
Lezione 43 - Le linee di influenza delle c.s.i.

■ [A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 8 Aprile 2014]

In questa Lezione si continua lo studio delle linee di influenza, affrontando il secondo gruppo di possibili linee, quello delle caratteristiche della sollecitazione interna (momenti o tagli) dovute a forze viaggianti (forze o coppie).

E' evidente l'importanza di questo gruppo, il cui utilizzo permette di conoscere le condizioni di carico piu' svantaggiose dal punto di vista delle sollecitazioni, in modo da poter valutare la resistenza della sezione in esame sia nei confronti del momento flettente che del taglio.

L' utilizzo del teorema di Colonnetti

In questa sezione si vogliono tracciare le linee di influenza di momenti e tagli in una sezione retta S, e poiche' gli enti duali delle caratteristiche sono le distorsioni, ne segue che occorre caricare la trave con una distorsione concentrata in S: distorsione di rotazione se si vuole la linea d'influenza del momento, o distorsione di scorrimento se si vuole la linea di influenza del taglio.

In questa sezione si studiano le linee di influenza per forze viaggianti, quindi i diagrammi da tracciare saranno i diagrammi degli spostamenti verticali - se l'ente viaggiante e' una forza - o i diagrammi delle rotazioni - se l'ente viaggiante e' una coppia.

Tutto cio' puo' anche essere confermato dal teorema di Colonnetti. Se ad esempio si vuole la linea di influenza del momento flettente per forza verticale viaggiante, si consideri la trave soggetta ad una forza unitaria agente nella sezione retta generica S' (sistema 1), e la stessa trave soggetta ad una distorsione di rotazione relativa $D_{\phi S}$ nella sezione S (sistema 2). Per il teorema di Colonnetti si puo' scrivere:

$$F \eta_{S'} + M_S D_{\phi S} = 0 \quad (1)$$

da cui :

$$M_S = - \frac{\eta_{S'}}{D_{\phi S}} \quad (2)$$

Quindi, la linea di influenza m_S^F del momento flettente per forza viaggiante si ottiene caricando la struttura con una distorsione $D_{\phi S} = -1$ nella sezione S, e calcolando il relativo diagramma degli spostamenti.

■ **Caso 2a - Linea di influenza m_S^F del momento in S per forza viaggiante**

Si consideri una generica trave, e si voglia tracciare, per una sezione generica S, la linea di influenza del momento flettente per forza viaggiante. In altri termini, per quanto appena detto, occorre calcolare il diagramma degli spostamenti dovuti ad una distorsione D_{ϕ} di rotazione relativa concentrata nella sezione S. Puo' a tal fine utilizzarsi la ben nota metodologia della scrittura della linea elastica, ed in corrispondenza della sezione retta S bisognera' scrivere le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{\text{sin}} &= u_2^{\text{des}} \\ \phi^{\text{sin}} - \phi^{\text{des}} &= D_\phi \end{aligned} \quad (3)$$

e le due condizioni di equilibrio :

$$\begin{aligned} M_1^{\text{sin}} &= M_1^{\text{des}} \\ T_2^{\text{sin}} &= T_2^{\text{des}} \end{aligned} \quad (4)$$

Nel caso delle linee di influenza sara' $D_\phi = -1$, e quindi la seconda condizione si scrivera':

$$\phi^{\text{des}} - \phi^{\text{sin}} = 1 \quad (5)$$

A titolo di esempio, si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 1, e si voglia la linea di influenza del momento ad un quarto della luce per effetto di una forza viaggiante.

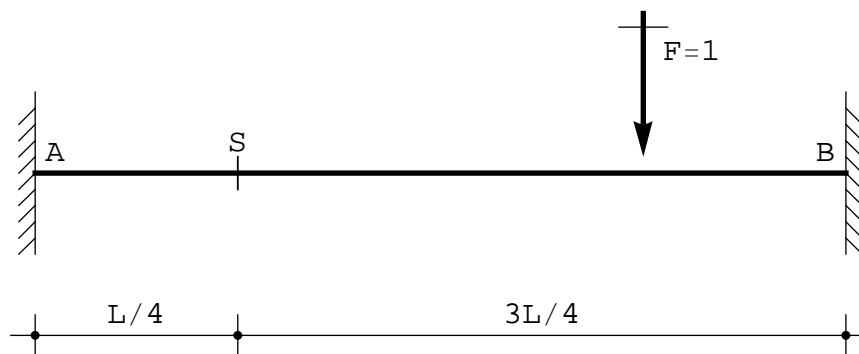


Figura 1 - Trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante

Occorre calcolare il diagramma degli spostamenti per una trave doppiamente incastrata caricata con una distorsione D_ϕ unitaria e negativa in $L/4$, e tale problema e' risolvibile immediatamente a fornire la richiesta linea di influenza:

$$\begin{aligned} m_{L/4}^F &= \frac{(5L - 2x_3) x_3^2}{4L^2} & x_3 &\leq \frac{L}{4} \\ m_{L/4}^F &= \frac{(L - 2x_3)(L - x_3)^2}{4L^2} & x_3 &\geq \frac{L}{4} \end{aligned} \quad (6)$$

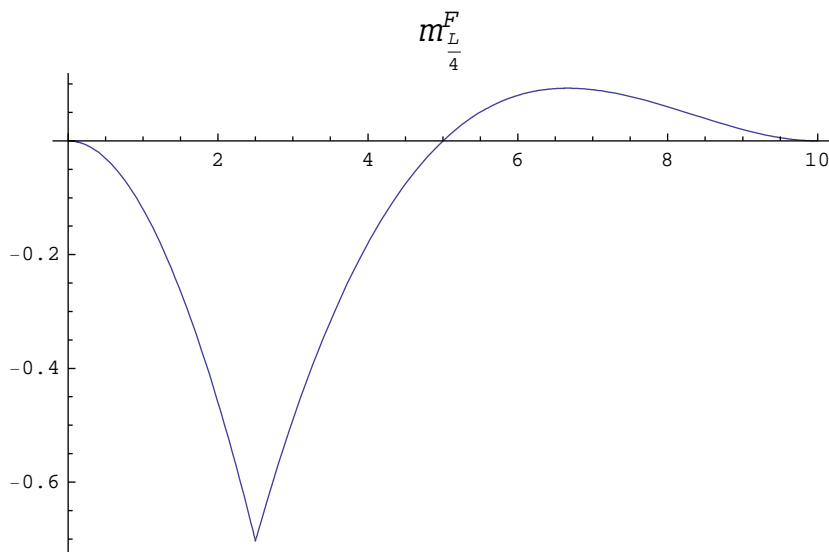


Figura 2 - Linea di influenza $m_{L/4}^F$ per una trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante

il cui grafico si presenta come in Figura 2. Si noti che dalla Figura 2 e' possibile dedurre subito che forze agenti sulla prima semiluce provocano momenti positivi, mentre forze agenti nella seconda campata provocano momenti negativi in S.

Esercizio - Si deduca la linea di influenza del momento in una sezione posta ad $L/3$, dovuta a forze viaggianti. E' possibile ottenere momenti negativi in S?

■ Il caso del solaio

Una classica applicazione della teoria delle linee di influenza si ritrova, storicamente, nell'analisi delle condizioni di carico da assegnare ai solai. Si consideri ad esempio il caso di Figura 3, relativo ad un solaio a due campate con sbalzi agli estremi, e si vogliano studiare le sezioni piu' significative.

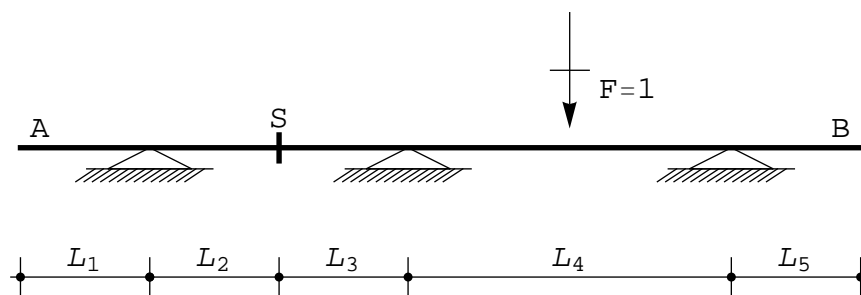


Figura 3 - Un classico esempio di solaio: linea di influenza per una sezione retta nella prima luce

Se ad esempio si vuole studiare una sezione retta ricadente nella prima campata, occorre scrivere cinque equazioni della linea elastica, ed imporre venti condizioni ai limiti, ottenendo il diagramma degli spostamenti dovuti ad una distorsione unitaria e negativa in S:

$$m_S^F = - \frac{(x_3 - L_1) (L_2^2 - L_2 L_3 - 2 L_3 (L_3 + L_4))}{2 (L_2 + L_3) (L_2 + L_3 + L_4)}$$

$$m_S^F = \frac{(x_3 - L_1) (-L_2^3 + 2 L_3^2 (L_3 + L_4) + L_2 ((x_3 - L_1)^2 + 3 L_3^2 + 2 L_3 L_4))}{2 (L_2 + L_3)^2 (L_2 + L_3 + L_4)}$$

$$\begin{aligned}
m_S^F &= \left(L_2 (-x_3 + L_1 + L_2 + L_3) \right. \\
&\quad \left. (-x_3^2 - L_1^2 + 2 L_2^2 - x_3 L_3 + 2 L_3^2 + L_1 (2 x_3 + L_2 + L_3) + 2 L_3 L_4 + \right. \\
&\quad \left. L_2 (-x_3 + 4 L_3 + 2 L_4) \right) / \left(2 (L_2 + L_3)^2 (L_2 + L_3 + L_4) \right) \\
m_S^F &= - \left(L_2 (x_3 - L_1 - L_2 - L_3) \left((-x_3 + L_1 + L_2 + L_3)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 3 (x_3 - L_1 - L_2 - L_3) L_4 + 2 L_4^2 \right) \right) / \\
&\quad \left(2 (L_2 + L_3) L_4 (L_2 + L_3 + L_4) \right) \\
m_S^F &= - \frac{L_2 L_4 (-x_3 + L_1 + L_2 + L_3 + L_4)}{2 (L_2 + L_3) (L_2 + L_3 + L_4)}
\end{aligned}$$

Se, ad esempio, i due sbalzi sono lunghi due metri, mentre le due campate sono larghe rispettivamente quattro metri e cinque metri, la linea di influenza in mezzeria della prima campata si presenta come:

$$\begin{aligned}
m_S^F &= \frac{7}{18} (-2 + x_3) && 0 \leq x_3 \leq 2 \\
m_S^F &= \frac{1}{144} (56 + (-2 + x_3)^2) (-2 + x_3) && 2 \leq x_3 \leq 4 \\
m_S^F &= \frac{1}{144} (456 - 76 x_3 - 6 x_3^2 + x_3^3) && 4 \leq x_3 \leq 6 \\
m_S^F &= -\frac{1}{180} (-6 + x_3) (176 - 27 x_3 + x_3^2) && 6 \leq x_3 \leq 11 \\
m_S^F &= \frac{5}{36} (-11 + x_3) && 11 \leq x_3 \leq 13
\end{aligned} \tag{8}$$

o, graficamente :

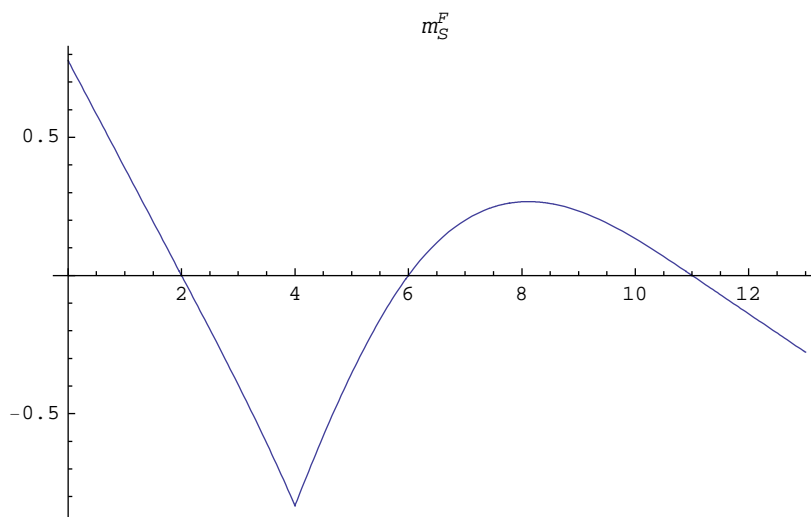


Figura 4 - La linea di influenza del momento flettente per una sezione retta in mezzeria della prima luce

Volendo invece studiare la linea di influenza del momento per la sezione in corrispondenza del secondo appoggio, si dovranno scrivere quattro equazioni della linea elastica, e sedici condizioni ai limiti, giungendo alla richiesta linea di influenza:

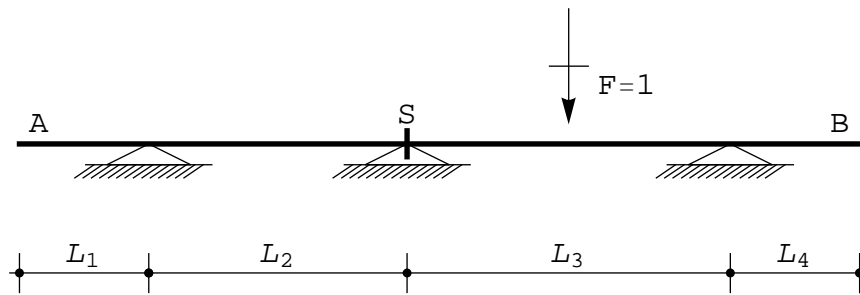


Figura 5 - Un classico esempio di solaio: linea di influenza per una sezione retta in corrispondenza del secondo appoggio

$$\begin{aligned}
 m_S^F &= \frac{(-x_3 + L_1) L_2}{2 (L_2 + L_3)} && 0 \leq x_3 \leq L_1 \\
 m_S^F &= \frac{(x_3 - L_1)^3 - (x_3 - L_1) L_2^2}{2 L_2 (L_2 + L_3)} && L_1 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 \\
 m_S^F &= - \frac{(x_3 - L_1 - L_2) \left((-x_3 + L_1 + L_2)^2 - 3 (x_3 - L_1 - L_2) L_3 + 2 L_3^2 \right)}{2 L_3 (L_2 + L_3)} && L_1 + L_2 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 + L_3 \\
 m_S^F &= \frac{(x_3 - L_1 - L_2 - L_3) L_3}{2 (L_2 + L_3)} && L_1 + L_2 + L_3 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 + L_3 + L_4
 \end{aligned} \tag{9}$$

e graficamente :

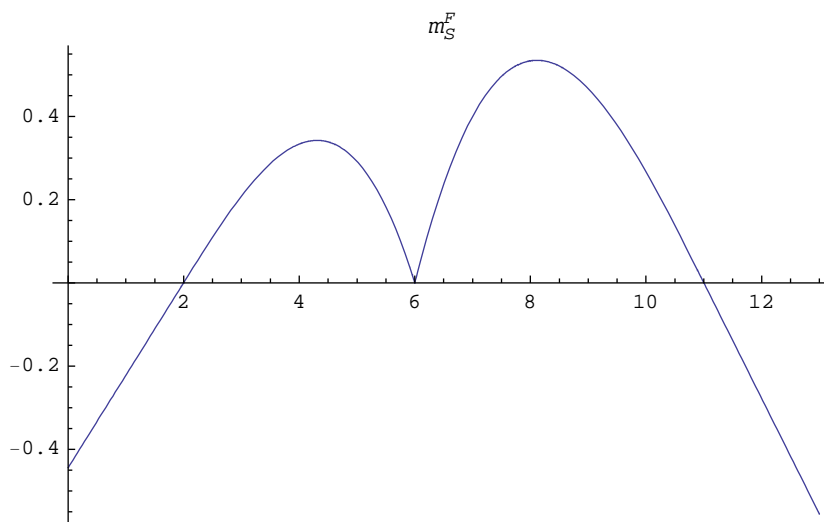


Figura 6 - La linea di influenza del momento flettente per una sezione retta in corrispondenza del secondo appoggio

■ Caso 2b - Linea di influenza t_S^F del taglio in S per forza viaggiante

Per ottenere la richiesta linea di influenza bisogna calcolare il diagramma dell'ente duale all'ente viaggiante (e quindi occorre calcolare il diagramma degli spostamenti) dovuto ad un ente unitario che sia duale dell'ente in esame (e quindi occorre caricare la struttura con una distorsione di scorrimento unitaria e negativa).

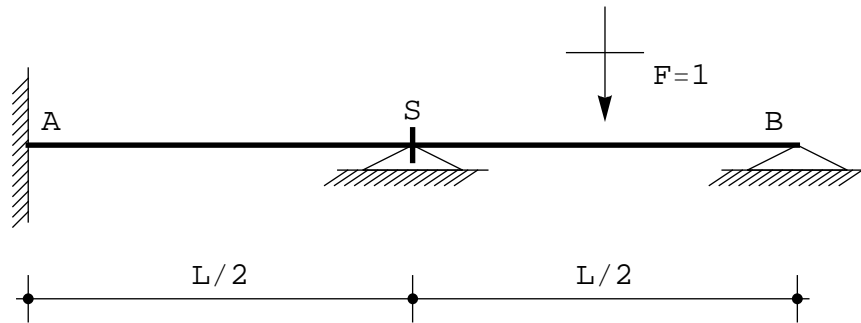


Figura 7 - Trave incastrata ed appoggiata

A titolo di esempio, si consideri la trave di Figura 7, e si voglia la linea di influenza del taglio nella sezione di mezzeria S, dovuta ad una forza viaggiante, ossia si voglia tracciare il diagramma degli spostamenti dovuti ad una distorsione di scorrimento unitaria e negativa agente in mezzeria. Scrivendo due equazioni differenziali della linea elastica, in mezzeria dovranno allora scriversi le due equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{\text{des}} - u_2^{\text{sin}} &= 1 \\ \phi^{\text{sin}} &= \phi^{\text{des}} \end{aligned} \quad (10)$$

e le due condizioni di equilibrio :

$$\begin{aligned} M_1^{\text{sin}} &= M_1^{\text{des}} \\ T_2^{\text{sin}} &= T_2^{\text{des}} \end{aligned} \quad (11)$$

La richiesta linea di influenza e' analiticamente definita da:

$$\begin{aligned} t_{L/2}^F &= \frac{x_3^2 (-3L + x_3)}{2L^3} & x_3 &\leq \frac{L}{2} \\ t_{L/2}^F &= \frac{2L^3 - 3Lx_3^2 + x_3^3}{2L^3} & \frac{L}{2} &\leq x_3 \leq L \end{aligned} \quad (12)$$

Graficamente si ottiene :

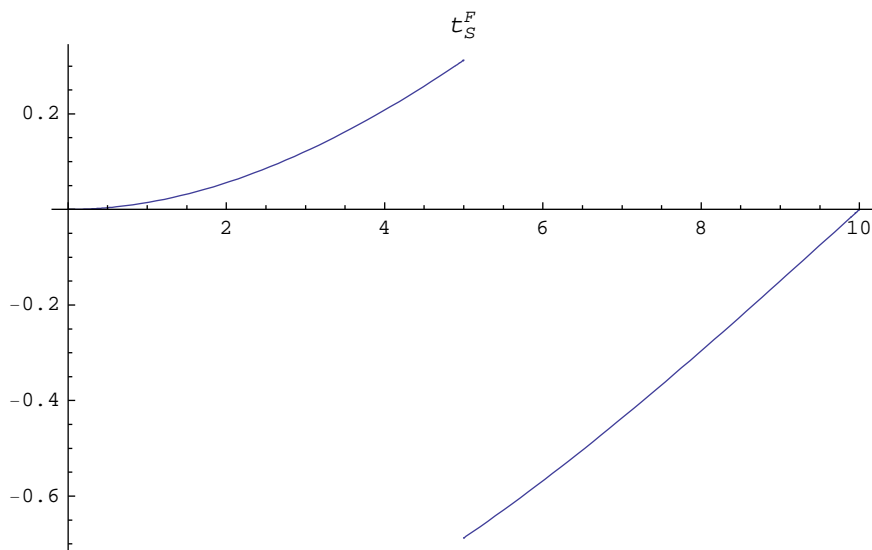


Figura 8 - Linea d'influenza $t_{L/2}^F$ per una trave incastrata-appoggiata

■ **Caso 2c - Linea di influenza m_S^M del momento in S per coppia viaggiante**

In questo caso, poiché si vuole la linea di influenza del momento, bisognerà assoggettare la trave ad una distorsione di rotazione unitaria e negativa. Poiché l'ente viaggiante è una coppia, occorre calcolare il diagramma delle rotazioni. Quindi, sulla trave a tre campate diseguali di Figura 9, la linea di influenza del momento in mezzeria per effetto di una coppia viaggiante è data da:

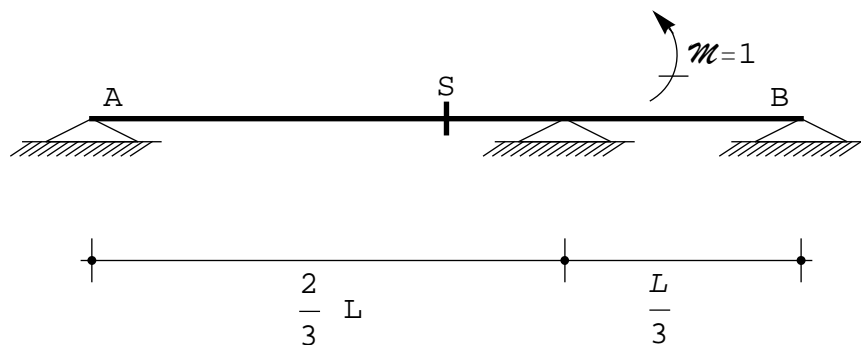
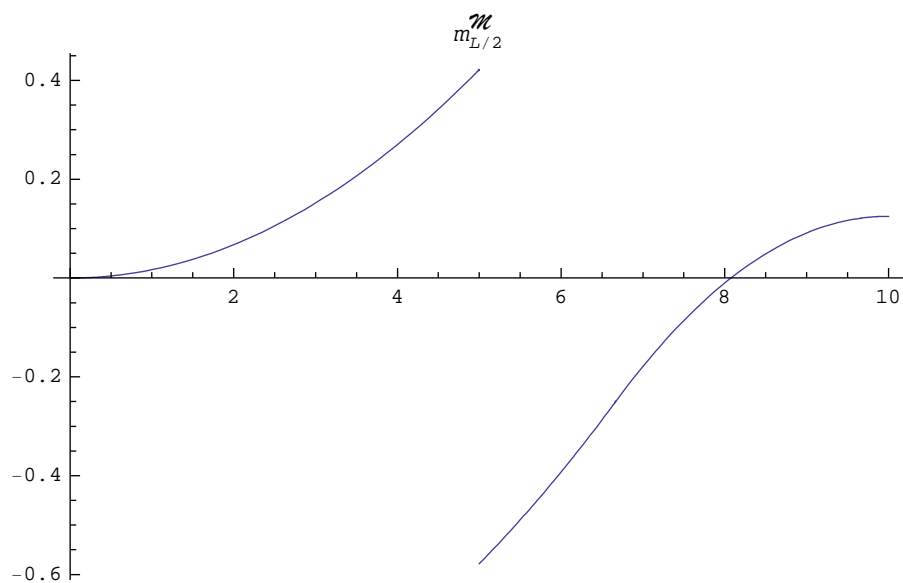


Figura 9 - Trave a tre appoggi a luci diseguali

$$\begin{aligned}
 m_{L/2}^M &= \frac{27 x_3^2}{16 L^2} & 0 \leq x_3 \leq \frac{L}{2} \\
 m_{L/2}^M &= -1 + \frac{27 x_3^2}{16 L^2} & \frac{L}{2} \leq x_3 \leq \frac{2}{3} L \\
 m_{L/2}^M &= -\frac{26 L^2 - 54 L x_3 + 27 x_3^2}{8 L^2} & \frac{2}{3} L \leq x_3 \leq L
 \end{aligned} \tag{13}$$

e graficamente :



■ Caso 2d - Linea di influenza t_S^m del taglio in S per coppia viaggiante

In quest' ultimo caso si dovrà caricare la trave con una distorsione di scorrimento nella sezione S, come sempre unitaria e negativa, e poi calcolare il risultante diagramma delle rotazioni.

Appendice

Figure