Lezione 8 - Il teorema di Cauchy-Poisson

- **[A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 28 ottobre 2012]**

Come detto al termine della lezione precedente, occorre ora dare un criterio operativo per poter calcolare la tensione in un punto P relativamente al piano di generica normale n, dimostrando il *teorema di Cauchy-Poisson* [Cauchy]

Il tetraedro elementare e le forze su esso agenti

Si consideri un punto generico P all'interno del corpo B e si voglia conoscere la tensione in P secondo il piano di normale generica **n**. In un intorno di P si isoli un tetraedro infinitesimo di materia, di volume dV, con le tre facce ortogonali dA_{x1}, dA_{x2}, dA_{x3} parallele ai tre piani coordinati, e con la faccia obliqua dA avente normale **n**.

Siano $\boldsymbol{t}_n$ la tensione agente in P relativamente al piano obliquo, $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$ e $\boldsymbol{\sigma}_3$ le tensioni in P relativamente ai tre piani coordinati. Si ammette ora, essendo il tetraedro infinitesimo, che le tensioni in tutti i punti di ciascuna faccia siano uguali, giungendo alla situazione di Figura 1. [Nota 2]

Siano ora t_{n1}, t_{n2}, t_{n3} le componenti di $\boldsymbol{t}_n$ secondo i tre assi coordinati, σ_{11}, σ_{12} e σ_{13} le componenti di $\boldsymbol{\sigma}_1$ secondo gli stessi assi coordinati, σ_{21}, σ_{22} e σ_{23} le componenti di $\boldsymbol{\sigma}_2$, ed infine σ_{31}, σ_{32} e σ_{33} siano le componenti di $\boldsymbol{\sigma}_3$.

Si noti che il primo indice denota la normale alla faccia su cui opera la tensione, mentre il secondo indice denota la direzione lungo la quale si calcola la componente.

Inoltre, per convenzione, la componente di tensione agente su una faccia la cui normale esterna e' rivolta secondo il verso positivo di uno dei tre assi sara' positiva se ha verso concorde con gli assi, mentre la componente di tensione agente su una faccia la cui normale esterna e' rivolta secondo il verso negativo di uno dei tre assi sara' positiva se ha verso discorde con gli assi.

Infine, nel volume agira' una forza di volume **X**, di componenti X_1, X_2 ed X_3, e quindi, se dV indica il volume del tetraedro, su dV insisteranno anche le forze X_1 dV, X_2dV ed X_3dV.

In complesso, quindi, agiranno le componenti di forze indicate in Figura 2.

L'equilibrio alla traslazione secondo l'asse x_1, l'asse x_2 e l'asse x_3, impone che sia:

$$t_{n1}\, dA - (\sigma_{11}\, dA_{x1} + \sigma_{21}\, dA_{x2} + \sigma_{31}\, dA_{x3}) + X_1\, dV = 0 \quad (1)$$

$$t_{n2}\, dA - (\sigma_{12}\, dA_{x1} + \sigma_{22}\, dA_{x2} + \sigma_{32}\, dA_{x3}) + X_2\, dV = 0 \quad (2)$$

$$t_{n3}\, dA - (\sigma_{13}\, dA_{x1} + \sigma_{23}\, dA_{x2} + \sigma_{33}\, dA_{x3}) + X_3\, dV = 0 \quad (3)$$

e dividendo per dA si ottiene:

$$t_{n1} - \left(\sigma_{11} \frac{dA_{x1}}{dA} + \sigma_{21} \frac{dA_{x2}}{dA} + \sigma_{31} \frac{dA_{x3}}{dA}\right) + X_1 \frac{dV}{dA} = 0 \quad (4)$$

$$t_{n2} - \left(\sigma_{12}\frac{dA_{x1}}{dA} + \sigma_{22}\frac{dA_{x2}}{dA} + \sigma_{32}\frac{dA_{x3}}{dA}\right) + X_2\frac{dV}{dA} = 0 \qquad (5)$$

$$t_{n3} - \left(\sigma_{13}\frac{dA_{x1}}{dA} + \sigma_{23}\frac{dA_{x2}}{dA} + \sigma_{33}\frac{dA_{x3}}{dA}\right) + X_3\frac{dV}{dA} = 0 \qquad (6)$$

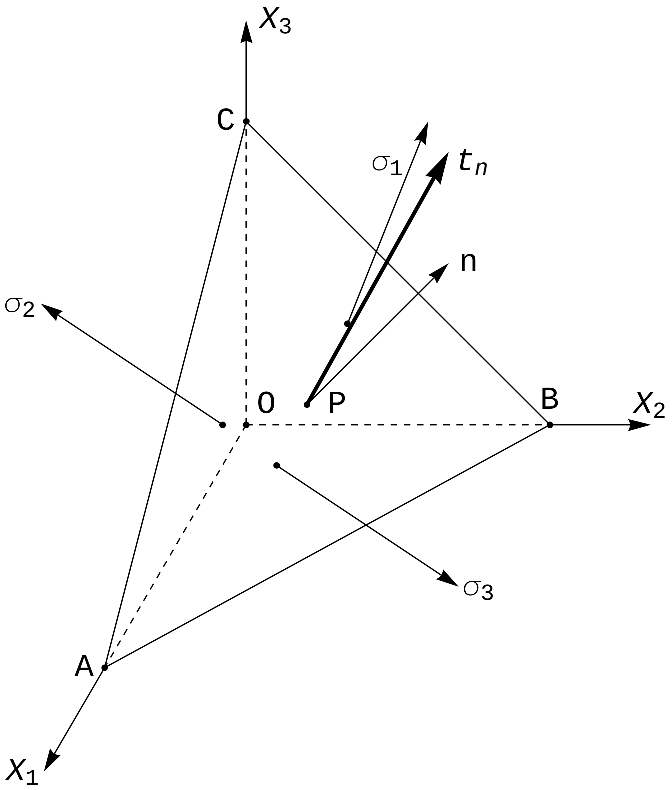

Figura 1 - Il tetraedro elementare e le forze interne su di esso agenti

Ora, per la geometria del tetraedro, si ha [Nota 3]:

$$\frac{dA_{x1}}{dA} = n_1; \quad \frac{dA_{x2}}{dA} = n_2; \quad \frac{dA_{x3}}{dA} = n_3; \qquad (7)$$

dove n_1, n_2, n_3 sono i coseni direttori della normale **n** alla giacitura prescelta:

$$n_1 = \text{Cos}(\mathbf{n}, x_1); \; n_2 = \text{Cos}(\mathbf{n}, x_2); \; n_3 = \text{Cos}(\mathbf{n}, x_3) \qquad (8)$$

Inoltre, se h e' la distanza tra il piano obliquo ABC e l'origine, si ha $dV = \frac{1}{3} h \, dA$, e per $h \to 0$ le relazioni precedenti divengono:

$$t_{n1} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \qquad (9)$$

$$t_{n2} = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \qquad (10)$$

$$t_{n3} = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 \qquad (11)$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

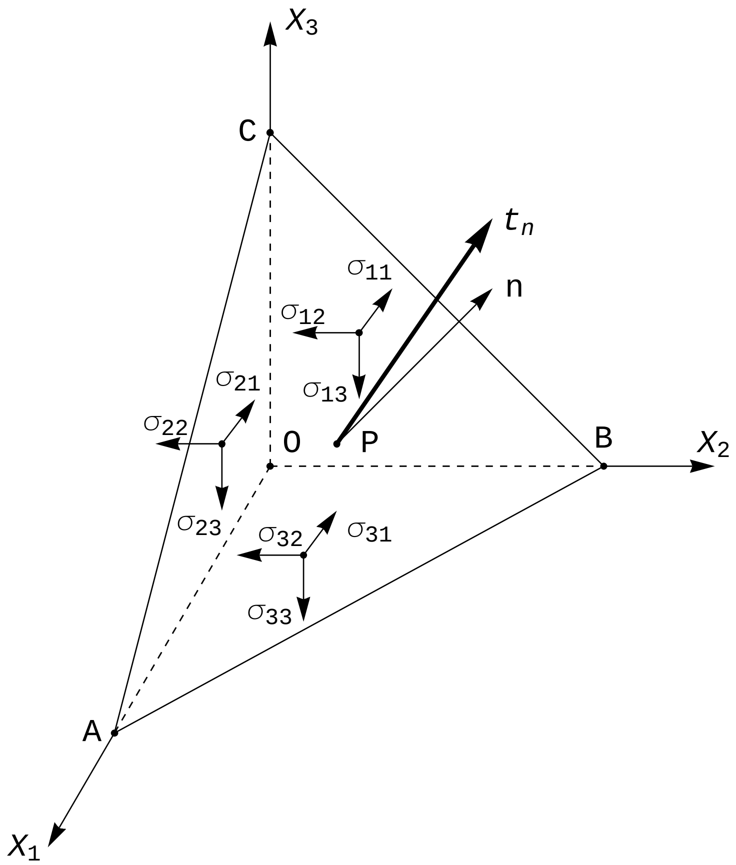

Figura 2 - Il tetraedro elementare e le componenti delle forze interne su di esso agenti lungo i tre assi coordinati

o, equivalentemente:

$$\mathbf{t_n} = \mathbf{S}^T \mathbf{n} \qquad (13)$$

avendo definito la *matrice delle tensioni*:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Utilizzando la notazione indiciale, e la convenzione degli indici ripetuti, potra' anche scriversi:

$$t_{ni} = \sigma_{ji} n_j \qquad (15)$$

Si e' cosi' dimostrato il:

Teorema (Cauchy-Poisson) - Si consideri il corpo B in equilibrio sotto le forze di massa **X** e superficiali **p**, ed un punto P situato al suo interno. Assegnate le tensioni in P lungo tre piani di normale x_1, x_2 e x_3, e' possibile ricavare la tensione $\boldsymbol{t_n}$ in P lungo un qualsiasi altro piano di normale **n**, tramite la relazione:

$$\mathbf{t_n} = \mathbf{S}^T \mathbf{n} \qquad (16)$$

dove **S** e' la matrice (14) delle componenti delle tensioni sui tre piani cooridnati, di normale x_1, x_2 e x_3, ed **n** e' il vettore dei coseni direttori della normale rispetto agli assi x_1, x_2 e x_3.

Figura 3 - Siméon-Denis Poisson

Nota 1 - Si noti che, poiche' le forze di massa scompaiono dalla deduzione della (13), le stesse valgono sia in regime statico che dinamico.

Nota 2 - Se il punto P prescelto non e' interno al volume, ma si trova sulla superficie, e se la normale **n** e' la normale al contorno del corpo, allora il ruolo giocato dalla tensione t_n nel teorema di Cauchy-Poisson e' assunto dalla forza superficiale **p**, e le relazioni (12) esprimono l'equilibrio tra forze superficiali e tensioni:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

o, indicialmente:

$$p_i = \sigma_{ji}\, n_j \tag{18}$$

Le tensioni normali e tangenziali

Utilizzando il teorema di Cauchy-Poisson, appena dimostrato, si puo' calcolare facilmente la tensione normale agente sul piano di normale **n**. Sara' infatti:

$$t_{nn} = \sigma_n = t_n \cdot n = t_{n1}\, n_1 + t_{n2}\, n_2 + t_{n3}\, n_3 = t_{ni}\, n_i \tag{19}$$

dove il punto indica il prodotto scalare. Utilizzando le (9-11) si ha:

$$t_{nn} = \sigma_n = \sigma_{11}\, n_1^2 + \sigma_{22}\, n_2^2 + \sigma_{33}\, n_3^2 + (\sigma_{12} + \sigma_{21})\, n_1\, n_2 + (\sigma_{13} + \sigma_{31})\, n_1\, n_3 + (\sigma_{23} + \sigma_{32})\, n_2\, n_3 = \sigma_{ij}\, n_i\, n_j \tag{20}$$

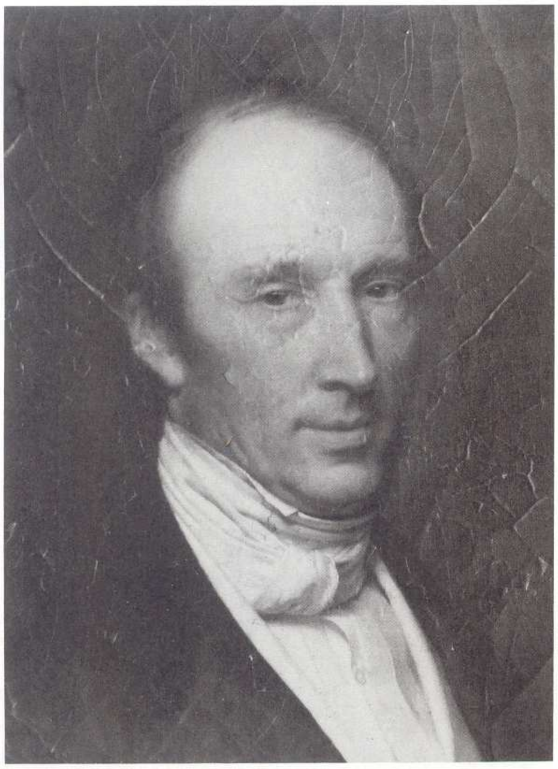

Figura 4 - Augustin-Louis Cauchy in un dipinto di J.Roller, circa 1840

L'*ampiezza* della tensione tangenziale τ_n puo' calcolarsi considerando che dovra' essere:

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 \tag{21}$$

e quindi:

$$\tau_n^2 = t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 - \sigma_n^2 \tag{22}$$

La *direzione* della tensione tangenziale, invece, puo' calcolarsi determinando i suoi coseni direttori ($n_{\tau 1}$, $n_{\tau 2}$, $n_{\tau 3}$). Poiche' ad esempio la somma delle componenti di σ_n e di τ_n in direzione x_1 deve essere uguale a t_{n1}, dovra' essere:

$$\sigma_n n_1 + \tau_n n_{\tau 1} = t_{n1} \tag{23}$$

da cui subito:

$$n_{\tau 1} = \frac{t_{n1} - \sigma_n n_1}{\tau_n} \tag{24}$$

Del tutto analogamente:

$$n_{\tau 2} = \frac{t_{n2} - \sigma_n n_2}{\tau_n} \tag{25}$$

$$n_{\tau 3} = \frac{t_{n3} - \sigma_n n_3}{\tau_n} \tag{26}$$

Note

[Cauchy] L'enunciato originario del teorema, e la sua dimostrazione, si trovano in "*Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques*" Bulletin des Sciences par la Societé Philomatique, pp.9-13, 1823, e piu' diffusamente in "*De la pression ou tension dans un corps solide*" Ex. de Math. 2, 42-56, pubblicato nel 1827, ma scritto nel 1822.
Poisson ha dimostrato invece che l'esistenza del tensore delle tensioni implica che il corpo debba essere in equilibrio sotto le forze esterne, cfr. "*Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*" Mém. Acad. Sci. Inst. France (2) 8, 357-570.
Il teorema dimostrato in questa lezione e' implicitamente accettato anche da A. Fresnel, in un lavoro del 1822 ("*Second supplément au mémoire sur la double réfraction*" in OEuvres 2, 369-442 (1868)) che pero' si basa sulle ipotesi di elasticita' lineare, ed anche da Fourier, in un lavoro del 1814 sulla conduzione del calore ("*Théorie Analytique de la Chaleur*", Paris, OEuvres 1, 1822)).
Per una versione moderna dello stesso teorema si puo' consultare M.E. Gurtin, V.J. Mizel e W.O. Williams, "*A note on Cauchy's stress theorem*", J. Math. Anal. Appl. 22, 398-401 (1968). [Torna al testo]

[Nota 2] Piu' rigorosamente, si assume che le tensioni varino con continuita', e quindi le componenti della forza agente sulla faccia obliqua ABC saranno esprimibili come $(t_{n1}+\varepsilon_1)$dA, $(t_{n2}+\varepsilon_2)$dA, e $(t_{n3}+\varepsilon_3)$dA, secondo i tre assi. Se poi h denota la distanza tra il piano ABC e l'origine, sara':

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon_1 = 0;\ \lim_{h\to 0}\varepsilon_2 = 0;\ \lim_{h\to 0}\varepsilon_3 = 0; \tag{27}$$

Analoga posizione dovra' essere assunta per le componenti cartesiane di tensione, che daranno luogo alle forze:

$$(-\sigma_{11}+\varepsilon_{11})\, dA_{x1},\ \ (-\sigma_{12}+\varepsilon_{12})\, dA_x\, 2,\ \ (-\sigma_{13}+\varepsilon_{13})\, dA_{x3} \tag{28}$$

$$(-\sigma_{21}+\varepsilon_{21})\, dA_{x2},\ \ (-\sigma_{22}+\varepsilon_{22})\, dA_{x2},\ \ (-\sigma_{23}+\varepsilon_{23})\, dA_{x2} \tag{29}$$

$$(-\sigma_{31}+\varepsilon_{31})\, dA_{x3},\ \ (-\sigma_{32}+\varepsilon_{32})\, dA_{x3},\ \ (-\sigma_{33}+\varepsilon_{33})\, dA_{x3} \tag{30}$$

con:

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon_{ij} = 0;\ \ i, j = 1, 2, 3 \tag{31}$$

Infine, le forze di massa saranno fornite dalle espressioni:

$$\left(X_1+\varepsilon_1'\right) dV,\ \ \left(X_2+\varepsilon_2'\right) dV,\ \ \left(X_3+\varepsilon_3'\right) dV, \tag{32}$$

con:

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon_i' = 0;\ i = 1, 2, 3; \tag{33}$$

[Torna al testo]

[Nota 3] Sia infatti, dalla Figura 1:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_1;\ \overrightarrow{OB} = \vec{r}_2;\ \overrightarrow{OC} = \vec{r}_3; \tag{34}$$

sicche', operando vettorialmente:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\ ;\ \overrightarrow{AC} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1\ ;\ \overrightarrow{BC} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2\ ; \tag{35}$$

Calcolando il prodotto vettoriale tra $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ si ha:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \times \left(\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right) =$$
$$\vec{r}_2 \times \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \times \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$$

Ora, e' noto che il prodotto vettoriale tra due vettori x ed y e' un vettore ortogonale sia ad x che ad y, di modulo pari all'area del parallelogramma di lati x ed y, e con verso dettato dalla regola della mano destra. Ne segue che la relazione precedente puo' scriversi:

$$(dA)\,\vec{n} = (dA_{x1})\,\vec{\nu}_1 + (dA_{x2})\,\vec{\nu}_2 + (dA_{x3})\,\vec{\nu}_3 \qquad (37)$$

dove $\vec{\nu}_1$, $\vec{\nu}_2$ e $\vec{\nu}_3$ sono i vettori unitari (versori) ortogonali alle superfici OCB, OCA e OAB, rispettivamente. Infine, dividendo per dA, si ha:

$$\vec{n} = \left(\frac{dA_{x1}}{dA}\right)\vec{\nu}_1 + \left(\frac{dA_{x2}}{dA}\right)\vec{\nu}_2 + \left(\frac{dA_{x3}}{dA}\right)\vec{\nu}_3 \qquad (38)$$

e quindi i tre coseni direttori della normale sono forniti da:

$$n_1 = \frac{dA_{x1}}{dA};\; n_2 = \frac{dA_{x2}}{dA};\; n_3 = \frac{dA_{x3}}{dA} \qquad (39)$$

[Torna al testo]

Figure