Lezione 9 - Le equazioni indefinite di equilibrio

- **[A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 28 ottobre 2012]**

In questa lezione si deducono le cosiddette *equazioni indefinite dell'equilibrio*, e si dimostra l'importante proprieta' di simmetria della matrice delle tensioni. Ambedue questi risultati vengono raggiunti imponendo l'equilibrio di un tetraedro elementare isolato all'interno del corpo [Cauchy]

Le forze agenti

Si consideri un corpo B e si isoli, idealmente, al suo interno, un parallelepipedo infinitesimo, con gli spigoli paralleli agli assi coordinati x_1, x_2, x_3. Le componenti di tensione agenti sulle sei facce del parallelepipedo sono riportate in Figura 1, positive secondo la convenzione illustrata nelle lezioni precedenti.

Ad esempio, la faccia EFGH ha normale uscente discorde all'asse coordinato x_1, e di conseguenza le tre componenti σ_{11}, σ_{12} e σ_{13} sono positive se controverse agli assi coordinati, come riportato in figura. Se gli spigoli del parallelepipedo sono lunghi dx_1, dx_2 e dx_3, rispettivamente, allora sulla faccia EFGH agiranno le forze di intensita' $\sigma_{11}\, dx_2\, dx_3$, $\sigma_{12}\, dx_2\, dx_3$, $\sigma_{13}\, dx_2\, dx_3$.

Sulla faccia parallela ABCD la normale uscente e' equiversa all'asse x_1, e quindi le componenti di tensione saranno positive se equiverse agli assi. Le forze agenti su questa faccia saranno $\sigma'_{11}\, dx_2\, dx_3$, $\sigma'_{12}\, dx_2\, dx_3$ e $\sigma'_{13}\, dx_2\, dx_3$, dove le tensioni σ'_{11}, σ'_{12}, σ'_{13} sono legate alle σ_{11}, σ_{12} e σ_{13} dalle relazioni:

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{11} &= \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \\
\sigma'_{12} &= \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \\
\sigma'_{13} &= \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} dx_1
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Analogamente, sulla faccia ACEF agiranno le forze $\sigma_{21}\, dx_1\, dx_3$, $\sigma_{22}\, dx_1\, dx_3$, $\sigma_{23}\, dx_1\, dx_3$, mentre sulla faccia parallela BDHG agiranno le $\sigma'_{21}\, dx_1\, dx_3$, $\sigma'_{22}\, dx_1\, dx_3$, $\sigma'_{23}\, dx_1\, dx_3$, con:

$$
\begin{aligned}
\sigma'_{21} &= \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \\
\sigma'_{22} &= \sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 \\
\sigma'_{23} &= \sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Infine, sulla faccia ABGF agiranno le forze $\sigma_{31}\, dx_1\, dx_2$, $\sigma_{32}\, dx_1\, dx_2$, $\sigma_{33}\, dx_1\, dx_2$, mentre sulla faccia parallela CDEH agiranno le $\sigma'_{31} dx_1\, dx_2$, $\sigma'_{32} dx_1\, dx_2$, $\sigma'_{33} dx_1\, dx_2$, con:

$$
\sigma'_{31} = \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3
$$

$$\sigma_{32}' = \sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} dx_3$$

$$\sigma_{33}' = \sigma_{33} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3$$

Le relazioni (1-3) sono giustificate nell'ambito di uno sviluppo in serie troncato al primo termine.

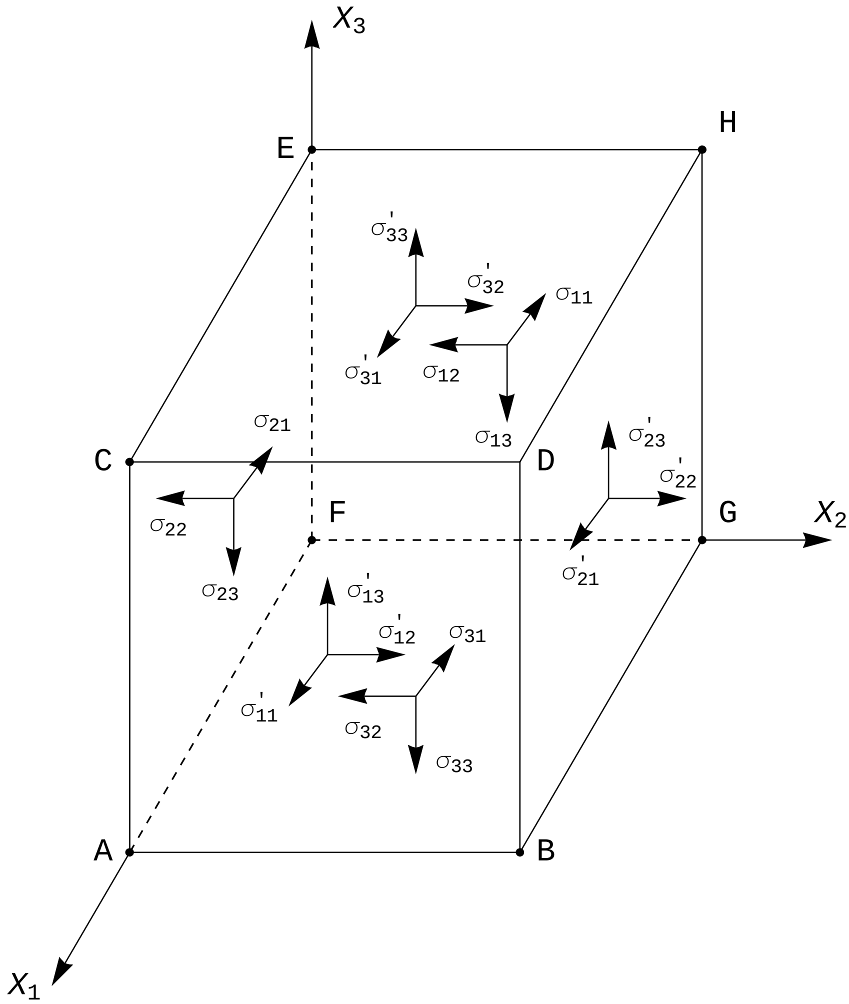

Figura 1. - Le componenti di tensione positive agenti sulle sei facce del tetraedro

Le equazioni di equilibrio alla traslazione

Se il parallelepipedo infinitesimo e' soggetto alla forza di massa **X**, di componenti X_1, X_2 ed X_3, dovra' essere garantito l'equilibrio alla traslazione tra le forze esterne e quelle interne. In direzione x_1, ad esempio, sara':

$$\begin{gathered} -\sigma_{11}\, dx_2\, dx_3 - \sigma_{21}\, dx_1\, dx_3 - \sigma_{31}\, dx_1\, dx_2 + \\ \sigma_{11}'\, dx_2\, dx_3 + \sigma_{21}'\, dx_1\, dx_3 + \sigma_{31}'\, dx_1\, dx_2 + X_1\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

ed utilizzando le (1) si ha:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \, dx_2 \, dx_3 + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_1 \, dx_2 \, dx_3 + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_1 \, dx_2 \, dx_3 + X_1 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = 0 \tag{5}$$

Poiche' la quantita' $dx_1 \, dx_2 \, dx_3$ e' sicuramente non nulla, dovra' essere necessariamente:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0 \tag{6}$$

Del tutto analogamente, l'equilibrio alla traslazione in direzione x_2 ed in direzione x_3 conduce alle altre due equazioni di equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0 \tag{8}$$

Le tre equazioni (6-8) vanno sotto il nome di *equazioni indefinite dell'equilibrio*.

Le equazioni di equilibrio alla rotazione

Si imponga ora che il parallelepipedo sia in equilibrio rispetto alle rotazioni intorno ai tre assi, scegliendo come polo dei momenti il baricentro del parallelepipedo. Questa scelta elimina dal gioco le forze di massa, applicate proprio nel baricentro, ed anche le tensioni σ_{11}, σ_{22} e σ_{33}, il cui braccio e' nullo, dato che le tensioni si suppongono applicate nei baricentri delle facce del parallelepipedo.

Cio' premesso, si consideri ad esempio l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno all'asse x_3. Si ha:

$$\sigma_{12} \, dx_2 \, dx_3 \frac{dx_1}{2} + \sigma'_{12} \, dx_2 \, dx_3 \frac{dx_1}{2} - \sigma_{21} \, dx_1 \, dx_3 \frac{dx_2}{2} - \sigma'_{21} \, dx_1 \, dx_3 \frac{dx_2}{2} = 0 \tag{9}$$

ed utilizzando le (1) e (2) si ha:

$$\sigma_{12} \, dx_2 \, dx_3 \frac{dx_1}{2} + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \, dx_3 \frac{dx_1}{2} - \sigma_{21} \, dx_1 \, dx_3 \frac{dx_2}{2} - \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \, dx_3 \frac{dx_2}{2} = 0 \tag{10}$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si giunge alla relazione:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \tag{11}$$

Imponendo l'equilibrio alla rotazione anche intorno agli altri due assi si ha, del tutto analogamente:

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} \tag{12}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} \tag{13}$$

Ne segue, in definitiva, che la matrice delle tensioni e' simmetrica, e che le componenti di tensioni si riducono a sei. Le tre tensioni ad indici uguali, σ_{11}, σ_{22} e σ_{33} si dicono *tensioni normali*, mentre le tre tensioni ad indici disuguali, σ_{12}, σ_{13} e σ_{23} si dicono *tensioni tangenziali*.

La notazione matriciale ed indiciale

Come si e' visto, le equazioni di equilibrio alla rotazione implicano la simmetria della matrice delle tensioni **S**, e di conseguenza si potra' scrivere:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Molto conveniente risulta l'introduzione del vettore $\boldsymbol{\sigma}$ delle sei componenti di tensioni:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Utilizzando tale notazione, le equazioni indefinite dell'equilibrio potranno sinteticamente scriversi come:

$$\boldsymbol{\delta\sigma} + \mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{16}$$

avendo introdotto la matrice di operatori differenziali:

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{17}$$

ed il vettore delle forze di massa:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Alternativamente, le equazioni indefinite dell'equilibrio potranno scriversi, in notazione indiciale, come:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \tag{19}$$

Un approccio alternativo

Le equazioni di equilibrio appena dedotte in modo diretto possono anche trarsi - in modo matematicamente piu' corretto - facendo uso del teorema della divergenza [Divergenza]. Ed infatti, si consideri un volume V, con frontiera δV, contenuto all'interno del corpo, e si esprimano le condizioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione:

$$\int_V \mathbf{X}\, dV + \int_{\delta V} \mathbf{t}_n\, ds = 0 \tag{20}$$

$$\int_V \mathbf{r} \times \mathbf{X}\, dV + \int_{\delta V} \mathbf{s} \times \mathbf{t}_n\, ds = 0 \tag{21}$$

Si espliciti la (20), utilizzando il teorema di Cauchy-Poisson:

$$\int_V X_i\, dV + \int_{\delta V} \sigma_{ji}\, n_i\, ds = 0, \quad i = 1, \ldots 3 \tag{22}$$

ed utilizzando il teorema della divergenza:

$$\int_V X_i\, dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}\, dV = 0, \quad i = 1, \ldots 3 \tag{23}$$

Per l'arbitrarieta' del volume V, ne seguono le (19).

Esplicitando le (21) si hanno invece le tre equazioni scalari:

$$\int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2)\, dV + \int_{\delta V} (s_2 t_{n3} - s_3 t_{n2})\, ds = 0 \tag{24}$$

$$\int_V (r_3 X_1 - r_1 X_3)\, dV + \int_{\delta V} (s_3 t_{n1} - s_1 t_{n3})\, ds = 0 \tag{25}$$

$$\int_V (r_1 X_2 - r_2 X_1)\, dV + \int_{\delta V} (s_1 t_{n2} - s_2 t_{n1})\, ds = 0 \tag{26}$$

Utilizzando il teorema di Cauchy-Poisson, la (24) diviene:

$$\int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2)\, dV + \int_{\delta V} [s_2 (\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3) - s_3 (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3)]\, ds = 0 \tag{27}$$

e per il teorema della divergenza:

$$\int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2)\, dV + \int_V \left[\frac{\partial (r_2 \sigma_{13})}{\partial x_1} + \frac{\partial (r_2 \sigma_{23})}{\partial x_2} + \frac{\partial (r_2 \sigma_{33})}{\partial x_3} - \frac{\partial (r_3 \sigma_{12})}{\partial x_1} - \frac{\partial (r_3 \sigma_{22})}{\partial x_2} - \frac{\partial (r_3 \sigma_{32})}{\partial x_3} \right] dV = 0 \tag{28}$$

Svolgendo i prodotti si ha:

$$\int_V (r_2 X_3 - r_3 X_2)\, dV + \int_V \left[r_2 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + r_2 \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{23} + r_2 \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} - r_3 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} - r_3 \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} - r_3 \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} - \sigma_{32} \right] dV = 0 \tag{29}$$

Infine, utilizzando le (19) si ottiene, per l'arbitrarieta' del volume:

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} \tag{30}$$

Dalle altre due equazioni si ottiene $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ e $\sigma_{13} = \sigma_{31}$

Note

[Cauchy] - La deduzione delle condizioni di equilibrio si trova in "*Sur les relations qui existent, dans l'état d'équilibre d'un corp solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices*" Exercises de Mathématiques, 2, pp. 108-111 [Torna al testo]

[Divergenza] - Se V e' una regione dello spazio, e se f e' un campo scalare continuo e derivabile, si ha

$$\int_{\partial V} f\, n_i\, ds = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dV \qquad (31)$$

dove n e' il versore della normale uscente al contorno. [Torna al testo]

Figure