{12} = \eta_{12,22}\frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \\ e_{33} &= \eta_{12,33}\gamma_{12} = \eta_{12,33}\frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \end{aligned} \tag{17.61}$$

In definitiva, il materiale anisotropo è interamente caratterizzato quando si siano misurate le trentasei quantità:

— tre moduli di Young E_{11}, E_{22}, E_{33}

— tre moduli a taglio G_{12}, G_{13}, G_{23}

— sei coefficienti di Poisson ν_{12}, ν_{13}, ν_{21}, ν_{23}, ν_{31}, ν_{32}

— nove coefficienti di influenza mutua del secondo tipo:

$$\begin{matrix} \eta_{11,12} & \eta_{11,13} & \eta_{11,23} \\ \eta_{22,12} & \eta_{22,13} & \eta_{22,23} \\ \eta_{33,12} & \eta_{33,13} & \eta_{33,23} \end{matrix}$$

— nove coefficienti di influenza mutua del secondo tipo:

$\eta_{12,11}$ $\eta_{12,22}$ $\eta_{12,33}$
$\eta_{13,11}$ $\eta_{13,22}$ $\eta_{13,33}$
$\eta_{23,11}$ $\eta_{23,22}$ $\eta_{23,33}$

— sei coefficienti di Chentsov:

$\mu_{12,13}$ $\mu_{12,23}$
$\mu_{13,12}$ $\mu_{13,23}$
$\mu_{23,12}$ $\mu_{23,13}$

La legge di Hooke in termini di costanti ingegneristiche

Utilizzando il principio di sovrapposizione degliu effetti, si potrà scrivere:

$$
\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} - \frac{\nu_{21}}{E_{22}}\sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_{33}}\sigma_{33} + \frac{\eta_{12,11}}{G_{12}}\sigma_{12} + \frac{\eta_{13,11}}{G_{13}}\sigma_{13} + \frac{\eta_{23,11}}{G_{23}}\sigma_{23} \\
e_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}}\sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} - \frac{\nu_{32}}{E_{33}}\sigma_{33} + \frac{\eta_{12,22}}{G_{12}}\sigma_{12} + \frac{\eta_{13,22}}{G_{13}}\sigma_{13} + \frac{\eta_{23,22}}{G_{23}}\sigma_{23} \\
e_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_{11}}\sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_{22}}\sigma_{22} + \frac{\sigma_{33}}{E_{33}} + \frac{\eta_{12,33}}{G_{12}}\sigma_{12} + \frac{\eta_{13,33}}{G_{13}}\sigma_{13} + \frac{\eta_{23,33}}{G_{23}}\sigma_{23} \\
\gamma_{12} &= \frac{\eta_{11,12}}{E_{11}}\sigma_{11} + \frac{\eta_{22,12}}{E_{22}}\sigma_{22} + \frac{\eta_{33,12}}{E_{33}}\sigma_{33} + \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} + \frac{\mu_{13,12}}{G_{13}}\sigma_{13} + \frac{\mu_{23,12}}{G_{23}}\sigma_{23} \\
\gamma_{13} &= \frac{\eta_{11,13}}{E_{11}}\sigma_{11} + \frac{\eta_{22,13}}{E_{22}}\sigma_{22} + \frac{\eta_{33,13}}{E_{33}}\sigma_{33} + \frac{\mu_{12,13}}{G_{12}}\sigma_{12} + \frac{\sigma_{13}}{G_{13}} + \frac{\mu_{23,13}}{G_{23}}\sigma_{23} \\
\gamma_{23} &= \frac{\eta_{11,23}}{E_{11}}\sigma_{11} + \frac{\eta_{22,23}}{E_{22}}\sigma_{22} + \frac{\eta_{33,23}}{E_{33}}\sigma_{33} + \frac{\mu_{12,23}}{G_{12}}\sigma_{12} + \frac{\mu_{13,23}}{G_{13}}\sigma_{13} + \frac{\sigma_{23}}{G_{23}}
\end{aligned}
\tag{17.62}
$$

da cui le relazioni di simmetria:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\nu_{21}}{E_{22}} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} \\
-\frac{\nu_{31}}{E_{33}} &= -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} \\
\frac{\eta_{12,11}}{G_{12}} &= \frac{\eta_{11,12}}{E_{11}} \\
\frac{\eta_{13,11}}{G_{13}} &= \frac{\eta_{11,13}}{E_{11}} \\
\frac{\eta_{23,11}}{G_{23}} &= \frac{\eta_{11,23}}{E_{11}} \\
-\frac{\nu_{32}}{E_{33}} &= -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} \\
\frac{\eta_{12,22}}{G_{12}} &= \frac{\eta_{22,12}}{E_{22}} \\
\frac{\eta_{13,22}}{G_{13}} &= \frac{\eta_{22,13}}{E_{22}}
\end{aligned}
\tag{17.63}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\eta_{23,22}}{G_{23}} &= \frac{\eta_{22,23}}{E_{22}} \\
\frac{\eta_{12,33}}{G_{12}} &= \frac{\eta_{33,12}}{E_{33}} \\
\frac{\eta_{13,33}}{G_{13}} &= \frac{\eta_{33,13}}{E_{33}} \\
\frac{\eta_{23,33}}{G_{23}} &= \frac{\eta_{33,23}}{E_{33}} \\
\frac{\mu_{13,12}}{G_{13}} &= \frac{\mu_{12,13}}{G_{12}} \\
\frac{\mu_{23,12}}{G_{23}} &= \frac{\mu_{12,23}}{G_{12}} \\
\frac{\mu_{23,13}}{G_{23}} &= \frac{\mu_{13,23}}{G_{13}}
\end{aligned}
\tag{17.64}
$$

Capitolo 18

Il solido isotropo

Si è visto che le costanti elastiche previste dalla teoria di Green sono, in generale, 21. Non sembra possibile ridurre questo numero, se non introducendo particolari ipotesi sul comportamento del materiale. D'altro canto, un sempre maggior numero di prodotti industriali viene appositamente costruito con particolari fibre e direzioni privilegiate, ed anche parecchi prodotti naturali, come il legno, mostrano spiccate proprietà di *simmetria* Per tali materiali si può mostrare che il numero di costanti elastiche diminuisce, e più stringenti sono le proprietà di simmetria esibite, più piccolo sarà il numero delle costanti. Così, un materiale che abbia un solo piano di simmetria (i cosiddetti materiali *monoclini*) può definirsi con 13 costanti elastiche, un materiale che abbia due piani di simmetria ortogonali (i materiali *ortotropi*) abbisogna di 9 costanti elastiche, un materiale che abbia una proprietà di simmetria di rotazione intorno ad un asse (i materiali *trasversalmente isotropi*) può essere definito con 5 costanti. Un caso, tuttavia, merita particolare attenzione, e ad esso è dedicato il presente capitolo, il caso più stringente di tutti, quello in cui si abbia simmetria rotazionale intorno a due assi ortogonali tra loro: non esistono direzioni privilegiate, ed il materiale si dice *isotropo*.

18.1 Legge di Hooke per materiale isotropo

Si è già dimostrato nel Capitolo precedente che, nel caso di un materiale linearmente elastico ed isotropo, le costanti elastiche si riducono a due. Ed infatti, in ipotesi di isotropia, la scelta degli assi coordinati diviene arbitraria, e si può convenientemente orientare la terna di riferimento secondo gli assi principali di deformazione. In tal caso il potenziale elastico si esprime:

$$
\begin{aligned}
&\phi = \frac{1}{2}c_{ijhk}e_{ij}e_{hk} = \frac{1}{2}c_1e_1^2 + \frac{1}{2}c_2e_2^2 + \frac{1}{2}c_3e_3^2 + \\
&\frac{1}{2}d_1e_1e_2 + \frac{1}{2}d_2e_1e_3 + \frac{1}{2}d_3e_2e_3 + \frac{1}{2}d_4e_1e_2 + \frac{1}{2}d_5e_1e_3 + \frac{1}{2}d_6e_2e_3
\end{aligned}
\tag{18.1}
$$

e poichè per la simmetria la numerazione degli assi è ininfluente, si ha $c_1 = c_2 = c_3 = c$ ed anche $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d$. Il potenziale elastico si riduce quindi a:

$$\phi = \frac{c}{2}\left(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2\right) + \frac{d}{2}\left(2e_1e_2 + 2e_1e_3 + 2e_2e_3\right) \tag{18.2}$$

che può anche riscriversi come:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{d}{2}\left(e_1 + e_2 + e_3\right)^2 + \frac{c-d}{2}\left(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2\right) \\ &= \frac{\lambda}{2}\left(e_1 + e_2 + e_3\right)^2 + \mu\left(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2\right) \end{aligned} \tag{18.3}$$

riottenendo i due coefficienti di Lamè λ e μ. Si esprime ora il potenziale in funzione degli invarianti di deformazione:

$$\begin{aligned} I_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ I_2 &= e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 \end{aligned} \tag{18.4}$$

A tal fine si osservi preliminarmente che:

$$I_1^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + 2e_1e_2 + 2e_1e_3 + 2e_2e_3 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + 2I_2 \tag{18.5}$$

e che quindi:

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = I_1^2 - 2I_2 \tag{18.6}$$

Ne segue che la richiesta espressione di ϕ in termini di invarianti è:

$$\phi = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu\left(I_1^2 - 2I_2\right) = \left(\frac{\lambda}{2} + G\right)I_1^2 - 2\mu \mathrm{I}_2 \tag{18.7}$$

In un riferimento arbitrario, quindi, il potenziale si scrive come:

$$\begin{aligned} \phi = &\left(\frac{\lambda}{2} + G\right)\left(e_{11} + e_{22} + e_{33}\right)^2 - \\ &2\mu\left(e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{22}e_{33} - 2e_{12}^2 - 2e_{13}^2 - 2e_{23}^2\right) \end{aligned} \tag{18.8}$$

e le leggi di Green forniscono le tensioni:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial\phi}{\partial e_{11}} = \lambda\left(e_{11} + e_{22} + e_{33}\right) + 2\mu e_{11} \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial\phi}{\partial e_{22}} = \lambda\left(e_{11} + e_{22} + e_{33}\right) + 2\mu e_{22} \\ \sigma_{33} &= \frac{\partial\phi}{\partial e_{33}} = \lambda\left(e_{11} + e_{22} + e_{33}\right) + 2\mu e_{33} \\ \sigma_{12} &= \frac{\partial\phi}{\partial e_{12}} = 2\mu e_{12} \\ \sigma_{13} &= \frac{\partial\phi}{\partial e_{13}} = 2\mu e_{13} \\ \sigma_{23} &= \frac{\partial\phi}{\partial e_{23}} = 2\mu e_{23} \end{aligned} \tag{18.9}$$

ossia, matricialmente :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{13} \\ 2e_{23} \end{pmatrix} \tag{18.10}$$

o, indicialmente:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}\lambda e_{kk} \tag{18.11}$$

Le relazioni (18.9) possono invertirsi, a fornire le deformazioni in funzione delle tensioni. Ed infatti, sommando membro a membro le prime tre equazioni — o, equivalentemente, contraendo gli indici i e j nella (18.11) — si giunge ad una relazione tra gli invarianti lineari di tensione e di deformazione:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (3\lambda + 2\mu)\left(e_{11} + e_{22} + e_{33}\right) \tag{18.12}$$

ossia:

$$e_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu} \tag{18.13}$$

Utilizzando la (18.13) è immediato dedurre, dalla (18.11), la *legge di Hooke inversa*:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{kk}\right) \tag{18.14}$$

o, per esteso:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)\right) \\ e_{22} &= \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{22} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)\right) \\ e_{33} &= \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{33} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)\right) \\ e_{12} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{12} \\ e_{13} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{13} \\ e_{23} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{23} \end{aligned} \tag{18.15}$$

Nota – Sorge una seconda discrepanza tra la teoria molecolare, che prevede di caratterizzare il corpo isotropo con una singola costante elastica, e la teoria energetica, che abbisogna di due costanti indipendenti[1]. Anche in questo caso, e con più decisione, gli esperimenti indicano che la teoria energetica è nel giusto.

[1]Che il solido isotropo linearmente elastico possa essere definito tramite due costanti può essere provato anche dal seguente, sintetico ragionamento. Nel caso isotropo anche il potenziale

Nota – Affinchè non si abbiano deformazioni infinite in presenza di tensioni finite, bisognerà che sia μ che $3\lambda + 2\mu$ siano diverse da zero, ed in realtà si presupporrà che ambedue queste quantità siano strettamente positive.

Nota – Il coefficiente μ viene anche detto G, ed in questo caso si chiama *modulo di resistenza a taglio*, per i motivi che si esporranno nel prossimo paragrafo.

Per i solidi isotropi, è possibile dimostrare il seguente, importante

Teorema 7. *In un solido isotropo, le direzioni principali di deformazione coincidono con le direzioni principali di tensione*

Dimostrazione. Ipotizzando di calcolare le deformazioni in un sistema di riferimento in cui gli assi coincidono con le direzioni principali di deformazione, si ha, per definizione, l'annullarsi delle componenti taglianti e_{ij}, $i \neq j$. Applicando la legge di Hooke per materiali isotropi (18.11) si calcolano le tensioni e si ottiene $\sigma_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Ciò significa appunto che le tensioni sono calcolate in un sistema di riferimento in cui gli assi coincidono con le direzioni principali di tensione. $\square$

18.2 Modulo di Young e coefficiente di Poisson

Il secondo coefficiente di Lamè μ può essere suscettibile di una semplice interpretazione fisica: esso rappresenta il rapporto tra la tensione tangenziale generica e la corrispondente variazione angolare. Non altrettanto può dirsi per la prima costante di Lamè λ.

Sorge così la convenienza di definire in modo opportuno altre due costanti elastiche indipendenti, che siano più facili da determinare tramite semplici esperimenti. A tal fine, si consideri una barra di acciaio, vincolata all'estremo di sinistra, e soggetta ad una forza di trazione all'estremo di destra. Si ha uno stato di tensione, all'interno del corpo, in cui solo una tensione normale è diversa da zero, ad esempio la σ_{11}, mentre le tensioni tangenziali sono tutte nulle.

---

elastico dovrà essere insensibile alla rotazione degli assi, e quindi può ipotizzarsi che esso sia funzione dei tre invarianti di deformazione:

$$\phi = \phi\left(I_1, I_2, I_3\right) \tag{18.16}$$

e poichè il potenziale deve essere una forma quadratica delle deformazioni, dovrà essere necessariamente:

$$\phi = C_0 I_1^2 + C_1 I_2 \tag{18.17}$$

Più laborioso, come visto, è il cammino per giungere alla effettiva forma della matrice di elasticità

Dalle (18.15) si ottiene il corrispondente stato deformativo:

$$
\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{11} \doteq \frac{\sigma_{11}}{E} \\
e_{22} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{11} \doteq -\frac{\nu\sigma_{11}}{E} \\
e_{33} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{11} \doteq -\frac{\nu\sigma_{11}}{E} \\
e_{12} &= e_{13} = e_{23} = 0
\end{aligned}
\tag{18.18}
$$

La prima costante, E, si chiama *modulo di Young*[2] , o *modulo di elasticità longitudinale*, e può facilmente interpretarsi come il rapporto tra la tensione monoassiale applicata e la conseguente dilatazione specifica lungo la direzione di tensione. Esso ha quindi le stesse dimensioni fisiche di una tensione, ossia forza su unità di superficie.

Figura 18.1: Thomas Young

[2]The so–called "Young modulus" was invented almost a hundred years earlier by Euler as a boy of nineteen, studying mathematics under John Bernoulli's direction. It was invented for a definite reason: Euler tried to derive James Bernoulli's law of bending of a beam from Hooke's law of extension for the longitudinal fibres. [...] To solve this problem, as Euler did, it is *mathematically necessary* to introduce a measure of elasticity that represents a material property, independent of the size of the specimen. When we look into the details, we find that Young, despite all his talk about "useful knowledge", bungled by defining the modulus as the ratio of force to strain, as had nearly everyone else for a century before him, thus obtaining a quantity that varies from specimen to specimen of the same material.

C.A.Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, Springer 1968, pagg.318–319

La seconda costante, ν, si chiama *coefficiente di Poisson*, o *coefficiente di contrazione laterale,* e misura il rapporto tra la contrazione laterale e l'allungamento assiale. Come tale, esso è un numero puro.

18.3 Relazione tra i moduli di Lamè ed i moduli ingegneristici

Dalle (18.18) si ricava subito:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{aligned} \tag{18.19}$$

e di conseguenza, se si conoscono i valori dei due moduli di Lamè, possono immediatamente conoscersi anche i valori delle costanti ingegneristiche.

Le relazioni precedenti, poi, possono invertirsi, giungendo a:

$$\begin{aligned} \mu = G &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \end{aligned} \tag{18.20}$$

Inserendo queste relazioni nella legge di Hooke (18.11) si giunge all'espressione in termini di costanti ingegneristiche:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1 + \nu} e_{11} + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left(e_{11} + e_{22} + e_{33}\right) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1 + \nu} e_{22} + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left(e_{11} + e_{22} + e_{33}\right) \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} e_{33} + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left(e_{11} + e_{22} + e_{33}\right) \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1 + \nu} e_{12} \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{1 + \nu} e_{13} \\ \sigma_{23} &= \frac{E}{1 + \nu} e_{23} \end{aligned} \tag{18.21}$$

o anche:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} e_{ij} + \delta_{ij} \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e_{kk} \tag{18.22}$$

mentre la legge di Hooke inversa (18.15) si semplifica in:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E} \left((1 + \nu)\sigma_{11} - \nu \left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right) \\ e_{22} &= \frac{1}{E} \left((1 + \nu)\sigma_{22} - \nu \left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e_{33} &= \frac{1}{E}\left((1+\nu)\sigma_{33} - \nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)\right)\\
e_{12} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}\\
e_{13} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{13}\\
e_{23} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23}
\end{aligned}
\tag{18.23}
$$

o anche, indicialmente:

$$
e_{ij} = \frac{1}{E}\left((1+\nu)\sigma_{ij} - \delta_{ij}\nu\sigma_{kk}\right) \tag{18.24}
$$

con matrice di elasticità inversa $\mathbf{A}$ fornita da:

$$
\boldsymbol{A} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix}
1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0\\
-\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0\\
-\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu)
\end{pmatrix} \tag{18.25}
$$

18.4 Limitazioni sulle costanti elastiche

Da un punto di vista fisico, le due costanti ingegneristiche hanno un significato tale da far ipotizzare subito che ambedue possano assumere solo valori positivi. Ed infatti ben strano sarebbe un materiale che soggetto ad una trazione si accorciasse, o che compresso si allungasse. Analogamente, sarebbe difficile immaginare un materiale che nel mentre si allunga in direzione dello sforzo, contemporaneamente viene ad allargarsi in direzione ortogonale[3]. Comunque, da un punto di vista matematico, si può ragionevolmente ipotizzare che la matrice di elasticità $\boldsymbol{C}$, e quindi anche la sua inversa $\boldsymbol{A}$, sia definita positiva. Ne segue che il determinante di $\boldsymbol{A}$, e tutti i suoi minori principali, devono essere positivi, e stante la struttura della matrice $\boldsymbol{A}$, le condizioni che si ottengono sono le seguenti:

minore di ordine uno

$$
\frac{1}{E} > 0 \tag{18.26}
$$

e quindi si ritrova che il modulo di Young deve essere positivo,

minore di ordine due

$$
\det\left(\frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & -\nu\\ -\nu & 1\end{pmatrix}\right) = \frac{1-\nu^2}{E} > 0 \tag{18.27}
$$

e quindi ν dovrà essere compreso tra -1 ed 1, ed infine:

[3]Solo recentemente, si è giunti a produrre materiali con ν negativo, i cosiddetti *materiali auxetici*, ma di essi non ci occuperemo, in quanto non rappresentano materiali da costruzione

minore di ordine tre

$$\det\left(\frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{(1+\nu)^2(1-2\nu)}{E} > 0 \tag{18.28}$$

da cui segue che ν deve essere minore di 1/2.

In definitiva, da un punto di vista prettamente matematico, l'ipotesi che la matrice di elasticità sia definita positiva ha condotto alle seguenti limitazioni:

$$E > 0 \tag{18.29}$$

$$-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \tag{18.30}$$

Sperimentalmente, la prima di queste relazioni è pienamente confermata, mentre la seconda viene talvolta ristretta in:

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \tag{18.31}$$

Nel seguito sono riportati i valori di E (in $kg\left/cm^2\right.$) e di ν per alcuni materiali di uso comune. Come si vede, l'intervallo dei valori è notevolmente ampio, per ambedue le costanti.

Materiale	E	ν
Conglomerato cementizio	200000÷ 400000	0.10÷ 0.16
Granito	500000÷ 600000	0.10÷ 0.20
Vetro	600000÷ 800000	0.25
Caucciù	10÷ 80	0.5
Acciai	2100000÷ 2200000	0.25÷ 0.33
Alluminio	670000÷ 700000	0.36

Capitolo 19

L'equilibrio elastico

I primi Capitolo sono stati dedicati all'analisi della tensione, giungendo ad enunciare le equazioni indefinite dell'equilibrio in termini di tensioni. Nei successivi Capitoli, invece, si sono studiate le deformazioni, giungendo a definire le equazioni di compatibilità. Infine, negli ultimi Capitoli si sono illustrati alcuni legami tra tensioni e deformazioni.

E' giunto il momento di conglobare quanto si è dedotto in una sola, grande sintesi.

19.1 I problemi ai limiti dell'elasticità

Il *problema misto della teoria dell'elasticità* può enunciarsi come segue:
– Si abbia un corpo isotropo B, costituito da materiale linearmente elastico, e sia ∂B la sua frontiera. Su una porzione di frontiera, sia essa ∂B_1, siano assegnate le forze superficiali $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$, mentre sulla restante parte di frontiera ∂B_2 siano assegnati gli spostamenti $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$. Inoltre, siano $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)$ le forze di massa agenti in B.

Occorre ricercare gli spostamenti $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, le deformazioni e_{ij} e le tensioni σ_{ij} che in ciascun punto del corpo B soddisfano:

1. le *tre* condizioni di equilibrio:
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \tag{19.1}$$
2. le *sei* condizioni di congruenza, che legano le deformazioni alle derivate degli spostamenti:
$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{19.2}$$
3. le *sei* equazioni costitutive, che legano le deformazioni alle tensioni in ipotesi di solido isotropo e linearmente elastico:
$$\sigma_{ij} = 2\mu \mathrm{e}_{ij} + \delta_{ij}\lambda e_{kk} \tag{19.3}$$

Inoltre, sulla frontiera ∂B_1 devono essere soddisfatte le condizioni di equilibrio ai limiti:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \tag{19.4}$$

mentre sulla parte di frontiera ∂B_2 gli spostamenti devono rispettare i vincoli:

$$u_i = f_i \tag{19.5}$$

Come si vede, esistono quindici equazioni in quindici incognite; si ha la possibilità di far scomparire deformazioni e tensioni, giungendo a definire tre equazioni nelle tre componenti di spostamento, oppure si può far scomparire spostamenti e deformazioni, giungendo a definire sei equazioni nelle sei componenti di tensioni. Solo la prima via sarà illustrata in qualche dettaglio, mentre per la seconda via si rimanda ad un qualsiasi trattato di Scienza delle Costruzioni

19.2 Le equazioni di Navier–Cauchy

Si parta dalle (19.3), e si utilizzino le (19.2), scrivendo:

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{19.6}$$

e derivando rispetto ad x_j, supponendo il corpo omogeneo:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial u_j^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \delta_{ij} \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_j} \tag{19.7}$$

Si osservi che ora si è anche implicitamente assunta la sommatoria sull'indice j. La (19.1) diviene allora, tenendo conto delle proprietà del δ di Kronecker:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial u_j^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + X_i = 0 \tag{19.8}$$

e rinominando da k a j l'indice dell'ultimo termine:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial u_j^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + X_i = 0 \tag{19.9}$$

ossia:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda + \mu) \frac{\partial u_j^2}{\partial x_i \partial x_j} + X_i = 0 \tag{19.10}$$

Per esteso, si ottiene:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + X_1 = 0$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right)+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3}\right)+X_2=0$$
$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right)+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right)+X_3=0 \tag{19.11}$$

Siamo quindi giunti ad un sistema di tre equazioni differenziali alle derivate parziali[1], nelle tre incognite u_i, cui va associata su ∂B_1 la condizione ai limiti (19.4), in cui ovviamente le tensioni siano espresse in termini di spostamento. Utilizzando a tal fine le (19.3) e poi le (19.2) si ha subito:

$$p_i=\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)n_j \tag{19.12}$$

Sulla restante parte di frontiera ∂B_2, invece, le condizioni ai limiti restano le (19.5).

E' quasi sempre impossibile, e sempre difficoltoso, risolvere questo problema ai limiti analiticamente, mentre più agevole risulta la sua soluzione numerica.

19.2.1 Le equazioni di Navier–Cauchy in notazione matriciale

Utilizzando un formalismo matriciale, è possibile dimostrare le equazioni di Cauchy-Navier in modo molto più sintetico, e nelle più generali ipotesi di anisotropia. Si scrivano infatti le equazioni indefinite dell'equilibrio (19.1) nella forma già utilizzata nella (9.15) del Capitolo 9:

$$\boldsymbol{\delta\sigma}+\boldsymbol{X}=\mathbf{0} \tag{19.13}$$

avendo introdotto la matrice degli operatori differenziali (cfr. 9.16):

$$\boldsymbol{\delta}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix} \tag{19.14}$$

[1] Queste equazioni furono dedotte originariamente da Navier nel 1821, e poi da lui stesso pubblicate nel 1823, sotto forma di abstract, ed infine nel 1827, *Memoire sur les lois de l'equilibre et du mouvement des corps solides elastiques*, Mem. Acad. Sci.Inst.France, 7, 375–393. Tuttavia, Navier accettava la teoria molecolare, secondo cui $\lambda=\mu$. Nella loro forma attuale, le equazioni rimontano a Cauchy, *Sur les equations qui expriment les conditions d'equilibre ou les lois du mouvement interieur d'un corps solide, elastique ou non elastique*, Ex. de Math, 3, 160–187 (1828), Poisson, *Memoire sur l'equilibre et le muovement des corps elastiques,* Mem. Acad. Sci. Inst. France (2), 8, 357–570 (1829) e Lamè–Clapeyron, *Memoire sur l'equilibre des corps solides homogenes,* Mem. Divers Savants Acad. Sci. Paris (2), 4, 465–562 (1833), e sono pertanto note come equazioni di Cauchy, o anche equazioni di Lamè, o di Lamè–Cauchy, ed infine anche di Navier–Cauchy.

Le equazioni (19.2) possono sintetizzarsi, come può facilmente verificarsi, in:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{u} \tag{19.15}$$

Infine, le equazioni costitutive (19.3) si scrivono:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Ce} \tag{19.16}$$

con $\boldsymbol{C}$ matrice di elasticità fornita — in ipotesi di isotropia — da:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{19.17}$$

Inserendo la (19.15) nella (19.16) si ottiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{u} \tag{19.18}$$

e dalla (19.13) si giunge subito alle richieste equazioni di Cauchy–Navier in forma matriciale:

$$\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{X} = \mathbf{0} \tag{19.19}$$

Svolgendo il triplo prodotto matriciale si giunge alle (19.10).

Figura 19.1: Claude–Louis Navier

19.3 Il principio di sovrapposizione

Sfruttando la linearità delle equazioni di Navier–Cauchy, è possibile dimostrare il seguente:

Teorema 8. *(Principio di sovrapposizione) - Si consideri un corpo B, soggetto alle forze superficiali $\boldsymbol{p}$ ed alle forze di massa $\boldsymbol{X}$. Siano $\boldsymbol{\sigma}$ le tensioni provocate da questo insieme di forze. Sia poi $\boldsymbol{p'}$ e $\boldsymbol{X'}$ un secondo insieme di forze, che provoca le tensioni $\boldsymbol{\sigma'}$. Se sul corpo agiscono contemporaneamente ambedue gli insiemi di forze esterne, allora le tensioni nel corpo saranno pari a $\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma'}$.*

19.4 Il principio di unicità

Formalizzato il problema ai limiti misto dell'elasticità, occorre chiedersi: esiste una soluzione a questo problema? e se esiste, è unica? Citando da G. Fichera, *Problemi analitici nuovi nella fisica matematica classica*, CNR (1985), p.16:

> La dimostrazione dei teoremi di esistenza per i problemi della Statica elastica ha severamente impegnato, a partire dalla fine del secolo scorso, gli analisti.

Non ci addentreremo, pertanto, in ragionamenti e teoremi di tipo puramente matematico, rimandando il lettore all'esposizione dettagliata contenuta nel lungo lavoro di G. Fichera *Existence Theorems in Elasticity*, Handbuch der Physik, Vol. VIa/2. Springer, pp. 347–389,(1972).

Relativamente più facili sono i problemi di unicità, potendosi dimostrare il fondamentale:

Teorema 9. *(Principio di unicità di Kirchhoff) - Le soluzioni del problema misto dell'elasticità differiscono tra loro al più per uno spostamento rigido. Se inoltre la parte di frontiera su cui sono assegnati gli spostamenti è non vuota, allora il problema misto ha al più una soluzione*

Dimostrazione. Siano infatti $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{u})$ e $(\boldsymbol{\sigma'}, \boldsymbol{e'}, \boldsymbol{u'})$ due diverse soluzioni del problema misto ai limiti. Per il primo insieme di tensioni, dovrà essere:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \tag{19.20}$$

con le condizioni ai limiti su ∂B_1:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \tag{19.21}$$

e su ∂B_2 :

$$u_i = f_i \tag{19.22}$$

Analogamente, per la seconda soluzione si ha:

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \tag{19.23}$$

Fig. 156. G. R. Kirchhoff.

Figura 19.2: Gustav R. Kirchhoff

$$p_i = \sigma'_{ij} n_j \tag{19.24}$$

$$u'_i = f_i \tag{19.25}$$

Sottraendo membro a membro le (19.20) dalle (19.23) si ha:

$$\frac{\partial \left(\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}\right)}{\partial x_i} = 0 \tag{19.26}$$

ed analogamente, per le condizioni ai limiti:

$$0 = \left(\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}\right) n_i \tag{19.27}$$

$$u'_i - u_i = 0 \tag{19.28}$$

Si è quindi definito un problema ai limiti per un corpo in equilibrio sotto forze di massa nulle e forze superficiali nulle su ∂B_1, e con spostamenti nulli sulla frontiera ∂B_2. In tale situazione il potenziale elastico non potrà che essere nullo, e poichè il potenziale elastico è una forma quadratica definita positiva, nulle dovranno essere tutte le sue componenti di tensioni e di deformazione:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} \tag{19.29}$$

$$e'_{ij} = e_{ij} \tag{19.30}$$

mentre gli spostamenti, proporzionali alle derivate prime delle deformazioni, potranno differire tra loro al più di un moto rigido. □

Capitolo 20

Stati piani di tensione e spostamento

Si è visto, nella lezione precedente, che la soluzione del problema ai limiti dell'elasticità non sempre è perseguibile analiticamente; esistono tuttavia alcuni casi particolari in cui possono effettuarsi interessanti sviluppi analitici. A questi casi è dedicata la presente lezione, in cui viene introdotta la più semplice funzione di tensione, la funzione di Airy, che permette la soluzione di alcuni importanti esempi strutturali.

20.1 Stati monoassiali di tensione

Un corpo B, per definizione, è in *stato monoassiale di tensione*, se in ciascun punto del corpo le tensioni assumono la forma:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{20.1}$$

ed inoltre l'unica componente non nulla di tensione è funzione della sola coordinata x_3:

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}\left(x_3\right) \tag{20.2}$$

Si ha quindi la situazione di Figura 20.1

Le direzioni principali di tensione sono l'asse X_3 e qualsiasi coppia di rette nel piano (X_1, X_2).

Siano per ipotesi nulle le forze di massa, sicchè le prime due equazioni indefinite dell'equilibrio sono identicamente nulle, mentre la terza si riduce a:

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \tag{20.3}$$

da cui subito:

$$\sigma_{33} = \sigma_0 = \text{costante} \tag{20.4}$$

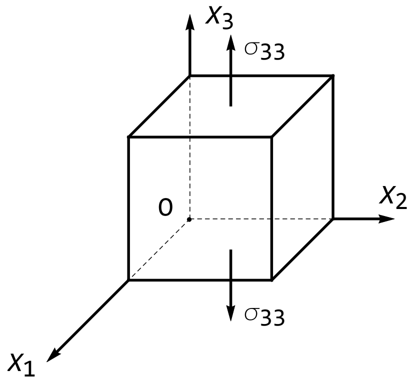


Figura 20.1: Stato monoassiale di tensione

Dalle tensioni può ricavarsi lo stato deformativo, utilizzando la legge di Hooke per materiali omogenei ed isotropi. Sarà:

$$\begin{aligned}
&e_{11} = e_{22} = -\frac{\nu}{E}\sigma_0 \\
&e_{33} = \frac{\sigma_0}{E} \\
&e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0
\end{aligned} \tag{20.5}$$

Infine, gli spostamenti si ottengono integrando il sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_0 \\
\frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_0 \\
\frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{\sigma_0}{E} \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= 0 \\
\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= 0
\end{aligned} \tag{20.6}$$

Dalle prime tre relazioni si trae:

$$\begin{aligned}
&u_1 = -\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_1 + \phi_1\left(x_2, x_3\right) \\
&u_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_2 + \phi_2\left(x_1, x_3\right) \\
&u_3 = \frac{\sigma_0}{E} x_3 + \phi_3\left(x_1, x_2\right)
\end{aligned} \tag{20.7}$$

e dalle seconde tre:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}=0\\
&\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial \phi_3}{\partial x_1}=0\\
&\frac{\partial \phi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial \phi_3}{\partial x_2}=0
\end{aligned}
\tag{20.8}
$$

Poichè sarà anche, ovviamente:

$$
\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}=\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}=\frac{\partial \phi_3}{\partial x_3}=0 \tag{20.9}
$$

ne segue che il campo di spostamenti $\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$ rappresenta un moto rigido. Se i vincoli sono tali da eliminare gli spostamenti rigidi, infine, si ha:

$$
\begin{aligned}
&u_1=u_1\left(x_1\right)=-\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_1\\
&u_2=u_2\left(x_2\right)=-\frac{\nu}{E}\sigma_0 x_2\\
&u_3=u_3\left(x_3\right)=\frac{\sigma_0}{E}x_3
\end{aligned}
\tag{20.10}
$$

Nota - E' questo lo stato tensionale che si è utilizzato per definire le due costanti ingegneristiche E e ν.

20.2 Stati monoassiali di deformazione

Analogamente a quanto detto per gli stati monoassiali di tensione, uno stato monoassiale di deformazione è caratterizzato da una matrice di deformazioni pari a:

$$
\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e_{33}\end{pmatrix} \tag{20.11}
$$

ed inoltre l'unica componente non nulla di deformazione è funzione della sola coordinata x_3.

Le tensioni corrispondenti si ottengono dalla legge di Hooke:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}e_{33}=\sigma_{11}\left(x_3\right)\\
&\sigma_{22}=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}e_{33}=\sigma_{22}\left(x_3\right)\\
&\sigma_{33}=\frac{E}{1+\nu}e_{33}+\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}e_{33}=\sigma_{33}\left(x_3\right)\\
&\sigma_{12}=\sigma_{13}=\ \sigma_{23}=0
\end{aligned}
\tag{20.12}
$$

In assenza di forze di massa, le prime due equazioni indefinite dell'equilibrio sono identicamente nulle, mentre la terza assicura che:

$$\sigma_{33} = \sigma_0 = \text{costante} \tag{20.13}$$

da cui anche:

$$e_{33} = e_0 = \text{costante} \tag{20.14}$$

Ne segue infine che gli spostamenti sono forniti, a meno di traslazioni rigide, da:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \equiv 0 \\ u_3 &= e_0 x_3 \end{aligned} \tag{20.15}$$

20.3 Stato piano di spostamento

E' questo il caso in cui esistono solo due componenti di spostamento, funzioni di due sole coordinate. Ad esempio, uno stato piano di spostamento relativo al piano (X_1, X_2) è definito dalle ipotesi:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 (x_1, x_2) \\ u_2 &= u_2 (x_1, x_2) \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \tag{20.16}$$

Le corrispondenti deformazioni sono pari a:

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{20.17}$$

con:

$$e_{ij} = e_{ij} (x_1, x_2) \tag{20.18}$$

Le tensioni si ottengono applicando la legge di Hooke, giungendo a:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{20.19}$$

L'espressione esplicita delle tensioni può aversi in termini di costanti di Lamè:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu \mathrm{e}_{11} + \lambda (e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{22} &= 2\mu \mathrm{e}_{22} + \lambda (e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{33} &= \lambda (e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{12} &= 2\mu \mathrm{e}_{12} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0 \end{aligned} \tag{20.20}$$

oppure in termini di costanti ingegneristiche:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} e_{11} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(e_{11} + e_{22}\right) \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu} e_{22} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(e_{11} + e_{22}\right) \\
\sigma_{33} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(e_{11} + e_{22}\right) \\
\sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu} e_{12} \\
\sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0
\end{aligned} \tag{20.21}$$

Si ha quindi l'importante relazione:

$$\sigma_{33} = \nu \left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) \tag{20.22}$$

Poichè le tensioni sono funzioni delle sole coordinate x_1 ed x_2, le equazioni indefinite dell'equilibrio divengono:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 &= 0 \\
X_3 &= 0
\end{aligned} \tag{20.23}$$

Ne segue che uno stato piano di spostamento avrà possibilità di realizzarsi solo se le due componenti X_1 ed X_2 delle forze di massa sono funzioni delle sole coordinate x_1 ed x_2, e se la componente X_3 è identicamente nulla.

Le equazioni di Navier–Cauchy si semplificano in:

$$\begin{aligned}
\mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + X_1 = 0 \\
\mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right) + X_2 = 0
\end{aligned} \tag{20.24}$$

Infine, l'unica equazione di compatibilità che non sia soddisfatta identicamente è:

$$2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \tag{20.25}$$

Alcuni esempi classici di schemi strutturali che rispettano le ipotesi a base di questa sezione sono riportate nelle Figure 20.2 e 20.3. In Figura 20.2 è illustrato un cilindro di sezione retta generica, soggetto ad una distribuzione uniforme di forze sulle generatrici: se esso è considerato infinitamente lungo, oppure se si trascurano gli effetti di bordo locali, per ragioni di simmetria si potrà affermare che lo stato di spostamento rispetta le condizioni (20.16). Del tutto analogamente, in Figura 20.3 è illustrato un terrapieno ed una sezione di galleria: se essi sono sufficientemente lunghi da poter trascurare gli effetti di bordo, e se sono caricati opportunamente, essi rientrano nei casi di stati piani di spostamento.

20.4 Stato piano di tensione

Uno *stato piano di tensione* è caratterizzato da uno stato tensionale del tipo:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{20.26}$$

con le componenti di tensione funzioni delle coordinate x_1 ed x_2, giungendo quindi alla situazione di Figura 20.4. Si ha, dalle leggi di Hooke, una matrice delle deformazioni del tipo:

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix} \tag{20.27}$$

con:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right) \\ e_{22} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}\right) \\ e_{33} &= -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) \\ e_{12} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \\ e_{13} &= e_{23} = 0 \end{aligned} \tag{20.28}$$

e quindi anche le deformazioni sono funzioni delle sole coordinate x_1 ed x_2.

Le equazioni indefinite dell'equilibrio restano le (20.23), con quel che ne segue per le forze di massa, mentre le equazioni di compatibilità interna si semplificano notevolmente. Le prime due sono infatti identicamente soddisfatte, mentre le altre quattro divengono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 \\ 2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} &= 0 \end{aligned} \tag{20.29}$$

Dovrà quindi essere:

$$e_{33} = c_1 + c_2 x_1 + c_3 x_2 \tag{20.30}$$

Si vedrà tuttavia che spesso la e_{33} può essere trascurata, e quindi l'unica condizione di compatibilità da tenere in conto resta la (20.25).

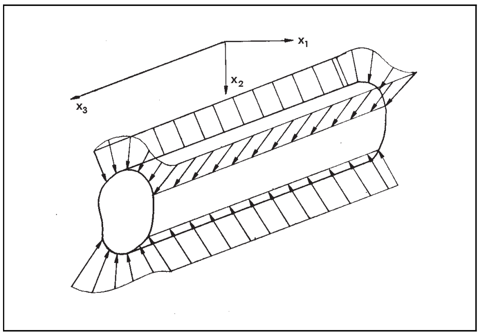


Figura 20.2: Un cilindro infinitamente lungo in stato piano di spostamento

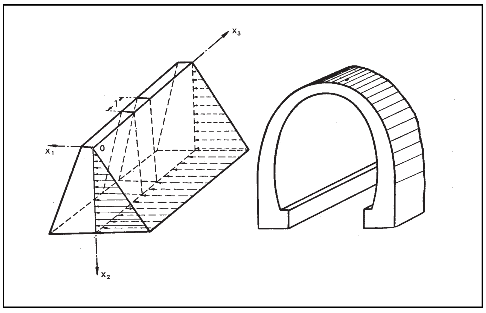


Figura 20.3: Altri due esempi di stati piani di spostamento: un terrapieno ed una galleria

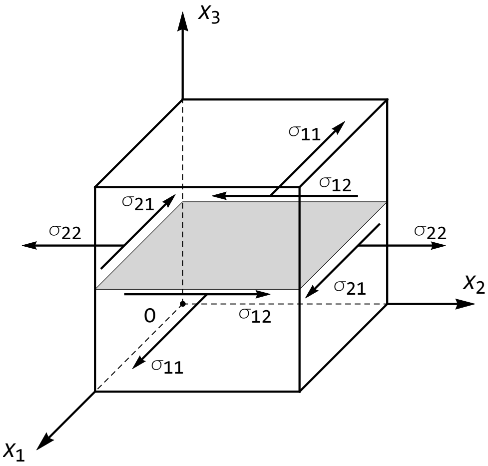


Figura 20.4: Uno stato piano di tensione

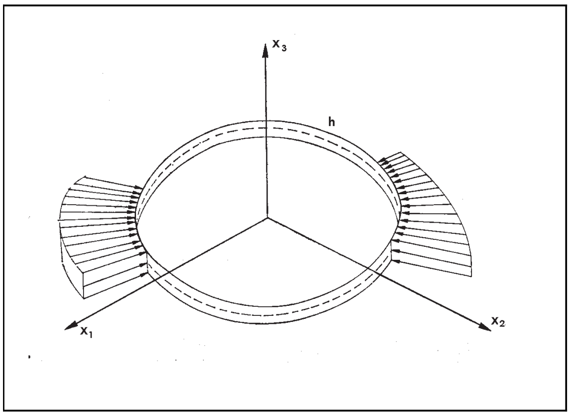


Figura 20.5: Lastra sottile in stato piano di tensione

L'esempio classico di stato piano di tensione è illustrato in Figura 20.5, dove è illustrata una lastra sottile piana, con piano medio contenuto nel piano (X_1, X_2), soggetta a forze agenti secondo lo stesso piano. Più in dettaglio, le forze sul contorno si suppongono applicate solo lungo lo spessore della lastra, e sono simmetricamente distribuite rispetto al piano medio.

Poichè le due facce della lastra sono scariche, per ipotesi, ne segue che su tali facce dovrà aversi:

$$\begin{aligned}
\sigma_{31}\left(x_1, x_2, x_3 = \pm\frac{h}{2}\right) &= 0 \\
\sigma_{32}\left(x_1, x_2, x_3 = \pm\frac{h}{2}\right) &= 0 \\
\sigma_{33}\left(x_1, x_2, x_3 = \pm\frac{h}{2}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{20.31}$$

Inoltre, le tensioni tangenziali σ_{31} e σ_{32} sono funzioni dispari di x_3, mentre la tensione normale σ_{33} è una funzione pari della stessa coordinata x_3, e se lo spessore h è sufficientemente piccolo potrà assumersi ovunque $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$, rientrando nelle ipotesi di questa sezione.

20.5 Gli stati piani e la funzione di tensione

Se si ignorano le tre equazioni di compatibilità in e_{33}, allora gli stati piani di tensione e di spostamento possono essere trattati in modo unificato e semplificato, ed alcune interessanti soluzione del problema di elasticità possono essere illustrate anche con metodi elementari di calcolo. Si consideri infatti che in ambedue i casi si possono assumere come incognite primarie le tre componenti di tensione σ_{11}, σ_{22} e σ_{12}, ed utilizzare le due equazioni indefinite dell' equilibrio e l'unica condizione di compatibilità:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}+X_1=0\\
&\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}+X_2=0\\
&2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2}
\end{aligned}
\tag{20.32}
$$

Le tre equazioni precedenti devono valere all'interno di un dominio piano B, sulla cui frontiera dovranno valere le due equazioni:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11} n_1+\sigma_{12} n_2=p_1\\
&\sigma_{12} n_1+\sigma_{22} n_2=p_2
\end{aligned}
\tag{20.33}
$$

Occorre ora utilizzare le leggi di Hooke per trasformare l'ultima delle (20.32) in una equazione nelle incognite primarie, e poichè le leggi di Hooke si specializzano diversamente per gli stati piani di spostamento e di tensione, è opportuno trattare separatamente i due casi.

20.5.1 Gli stati piani di tensione

Le equazioni da utilizzare sono le (20.28), che sostituite nella terza delle (20.32) conducono a scrivere:

$$
2(1+\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}=\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2}-\nu\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2}-\nu\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2}\right)
\tag{20.34}
$$

ossia:

$$
2(1+\nu)\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2}-\nu\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)
\tag{20.35}
$$

Dalle prime delle (20.32) si ha poi:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_2 \partial x_1}=-\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2}-\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\\
&\frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}=-\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2}-\frac{\partial X_2}{\partial x_2}
\end{aligned}
\tag{20.36}
$$

e sostituendo nella (20.35):

$$
\begin{aligned}
&(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2}-\\
&\qquad\nu\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)=0
\end{aligned}
\tag{20.37}
$$

e semplificando:

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2}=0 \qquad (20.38)$$

ed infine:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(\sigma_{11}+\sigma_{22})=-(1+\nu)\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right) \qquad (20.39)$$

20.5.2 Gli stati piani di spostamento

Le leggi di Hooke forniscono, in questo caso:

$$\begin{aligned}
e_{11}&=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{11}-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\\
e_{22}&=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{22}-\frac{\nu}{E}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\\
e_{12}&=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{12}
\end{aligned} \qquad (20.40)$$

con la relazione aggiuntiva (20.22), che porta a scrivere:

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=(1+\nu)(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \qquad (20.41)$$

Le prime due delle (20.40) divengono quindi:

$$\begin{aligned}
e_{11}&=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{11}-\frac{\nu}{E}(1+\nu)(\sigma_{11}+\sigma_{22})\\
e_{22}&=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{22}-\frac{\nu}{E}(1+\nu)(\sigma_{11}+\sigma_{22})
\end{aligned} \qquad (20.42)$$

Sostituendo nella terza delle (20.32) si ha:

$$2\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2}\right)-\nu\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right) \qquad (20.43)$$

ed utilizzando le (20.36):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2}\right)-\\
&\nu\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)=0
\end{aligned} \qquad (20.44)$$

ossia ancora:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(\sigma_{11}+\sigma_{22})=-\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right) \qquad (20.45)$$

Si noti infine che nel caso di forze di massa nulle o costanti sia la (20.39) — valida per gli stati piani di tensione — che la (20.45) — valida per gli stati piani di spostamento — si semplificano in:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)(\sigma_{11}+\sigma_{22})=0 \qquad (20.46)$$

20.5.3 La funzione di Airy nel caso di forze di massa nulle

Nel caso di forze di massa nulle le tre equazioni che reggono il problema ai limiti dell'elasticità:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\
&\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \\
&\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0
\end{aligned}
\tag{20.47}
$$

si possono drasticamente semplificare introducendo una funzione $\Phi\left(x_1, x_2\right)$ tale che:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \\
\sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \\
\sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}
\end{aligned}
\tag{20.48}
$$

Figura 20.6: G.B. Airy

Ed infatti, introducendo queste tre relazioni nelle (20.47) si nota che le prime due sono identicamente soddisfatte, mentre la terza si riduce a richiedere che sia:

$$
\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = 0
\tag{20.49}
$$

La funzione $\Phi(x_1, x_2)$ è la prima e più semplice tra le numerose funzioni di tensione che si sono utilizzate in teoria dell'elasticità. Essa fu introdotta nell'Ottocento dal matematico ed astronomo G.B. Airy, di cui quindi porta il nome[1].

20.5.4 Il caso della lastra rettangolare

Si consideri ora un dominio bidimensionale di forma rettangolare, di base $2b$ ed altezza $2h$. Posto l'origine degli assi nel baricentro del rettangolo, le condizioni ai limiti si specializzano nel richiedere, sui quattro lati (cfr. Figura 20.7)

— sul lato AB, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (0, -1)$ si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= -p_1 \\ \sigma_{22} &= -p_2 \end{aligned} \tag{20.50}$$

— sul lato BC, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (1, 0)$ si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= p_1 \\ \sigma_{12} &= p_2 \end{aligned} \tag{20.51}$$

— sul lato CD, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (0, 1)$ si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= p_1 \\ \sigma_{22} &= p_2 \end{aligned} \tag{20.52}$$

— sul lato AD, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (-1, 0)$ si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p_1 \\ \sigma_{12} &= -p_2 \end{aligned} \tag{20.53}$$

Ciò premesso, si utilizza ora il *metodo inverso*, che consiste nell'assumere una soluzione $\Phi(x_1, x_2)$ per l'equazione (20.49), da essa dedurre il campo tensionale, e tramite le condizioni ai limiti risalire alle forze superficiale $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ agenti sul dominio.

Esempio n.1 - La soluzione polinomiale quadratica

Una soluzione della (20.49) sarà sicuramente ottenibile ipotizzando che la funzione di Airy $\Phi(x_1, x_2)$ sia esprimibile come un polinomio di secondo grado:

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{c_0}{2} x_1^2 + c_1 x_1 x_2 + \frac{c_2}{2} x_2^2 \tag{20.54}$$

[1] G.B. Airy *On the strains in the interior of beams*, Phil.Trans. Roy. Soc. London, 153, 49–80 (1863). E' questo il primo e più semplice esempio di funzione di tensione, limitato agli stati bidimensionali.

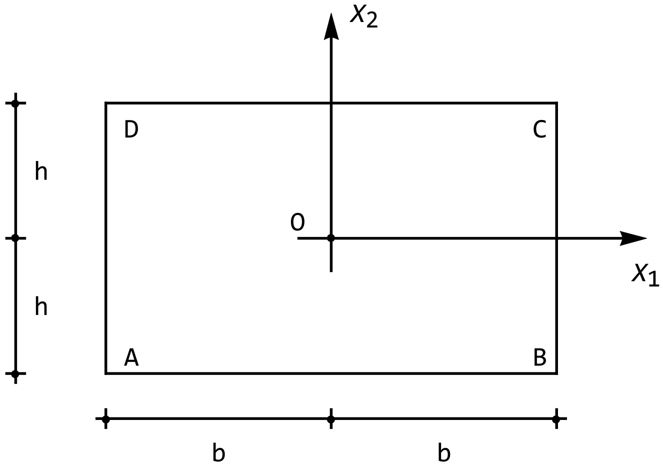


Figura 20.7: Un dominio rettangolare in stato piano

Il corrispondente campo tensionale sarà costante, e pari a:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = c_2 \\
\sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = c_0 \\
\sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -c_1
\end{aligned}
\tag{20.55}
$$

Utilizzando ora le condizioni ai limiti, si potrà concludere che le forze esterne che causano le tensioni (20.55) saranno fornite da (cfr. Figura 20.8): — sul lato AB, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (0, -1)$ si avrà una componente $p_1 = c_1$, diretta in senso equiverso all'asse X_1, e quindi verso destra, ed una componente $p_2 = -c_0$ diretta in senso contrario all'asse X_2, ossia verso il basso,

— sul lato BC, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (1, 0)$ si avrà una componente $p_1 = c_2$, diretta in senso equiverso all'asse X_1, e quindi verso destra, ed una componente $p_2 = -c_1$, diretta in senso contrario all'asse X_2, ossia verso il basso,

— sul lato CD, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (0, 1)$ si avrà una componente $p_1 = -c_1$, diretta in senso contrario all'asse X_1, e quindi verso sinistra, ed una componente $p_2 = c_0$, diretta in senso equiverso all'asse X_2, ossia verso l'alto,

— sul lato AD, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (-1, 0)$ si avrà una componente $p_1 = -c_2$, diretta in senso contrario all'asse X_1, e quindi verso sinistra, ed una componente $p_2 = c_1$, diretta in senso equiverso all'asse X_2, ossia verso l'alto

Possono distinguersi i seguenti casi particolari:

1. $c_0 = c_1 = 0$, trazione semplice secondo l'asse orizzontale

2. $c_1 = c_2 = 0$, trazione semplice secondo l'asse verticale

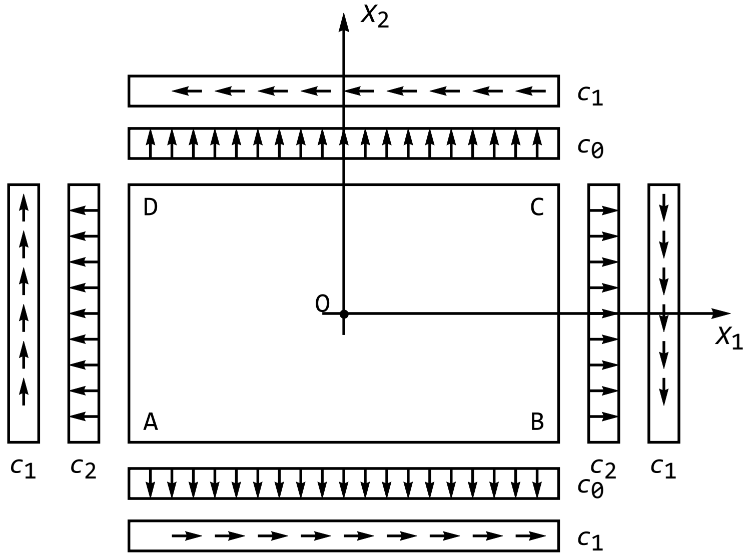


Figura 20.8: Le forze esterne corrispondenti ad una funzione di Airy polinomiale di secondo grado

3. $c_0 = c_2 = 0$, taglio semplice

Esempio n.2 - La soluzione polinomiale cubica

Una soluzione della (20.49) sarà sicuramente ottenibile anche ipotizzando che $\Phi\left(x_1, x_2\right)$ sia esprimibile come un polinomio di terzo grado:

$$\Phi\left(x_1, x_2\right) = \frac{c_0}{6}x_1^3 + \frac{c_1}{2}x_1^2 x_2 + \frac{c_2}{2}x_1 x_2^2 + \frac{c_3}{6}x_2^3 \tag{20.56}$$

Il corrispondente campo tensionale sarà ora variabile linearmente all'interno del solido, e pari a:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = c_2 x_1 + c_3 x_2 \\
\sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = c_0 x_1 + c_1 x_2 \\
\sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -c_1 x_1 - c_2 x_2
\end{aligned} \tag{20.57}$$

Utilizzando le condizioni ai limiti, si potrà concludere che le forze esterne che causano le tensioni (20.57) saranno fornite da:

— sul lato AB, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (0, -1)$ si avranno le forze:

$$\begin{aligned} p_1 &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ p_2 &= -c_0 x_1 - c_1 x_2 \end{aligned} \tag{20.58}$$

— sul lato BC, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (1, 0)$ si avranno le forze:

$$\begin{aligned} p_1 &= c_2 x_1 + c_3 x_2 \\ p_2 &= -c_1 x_1 - c_2 x_2 \end{aligned} \tag{20.59}$$

— sul lato CD, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (0, 1)$ si avranno le forze:

$$\begin{aligned} p_1 &= -c_1 x_1 - c_2 x_2 \\ p_2 &= c_0 x_1 + c_1 x_2 \end{aligned} \tag{20.60}$$

— sul lato AD, di normale uscente $n = (-1, 0)$ si avranno le forze:

$$\begin{aligned} p_1 &= -c_2 x_1 - c_3 x_2 \\ p_2 &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \end{aligned} \tag{20.61}$$

Alcune sollecitazioni di interesse sono ricavabili come casi particolari:

Caso 1 – $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ I lati orizzontali sono scarichi, i due lati verticali sono sollecitati da un carico orizzontale p_1, variabile linearmente lungo l'altezza del dominio piano in esame. In particolare, $p_1 = c_3 x_2$ sul lato destro, e $p_1 = -c_3 x_2$ sul lato sinistro.

Come può evincersi dalla Figura 20.9, la distribuzione di forze superficiali lungo il bordo destro è equivalente ad una coppia oraria, mentre a sinistra è equivalente ad una coppia antioraria della stessa intensità. E' questo il caso della *flessione.*

Caso 2 – $c_0 = c_2 = c_3 = 0$ Si avrà ora:

— sul lato AB, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (0, -1)$ si avranno le forze $p_1 = c_1 x_1$ linearmente variabili, e le forze $p_2 = c_1 h$, costanti,

— sul lato BC, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (1, 0)$ si avranno le forze $p_2 = -c_1 b$, costanti,

— sul lato CD, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (0, 1)$ si avranno le forze $p_1 = -c_1 x_1$ linearmente variabili, e le forze $p_2 = c_1 h$, costanti,

— sul lato AD, di normale uscente $\boldsymbol{n} = (-1, 0)$ si avranno le forze $p_2 = -c_1 b$, costanti,

Ne segue la condizione di carico in Figura 20.10. Gli altri due casi particolari sono simili a quelli descritti.

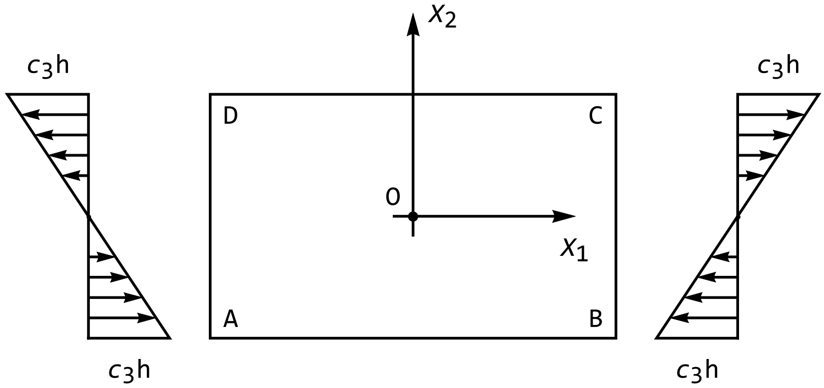


Figura 20.9: Le forze esterne corrispondenti ad una funzione di Airy polinomiale di terzo grado $\Phi\left(x_1, x_2\right) = \dfrac{c_3}{6} x_2^3$

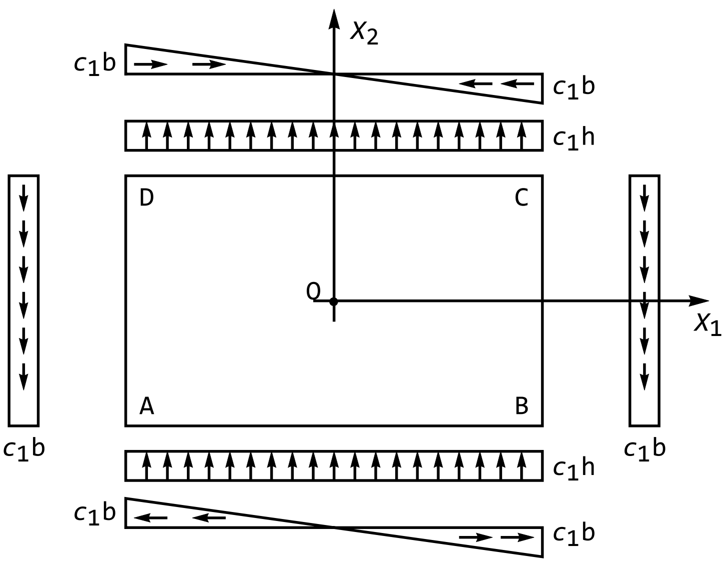


Figura 20.10: Le forze esterne corrispondenti ad una funzione di Airy polinomiale di terzo grado $\Phi\left(x_1, x_2\right) = \dfrac{c_1}{3} x_1^2 x_2$

Capitolo 21

I principi variazionali

Nei Capitoli lezioni precedenti si è adottata la cosiddetta via differenziale, o *metodo diretto*, nel senso che si sono scritte le condizioni di equilibrio elastico in termini di equazioni differenziali, ottenendo il sistema di tre equazioni lineari del secondo ordine, note come equazioni di Navier–Cauchy.

Da questo Capitolo si inizia a percorrere la cosiddetta via integrale, o *metodo variazionale*, in cui le condizioni di equilibrio verranno espresse tramite identità integrali, introducendo alcuni funzionali di fondamentale importanza e definendo alcuni principi di minimo di uso corrente in teoria delle strutture. Ambedue gli approcci sono antichissimi, come può dedursi dalla seguente citazione di Eulero:

> Poichè la fabbrica dell'Universo è perfetta, ed è il lavoro del più saggio Creatore, nulla accade nell'universo per cui non si manifesti qualche relazione di massimo o minimo.
>
> Non c'è quindi alcun dubbio che qualunque cosa nell'universo possa spiegarsi in modo soddisfacente a partire dalle cause finali, con l'ausilio del metodo dei massimi e minimi, così come con l'ausilio delle stesse cause effettive. Perciò, si aprono due vie per studiare i fenomeni naturali, uno tramite l'analisi delle cause effettive, comunemente chiamato metodo diretto, e l'altro per mezzo delle cause finali

21.1 Il principio dei lavori virtuali

Si dimostrerà ora il principio dei lavori virtuali per solidi deformabili, diretta estensione del principio dei lavori virtuali per i sistemi rigidi. Laddove, però, quest'ultimo è stato assunto come assioma fondamentale, e quindi indimostrabile, della statica dei corpi rigidi, il principio dei lavori virtuali per solidi deformabili è una identità matematica, che può essere dimostrata ed interpretata meccanicamente. Esso rappresenta la pietra miliare della meccanica, e su di esso è possibile edificare tutto l'edificio concettuale della meccanica stessa. Ad esso sono dedicati innumerevoli articoli e libri, sia di carattere storico che scientifico[1].

Si consideri un corpo B, soggetto alle forze di massa $\boldsymbol{X}$, alle forze superficiali $\boldsymbol{p}$ sulla parte di frontiera ∂B_1 ed agli spostamenti $\boldsymbol{f}$ sulla restante parte ∂B_2. Si forniscono le seguenti:

Definizione 6. *Una distribuzione simmetrica di tensioni:*

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{21.1}$$

si dice staticamente ammissibile se soddisfa le condizioni indefinite di equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} + X_1 = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} + X_2 = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0 \end{aligned} \tag{21.2}$$

all'interno del corpo, e le condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = p_1 \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 = p_2 \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 = p_3 \end{aligned} \tag{21.3}$$

sulla frontiera ∂B_1.

Definizione 7. *Una terna di spostamenti* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *si dice geometricamente ammissibile se è rispettosa dei vincoli, ossia se soddisfa le condizioni:*

$$\begin{aligned} u_1 = f_1 \\ u_2 = f_2 \\ u_3 = f_3 \end{aligned} \tag{21.4}$$

sulla frontiera ∂B_2.

Vale la seguente *identità fondamentale*, che lega le due quantità appena definite:

[1]Ad esempio, si può consultare il libro di G.A.O. Davies, *Virtual Work in Structural Analysis*, J. Wiley 1982, per applicazioni svolte sia utilizzando il principio degli spostamenti virtuali (Capitolo 2) che il principio delle forze virtuali (Capitolo 3). Una interessante storia del principio dei lavori virtuali può leggersi nel libro *I Fondamenti della Statica* di Gustavo Colonnetti, UTET 1927, mentre una storia più moderna è quella di Sergio Cavallone, pubblicato in *Impiantistica Italiana*, marzo 1995, pp.148-158. Infine, Danilo Capecchi ha dedicato alla storia del principio dei lavori virtuali i libri *Il Principio dei Lavori Virtuali da Aristotele a Bernoulli*, Luda, Napoli (2000) e *Storia del principio dei lavori virtuali. La Meccanica alternativa* Hevelius,Benevento (2002)

Teorema 10. *(Principio dei lavori virtuali) - Siano:*

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{21.5}$$

un campo di tensioni staticamente ammissibili, ed $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *un campo di spostamenti geometricamente ammissibili. Vale la seguente identità:*

$$\int_B \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dV = \int_B X_i u_i \, dV + \int_{\partial B_1} p_i u_i \, ds + \int_{\partial B_2} \sigma_{ij} n_j f_i \, ds \tag{21.6}$$

ossia, in esteso:

$$\begin{aligned} &\int_B \left(\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sigma_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right. \\ &\qquad \left. + \sigma_{13} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \sigma_{23} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \right) dV = \\ &\int_B (X_1 u_1 + X_2 u_2 + X_3 u_3)\; dV + \int_{\partial B_1} (p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3)\; ds + \\ &\quad \int_{\partial B_2} ((\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3)\, f_1 + (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3)\, f_2 + \\ &\qquad (\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3)\, f_3)\; ds \end{aligned} \tag{21.7}$$

Dimostrazione. Applicando il teorema di Gauss agli integrali al primo membro si ha:

$$\int_B \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, \mathrm{d}V = -\int_B \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i \, \mathrm{d}V + \int_{\partial B} \sigma_{ij} n_j u_i \, \mathrm{d}s \tag{21.8}$$

e quindi la (21.6) diviene:

$$\int_{\partial B} \sigma_{ij} n_j u_i \, \mathrm{d}s = \int_B \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) u_i \, \mathrm{d}V + \int_{\partial B_1} p_i u_i \, \mathrm{d}s + \int_{\partial B_2} \sigma_{ij} n_j f_i \, \mathrm{d}s \tag{21.9}$$

Se il campo di tensioni è staticamente ammissibile, allora gli integrali di volume saranno nulli, in base alle (21.2). Spezzando gli integrali al primo membro in due integrali, il primo esteso a ∂B_1 ed il secondo a ∂B_2 si ha:

$$\int_{\partial B_1} (\sigma_{ij} n_j - p_i)\, u_i \, \mathrm{d}s = \int_{\partial B_2} (\sigma_{ij} n_j)\, (f_i - u_i)\, \mathrm{d}s \tag{21.10}$$

Il primo membro sarà nullo, se le tensioni sono staticamente ammissibili, in base alla (21.3), mentre il secondo membro sarà nullo, se gli spostamenti sono geometricamente ammissibili, in base alle (21.4). L'uguaglianza è quindi dimostrata. □

Interpretazione meccanica - Si consideri il primo integrale di volume a secondo membro della (21.6):

$$L_B = \int_B X_i u_i \, \mathrm{d}V \tag{21.11}$$

Esso è interpretabile come il lavoro compiuto dalle forze di massa per effetto del campo di spostamenti geometricamente ammissibili $\boldsymbol{u}$. Poichè questo lavoro non è reale, in quanto gli spostamenti non devono necessariamente essere quelli effettivi, si parla di lavoro *virtuale* delle forze di massa.

Analogamente, l'integrale:

$$L_s = \int_{\partial B_1} p_i u_i \, \mathrm{d}s \tag{21.12}$$

è il lavoro virtuale delle forze superficiali applicate, mentre l'integrale:

$$L_f = \int_{\partial B_2} \sigma_{ij} n_j f_i \, \mathrm{d}s \tag{21.13}$$

è il lavoro virtuale che le tensioni staticamente ammissibili compiono per effetto degli eventuali cedimenti imposti $\boldsymbol{f}$. Nel caso di vincoli perfetti, questa aliquota sarà nulla.

Infine, l'integrale a primo membro:

$$L_\sigma = \int_B \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, \mathrm{d}V \tag{21.14}$$

potrà riscriversi, ricordando la decomposizione della matrice del gradiente di spostamento nella somma di una parte simmetrica ed una antisimmetrica:

$$L_\sigma = \int_B \sigma_{ij} \left(e_{ij} + \omega_{ij} \right) \, \mathrm{d}V \tag{21.15}$$

e poichè risulta $\sigma_{ij}\omega_{ij} = 0$, come può facilmente controllarsi, si ha:

$$L_\sigma = \int_B \sigma_{ij} e_{ij} \, \mathrm{d}V \tag{21.16}$$

e quindi l'integrale a primo membro potrà interpretarsi come il lavoro virtuale che le tensioni staticamente ammissibili compiono per effetto delle deformazioni geometricamente ammissibili, ossia derivate dal campo di spostamenti geometricamente ammissibili.

Ed infatti, si consideri la faccia di area $dx_1 dx_3$ del parallelepipedo elementare, riportato in pianta in Figura 21.1. Su di essa agisce la tensione normale σ_{11} e la tensione tangenziale σ_{12}, e corrispondentemente è presente una dilatazione in senso assiale di intensità e_{11} ed una variazione angolare $\gamma_{12} = 2e_{12}$. Il lavoro della forza elementare $\sigma_{11} dx_1 dx_3$ è calcolabile considerando che il coefficiente di dilatazione assiale e_{11} implica un allungamento del segmento dx_1 pari a $e_{11} dx_1$, mentre il lavoro della forza elementare $\sigma_{12} dx_2 dx_3$ è calcolabile considerando che

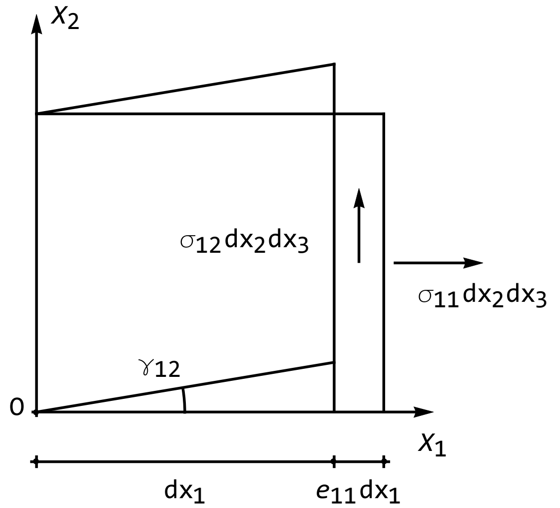


Figura 21.1: Le forze elementari agenti su una faccia del parallelepipedo, e le corrispondenti deformazioni

una variazione angolare γ_{12} implica che la faccia si sposta in verticale di $\gamma_{12} dx_1$. Segue che il lavoro complessivo è:

$$L = \sigma_{11} e_{11} dx_1 dx_2 dx_3 + 2\sigma_{12} e_{12} dx_1 dx_2 dx_3 \tag{21.17}$$

E' evidente che non esiste alcun legame (elastico o altri) tra le σ_{ij} e le e_{ij}, e questo giustifica l'aggettivo "virtuale" ad un lavoro che non è effettivamente svolto. L'identità (21.6), pertanto, può anche essere enunciata affermando che *il lavoro virtuale interno di un campo di tensioni staticamente ammissibile per effetto di un campo di spostamenti geometricamente ammissibile, è pari al lavoro virtuale esterno delle forze di massa, delle forze superficiali e degli eventuali cedimenti presenti.*

Per esprimere il principio dei lavori virtuali in forma compatta, particolarmente conveniente risulta la notazione matriciale. Ricordando di aver definito il vettore colonna delle tensioni:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\} \tag{21.18}$$

ed il vettore colonna delle deformazioni:

$$\boldsymbol{e}^T = \{e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2e_{12}, 2e_{13}, 2e_{23}\} \tag{21.19}$$

è facile realizzare che il p.l.v. si scrive:

$$\int_B \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{e}\, \mathrm{d}V = \int_B \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}V + \int_{\partial B_1} \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}s + \int_{\partial B_2} (\boldsymbol{Sn})^T \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}s \tag{21.20}$$

21.2 Il principio degli spostamenti virtuali

Si ipotizzi ora di aver risolto il problema dell'equilibrio elastico, e di aver quindi ricavato gli spostamenti effettivi $\boldsymbol{u}^* = (u^*, v^*, w^*)$ e le tensioni effettive:

$$\boldsymbol{S}^* = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^* & \sigma_{12}^* & \sigma_{13}^* \\ \sigma_{12}^* & \sigma_{22}^* & \sigma_{23}^* \\ \sigma_{13}^* & \sigma_{23}^* & \sigma_{33}^* \end{pmatrix} \tag{21.21}$$

E' ovvio che gli spostamenti $\boldsymbol{u^*}$ sono geometricamente ammissibili, e che le tensioni $\boldsymbol{S^*}$ sono staticamente ammissibili

Si definisca poi un ulteriore campo di spostamenti arbitrario:

$$\boldsymbol{u}^* + \delta\boldsymbol{u} = \{u_1^* + \delta u_1, u_2^* + \delta u_2, u_3^* + \delta u_3\} \tag{21.22}$$

anch'esso geometricamente ammissibile, ed ottenuto aggiungendo alla soluzione classica lo *spostamento virtuale* (o la *variazione*) $\delta\boldsymbol{u}$. Poichè sia $\boldsymbol{u}^*$ che $\boldsymbol{u}^* + \delta\boldsymbol{u}$ sono geometricamente ammissibili, ne segue che dovrà essere:

$$\delta\boldsymbol{u} = 0 \tag{21.23}$$

sulla parte di frontiera $\delta \mathrm{B}_2$.

Si scriva il principio dei lavori virtuali utilizzando $\boldsymbol{S^*}$ come tensioni, e $\boldsymbol{u}^*$ come spostamenti

$$\int_B \boldsymbol{\sigma}^{*T}\boldsymbol{e}^*\,\mathrm{d}V = \int_B \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{u}^*\,\mathrm{d}V + \int_{\partial B_1} \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u}^*\,\mathrm{d}s + \int_{\partial B_2} \left(\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{n}\right)^T\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}s \tag{21.24}$$

Si scriva poi il principio dei lavori virtuali utilizzando ancora $\boldsymbol{S^*}$ come tensioni, e $\boldsymbol{u}^* + \delta\boldsymbol{u}$ come spostamenti:

$$\begin{aligned} &\int_B \boldsymbol{\sigma}^{*T}\left(\boldsymbol{e}^* + \delta\boldsymbol{e}\right)\,\mathrm{d}V = \\ &\int_B \boldsymbol{X}^T\left(\boldsymbol{u}^* + \delta\boldsymbol{u}\right)\,\mathrm{d}V + \int_{\partial B_1} \boldsymbol{p}^T\left(\boldsymbol{u}^* + \delta\boldsymbol{u}\right)\,\mathrm{d}s + \int_{\partial B_2} \left(\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{n}\right)^T\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{21.25}$$

dove $\delta\boldsymbol{e}$ sono le deformazioni virtuali dovute agli spostamenti virtuali $\delta\boldsymbol{u}$.

Sottraendo membro a membro si giunge al:

Teorema 11. *(Principio degli spostamenti virtuali) - Sia $\boldsymbol{S}^*$ un campo di tensioni staticamente ammissibile, e sia $\delta\boldsymbol{u}$ un campo di spostamenti arbitrario, che soddisfi le condizioni omogenee:*

$$\delta u_i = 0 \tag{21.26}$$

su ∂B_2.

Vale la seguente uguaglianza:

$$\int_B \boldsymbol{\sigma}^{*T}\delta\boldsymbol{e}\,dV = \int_B \boldsymbol{X}^T\delta\boldsymbol{u}\,dV + \int_{\partial B_1} \boldsymbol{p}^T\delta\boldsymbol{u}\,ds \tag{21.27}$$

o, in forma indiciale:

$$\int_B \sigma_{ij}^*\delta e_{ij}\,dV = \int_B X_i\delta u_i\,dV + \int_{\partial B_1} p_i\delta u_i\,ds \tag{21.28}$$

21.3 Il principio delle forze virtuali

Analogamente a quanto detto per il paragrafo precedente, si ipotizzi di aver risolto il problema dell'equilibrio elastico, e di aver quindi ricavato gli spostamenti effettivi $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$ e le tensioni effettive:

$$\boldsymbol{S}^* = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^* & \sigma_{12}^* & \sigma_{13}^* \\ \sigma_{12}^* & \sigma_{22}^* & \sigma_{23}^* \\ \sigma_{13}^* & \sigma_{23}^* & \sigma_{33}^* \end{pmatrix} \tag{21.29}$$

Si definisca ora un campo di tensioni arbitrario:

$$\boldsymbol{S}^* + \delta\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^* + \delta\sigma_{11} & \sigma_{12}^* + \delta\sigma_{12} & \sigma_{13}^* + \delta\sigma_{12} \\ \sigma_{12}^* + \delta\sigma_{12} & \sigma_{22}^* + \delta\sigma_{22} & \sigma_{23}^* + \delta\sigma_{23} \\ \sigma_{13}^* + \delta\sigma_{13} & \sigma_{23}^* + \delta\sigma_{23} & \sigma_{33}^* + \delta\sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{21.30}$$

anch'esso staticamente ammissibile, ed ottenuto aggiungendo alla soluzione classica le *tensioni virtuali* (o le *variazioni*) $\delta\boldsymbol{S}$. Poichè sia $\boldsymbol{S}^*$ che $\boldsymbol{S}^* + \delta\boldsymbol{S}$ sono staticamente ammissibili, ne segue che dovrà essere:

$$\frac{\partial\delta\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \tag{21.31}$$

nell'interno del corpo, e:

$$\delta\sigma_{ij} n_j = 0 \tag{21.32}$$

sulla parte di frontiera $\delta \mathrm{B}_1$. In altri termini le tensioni virtuali $\delta\mathbf{S}$ sono *autoequilibrate*.

Si scriva il principio dei lavori virtuali utilizzando $\boldsymbol{S^*}$ come tensioni, e $\boldsymbol{u^*}$ come spostamenti:

$$\int_B \boldsymbol{\sigma}^{*T}\boldsymbol{e}^*\,\mathrm{d}V = \int_B \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{u}^*\,\mathrm{d}V + \int_{\partial B_1} \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u}^*\,\mathrm{d}s + \int_{\partial B_2} \left(\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{n}\right)^T \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}s \tag{21.33}$$

Si scriva poi il principio dei lavori virtuali utilizzando ancora $\boldsymbol{u^*}$ come spostamenti, e $\boldsymbol{S^*} + \delta\boldsymbol{S}$ come tensioni:

$$\int_B \left(\boldsymbol{\sigma}^* + \delta\boldsymbol{\sigma}\right)^T \boldsymbol{e}^*\,\mathrm{d}V = \int_B \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{u}^*\,\mathrm{d}V + \int_{\partial B_1} \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u}^*\,\mathrm{d}s + \int_{\partial B_2} \left[\left(\boldsymbol{S}^* + \delta\boldsymbol{S}\right)n\right]^T \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}s \tag{21.34}$$

Sottraendo membro a membro si giunge al:

Teorema 12. *(Principio delle forze virtuali) - Sia $\boldsymbol{u^*}$ un campo di spostamenti geometricamente ammissibile, e sia $\delta\boldsymbol{S}$ un campo di tensioni arbitrario autoequilibrato.*

Vale la seguente uguaglianza:

$$\int_B \delta\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{e}^*\,dV = \int_{\partial B_2} (\delta\boldsymbol{S}\boldsymbol{n})^T\boldsymbol{f}\,ds \tag{21.35}$$

o, in forma indiciale:

$$\int_B \delta\sigma_{ij}e_{ij}^*\,dV = \int_{\partial B_2} \delta\sigma_{ij}n_j f_i\,ds \tag{21.36}$$

21.4 L'energia elastica

Si consideri un corpo B, e si supponga che per esso valgano le leggi dell'iperelasticità, garantendo l'esistenza di un potenziale elastico definito in ciascun punto del corpo. Si definisce *energia elastica* L di un corpo B l'integrale, esteso al volume di B, del potenziale elastico, espresso in funzione degli spostamenti.

In ipotesi di validità della legge di Hooke, quindi, si ha:

$$L(\boldsymbol{e}) = \int_B \phi(\boldsymbol{e})\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}V \tag{21.37}$$

Si definisce poi *energia potenziale* P dei carichi applicati l'inverso del lavoro da essi compiuto:

$$P(\boldsymbol{u}) = -\int_B \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V - \int_{\partial B_1} \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}s \tag{21.38}$$

La *variazione* $\delta\mathrm{L}$ dell'energia elastica si ottiene nel modo più semplice calcolando la differenza tra la quantità incrementata e la quantità originaria:

$$\begin{aligned}
&\delta\mathrm{L} = L(\boldsymbol{e}+\delta\boldsymbol{e}) - L(\boldsymbol{e}) = \frac{1}{2}\int_B (\boldsymbol{e}+\delta\boldsymbol{e})^T\boldsymbol{C}(\boldsymbol{e}+\delta\boldsymbol{e})\,\mathrm{d}V - \frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}V = \\
&\frac{1}{2}\int_B \left(\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{e} + \delta\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{e} + \delta\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}\right)\,\mathrm{d}V = \\
&\int_B \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_B \delta\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{21.39}$$

dove si è utilizzata la simmetria della matrice $\boldsymbol{C}$ al fine di dimostrare che $\delta\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{e}$.

Come si vede dalla formula precedente, la variazione $\delta\mathrm{L}$ è somma di una quantità lineare in $\delta\mathbf{e}$ e di una quantità quadratica in $\delta\mathbf{e}$. La parte lineare si chiama spesso *variazione prima* della energia elastica:

$$\delta_1 L = \int_B \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}V \tag{21.40}$$

mentre la parte quadratica, detta *variazione seconda*, è fornita da:

$$\delta_2 L = \frac{1}{2}\int_B \delta\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{e}\,\mathrm{d}V \tag{21.41}$$

La variazione $\delta\mathrm{P}$ dell'energia potenziale si ottiene analogamente:

$$\begin{aligned}
&\delta P = P(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u}) - P(\boldsymbol{u}) = \\
&-\int_B \boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}V - \int_{\partial B_1} \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}s + \int_B \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V + \int_{\partial B_1} \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}s = \\
&-\int_B \boldsymbol{X}^T\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V - \int_{\partial B_1} \boldsymbol{p}^T\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{21.42}$$

Si può notare che la variazione dell'energia potenziale è limitata ad una sola parte lineare in $\delta\mathbf{u}$, e quindi può scriversi:

$$\delta_1 P = -\int_B \boldsymbol{X}^T \delta\boldsymbol{u} \,\mathrm{d}V - \int_{\partial B_1} \boldsymbol{p}^T \delta\boldsymbol{u} \,\mathrm{d}s \tag{21.43}$$

21.5 Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale

Si consideri l'espressione del principio degli spostamenti virtuali, come fornita dalla (21.27), e si introduca la legge di Hooke nel primo integrale:

$$\int_B \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{C} \delta\boldsymbol{e} \,\mathrm{d}V - \int_B \boldsymbol{X}^T \delta\boldsymbol{u} \,\mathrm{d}V - \int_{\partial B_1} \boldsymbol{p}^T \delta\boldsymbol{u} \,\mathrm{d}s = 0 \tag{21.44}$$

Si noti che ora le tensioni e le deformazioni non sono più quantità tra loro indipendenti, ma sono collegate dal legame elastico ipotizzato. Di conseguenza, si è eliminato l'asterisco sulla prima **e**.

Utilizzando la (21.40) e la (21.43) si ha poi:

$$\delta_1 (L + P) = 0 \tag{21.45}$$

La quantità tra parentesi si dice l'*energia potenziale totale* E_t del corpo B:

$$E_t = L + P = \frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{e} \,\mathrm{d}V - \int_B \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}V - \int_{\partial B_1} \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}s \tag{21.46}$$

ed è pari alla somma dell'energia elastica e dell'energia potenziale dei carichi.

La (21.46) dimostra il:

Teorema 13. *(Principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale) - Il funzionale dell'energia potenziale totale raggiunge un punto di stazionarietà in corrispondenza dello spostamento* **u** *soluzione del problema elastico.*

Nota - Come si è visto, la via variazionale è antichissima, ed è molto difficile attribuire la paternità del principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale[2].

21.6 L'energia complementare

Si consideri un corpo B, e si supponga che per esso valgano le leggi dell'iperelasticità, garantendo l'esistenza di un potenziale elastico definito in ciascun punto del

[2]Secondo Gurtin, le idee di base sono dovute a George Green, *On the laws of reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media*, Trans. Cambridge Phil. Soc. 7, 1-24 (1839), anche se la sistemazione definitiva è dovuta ad A.E.H.Love *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd ed. Dover Publ. (1906) e Gustavo Colonnetti, *L'equilibrio elastico dal punto di vista energetico*, Mem. Accad. Sci. Torino, (2), 62, 479-495 (1912)

corpo. Si definisce *energia complementare* L_c di un corpo B l'integrale, esteso al volume di B, del potenziale elastico, espresso in funzione delle tensioni. In ipotesi di validità della legge di Hooke, quindi, si ha:

$$L_c(\boldsymbol{\sigma}) = \int_B \phi(\boldsymbol{\sigma})\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V \tag{21.47}$$

La *variazione* $\delta \mathrm{L}_c$ dell'energia complementare si ottiene analogamente a quanto

Figura 21.2: Gustavo Colonnetti

già fatto per l'energia elastica:

$$\delta \mathrm{L}_c = \int_B \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_B \delta\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V \tag{21.48}$$

e la *variazione prima* della energia complementare è:

$$\delta_1 L_c = \int_B \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V \tag{21.49}$$

21.7 Il principio di stazionarietà dell'energia complementare totale

Si consideri l'espressione del principio delle forze virtuali, come fornita dalla (21.35), e si introduca la legge di Hooke nel primo integrale:

$$\int_B \delta\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \int_{\partial B_2} (\delta \boldsymbol{S}\boldsymbol{n})^T \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}s = 0 \tag{21.50}$$

Utilizzando la (21.49) si ha poi:

$$\delta_1 \left\{ L_c - \int_{\partial B_2} (\boldsymbol{S}\boldsymbol{n})^T \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}s \right\} = 0 \tag{21.51}$$

La quantità tra parentesi si dice *energia complementare totale* E_{tc} del corpo B:

$$E_{tc} = \frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \int_{\partial B_2} (\boldsymbol{S}n)^T \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}s \tag{21.52}$$

La (21.52) dimostra il:

Teorema 14. *(Principio di stazionarietà dell'energia complementare totale) - Il funzionale dell'energia complementare totale raggiunge un punto di stazionarietà in corrispondenza della soluzione del problema elastico.*

Secondo Gurtin, la paternità del principio di stazionarietà dell'energia complementare totale può essere attribuita a Gustavo Colonnetti[3].

[3]Si veda ancora Gustavo Colonnetti, *L'equilibrio elastico dal punto di vista energetico*, Mem. Accad. Sci. Torino, (2), 62, 479-495 (1912)