Lezione 41 - Il teorema di reciprocita'

- **[A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 25 Aprile 2013]**

In questa Lezione si introduce il concetto di distorsione, e si dimostra un principio generale di reciprocita', da cui poter far discendere facilmente i classici teoremi di Maxwell, Betti, Colonnetti e Volterra. Cio' e' necessaria premessa allo studio delle linee di influenza, cui saranno dedicate le prossime lezioni

Le distorsioni sulle travi

Si definisce *distorsione* di un volume elementare una qualsiasi sestupla di deformazioni e_{ij} di origine non elastica, ossia non generata da alcun insieme di tensioni. Nell'ambito della teoria delle travi, ci si limitera' poi alle cosiddette *distorsioni di Volterra*, per cui il generico concio elementare di larghezza Δs si deforma conservando la planeita' delle sezioni rette. Considerando fissa la faccia di sinistra del concio, pertanto, l'effetto delle distorsioni si riduce ad uno spostamento assoluto $\mathbf{\Delta s}_G$ del baricentro della sezione di destra, e ad una rotazione assoluta $\boldsymbol{\Delta\phi}$ della sezione di destra intorno ad un asse passante per il suo baricentro.

Le distorsioni distribuite

Si presuppone che esistano, e siano finiti, i limiti :

$$\boldsymbol{\delta}(s) = -\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{\Delta s_G}}{\Delta s} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\mu}(s) = -\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\boldsymbol{\Delta\phi}}{\Delta s} \tag{2}$$

I due vettori $\boldsymbol{\delta}$(s) e $\boldsymbol{\mu}$(s) si chiamano *distorsione distribuita di traslazione relativa*, e *distorsione distribuita di rotazione relativa*, rispettivamente, mentre l'insieme delle loro sei componenti secondo gli assi si chiamano le *caratteristiche della distorsione distribuita*

Le distorsioni concentrate

Si consideri la sezione generica S, situata all'ascissa s, e si consideri un concio elementare di larghezza Δs, centrato in S. Siano $\boldsymbol{D}_G(s) = \boldsymbol{\delta}(s)\,\Delta s$ e $\boldsymbol{D}_\phi(s) = \boldsymbol{\mu}(s)\,\Delta s$ i vettori dello spostamento relativo da distorsione tra le due facce del concio elementare. Se Δs tende a zero, mentre δ e μ vanno all'infinito, in modo che il loro prodotto resti costante, si genera nella sezione S una distorsione concentrata le cui caratteristiche sono, in base alle formule precedenti, uguali e contrarie allo spostamento assoluto Δs_G del baricentro della sezione retta S, ed alla rotazione assoluta $\Delta\phi$ della sezione stessa, intorno ad un asse passante per il suo baricentro:

$$\mathbf{D_G}(s) = -\mathbf{\Delta s_G}(s) \tag{3}$$

$$\mathbf{D}_\phi(s) = -\boldsymbol{\Delta\phi}(s) \tag{4}$$

Il caso dei sistemi monodimensionali piani

Nel caso dei sistemi monodimensionali piani, sia (m,n,t) un sistema di assi triortogonale, con l'asse *t* diretto secondo l'asse della trave, l'asse *n* diretto secondo la normale, e giacente nel piano della trave, ed infine l'asse *m* a completare la terna. Le tre componenti della distorsione distribuita $\boldsymbol{\delta}$ si riducono a due, annullandosi la componente secondo l'asse *m*. Piu' in dettaglio, si avra' la componente secondo l'asse *t*, detta *distorsione distribuita di traslazione assiale relativa* λ, e la componente secondo *n*, detta *distorsione distribuita di scorrimento relativo* θ.
Delle tre componenti della distorsione distribuita $\boldsymbol{\mu}$ sopravvive solo la componente secondo l'asse *m*, comunemente denotata μ.
Analogamente, le componenti della distorsione concentrata $\boldsymbol{D_G}$ si riducono alle due componenti secondo gli assi *t* ed *n*, dette D_η e D_ξ, mentre l'unica componente non nulla della distorsione concentrata $\boldsymbol{D_\phi}$ sara' quella secondo l'asse *m*, e sara' indicata con D_ϕ.

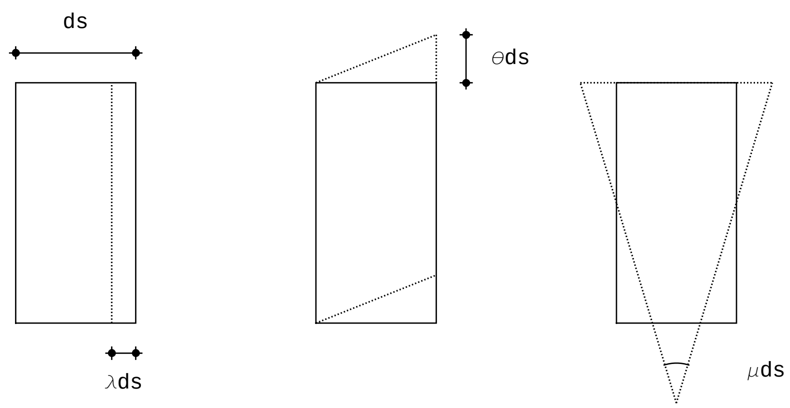

Figura 1 - Distorsioni di traslazione assiale λ, di scorrimento relativo θ, e di rotazione μ

In Figura 1 sono riportate le distorsioni agenti sul concio elementare. Si noti che le caratteristiche della sollecitazione interna compiono lavoro negativo per effetto di distorsioni positive.

Il principio di reciprocita'

Si dimostrera' ora il seguente :

Teorema - Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticita'. La trave sia soggetta ad un sistema 1 di forze $F^{(1)}$, cedimenti anelastici $\Delta^{(1)}$ e distorsioni $D^{(1)}$, che causa gli spostamenti $u^{(1)}$ e le caratteristiche della sollecitazione interna $C^{(1)}$, e ad un sistema 2 di forze $F^{(2)}$, cedimenti anelastici $\Delta^{(2)}$ e distorsioni $D^{(2)}$, che causa gli spostamenti $u^{(2)}$ e le caratteristiche della sollecitazione interna $C^{(2)}$.
Il lavoro mutuo del primo sistema di forze, cedimenti e distorsioni, dovuto agli spostamenti $u^{(2)}$ ed alle caratteristiche $C^{(2)}$, e' uguale al lavoro mutuo del secondo sistema di forze, cedimenti e distorsioni, dovuto agli spostamenti $u^{(1)}$ ed alle caratteristiche $C^{(1)}$.

Dimostrazione - La dimostrazione consiste nella doppia scrittura del principio dei lavori virtuali, utilizzando una volta il sistema 1 di forze ed il sistema 2 di spostamenti, e la seconda volta impiegando il sistema 2 di forze ed il sistema 1 di spostamenti.
Nel primo caso il lavoro virtuale interno si scrive:

$$L_i = \int_0^L N^{(1)} \frac{N^{(2)}}{EA} ds + \int_0^L M^{(1)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds + \chi \int_0^L T^{(1)} \frac{T^{(2)}}{GA} ds - \int_0^L N^{(1)} \lambda^{(2)} ds - \int_0^L M^{(1)} \mu^{(2)} ds - \int_0^L T^{(1)} \theta^{(2)} ds$$

mentre il lavoro esterno sara' fornito da :

$$L_e = \sum_{i=1}^N F_i^{(1)} u_i^{(2)} + \sum_{i=1}^M R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} - \sum_{i=1}^S c_i R_i^{(1)} R_i^{(2)} \tag{6}$$

e quindi il principio dei lavori virtuali si scrive :

$$\sum_{i=1}^N F_i^{(1)} u_i^{(2)} + \sum_{i=1}^M R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} - \sum_{i=1}^S c_i R_i^{(1)} R_i^{(2)} = \int_0^L N^{(1)} \frac{N^{(2)}}{EA} ds + \int_0^L M^{(1)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds + \chi \int_0^L T^{(1)} \frac{T^{(2)}}{GA} ds - \int_0^L N^{(1)} \lambda^{(2)} ds - \int_0^L M^{(1)} \mu^{(2)} ds - \int_0^L T^{(1)} \theta^{(2)} ds \tag{7}$$

Nel secondo caso, invece, si avra' :

$$\sum_{i=1}^N F_i^{(2)} u_i^{(1)} + \sum_{i=1}^M R_i^{(2)} \Delta_i^{(1)} - \sum_{i=1}^S c_i R_i^{(2)} R_i^{(1)} = \int_0^L N^{(2)} \frac{N^{(1)}}{EA} ds + \int_0^L M^{(2)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + \chi \int_0^L T^{(2)} \frac{T^{(1)}}{GA} ds - \int_0^L N^{(2)} \lambda^{(1)} ds - \int_0^L M^{(2)} \mu^{(1)} ds - \int_0^L T^{(2)} \theta^{(1)} ds \tag{8}$$

Dalla (7) e dalla (8) si ha poi :

$$\sum_{i=1}^N F_i^{(1)} u_i^{(2)} + \sum_{i=1}^M R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} + \int_0^L N^{(1)} \lambda^{(2)} ds + \int_0^L M^{(1)} \mu^{(2)} ds + \int_0^L T^{(1)} \theta^{(2)} ds = \sum_{i=1}^N F_i^{(2)} u_i^{(1)} + \sum_{i=1}^M R_i^{(2)} \Delta_i^{(1)} + \int_0^L N^{(2)} \lambda^{(1)} ds + \int_0^L M^{(2)} \mu^{(1)} ds + \int_0^L T^{(2)} \theta^{(1)} ds \tag{9}$$

ossia l' asserto ∎

Il principio di Betti ed il principio di Maxwell

In assenza di cedimenti e distorsioni il principio di reciprocita' si riduce al classico teorema di Enrico Betti:

Corollario (Betti 1872) - Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticita'. La trave sia soggetta ad un sistema 1 di forze $F^{(1)}$, che causa gli spostamenti $u^{(1)}$ e ad un sistema 2 di forze $F^{(2)}$, che causa gli spostamenti $u^{(2)}$.

Il lavoro mutuo del primo sistema di forze dovuto agli spostamenti $u^{(2)}$, e' uguale al lavoro mutuo del secondo sistema di forze, dovuto agli spostamenti $u^{(1)}$:

$$\sum_{i=1}^{N} F_i^{(1)} u_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{(2)} u_i^{(1)} \tag{10}$$

Se inoltre i due insiemi di forze si riducono ambedue ad una sola forza di intensita' unitaria, si ha il piu' antico teorema di reciprocita', dovuto a Maxwell:

Corollario (Maxwell 1864) - Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticita'. La trave sia soggetta ad una forza unitaria all'ascissa $s^{(1)}$ che causa gli spostamenti $u^{(1)}$ e ad una forza unitaria all'ascissa $s^{(2)}$, che causa gli spostamenti $u^{(2)}$.
Il lavoro mutuo della prima forza, dovuto agli spostamenti $u^{(2)}$, e' uguale al lavoro mutuo della seconda forza, dovuto agli spostamenti $u^{(1)}$:

$$u_1^{(2)} = u_1^{(1)} \tag{11}$$

In altri termini, il principio di Maxwell garantisce che la componente di spostamento del punto 2, secondo una retta b, provocato da una forza unitaria agente in un punto 1, secondo la direzione della retta a, e' uguale alla componente di spostamento del punto 1, secondo la retta a, provocato da una forza unitaria agente nel punto 2, secondo la retta b.

Il principio di Colonnetti

Annullando le distorsioni ed i cedimenti anelastici del primo sistema, e le forze del secondo sistema, si giunge al secondo principio di reciprocita', dovuto a Gustavo Colonnetti:

Corollario (Colonnetti) - Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticita'. La trave sia soggetta ad un sistema 1 di forze $F^{(1)}$, che causa gli spostamenti $u^{(1)}$ e le caratteristiche della sollecitazione interna $C^{(1)}$, e ad un sistema 2 di cedimenti anelastici $\Delta^{(2)}$ e distorsioni $D^{(2)}$, che causa gli spostamenti $u^{(2)}$ e le caratteristiche della sollecitazione interna $C^{(2)}$.
Il lavoro mutuo del primo sistema di forze, dovuto agli spostamenti $s^{(2)}$ ed alle caratteristiche $C^{(2)}$, e' nullo

$$\sum_{i=1}^{N} F_i^{(1)} u_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{M} R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} + \int_0^L N^{(1)} \lambda^{(2)} \, ds + \int_0^L M^{(1)} \mu^{(2)} \, ds + \int_0^L T^{(1)} \theta^{(2)} \, ds = 0 \tag{12}$$

Il principio di Volterra

Annullando le forze sia del pimo che del secondo sistema, si giunge al terzo principio di reciprocita', dovuto a Vito Volterra:

Corollario (Volterra) - Si consideri una trave a vincoli lisci e bilaterali, costituita da materiale linearmente elastico ed isotropo, e siano valide le ipotesi a base della teoria lineare dell'elasticita'. La trave sia soggetta ad un sistema 1 di cedimenti anelastici $\Delta^{(1)}$ e distorsioni $D^{(1)}$, che causa gli spostamenti $u^{(1)}$ e le caratteristiche della sollecitazione interna $C^{(1)}$, e ad un sistema 2 di cedimenti anelastici $\Delta^{(2)}$ e distorsioni $D^{(2)}$, che causa gli spostamenti $u^{(2)}$ e le caratteristiche della sollecitazione interna $C^{(2)}$.

Il lavoro mutuo del primo sistema di cedimenti e distorsioni, dovuto agli spostamenti $u^{(2)}$ ed alle caratteristiche $C^{(2)}$, e' uguale al lavoro mutuo del secondo sistema di cedimenti e distorsioni, dovuto agli spostamenti $u^{(1)}$ ed alle caratteristiche $C^{(1)}$.

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{M} R_i^{(1)} \Delta_i^{(2)} + \int_0^L N^{(1)} \lambda^{(2)} \, ds + \int_0^L M^{(1)} \mu^{(2)} \, ds + \int_0^L T^{(1)} \theta^{(2)} \, ds = \\ &\sum_{i=1}^{M} R_i^{(2)} \Delta_i^{(1)} + \int_0^L N^{(2)} \lambda^{(1)} \, ds + \int_0^L M^{(2)} \mu^{(1)} \, ds + \int_0^L T^{(2)} \theta^{(1)} \, ds\end{aligned} \tag{13}$$

Figure