

---

# Lezione 42 - Le linee di influenza degli spostamenti

■ [A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 8 Aprile 2014]

*Influence line method presents the higher level of analysis of a structure, than the fixed load approach. Good knowledge of influence lines approaches an immeasurable increase in understanding of behaviour of structure. Analyst, who combines both approaches for analysis of a structure in engineering practice, is capable to perform a complex analysis of its behaviour*

*I.A. Karnovsky, O. Lebed - Advanced Methods of Structural Analysis, Springer 2010*

In questa Lezione si introduce il concetto di linea di influenza, ed attraverso l'applicazione dei principi di reciprocita' si fornisce un metodo per il loro tracciamento analitico, utilizzando la ben nota metodologia dell'equazione differenziale della linea elastica.

## Gli enti duali

Dall' esame dei principi di reciprocita' emerge una relazione tra enti forza ed enti spostamento: ciascun elemento dell'insieme delle forze e' legato ad un elemento dell'insieme degli spostamenti, nel senso che ciascun ente forza compie lavoro per il corrispondente ente spostamento. Si ha quindi la seguente tabella di dualita':

<b>Ente Forza</b>	<b>Ente Spostamento</b>
Forza	Spostamento
Coppia	Rotazione
Momento flettente	Distorsione di rotazione relativa
Taglio	Distorsione di scorrimento
Sforzo normale	Distorsione assiale

Cio' detto, e' essenziale osservare che nella tabella precedente compaiono cinque quantita' che e' possibile applicare alla trave, ossia forze, coppie e distorsioni, e cinque quantita' che vengono da esse generate, ossia spostamenti, rotazioni e caratteristiche della sollecitazione interna. Sia C l'insieme delle forze, coppie e distorsioni (*cause*), e sia E l'insieme degli spostamenti, rotazioni e caratteristiche della sollecitazione interna (*effetti*), e siano  $c$  ed  $e$  i generici elementi di questi due insiemi.

Si fornisce ora la seguente :

**Definizione** - Si dice *linea di influenza*  $e_S^c(x_3)$  di un ente  $e \in E$  nella sezione S, provocato da un ente  $c \in C$  viaggiante sulla trave, il diagramma la cui ordinata alla generica ascissa  $x_3$  fornisce il valore di  $e$  in S quando  $c$ , unitaria, agisce in  $x_3$ .

Ad esempio, la linea di influenza dello spostamento in una sezione S dovuto ad una forza viaggiante e' un diagramma che fornisce, nella generica  $x_3$ , lo spostamento in S quando una forza unitaria agisce in  $x_3$ .

Limitandosi alle travi ad asse rettilineo in regime flesso-tagliante, si hanno quindi le seguenti possibilita' :

Caso 1a - Linea di influenza  $\eta_S^F$  dello spostamento per forza viaggiante

Caso 1b - Linea di influenza  $\phi_S^F$  della rotazione per forza viaggiante

Caso 1c - Linea di influenza  $\eta_S^M$  dello spostamento per coppia viaggiante

Caso 1d - Linea di influenza  $\phi_S^M$  della rotazione per coppia viaggiante

Caso 2a - Linea di influenza  $m_S^F$  del momento per forza viaggiante

Caso 2b - Linea di influenza  $t_S^F$  del taglio per forza viaggiante

Caso 2c - Linea di influenza  $m_S^M$  del momento per coppia viaggiante

Caso 2d - Linea di influenza  $t_S^M$  del taglio per coppia viaggiante

Caso 3a - Linea di influenza  $\eta_S^\mu$  spostamento per distorsione rotazionale viaggiante

Caso 3b - Linea di influenza  $\phi_S^\mu$  della rotazione per distorsione rotazionale viaggiante

Caso 3c - Linea di influenza  $\eta_S^\theta$  spostamento per distorsione di scorrimento viaggiante

Caso 3d - Linea di influenza  $\phi_S^\theta$  della rotazione per distorsione di scorrimento viaggiante

Caso 4a - Linea di influenza  $m_S^\mu$  momento per distorsione rotazionale viaggiante

Caso 4b - Linea di influenza  $t_S^\mu$  taglio per distorsione rotazionale viaggiante

Caso 4c - Linea di influenza  $m_S^\theta$  del momento per distorsione di scorrimento viaggiante

Caso 4d - Linea di influenza  $t_S^\theta$  del taglio per distorsione di scorrimento viaggiante

I teoremi di reciprocita' forniscono la metodologia per il tracciamento dei richiesti diagrammi; in dettaglio, il teorema di Betti deve essere applicato per il primo caso, il teorema di Colonnetti si applica nel secondo e nel terzo caso, il teorema di Volterra e' utile nel quarto ed ultimo caso.

## Le linee di influenza di spostamenti (o rotazioni) per forze (o coppie) viaggianti

### ■ Caso 1a - Linea di influenza $\eta_S^F$ dello spostamento in S per forza viaggiante

Si consideri una generica sezione retta S della trave in esame, e si voglia conoscere lo spostamento verticale  $u_{2S}$  in S per effetto di una forza unitaria  $F_1=1$  agente in un'altra sezione retta S'.

Se si applica una forza F nella sezione S e si utilizza il teorema di Betti, si puo' scrivere:

$$F_1 u_{2S} = F u_{2S'} \quad (1)$$

ed e' quindi possibile affermare che il richiesto spostamento  $u_{2S}$  puo' calcolarsi applicando una forza unitaria  $F=1$  in S, leggendo lo spostamento della sezione S'. Ne segue che il diagramma degli abbassamenti dovuti alla forza unitaria applicata in S e' la linea di influenza  $\eta_S^F$  degli spostamenti in S per forza unitaria viaggiante. Il tracciamento della linea di influenza e' cosi' ricondotto ad un problema ben noto, da potersi affrontare, ad esempio, con la scrittura dell'equazione differenziale della linea elastica, o con qualsiasi altro metodo preferito.

A titolo di esempio, si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 1, e si voglia la linea di influenza dello spostamento ad un quarto della luce per effetto di una forza viaggiante.

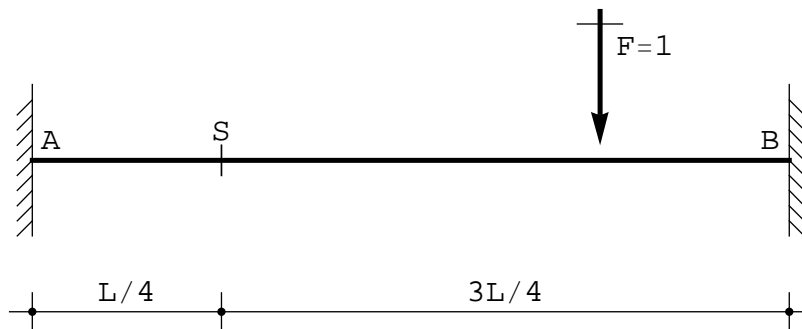


Figura 1 - Trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante

Occorre calcolare il diagramma degli spostamenti per una trave doppiamente incastrata caricata con una forza unitaria in  $L/4$ , e tale problema e' risolvibile immediatamente a fornire la richiesta linea di influenza:

$$\begin{aligned} \eta_{L/4}^F &= \frac{9 (L - 2 x_3) x_3^2}{128 EI} & x_3 &\leq \frac{L}{4} \\ \eta_{L/4}^F &= -\frac{(L - x_3)^2 (L - 10 x_3)}{384 EI} & x_3 &\geq \frac{L}{4} \end{aligned} \tag{2}$$

il cui grafico si presenta come in Figura 2. Si noti che le espressioni (2) presuppongono un unico sistema di riferimento, con origine in A.

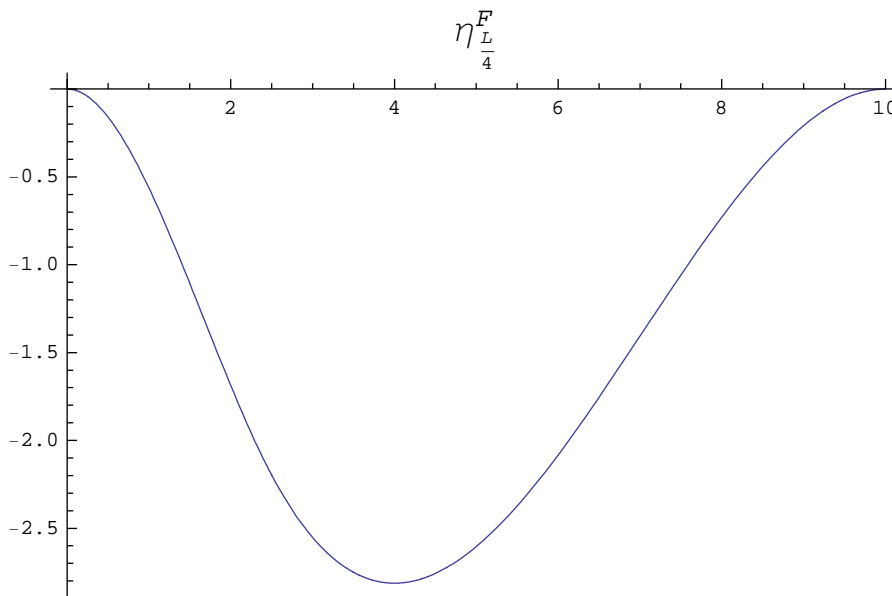


Figura 2 - Linea di influenza  $\eta_{L/4}^F$  per una trave doppiamente incastrata soggetta a forza verticale viaggiante

■ **Caso 1b - Linea di influenza  $\eta_S^M$  dello spostamento in S per coppia viaggiante**

Per ottenere la richiesta linea di influenza bisogna calcolare il diagramma dell'ente duale all'ente viaggiante (e quindi occorre calcolare il diagramma delle rotazioni) dovuto ad un ente unitario che sia duale dell'ente in esame (e quindi occorre caricare la struttura con una forza unitaria). D'altro canto, considerando la struttura caricata da una coppia  $M$  unitaria nella generica sezione S' (primo sistema), e da una forza F in S (secondo sistema), il teorema di Betti permette di scrivere:

$$\mathcal{M} \phi_S = F u_{2S}, \quad (3)$$

Come esempio un po' più complicato del precedente, si consideri la trave a due campate di Figura 3, e si voglia la linea di influenza dello spostamento nella sezione S situata ad  $L/4$ , dovuto ad una coppia viaggiante, ossia si voglia tracciare il diagramma delle rotazioni dovute ad una forza unitaria agente ad un quarto della luce.

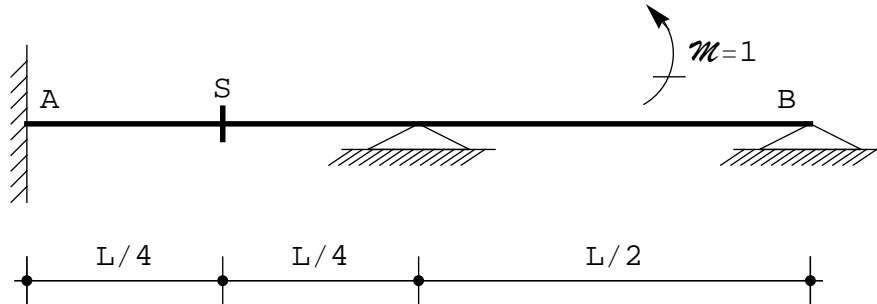


Figura 3 - Trave a due campate soggetta a coppia viaggiante

Complicazioni analitiche a parte, la metodologia di soluzione del problema strutturale non cambia, e fornisce la richiesta linea di influenza come:

$$\begin{aligned} \eta_{L/4}^M &= \frac{x_3 (-9L + 34x_3)}{112EI} & x_3 &\leq \frac{L}{4} \\ \eta_{L/4}^M &= -\frac{7L^2 - 38Lx_3 + 44x_3^2}{224EI} & \frac{L}{4} &\leq x_3 \leq \frac{L}{2} \\ \eta_{L/4}^M &= \frac{11L^2 - 24Lx_3 + 12x_3^2}{448EI} & \frac{L}{2} &\leq x_3 \leq L \end{aligned} \quad (4)$$

Graficamente si ottiene :

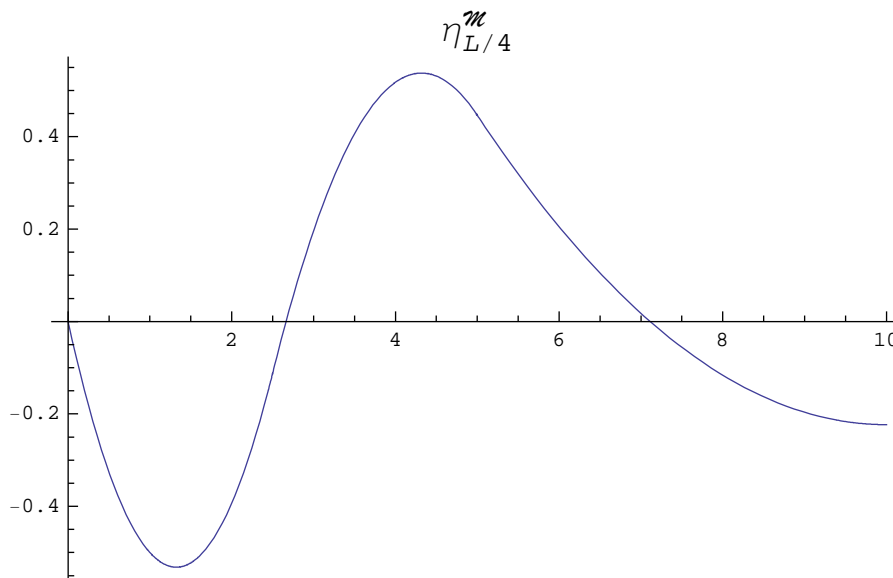


Figura 4 - Linea d'influenza  $\eta_{L/4}^M$  per una trave a due campate soggetta a coppia viaggiante

Una interessante applicazione della teoria delle linee di influenza permette il calcolo delle condizioni di carico piu' sfavorevoli, da applicare su una struttura ai fini di verifica e/o progetto. Se ci si chiede, infatti, dove occorre posizionare la coppia per ottenere i valori massimi e minimi dello spostamento, uno sguardo alla linea di influenza permette di stabilire che il massimo abbassamento si avra' quando la coppia agisce in una ascissa vicina alla mezzeria. Per essere piu' precisi, basta calcolare l'ascissa di massimo sulla seconda campata, ossia risolvere l'equazione:

$$\frac{D}{Dx_3} \left( - \frac{7 L^2 - 38 L x_3 + 44 x_3^2}{224 EI} \right) = 0 \quad (5)$$

immediatamente risolvibile a fornire:

$$x_3^{(1)} = \frac{19}{44} L \approx 0.432 L \quad (6)$$

Analogamente, si osserva che l'ascissa di minimo della linea di influenza ricade nella prima campata, e quindi si ricava:

$$\frac{D}{Dx_3} \left( \frac{x_3 (-9 L + 34 x_3)}{112 EI} \right) = 0 \quad (7)$$

fornendo l'ascissa in cui occorre applicare la coppia per ottenere il minimo abbassamento:

$$x_3^{(2)} = \frac{9}{68} L \approx 0.132 L \quad (8)$$

### ■ Caso 1c - Linea di influenza $\phi_S^F$ della rotazione in S per forza viaggiante

In questo caso occorre caricare la trave con una coppia unitaria nella sezione S, e calcolare il diagramma degli spostamenti da essa generata. Infatti, considerando la struttura caricata da una forza F unitaria nella generica sezione S' (primo sistema), e da una coppia  $\mathcal{M}$  in S (secondo sistema), il teorema di Betti permette di scrivere:

$$F u_{2S'} = \mathcal{M} \phi_S \quad (9)$$

Come semplice esempio, si voglia la linea di influenza della rotazione in mezzeria per una trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, causata da una forza verticale viaggiante.

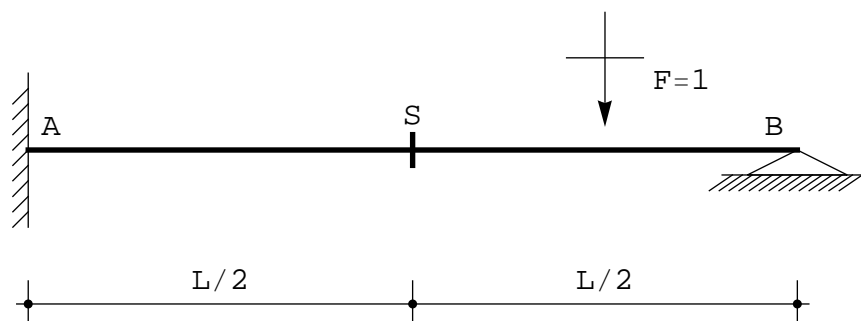


Figura 5 - Trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra soggetta a forza verticale viaggiante

Per ottenerla, bisogna tracciare il diagramma degli spostamenti dovuti ad una coppia unitaria applicata in mezzeria, giungendo a scrivere:

$$\phi_{L/2}^F = \frac{(L - 3 x_3) x_3^2}{16 EI L} \quad x_3 \leq \frac{L}{2}$$

$$\phi_{L/2}^F = \frac{2 L^3 - 8 L^2 x_3 + 9 L x_3^2 - 3 x_3^3}{16 EI L} \quad x_3 \geq \frac{L}{2}$$

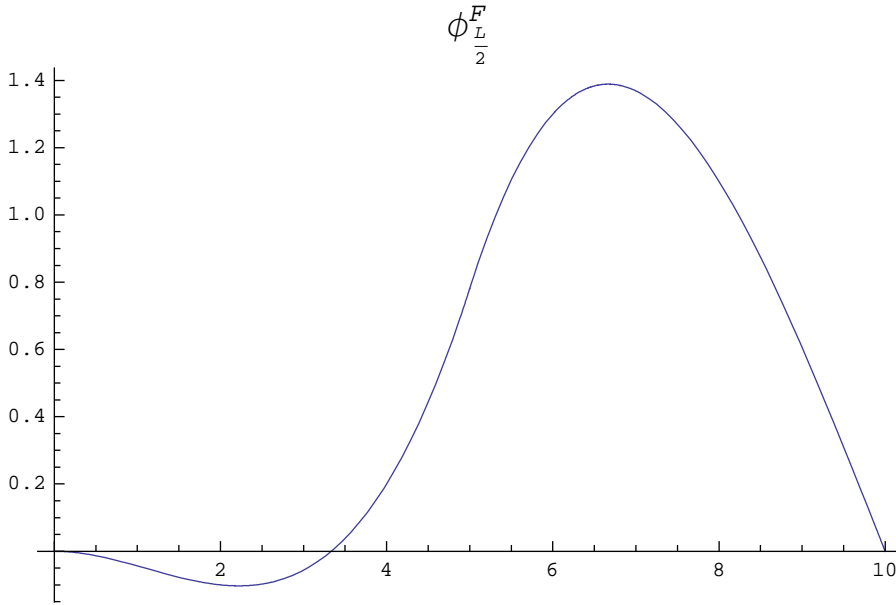


Figura 6 - Linea d'influenza  $\phi_{L/2}^F$  della rotazione in mezzeria per una trave incastrata-appoggiata soggetta a forza viaggiante

■ **Caso 1d - Linea di influenza  $\phi_S^M$  della rotazione in S per coppia viaggiante**

In questo caso, come ormai dovrebbe essere chiaro, occorre caricare la trave con una coppia unitaria nella sezione S, e calcolare il diagramma delle rotazioni da essa generato. Infatti, considerando la struttura caricata da una coppia unitaria  $M_1$  nella generica sezione S' (primo sistema), e da una coppia  $M$  in S (secondo sistema), il teorema di Betti permette di scrivere:

$$M_1 \phi_S = M \phi_{S'} \tag{11}$$

Come semplice esempio, si voglia la linea di influenza della rotazione nell'estremo di sinistra per una trave appoggiata, causata da una coppia viaggiante.

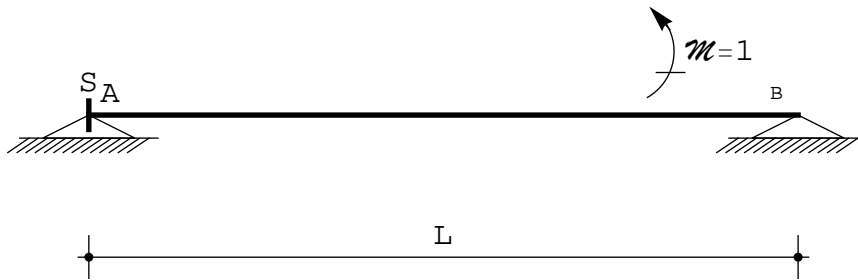


Figura 7 - Trave appoggiata soggetta a coppia viaggiante: linea di influenza della rotazione a sinistra

Per ottenerla, bisogna tracciare il diagramma delle rotazioni dovuto ad una coppia unitaria applicata

nell'estremo di sinistra, giungendo a scrivere:

$$\phi_0^M = \frac{2 L^2 - 6 L x_3 + 3 x_3^2}{6 E I L} \quad (12)$$

Ovviamente, per  $z = 0$  si ha  $\phi_0^M = \frac{L}{3EI}$ , mentre per  $z = L$  si ha  $\phi_0^M = -\frac{L}{6EI}$

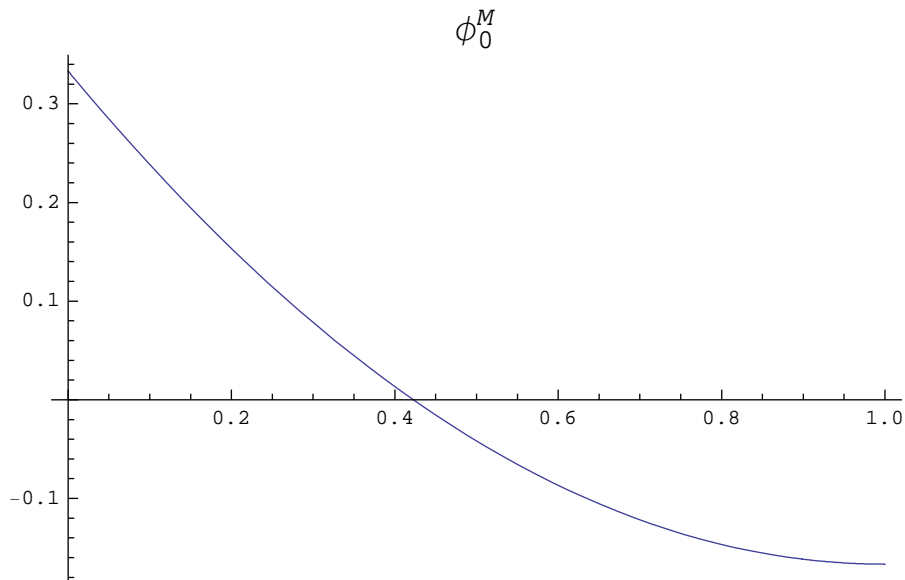


Figura 8 - Linea d'influenza  $\phi_0^M$  della rotazione a sinistra per una trave appoggiata soggetta a coppia viaggiante

## Appendice

### Figure