

# Lezione 45 - Il principio dei lavori virtuali nell'analisi delle travi

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 22 aprile 2012]

Si specializza il principio dei lavori virtuali al caso dei sistemi monodimensionali piani, utilizzando i risultati delle teorie tecniche di Eulero-Bernoulli e di Timoshenko.

A tal fine, si consideri una struttura S, costituita da un assemblaggio di travi, per ciascuna delle quali si possano ritenere valide le ipotesi a base delle suddette teorie, e si immagini che tale struttura sia soggetta a carichi di varia natura: e' ad esempio possibile immaginare che esistano carichi distribuiti  $q'(s)$  con legge generica, coppie distribuite  $m'(s)$  con legge generica, un insieme di  $N_1$  forze concentrate  $F'_i$ , un insieme di  $N_2$  coppie concentrate  $\mathcal{M}'_i$ .

Infine, la struttura e' vincolata al suolo con vincoli riconducibili ad un insieme di  $N_3$  reazioni vincolari  $R'_i$  e di  $N_4$  coppie reattive  $\mathcal{M}'_{ri}$ .

Si ricorda che l'insieme di queste forze e reazioni deve essere *staticamente ammissibile*, ossia in equilibrio con un insieme di tensioni  $\sigma'_{ij}$ , che a loro volta generano un insieme di momenti M', sforzi normali N' e tagli T'

Si consideri poi un insieme di spostamenti  $u_i$ , *geometricamente ammissibili*, agenti sulla stessa struttura S, e siano M, N e T le c.s.i. corrispondenti a questo stato di spostamenti.

Il lavoro virtuale *esterno* corrispondente a questo insieme di forze ed a questo insieme di spostamenti si scrive quindi:

$$L_e = \int_S q'(s) u_q(s) ds + \int_S m'(s) \phi_m(s) ds + \sum_{i=1}^{N_1} F'_i u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \phi_{mi} + \sum_{i=1}^{N_3} R'_i \eta_i + \sum_{i=1}^{N_4} \mathcal{M}'_{ri} \theta_{ri} \quad (1)$$

dove si sono introdotte le seguenti notazioni:  $u_q(s)$  rappresenta la componente di spostamento del punto dell'asse in corrispondenza del carico  $q'(s)$ , misurata nella direzione del carico,  $\phi_m(s)$  e' la rotazione della sezione relativa ai tratti in cui sono applicate le coppie distribuite  $m'(s)$ ,  $u_{Fi}$  e' la componente dello spostamento in corrispondenza del punto di applicazione della i-ma forza, misurata nella direzione di detta forza,  $\phi_{mi}$  e' la rotazione della sezione in corrispondenza della i-ma coppia concentrata. Infine,  $\eta_i$  e' l'eventuale cedimento del punto di applicazione della i-ma reazione vincolare, nella sua direzione, e  $\theta_{ri}$  e' l'eventuale rotazione anelastica della sezione cui e' applicata la i-ma coppia reattiva.

I primi quattro termini della (1) traducono quindi l'aliquota:

$$\int_{\partial B_1} p_i u_i ds \quad (2)$$

mentre gli ultimi due termini traducono la:

$$\int_{\partial B_2} \sigma_{ij} n_j f_i ds \quad (3)$$

Le forze di massa sono invece assenti.

Il lavoro virtuale interno si scriverà invece come:

$$L_i = \int_B (\sigma'_{33} e_{33} + 2 \sigma'_{23} e_{23}) dV \quad (4)$$

Per esprimere  $L_i$  in termini di c.s.i., si possono utilizzare le relazioni che legano le tensioni normali e tangenziali allo sforzo normale, al momento flettente ed al taglio. Per lo stato tensionale  $\sigma'_{ij}$  si avrà:

$$\sigma'_{33} = \frac{N'}{A} + \frac{M'}{I} x_2 \quad (5)$$

$$\sigma'_{23} = \frac{T'}{A_s} \quad (6)$$

dove  $A_s = \kappa A$  è l'area efficace a taglio, mentre la distribuzione di deformazioni geometricamente ammissibili potrà scriversi come:

$$e_{33} = \frac{N}{EA} + \frac{M}{EI} x_2 \quad (7)$$

$$2 e_{23} = \frac{T}{GA_s} \quad (8)$$

dove le due distribuzioni di c.s.i. ( $M', N', T'$ ) ed (M,N,T) non sono in alcun modo collegate tra loro. Utilizzando le (5-8), il lavoro virtuale interno diviene:

$$L_i = \int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds \quad (9)$$

ed infine, il principio dei lavori virtuali si traduce nell'uguaglianza:

$$\int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds = \int_s \mathbf{q}'(s) u_q(s) ds + \int_s \mathbf{m}'(s) \phi_m(s) ds + \sum_{i=1}^{N_1} F'_i u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \phi_{mi} + \sum_{i=1}^{N_3} R'_i \eta_i + \sum_{i=1}^{N_4} \mathcal{M}'_{ri} \theta_{ri} \quad (10)$$

valida per qualunque distribuzione ( $M', N', T'$ ) di caratteristiche della sollecitazione interna, che sia in equilibrio con le forze applicate, e per qualsiasi distribuzione (M,N,T) che sia derivante da spostamenti geometricamente ammissibili

Dal principio dei lavori virtuali si possono trarre, secondo la falsariga di quanto fatto per il solido tridimensionale, il principio degli spostamenti virtuali, per cui:

$$\int_s N' \frac{\delta N}{EA} ds + \int_s M' \frac{\delta M}{EI} ds + \int_s T' \frac{\delta T}{GA_s} ds = \int_s \mathbf{q}'(s) \delta u_q(s) ds + \int_s \mathbf{m}'(s) \delta \phi_m(s) ds + \sum_{i=1}^{N_1} F'_i \delta u_{Fi} + \sum_{i=1}^{N_2} \mathcal{M}'_i \delta \phi_{mi} \quad (11)$$

valida per la distribuzione effettiva di c.s.i. (M',N',T'), e per una qualsiasi distribuzione di spostamenti virtuali ( $\delta u, \delta \phi$ ) che si annulli in corrispondenza dei vincoli, e che generi le c.s.i. ( $\delta M, \delta N, \delta T$ ). Infine, il principio delle forze virtuali si scrive:

$$\int_s \delta N' \frac{N}{EA} ds + \int_s \delta M' \frac{M}{EI} ds + \int_s \delta T' \frac{T}{GA_s} ds = \sum_{i=1}^{N_3} \delta R'_i \eta_i + \sum_{i=1}^{N_4} \delta M'_{ri} \theta_{ri} \quad (12)$$

ed e' valido per la distribuzione effettiva degli spostamenti ( $u, \phi$ ) e per una qualsiasi distribuzione di c.s.i. ( $\delta N, \delta M, \delta T$ ) che sia in equilibrio con forze nulle. Ovviamente,  $\delta R_i$  e  $\delta M_{ri}$  sono deducibili a partire dalle corrispondenti c.s.i.

## Il principio dei lavori virtuali per il calcolo degli spostamenti su strutture isostatiche

Si consideri una struttura *isostatica* S, e si voglia calcolare la componente di spostamento di un suo punto P secondo la retta orientata  $r$ . A tal fine si puo' utilizzare il p.l.v. nel seguente modo:

1. si studia la struttura S soggetta ad una forza *fittizia*, e di valore unitario, agente in P in direzione della retta  $r$ , e si calcolano le reazioni vincolari ( $R'_i, \mathcal{M}'_{ri}$ ) e le caratteristiche della sollecitazione interna (M',N',T'). Si assume questa distribuzione di c.s.i. come insieme staticamente ammissibile (sistema 1)
2. si studia la struttura S soggetta alle forze *effettive*, e si calcolano le reazioni vincolari ( $R_i, \mathcal{M}_{ri}$ ) e le caratteristiche della sollecitazione interna (M,N,T). I corrispondenti campi di spostamenti  $u(s)$  e rotazioni  $\phi(s)$  sono assunti quali spostamenti geometricamente ammissibili. (sistema 2)
3. si scrive il p.l.v. assumendo come sistema staticamente ammissibile le c.s.i. (M',N',T') e le reazioni vincolari ( $R'_i, \mathcal{M}'_{ri}$ ), sicuramente in equilibrio in presenza della forza fittizia, e come sistema di spostamenti geometricamente ammissibili gli spostamenti effettivi, che generano le c.s.i. (M,N,T). Si ha:

$$\int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds = 1 u_r + \sum_{i=1}^{N_3} R'_i \eta_i + \sum_{i=1}^{N_4} \mathcal{M}'_{ri} \theta_{ri} \quad (13)$$

dove  $u_r$  e' il richiesto spostamento.

**Nota 1** - Se occorre calcolare la rotazione di una sezione, la struttura andra' fittiziamente caricata da una coppia concentrata di valore unitario, in corrispondenza della sezione in esame

**Nota 2** - In presenza di cedimenti elastici, caratterizzati da una relazione lineare tra spostamenti e reazioni:

$$\begin{aligned} S_{Ri} &= -c_{ri} R_i \\ \phi_{ri} &= -c_{\phi i} \mathcal{M}_{ri} \end{aligned} \quad (14)$$

il p.l.v. si scrivera' :

$$\begin{aligned} \int_s N' \frac{N}{EA} ds + \int_s M' \frac{M}{EI} ds + \int_s T' \frac{T}{GA_s} ds = \\ 1 u_r + \sum_{i=1}^{N_3} R'_i (\eta_i - c_{ri} R_i) + \sum_{i=1}^{N_4} \mathcal{M}'_{ri} (\theta_{ri} - c_{\phi i} \mathcal{M}_{ri}) \end{aligned} \quad (15)$$

in quanto le reazioni del primo sistema ( $R'_i, \mathcal{M}'_{ri}$ ) compiranno lavoro anche per gli spostamenti (14) del sistema (2).

**Nota 3** - Se il campo di spostamenti geometricamente ammissibile del sistema (2) comprende anche distribuzioni  $\lambda(s)$ ,  $\mu(s)$  e  $\theta(s)$  di distorsioni, il p.l.v. si scrivera':

$$\int_{\mathcal{S}} N' \left( \frac{N}{EA} - \lambda \right) ds + \int_{\mathcal{S}} M' \left( \frac{M}{EI} - \mu \right) ds + \int_{\mathcal{S}} T' \left( \frac{T}{GA_S} - \theta \right) ds =$$

$$1 u_r + \sum_{i=1}^{N_3} R'_i (\eta_i - c_{ri} R_i) + \sum_{i=1}^{N_4} \mathcal{M}'_{ri} (\theta_{ri} - c_{\phi i} \mathcal{M}_{ri})$$

dove il segno meno è dovuto al fatto che c.s.i. positive compiono lavoro negativo in presenza di distorsioni positive.

**Nota 4** - I tre termini che compaiono a primo membro della (13) rappresentano i contributi assiale, flessionale e tagliante del lavoro interno, rispettivamente. Spesso, è possibile trascurare un termine rispetto agli altri: ad esempio, nelle travi snelle si potrà certamente evitare di calcolare l'aliquota tagliante.

## Un esempio per il calcolo di uno spostamento su struttura isostatica

Si consideri la trave di Figura 1, e si voglia calcolare la rotazione della sezione in corrispondenza dell'appoggio.

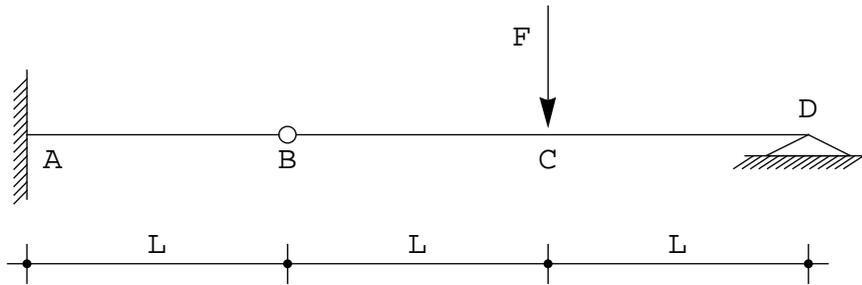


Figura 1 - Un esempio per il calcolo di uno spostamento su una struttura isostatica

Per utilizzare il principio dei lavori virtuali, si sceglie come sistema staticamente ammissibile (sistema 1) la trave caricata da una coppia fittizia in corrispondenza dell'appoggio in D:

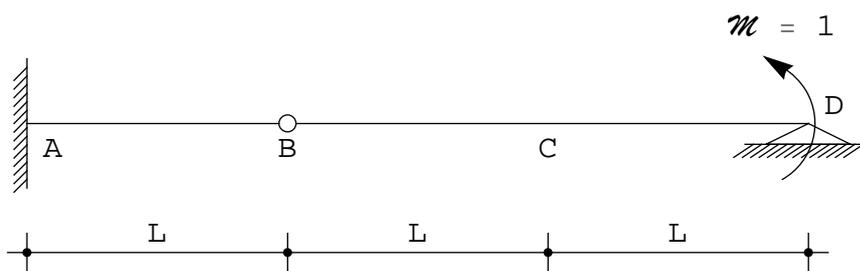


Figura 2 - Il sistema 1, staticamente ammissibile, su cui calcolare il momento  $M'$

Si sceglie come sistema geometricamente ammissibile (sistema 2) il sistema reale, caricato dalla forza F:

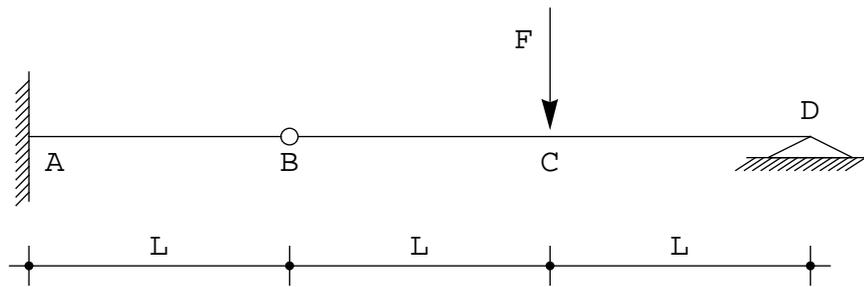


Figura 3 - Il sistema 2, geometricamente ammissibile, su cui calcolare il momento M

Il principio dei lavori virtuali fornisce, in ipotesi di trave omogenea a sezione costante, e limitandosi al solo contributo flessionale:

$$\frac{1}{EI} \int_0^{3L} M' M dx_3 = 1 \phi_D \quad (17)$$

Occorre quindi calcolare il momento  $M'$  sullo schema 1, ed il momento M sullo schema 2.

Sullo schema 1, caricato da una coppia, il momento si presenta come un'unica retta, con valore unitario a destra, e con un punto di nullo sulla cerniera:

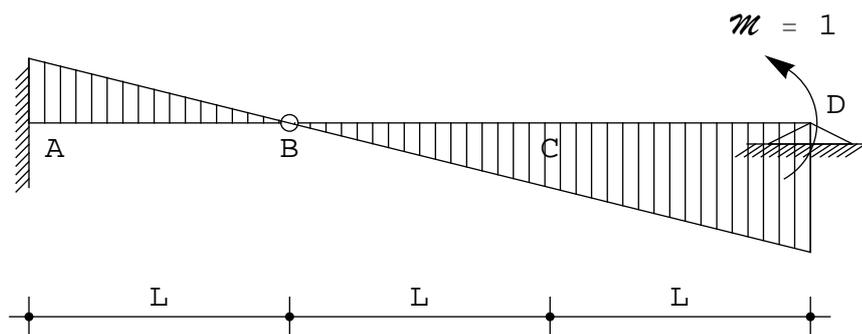


Figura 4 - Il momento  $M'$  sul sistema 1

Sullo schema 2, invece, il diagramma varia linearmente da A a C, per poi proseguire con un'altra inclinazione, annullandosi in D.

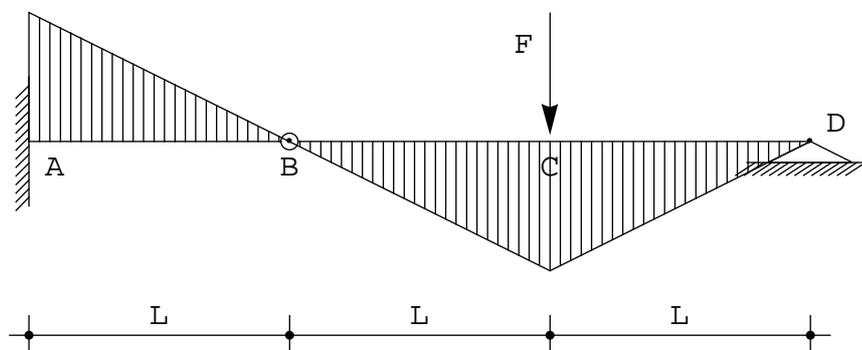


Figura 5 - Il momento M, calcolato sul sistema 2

Analiticamente, si ottiene :

$$M' (x_3) = \frac{\mathcal{M}}{2} \frac{x_3}{L} - \frac{\mathcal{M}}{2} \quad (18)$$

in AC, e :

$$M' (x_3) = \frac{\mathcal{M}}{2} + \frac{\mathcal{M}}{2} \frac{x_3}{L} \quad (19)$$

in C, avendo assunto due sistemi di riferimento, con origine in A e C, rispettivamente. Analogamente, si ottiene:

$$M (x_3) = \frac{F}{2} x_3 - \frac{F}{2} L \quad (20)$$

in AC, e :

$$M (x_3) = \frac{F}{2} L - \frac{F}{2} x_3 \quad (21)$$

Sara' quindi necessario suddividere il calcolo dell' integrale in due aliquote :

$$\begin{aligned} \phi_D &= \frac{1}{EI} \int_0^{2L} M' M dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^L M' M dx_3 = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \int_0^{2L} \left( \frac{1}{2} \frac{x_3}{L} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{F}{2} x_3 - \frac{F}{2} L \right) dx_3 + \right. \\ &\quad \left. \int_0^L \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x_3}{L} \right) \left( \frac{F}{2} L - \frac{F}{2} x_3 \right) dx_3 \right] = \frac{FL^2}{3EI} \end{aligned} \quad (22)$$

Nota 5 - Dedurre i diagrammi dei momenti delle Figure 4 e 5, assieme alla loro distribuzione analitica

Nota 6 - Confermare il risultato (22) applicando il metodo della linea elastica, oppure il metodo dei corollari di Mohr, oppure ancora il metodo di Saviotti

## Il p.l.v. per la scrittura delle equazioni di congruenza su strutture iperstatiche

Una seconda interessante utilizzazione del principio dei lavori virtuali si ottiene nell'applicazione del metodo delle forze, con la relativa scrittura delle equazioni di congruenza. Sia S una struttura *i* volte iperstatica, si identifichi una opportuna struttura isostatica equivalente (S.I.E.), in modo da poter scrivere simbolicamente:

$$S = S^{(0)} + \sum_{j=1}^i X_j S^{(j)} \quad (23)$$

dove  $S^{(0)}$  e' la struttura isostatica prescelta, soggetta ai carichi applicati, ed  $S^{(j)}$  e' la struttura isostatica soggetta ad un carico unitario in corrispondenza della j-ma incognita iperstatica  $X_j$ .

Si assuma ora come sistema staticamente ammissibile la struttura  $S^{(j)}$ , e come sistema geometricamente ammissibile la struttura reale S. Se si assume, per semplicita', che i vincoli siano perfetti e che non siano presenti distorsioni, il p.l.v. si scrive:

$$\int_s M^{(j)} \frac{M}{EI} ds = 0 \quad j = 1, \dots, i \quad (24)$$

tenendo conto del solo effetto flessionale. Per il principio di sovrapposizione degli effetti sara' poi:

$$M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + \dots + X_i M^{(i)} \tag{25}$$

e quindi la (24) diviene :

$$\int_S M^{(j)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + X_1 \int_S M^{(j)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + \dots + X_i \int_S M^{(j)} \frac{M^{(i)}}{EI} ds = 0 \quad j = 1, \dots, i \tag{26}$$

Sono queste le *i* equazioni di congruenza, che permettono il calcolo delle *i* incognite iperstatiche  $X_j$ .

### Un esempio

Si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 6, per cui  $i = 2$ .

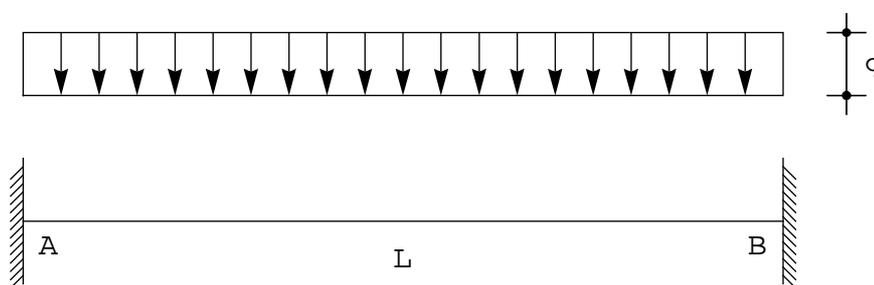


Figura 6 - Una struttura S doppiamente iperstatica

Si sceglie come struttura isostatica equivalente la trave a mensola incastrata a sinistra e libera a destra, soggetta al carico  $q$ , alla forza incognita  $X_1$  a destra, ed alla coppia incognita  $X_2$  a destra.

Si puo' scrivere, formalmente,  $S = S^{(0)} + X_1 S^{(1)} + X_2 S^{(2)}$ , nel senso che - utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti - tutto cio' che deve essere calcolato sul sistema isostatico equivalente puo' essere calcolato sui tre schemi  $S^{(0)}$ ,  $S^{(1)}$  ed  $S^{(2)}$ . Ad esempio, il diagramma del momento  $M$  sullo schema di Figura 6 puo' calcolarsi come  $M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + X_2 M^{(2)}$ .

I valori delle due incognite iperstatiche devono essere tali da ripristinare i vincoli in B, e quindi proibire abbassamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned} u_{2B} &= 0 \\ \phi_B &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

Si adotti ora come sistema staticamente ammissibile il sistema  $S^{(1)}$  di Figura 8, e come sistema geometricamente ammissibile il sistema S, o meglio, il suo sistema isostatico equivalente. Il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_0^L M^{(1)} M dx_3 = 0 \tag{28}$$

Adottando invece come sistema staticamente ammissibile il sistema  $S^{(2)}$  di Figura 9, e come sistema geometricamente ammissibile il sistema S, o meglio, il suo sistema isostatico equivalente, il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_0^L M^{(2)} M dx_3 = 0 \tag{29}$$

Ora, per il principio di sovrapposizione degli effetti, si potra' scrivere  $M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + X_2 M^{(2)}$ , e

quindi si ottengono due equazioni nelle due incognite  $X_1$  ed  $X_2$ :

$$\int_0^L M^{(1)} M^{(0)} dx_3 + X_1 \int_0^L M^{(1)} M^{(1)} dx_3 + X_2 \int_0^L M^{(1)} M^{(2)} dx_3 = 0$$

$$\int_0^L M^{(2)} M^{(0)} dx_3 + X_1 \int_0^L M^{(2)} M^{(1)} dx_3 + X_2 \int_0^L M^{(2)} M^{(2)} dx_3 = 0$$
(30)

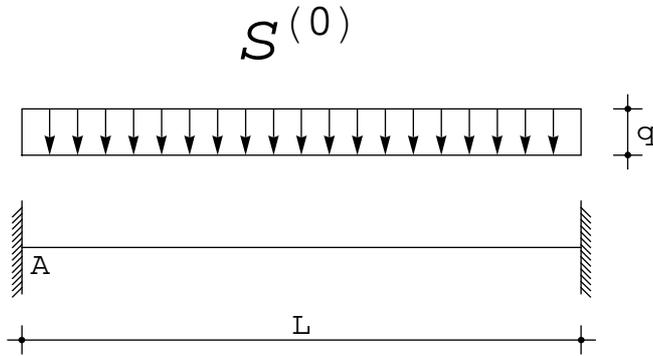


Figura 7 - Il sistema  $S^{(0)}$ , isostatico e soggetto al carico uniformemente distribuito

Il momento  $M^{(0)}$ , da calcolare sullo schema di Figura 7, e' distribuito con legge parabolica, ed analiticamente puo' scriversi:

$$M^{(0)}(x_3) = -\frac{q}{2} x_3^2 + q L x_3 - q \frac{L^2}{2}$$
(31)

Il momento  $M^{(1)}$  si deve calcolare sullo schema di Figura 8, ed e' esprimibile come legge lineare:

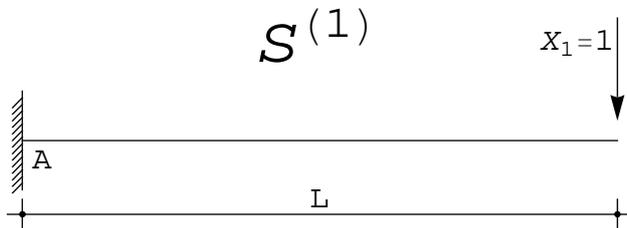


Figura 8 - Il sistema  $S^{(1)}$ , isostatico e soggetto all'incognita iperstatica  $X_1$ , posta unitaria

$$M^{(1)}(x_3) = x_3 - L$$
(32)

Infine,  $M^{(2)}$  e' da calcolare sullo schema di Figura 9, ed e' pari ad 1:

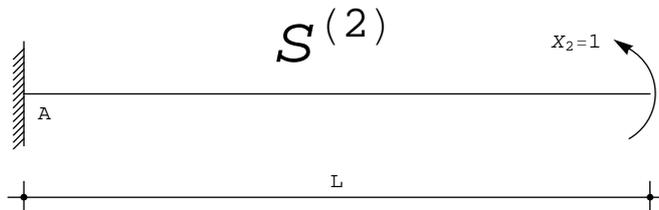


Figura 9 - Il sistema  $S^{(2)}$ , isostatico e soggetto all'incognita iperstatica  $X_2$ , posta unitaria

$$M^{(2)}(x_3) = 1$$
(33)

Le (30) si scrivono allora :

$$\int_0^L (x_3 - L) \left( \frac{-q}{2} x_3^2 + q L x_3 - q \frac{L^2}{2} \right) dx_3 +$$

$$X_1 \int_0^L (x_3 - L)^2 dx_3 + X_2 \int_0^L (x_3 - L) dx_3 = 0$$

$$\int_0^L \left( \frac{-q}{2} x_3^2 + q L x_3 - q \frac{L^2}{2} \right) dx_3 + X_1 \int_0^L (x_3 - L) dx_3 + X_2 \int_0^L dx_3 = 0$$

ossia, calcolando gli integrali:

$$\frac{L^3}{3} X_1 - \frac{L^2}{2} X_2 = - \frac{q L^4}{8} \quad (35)$$

$$- \frac{L^2}{2} X_1 + L X_2 = \frac{q L^3}{6} \quad (36)$$

con soluzione:

$$X_1 = - q \frac{L}{2} \quad (37)$$

$$X_2 = - q \frac{L^2}{12}$$

**Figure**