Lezione 5 - Analisi cinematica

- **[A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 7 ottobre 2012]**

Si consideri ora una struttura bidimensionale, ossia un insieme di travi collegate tra loro ed al suolo da opportuni vincoli. In questa lezione si vogliono studiare i possibili cinematismi della struttura, ossia i possibili spostamenti infinitesimi della struttura stessa, a partire da una configurazione iniziale.

La classificazione cinematica delle strutture

Si consideri una struttura costituita da *t* tratti, intendendo con "tratto" il pezzo di struttura compreso tra due vincoli, interni o esterni che siano. Si immagini ora di eliminare tutti i vincoli, sia esterni che interni. Ci si e' ridotti in tal modo ad una insieme di *t* tratti liberi, ciascuno dei quali e' dotato di tre gradi di liberta', due traslazionali ed uno rotazionale, e quindi la struttura non vincolata ha 3*t* possibilita' di movimento, o 3t *gradi di liberta'*. Numerando i tratti da 1 ad *t*, tali gradi di liberta' possono essere convenientemente organizzati in un vettore **d**:

$$\mathbf{d}^T = \left(u_2^{(1)},\ u_3^{(1)},\ \phi^{(1)},\ u_2^{(2)},\ u_3^{(2)},\ \phi^{(2)},\ \ldots\ u_2^{(t)},\ u_3^{(t)},\ \phi^{(t)}\right) \tag{1}$$

In **d** trovano quindi posto, tratto per tratto, lo spostamento rigido orizzontale, lo spostamento rigido verticale e la rotazione rigida, calcolata adottando un generico polo di riferimento per ogni tratto.

Siano ora *m* le equazioni di vincolo che si possono scrivere in base ai dispositivi di vincolo previsti, sicche' *m* sono i gradi di liberta' soppressi dai vincoli stessi. Poiche' in ogni tratto si possono esprimere gli spostamenti di un punto generico attraverso i tre parametri u_1, u_2e ϕ, ne segue che le *m* equazioni di vincolo potranno esprimersi come equazioni lineari nei 3*t* incogniti gradi di liberta':

$$\mathbf{Cd} = \mathbf{0} \tag{2}$$

dove la matrice cinematica **C** ha *m* righe e 3*t* colonne.

Si supponga ora che tra le *m* equazioni di vincolo esistano *p* relazioni di dipendenza, riducendo ad *s* = *m*-*p* il numero di equazioni lineramente indipendenti, e si consideri la seguente classificazione:

A. 3t - s > 0

Esistono piu' gradi di liberta' di quanti ne siano stati soppressi dai vincoli, la struttura quindi e' in grado di subire uno spostamento rigido. In tal caso si parla di struttura *cinematicamente indeterminata*, o di *struttura labile*, ed occorrera' identificare i possibili meccanismi di moto.

B. 3t - s = 0

I vincoli sono esattamente in numero pari ai gradi di liberta', che quindi vengono tutti proibiti. La struttura non e' in grado di subire uno spostamento rigido. In tal caso si parla di struttura *cinematicamente determinata.*

C. 3t - s < 0

I vincoli sono sovrabbondanti ed i gradi di liberta' vengono tutti proibiti. La struttura non e' in grado di subire uno spostamento rigido, ed anche in tal caso si parla di struttura *cinematicamente determinata.*La distinzione tra il caso B ed il caso C risultera' evidente quando nella prossima lezione si studiera' la classificazione statica delle strutture.

Esempi ad una singola trave

Si consideri la trave di Figura 1a, vincolata al suolo da una cerniera situata in corrispondenza dell'estremo di sinistra. Le condizioni di vincolo dettano:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Scegliendo come gradi di liberta' le due traslazioni del punto A, e la rotazione della trave intorno allo stesso punto A, la (2) diviene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

La struttura e' una volta labile, in quanto il rango della matrice cinematica e' pari a 2, ed il corrispondente cinematismo e' rappresentato da una rotazione di ampiezza non specificata intorno al punto A.

Si consideri ora la trave di Figura 1b, vincolata da una cerniera nell'estremo di sinistra e da un carrello a piano di scorrimento orizzontale nell'estremo di destra. Le condizioni di vincolo dettano:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \\ u_2^B &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Scegliendo anche in questo caso come gradi di liberta' le due traslazioni del punto A, e la rotazione della trave intorno allo stesso punto A, occorre preventivamente esprimere la terza condizione di vincolo in termini dei tre gradi di liberta' prescelti. E' immediato realizzare che in ipotesi di spostamenti infinitesimi si ha $u_2^B = \phi^A L$, dove L e' la luce della trave, e quindi la (2) si scrivera' ora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

La struttura e' cinematicamente determinata, ed esistono tanti vincoli quanti sono i gradi di liberta': 3t - s = 0, poiche' il rango della matrice C e' massimo.

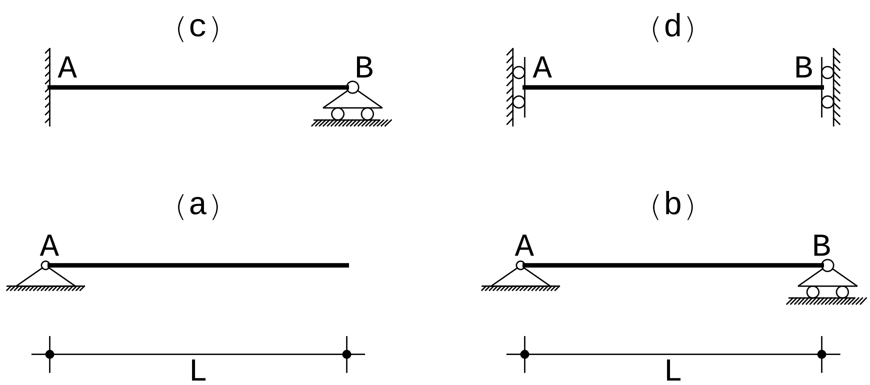

Figura 1 - Quattro semplici esempi di analisi cinematica

Come terzo esempio, si esamini la trave in Figura 1c, incastrata a sinistra ed appoggiata a destra ad un carrello a piano di scorrimento orizzontale. Le condizioni di vincolo sono quattro:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \\ \phi^A &= 0 \\ u_2^B &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

e quindi la (2) diviene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

La struttura e' cinematicamente determinata, in quanto 3t < s, ed il rango di C e' massimo.

Infine, si consideri la trave di Figura 1d, vincolata agli estremi da due bipendoli ad asse di scorrimento verticale. Per essi si avra':

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ \phi^A &= 0 \\ u_3^B &= 0 \\ \phi^B &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Ne segue che la struttura e' labile, in quanto la matrice C ha rango 2, e solo due condizoni di vincolo sono efficaci.

Un esempio piu' complesso

Si consideri infine il telaio di Figura 2, costituito da due piedritti di altezza H_1 ed H_2, rispettivamente, e da un traverso di luce 2L. All'estremita' di sinistra una cerniera blocca ambedue le traslazioni, mentre all'estremita' di destra un carrello a piano di scorrimento orizzontale blocca le traslazioni verticali. Inoltre, il traverso e' suddiviso in mezzeria per mezzo di una cerniera.

La struttura e' formata da due travi, ed in assenza di vincoli possiede quindi sei gradi di liberta'; nel seguito si scelgono le traslazioni u_1^A ed u_2^A del primo tratto, e la rotazione ϕ^A dello stesso tratto intorno alla cerniera, le due traslazioni u_1^C ed u_2^C del secondo tratto, insieme alla rotazione ϕ^C del secondo tratto intorno al carrello di destra. Corrispondentemente, esistono cinque equazioni di vincolo:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \\ u_{3\,s}^B &= u_{3\,d}^B \\ u_{2\,s}^B &= u_{2\,d}^B \\ u_2^C &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

dove u_{3s}^B e' lo spostamento orizzontale del primo tratto in corrispondenza della cerniera interna, mentre u_{3d}^B e' lo spostamento orizzontale del secondo tratto in corrispondenza della stessa cerniera interna.

Occorre ora esprimere queste equazioni in termini dei sei prescelti gradi di liberta'. A tal fine si consideri che si potra' scrivere:

$$\begin{aligned} u_{3s}^B &= u_3^A - \phi^A H_1 \\ u_{2s}^B &= u_2^A - \phi^A L \\ u_{3d}^B &= u_3^C - \phi^B H_2 \\ u_{2d}^B &= u_2^C + \phi^B L \end{aligned} \tag{12}$$

e quindi le (11) divengono:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -H_1 & -1 & 0 & H_2 \\ 0 & 1 & -L & 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \\ u_3^C \\ u_2^C \\ \phi^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

E' immediato dedurre che il rango della matrice C e' pari a cinque, e quindi le equazioni di vincolo sono linearmente indipendenti, segnalando che la struttura e' una volta labile.

Per calcolare il corrispondente meccanismo, si puo' porre arbitrariamente pari a δ lo spostamento orizzontale del carrello, $u_1^C = \delta$, in modo che le (13) si trasformano in cinque equazioni non omogenee a determinante non nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H_1 & 0 & H_2 \\ 0 & 1 & L & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3^A \\ u_2^A \\ \phi^A \\ u_2^C \\ \phi^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} u_3^A &= 0 \\ u_2^A &= 0 \\ \phi^A &= -\frac{\delta}{H_1 + H_2} \\ \phi^C &= \frac{\delta}{H_1 + H_2} \\ u_2^C &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Infine, utilizzando le (12) si possono ottenere gli spostamenti della cerniera:

$$\begin{aligned} u_3^B &= \frac{\delta H_1}{H_1 + H_2} \\ u_2^B &= \frac{\delta L}{H_1 + H_2} \end{aligned} \tag{16}$$

In Figura 2 e' riportato anche il meccanismo appena identificato.

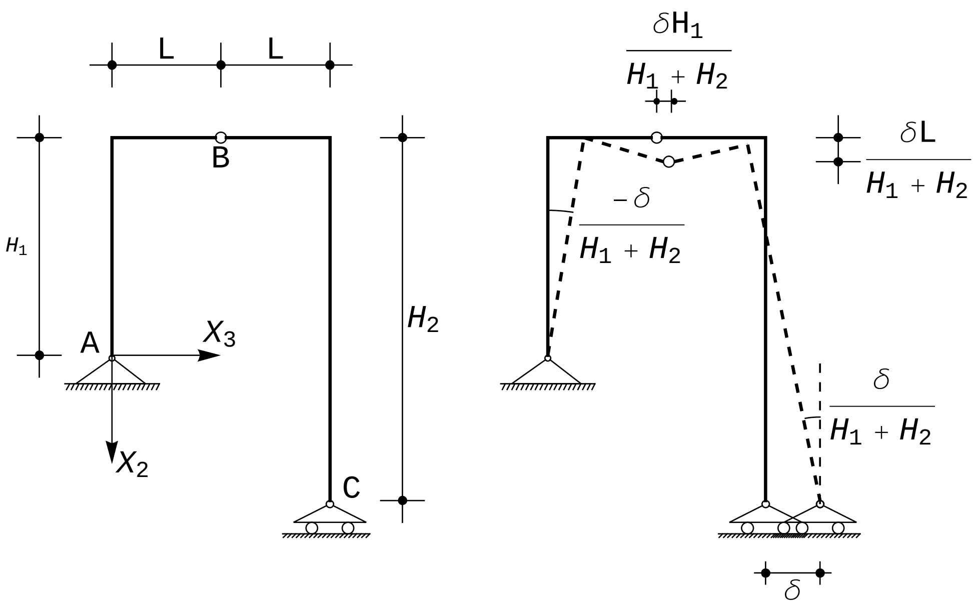

Figura 2 - Il telaio zoppo di esempio ed il suo possibile meccanismo

Figure