Lezione 6 - Analisi statica

- **[A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 7 ottobre 2012]**

Si consideri la stessa struttura bidimensionale della lezione precedente, ossia un insieme di travi collegate tra loro ed al suolo da opportuni vincoli. Si vuole ora indagare se la struttura in esame e' in equilibrio, o meno, ed eventualmente si vuole indicare un procedimento di calcolo per le reazioni incognite dei vincoli.

La classificazione statica delle strutture

Si consideri una struttura costituita da t tratti, e si immagini di eliminare tutti i vincoli, sia esterni che interni, sostituendo ad essi le rispettive reazioni vincolari. Ci si e' ridotti ad un insieme di t tratti liberi, soggetti ai carichi esterni, noti, ed alle *m* reazioni vincolari incognite, e poiche' per ciascuna di queste tratti e' possibile scrivere tre equazioni di equilibrio, sulla struttura non vincolata potranno scriversi 3t equazioni di equilibrio nelle *m* incognite vincolari.

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b} \qquad (1)$$

dove la matrice statica **A** ha 3t righe ed *m* colonne.

Si supponga ora che le equazioni di equilibrio linearmente indipendenti siano $N \leq 3t$, tenendo conto del fatto che particolari disposizioni dei vincoli possono portare ad equazioni di equilibrio lineramente dipendenti, e si osservi la seguente classificazione:

A. N - m > 0

Esistono piu' equazioni che incognite, sicche' le equazioni non possono essere risolte a fornire le reazioni, se non per particolari condizioni di carico, identificabili analiticamente come quelle condizioni di carico che portano ad una matrice estesa ancora di rango N. In tal caso si parla di *struttura labile*, in cui i vincoli sono incapaci di garantire l'equilibrio. Il numero $l = N-m$ e' il grado di labilita' della struttura. Il corrispondente caso cinematico e' quello dei meccanismi.

B. N - m = 0

Il numero di equazioni di equilibrio lineramente indipendenti e' pari al numero delle incognite. Ne segue che la soluzione esiste per qualsiasi condizione di carico, ed e' unica. La struttura risulta in equilibrio ed e' agevole calcolare le reazioni vincolari. In tal caso si parla di *struttura isostatica*, equivalente della struttura *cinematicamente determinata.*

C. N - m < 0

Esistono piu' reazioni vincolari che equazioni di equilibrio, la struttura e' in equilibrio, ma in genere non e' possibile calcolare le reazioni vincolari con le sole equazioni della statica. La struttura si dice *iperstatica*, il numero $i = m-N$ e' il grado di iperstaticita' della struttura, ed esistono ∞^i soluzioni possibili.

La scrittura delle equazioni di equilibrio

Si consideri la trave di Figura 1a, vincolata al suolo da una cerniera situata in corrispondenza dell'estremo di sinistra, e soggetta ad una forza verticale F in corrispondenza dell'estremo libero. Sostituendo alla cerniera le due reazioni incognite verticali ed orizzontali R_H ed R_V, come illustrato in alto della stessa Figura 1a), si possono scrivere le tre equazioni di equilibrio:

$$
\begin{aligned}
R_H &= 0\\
R_V + F &= 0\\
R_V L &= 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

dove si e' assunto come polo l'estremo libero, e dove - come sempre - si sono assunte positive le reazioni dirette secondo gli assi e le coppie antiorarie. Le (2) rappresentano tre equazioni nelle due incognite reattive, e non possono essere risolte: la struttura non e' in equilibrio, e ruotera' intorno alla cerniera di sinistra.

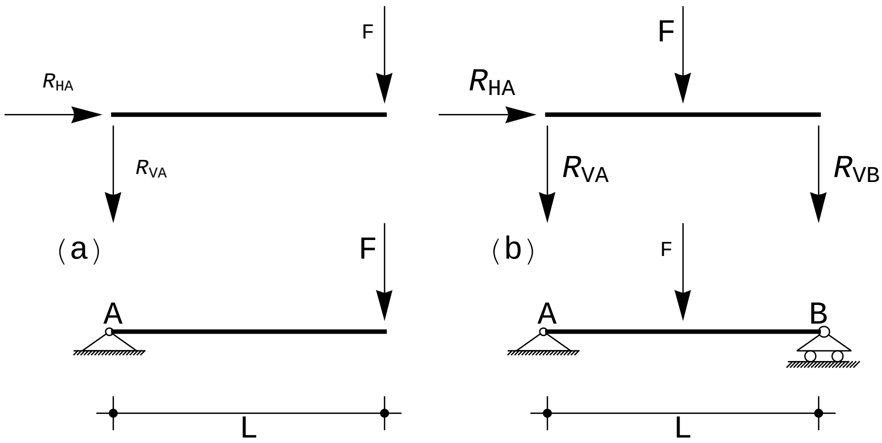


Figura 1 - Due esempi di analisi statica

Si consideri ora la trave di Figura 1b, vincolata da una cerniera nell'estremo di sinistra e da un carrello a piano di scorrimento orizzontale nell'estremo di destra, e soggetta ad una forza in mezzeria. I vincoli sono equivalenti a due reazioni R_{HA}ed R_{VA} nell'estremo di sinistra, ed una reazione R_{VB}a destra. Scegliendo come polo l'estremo di sinistra, si possono scrivere le tre equazioni:

$$
\begin{aligned}
R_{HA} &= 0\\
R_{VA} + R_{VB} + F &= 0\\
F\frac{L}{2} + R_{VB} L &= 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

o, matricialmente:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & L \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} R_{HA}\\ R_{VA}\\ R_{VB} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0\\ -F\\ -F\frac{L}{2} \end{pmatrix}
\tag{4}
$$

La matrice ha rango massimo, la struttura e' isostatica, e le reazioni possono facilmente calcolarsi.

Come terzo esempio, si esamini la trave in Figura 2a), incastrata a sinistra ed appoggiata a destra ad un carrello a piano di scorrimento orizzontale, e soggetta ad un carico distribuito su tutta la luce. Le reazioni incognite sono quattro, come illustrato in Figura 2c), mentre le equazioni di equilibrio restano tre:

$$R_{HA} = 0$$
$$R_{VA} + R_{VB} + qL = 0$$
$$q\frac{L^2}{2} + R_{VB}L + \mathcal{M}_{rA} = 0$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{HA} \\ R_{VA} \\ R_{VB} \\ \mathcal{M}_{rA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -qL \\ -q\frac{L^2}{2} \end{pmatrix} \tag{6}$$

La struttura risulta una volta iperstatica, ed esiste una infinita' di soluzioni.

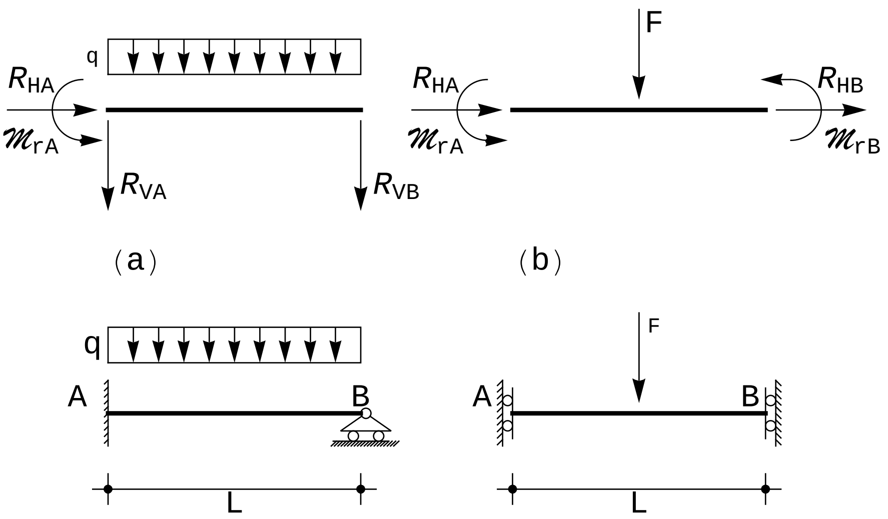


Figura 2 - Altri due esempi di analisi statica

Infine, si consideri la trave di Figura 2b), vincolata agli estremi da due bipendoli ad asse di scorrimento verticale, e soggetta ad una forza in mezzeria. Per essa si potranno scrivere le tre equazioni di equilibrio:

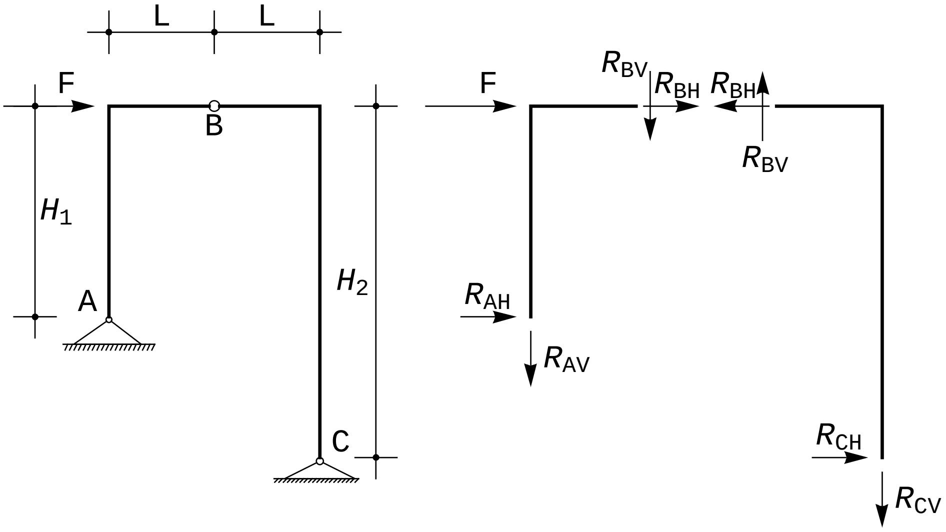
$$R_{HA} + R_{HB} = 0$$
$$F = 0 \tag{7}$$
$$\mathcal{M}_{rA} + \mathcal{M}_{rB} - F\frac{L}{2} = 0$$

Ne risulta chiaramente che per cattiva disposizione dei vincoli, la struttura non potra' risultare in equilibrio, e piu' in particolare subira' una traslazione verticale.

Un esempio piu' complesso

Si consideri infine il telaio di Figura 3, costituito da due piedritti di altezza $h_1$ed h_2, rispettivamente, e da un traverso di luce 2L. Alle due estremita' una cerniera blocca ambedue le traslazioni, ed il traverso e' suddiviso in mezzeria per mezzo di una terza cerniera. La struttura e' soggetta ad una forza orizzontale in corrispondenza del traverso.

La struttura e' formata da due travi, e sostituendo ai vincoli, interni ed esterni, le corrispondenti reazioni, si possono imporre le condizioni di equilibrio per le due travi, scegliendo come poli i punti A e C, rispettivamente:



$$\begin{aligned}
&R_{HA} + R_{HB} + F = 0 \\
&R_{VA} + R_{VB} = 0 \\
&-F\,h_1 - R_{HB}\,H_1 - R_{VB}\,L = 0 \\
&-R_{HB} + R_{HC} = 0 \\
&-R_{VB} + R_{VC} = 0 \\
&R_{HB}\,H_2 - R_{VB}\,L = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & H_2 & -L & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{HA} \\ R_{VA} \\ R_{HB} \\ R_{VB} \\ R_{HC} \\ R_{VC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ -FH_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Il determinante della matrice di equilibrio e' pari a $-L(H_1 + H_2)$ e di conseguenza e' diverso da zero, le reazioni possono essere calcolate e l'equilibrio e' garantito:

$$\begin{aligned}
&R_{HA} = F\,\frac{H_2}{H_1 + H_2} \\
&R_{VA} = -F\,\frac{H_1\,H_2}{(H_1 + H_2)\,L} \\
&R_{HB} = -F\,\frac{H_1}{H_1 + H_2} \\
&R_{VB} = F\,\frac{H_1\,H_2}{(H_1 + H_2)\,L} \\
&R_{HC} = -F\,\frac{H_1}{H_1 + H_2} \\
&R_{VC} = -F\,\frac{H_1\,H_2}{(H_1 + H_2)\,L}
\end{aligned} \tag{10}$$

Figure