
Lezione 44 - Le linee di influenza per distorsioni viaggianti.

■ [A.a. 2013 - 2014 : ultima revisione 8 Aprile 2014]

In questa Lezione si termina lo studio delle linee di influenza, affrontando il terzo e quarto gruppo di possibili linee, in cui gli spostamenti o le caratteristiche sono dovute a distorsioni viaggianti.

Il secondo utilizzo del teorema di Colonnetti: le linee di influenza degli spostamenti

In questa sezione si vogliono tracciare le linee di influenza di spostamenti (spostamenti verticali o rotazioni) in una sezione retta S , dovuti a distorsioni (di rotazione o di scorrimento) viaggianti. Ne segue che occorrerà caricare la struttura in S con gli enti duali degli spostamenti, ossia con una forza verticale o con una coppia, e bisognerà calcolare il diagramma degli enti duali delle distorsioni, ossia momenti flettenti o tagli

Tutto ciò può anche essere confermato dal teorema di Colonnetti. Se ad esempio si vuole la linea di influenza dello spostamento verticale per distorsione rotazionale viaggiante, si consideri la trave soggetta ad una distorsione rotazionale D_ϕ unitaria nella sezione retta generica S' (sistema 1), e la stessa trave soggetta ad una forza verticale F nella sezione S (sistema 2). Per il teorema di Colonnetti si può scrivere:

$$F u_{2S} + M_{S'} D_{\phi S'} = 0 \quad (1)$$

da cui, essendo la distorsione unitaria :

$$u_{2S} = - \frac{M_{S'}}{F} \quad (2)$$

Quindi, la linea di influenza $\eta_S^{D\phi}$ dello spostamento per distorsione rotazionale viaggiante si ottiene caricando la struttura con una forza unitaria e negativa nella sezione S , e calcolando il relativo diagramma dei momenti. Su strutture isostatiche è spesso immediato calcolare i diagrammi di momenti e tagli, su strutture iperstatiche complesse può essere ancora utile ricorrere alla scrittura delle equazioni differenziali della linea elastica. Il metodo di soluzione, lo si ribadisce, è del tutto indipendente dalla teoria delle linee di influenza

■ **Caso 3a - Linea di influenza $\eta_S^{D\phi}$ dello spostamento in S per distorsione rotazionale viaggiante**

A titolo di esempio, si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 1, e si voglia la linea di influenza dello spostamento ad un quarto della luce per effetto di una distorsione rotazionale viaggiante.

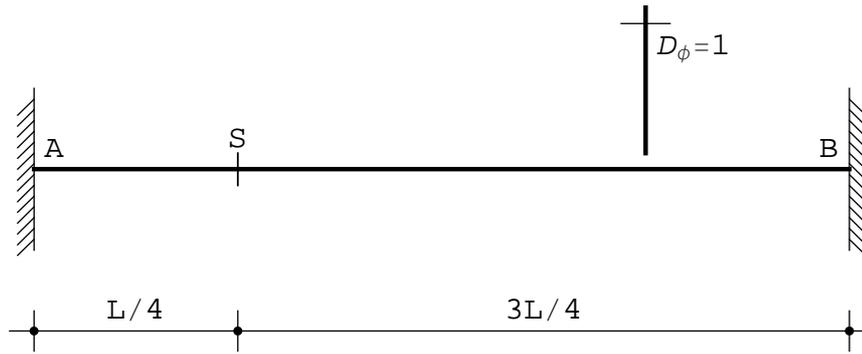


Figura 1 - Trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante

Occorre calcolare il diagramma dei momenti provocati da una forza unitaria e negativa in $L/4$, e tale problema è risolvibile immediatamente a fornire la richiesta linea di influenza:

$$\begin{aligned} m_{L/4}^F &= \frac{9}{64} (L - 6 x_3) & x_3 &\leq \frac{L}{4} \\ m_{L/4}^F &= \frac{1}{64} (-7 L + 10 x_3) & x_3 &\geq \frac{L}{4} \end{aligned} \quad (3)$$

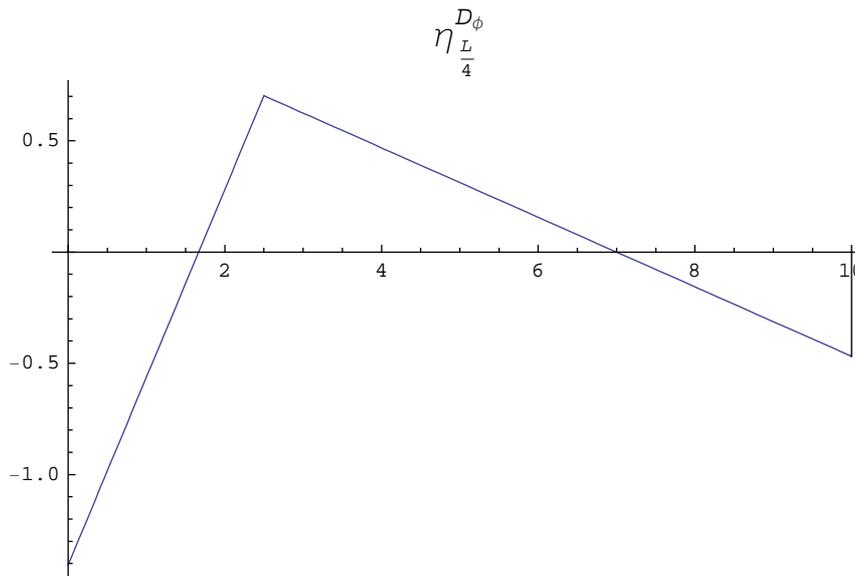


Figura 2 - Linea di influenza $\eta_{L/4}^{D_\phi}$ dello spostamento per una trave doppiamente incastrata soggetta a distorsione rotazionale viaggiante

il cui grafico si presenta come in Figura 2. Dal diagramma si evince, ad esempio, che se si vuole ottenere il massimo spostamento ad un quarto della luce, bisogna applicare la distorsione nell'incastro di sinistra

■ Caso 3b - Linea di influenza $\phi_S^{D_\phi}$ della rotazione in S per distorsione rotazionale viaggiante

Per ottenere la richiesta linea di influenza bisogna calcolare il diagramma dell'ente duale dell'ente viaggiante (e quindi occorre calcolare il diagramma dei momenti) dovuto ad un ente unitario che sia duale dell'ente in esame (e quindi occorre caricare la struttura in S con una coppia unitaria e negativa).

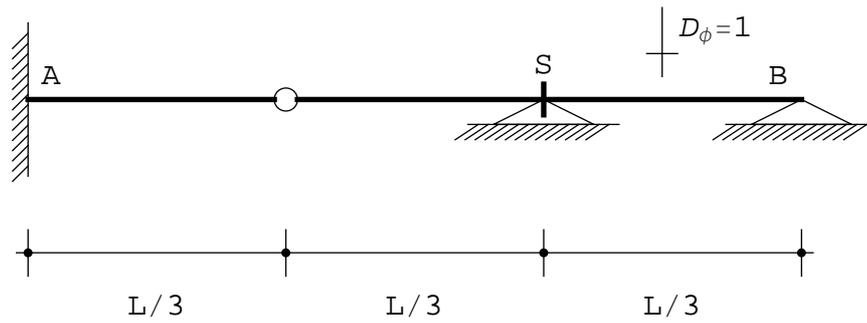


Figura 3 - Trave incastrata, con cerniera e due appoggi

A titolo di esempio, si consideri la trave di Figura 3, e si voglia la linea di influenza della rotazione nella sezione sull'appoggio a due terzi della luce S, dovuta ad una distorsione rotazionale concentrata viaggiante, ossia si voglia tracciare il diagramma dei momenti dovuti ad una coppia unitaria e negativa agente in corrispondenza del suddetto appoggio. Si ha:

$$\begin{aligned} \phi_{2L/3}^{D_\phi} &= \frac{1}{3} - \frac{x_3}{L} & 0 \leq x_3 \leq \frac{2}{3} L \\ \phi_{2L/3}^{D_\phi} &= 2 - \frac{2x_3}{L} & \frac{2}{3} L \leq x_3 \leq L \end{aligned} \quad (4)$$

Graficamente si ottiene :

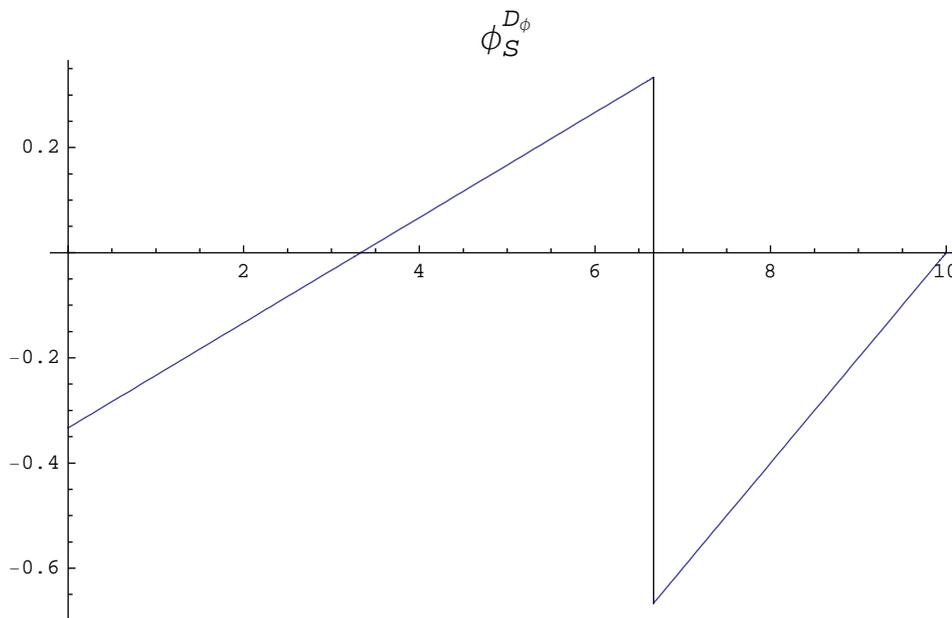


Figura 4 - Linea d'influenza $\phi_{2L/3}^{D_\phi}$ per la trave di Figura 3

■ Caso 3c - Linea di influenza $\eta_S^{D\eta}$ dello spostamento in S per distorsione di scorrimento viaggiante

In questo caso, poiché si vuole la linea di influenza dello spostamento, bisognerà assoggettare la trave ad una forza unitaria e negativa. Poiché l'ente viaggiante è una distorsione di scorrimento, occorre calcolare il diagramma del taglio. In Figura 5 è presentato il caso di una trave a tre campate con sbalzo, e si vuole tracciare la linea di influenza dello spostamento all'estremo libero per effetto di una distorsione di scorrimento viaggiante. In altri termini, si deve tracciare il diagramma del taglio dovuto ad una forza unitaria agente nell'estremo libero.

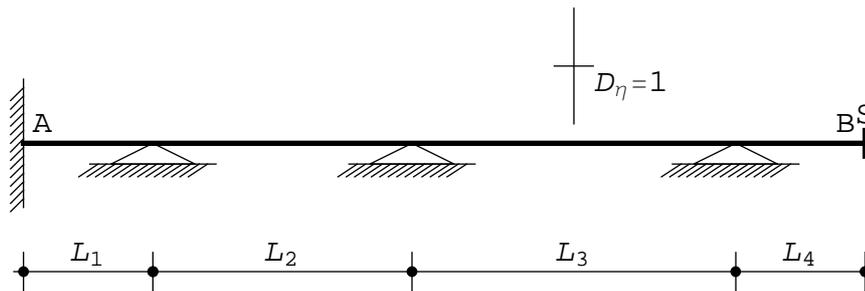


Figura 5 - Trave a tre campate e sbalzo

L'espressione analitica della richiesta linea di influenza è'

$$\begin{aligned}
 \eta_S^{D\eta} &= \frac{3 L_2 L_3 L_4}{2 L_1 (3 L_1 (L_2 + L_3) + L_2 (3 L_2 + 4 L_3))} & 0 \leq x_3 \leq L_1 \\
 \eta_S^{D\eta} &= -\frac{3 (L_1 + 2 L_2) L_3 L_4}{2 L_2 (3 L_1 (L_2 + L_3) + L_2 (3 L_2 + 4 L_3))} & L_1 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 \\
 \eta_S^{D\eta} &= \frac{3 (2 L_2 (L_2 + 2 L_3) + L_1 (2 L_2 + 3 L_3)) L_4}{2 L_3 (3 L_1 (L_2 + L_3) + L_2 (3 L_2 + 4 L_3))} & L_1 + L_2 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 + L_3 \\
 \eta_S^{D\eta} &= -1 & L_1 + L_2 + L_3 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 + L_3 + L_4
 \end{aligned} \tag{5}$$

Come si vede, sullo sbalzo la linea di influenza varrà sempre -1, poi vi sarà un tratto costante e positivo sulla terza e prima campata, alternata ad un valore negativo sulla seconda campata. I valori dipenderanno dalle luci: per il caso particolare $L_1 = 2$, $L_2 = 4$, $L_3 = 5$, $L_4 = 2$ si ha la linea di Figura 6

■ Caso 3d - Linea di influenza $\phi_S^{D\eta}$ della rotazione in S per distorsione di scorrimento viaggiante

In quest'ultimo caso si dovrà caricare la trave con una coppia di valore unitario e negativo, e poi calcolare il risultante diagramma del taglio. Sullo stesso esempio precedente, bisognerà calcolare il diagramma del taglio dovuto ad una coppia applicata nell'estremo libero. Si ha;

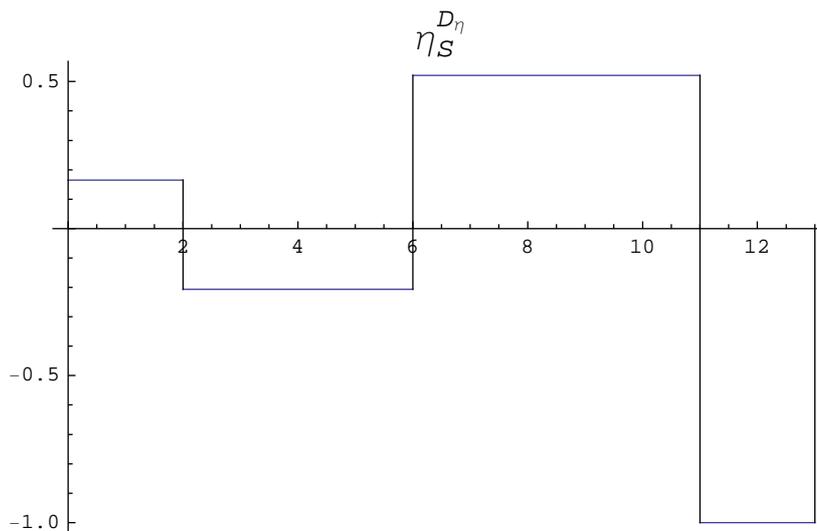


Figura 6 - Linea d'influenza $\eta_S^{D_\eta}$ per la trave di Figura 5

$$\begin{aligned}
 \phi_S^{D_\eta} &= - \frac{3 L_2 L_3}{2 L_1 (3 L_1 (L_2 + L_3) + L_2 (3 L_2 + 4 L_3))} & 0 \leq x_3 \leq L_1 \\
 \phi_S^{D_\eta} &= \frac{3 (L_1 + 2 L_2) L_3}{2 L_2 (3 L_1 (L_2 + L_3) + L_2 (3 L_2 + 4 L_3))} & L_1 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 \\
 \phi_S^{D_\eta} &= - \frac{3 (2 L_2 (L_2 + 2 L_3) + L_1 (2 L_2 + 3 L_3))}{2 L_3 (3 L_1 (L_2 + L_3) + L_2 (3 L_2 + 4 L_3))} & L_1 + L_2 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 + L_3 \\
 \phi_S^{D_\eta} &= 0 & L_1 + L_2 + L_3 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 + L_3 + L_4
 \end{aligned} \tag{6}$$

Sullo sbalzo la linea di influenza sarà nulla, poi sarà negativa in prima e terza campata, positiva in seconda campata. Con gli stessi valori numerici del caso precedente, si ha il diagramma di Figura 7

Le linee di influenza delle caratteristiche per distorsioni viaggianti

In quest'ultima sezione si vogliono tracciare le linee di influenza di caratteristiche (momenti o tagli) in una sezione retta S, dovuti a distorsioni (di rotazione o di scorrimento) viaggianti. Ne segue che occorrerà caricare la struttura in S con gli enti duali delle caratteristiche, ossia con una distorsione di rotazione o di scorrimento, e bisognerà calcolare il diagramma degli enti duali delle distorsioni, ossia momenti flettenti o tagli.

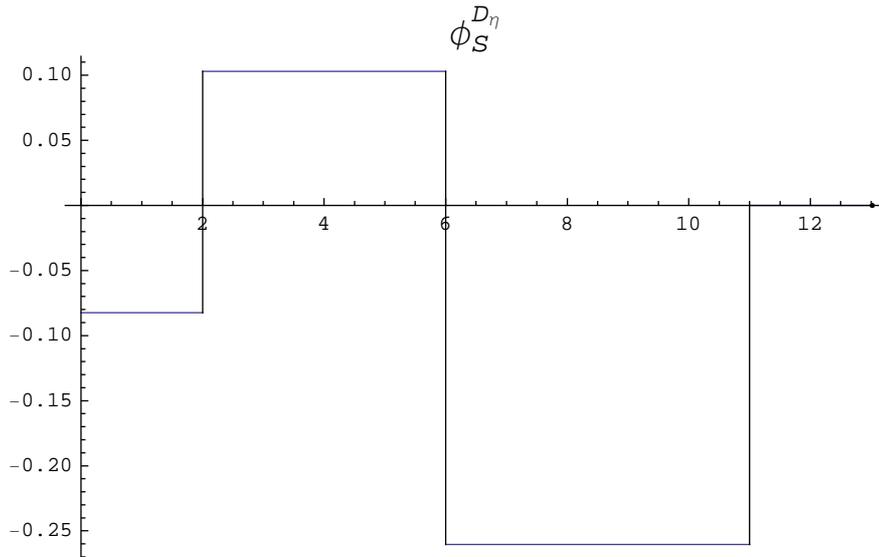


Figura 7 - Linea d'influenza $\phi_S^{D_\eta}$ per la trave di Figura 5

Tutto ciò può anche essere confermato dal teorema di Volterra. Se ad esempio si vuole la linea di influenza del momento per distorsione di scorrimento viaggiante, si consideri la trave soggetta ad una distorsione di scorrimento $D_{\eta S'}$ unitaria nella sezione retta generica S' (sistema 1), e la stessa trave soggetta ad una distorsione rotazionale D_ϕ nella sezione S (sistema 2). Per il teorema di Volterra si può scrivere:

$$T_{S'} D_{\eta S'} = M_S D_{\phi S} \quad (7)$$

da cui :

$$m_S^{D_\eta} = \frac{T_{S'}}{D_{\phi S}} \quad (8)$$

Quindi, la linea di influenza $m_S^{D_\eta}$ del momento per distorsione di scorrimento viaggiante si ottiene caricando la struttura con una distorsione di rotazione unitaria in S , e calcolando il relativo diagramma del taglio.

Si noti subito che in presenza di strutture isostatiche l'applicazione di una distorsione concentrata non causa caratteristiche, e quindi le relative linee di influenza vengono ad annullarsi.

■ Caso 4a - Linea di influenza $m_S^{D_\phi}$ del momento in S per distorsione rotazionale viaggiante

Assoggettata la trave ad una distorsione di rotazione relativa unitaria e positiva, si calcola il diagramma dei momenti, ottenendo la richiesta linea di influenza. Per la trave doppiamente incastrata e con incastro a due terzi della luce, si voglia tracciare la linea di influenza del momento per la sezione di incastro a sinistra, dovuta ad una distorsione rotazionale viaggiante.

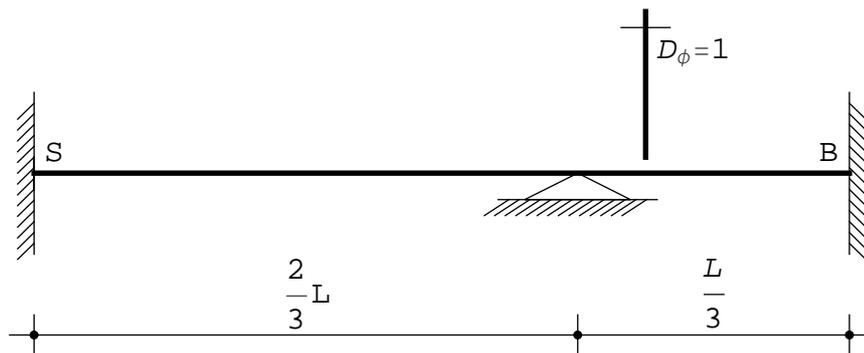


Figura 8 - Trave doppiamente incastrata con appoggio a due terzi della luce

Per quanto detto, occorre imporre nell'incastro di sinistra una distorsione unitaria e positiva, ossia occorre imporre che sia:

$$D_{\phi 0} = 1 \rightarrow \Delta\phi_0 = -1 \rightarrow \phi_{des} - \phi_{sin} = -1 \rightarrow \phi(x_3 = 0) = -1 \tag{9}$$

e calcolare il risultante diagramma del momento. Si ha:

$$m_0^{D_\phi} = \frac{EI}{4 L^2} (22 L - 45 x_3) \quad 0 \leq x_3 \leq \frac{2}{3} L$$

$$m_0^{D_\phi} = \frac{EI}{L^2} (-8 L + 9 x_3) \quad \frac{2}{3} L \leq x_3 \leq L \tag{10}$$

e graficamente :

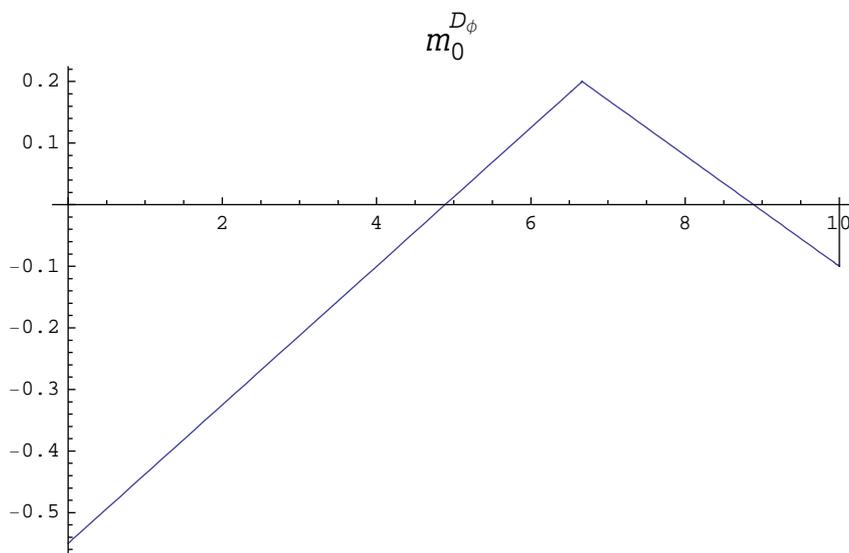


Figura 9 - Linea di influenza del momento nell'incastro di sinistra per distorsione rotazionale viaggiante

■ Caso 4b - Linea di influenza $t_S^{D\phi}$ del taglio in S per distorsione rotazionale viaggiante

Sulla stessa trave di Figura 8, si voglia ora tracciare la linea di influenza del taglio in mezzera della prima campata, per effetto di una distorsione rotazionale viaggiante, ossia si calcoli il diagramma del momento dovuto ad una distorsione di scorrimento applicata in mezzera della prima campata. Utilizzando la metodologia della linea elastica, in S bisognerà quindi imporre le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} D_{\eta S} = 1 &\rightarrow \Delta u_{2S} = -1 \rightarrow u_{2S}^{\text{des}} - u_{2S}^{\text{sin}} = -1 \\ \phi_S^{\text{sin}} &= \phi_S^{\text{des}} \end{aligned} \quad (11)$$

e le due condizioni di equilibrio :

$$\begin{aligned} M_S^{\text{sin}} &= M_S^{\text{des}} \\ T_S^{\text{sin}} &= T_S^{\text{des}} \end{aligned} \quad (12)$$

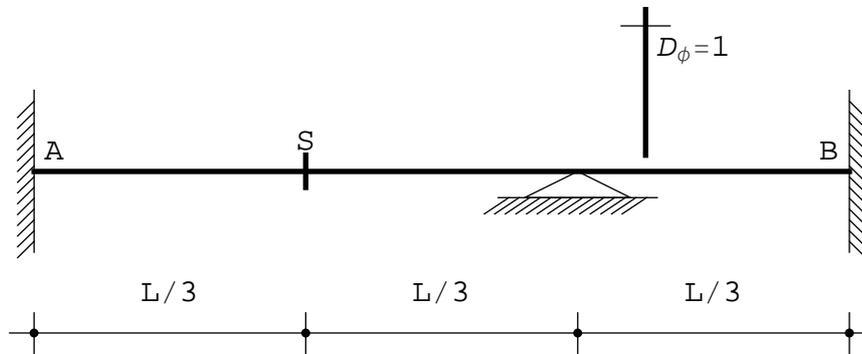


Figura 10 - Trave doppiamente incastrata con appoggio a due terzi della luce

Si ha, analiticamente :

$$\begin{aligned} t_S^{D\phi} &= -\frac{9 EI (10 L - 27 x_3)}{8 L^3} & 0 \leq x_3 \leq \frac{2}{3} L \\ t_S^{D\phi} &= \frac{9 EI (8 L - 9 x_3)}{2 L^3} & \frac{2}{3} L \leq x_3 \leq L \end{aligned} \quad (13)$$

mentre graficamente si ha il diagramma di Figura 11.

■ Caso 4c - Linea di influenza $m_S^{D\eta}$ del momento in S per distorsione di scorrimento viaggiante

In questo penultimo caso, occorre assoggettare la trave ad una distorsione rotazionale concentrata in S, unitaria e positiva, e calcolare il risultante diagramma del taglio

■ Caso 4d - Linea di influenza $t_S^{D\eta}$ del momento in S per distorsione di scorrimento viaggiante

In questo penultimo caso, occorre assoggettare la trave ad una distorsione di scorrimento concentrata in S, unitaria e positiva, e calcolare il risultante diagramma del taglio

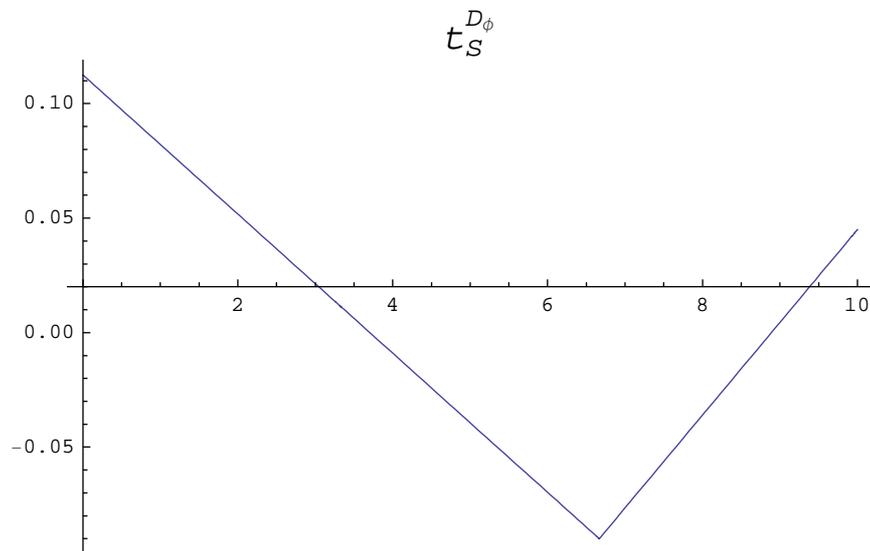


Figura 11 - Linea di influenza del taglio nella sezione di mezzeria della prima campata per distorsione rotazionale viaggiante

Appendice

Figure