
Lezione 40 - I corollari di Mohr

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 29 agosto 2011]

In questa Lezione si illustra un metodo per calcolare lo spostamento o la rotazione di un punto di una trave rettilinea, sfruttando equazioni di equilibrio.

L'analogia di Mohr

Si consideri una generica trave di Eulero-Bernoulli. Per essa, e' ben noto che equilibrando un concio elementare nei riguardi della traslazione verticale e della rotazione si ottengono due relazioni differenziali che legano tra loro il carico verticale applicato $q(x_3)$, lo sforzo di taglio $T_2(x_3)$ ed il momento flettente $M_1(x_3)$:

$$\frac{dT_2}{dx_3} = -q \quad (1)$$

$$\frac{dM_1}{dx_3} = T_2 \quad (2)$$

Ne segue subito, derivando la (2) ed usando la (1):

$$\frac{d^2 M_1}{dx_3^2} = -q \quad (3)$$

D'altro canto, e' anche noto che la teoria di Eulero-Bernoulli si basa sull'ipotesi di planeita' delle sezioni rette, per cui esiste una relazione lineare tra momento flettente e curvatura della sezione retta:

$$\frac{d\phi}{dx_3} = \frac{M_1}{EI_{11}} \quad (4)$$

dove $\phi(x_3)$ rappresenta la rotazione della sezione retta, e la costante di proporzionalita' e' la rigidezza flessionale EI_{11} , ossia il prodotto tra il modulo di Young E del materiale, ed il momento di inerzia I_{11} della sezione retta. Infine, l'ulteriore ipotesi a base della teoria della trave di Eulero-Bernoulli impone che la sezione retta ruoti dello stesso angolo di cui ruota l'asse neutro, e quindi la rotazione puo' essere espressa in termini di derivata dello spostamento verticale $u_2(x_3)$:

$$\frac{du_2}{dx_3} = -\phi \quad (5)$$

Inserendo la (5) nella (4) si ha poi la nota equazione:

$$\frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = -\frac{M_1}{EI_{11}} \quad (6)$$

Paragonando la (6) con la (3) si nota che la funzione $u_2(x_3)$ puo' essere riguardata come un momento fittizio $M^*(x_3)$ causato da un carico fittizio:

$$q^* = \frac{M_{11}}{EI_{11}} \quad (7)$$

Dalla (4), poi, paragonata alla (1), si trae che le rotazioni possono riguardarsi come lo sforzo di taglio fittizio

$-T^*$ causato dallo stesso carico fittizio.

■ La trave ausiliaria e le condizioni ai limiti

Si è visto che gli spostamenti e le rotazioni possono calcolarsi come se rappresentassero una distribuzione di momenti flettenti e tagli dovuti ad un particolare carico fittizio (7). Corrispondentemente, le condizioni di vincolo della trave di partenza devono essere opportunamente modificate, giungendo a definire una *trave ausiliaria* su cui calcolare le caratteristiche.

■ I vincoli di estremità'

È noto che l'estremo A di una trave può essere:

1. incastrato, e per esso:

$$u_{2A} = 0; \phi_A = 0; M_{1A} \neq 0; T_{2A} \neq 0 \quad (8)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il momento fittizio M_A^* ed il taglio fittizio T_A^* , e quindi l'incastro si trasformerà in una sezione libera

2. appoggiato, e per esso:

$$u_{2A} = 0; \phi_A \neq 0; M_{1A} = 0; T_{2A} \neq 0 \quad (9)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il momento fittizio M_A^* mentre il taglio fittizio T_A^* potrà essere diverso da zero, e quindi l'appoggio si trasformerà in un appoggio

3. dotato di bipendolo, e per esso:

$$u_{2A} \neq 0; \phi_A = 0; M_{1A} \neq 0; T_{2A} = 0 \quad (10)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il taglio fittizio T_A^* mentre il momento fittizio M_A^* potrà essere diverso da zero, e quindi il bipendolo rimarrà un bipendolo

4. libero, e per esso:

$$u_{2A} \neq 0; \phi_A \neq 0; M_{1A} = 0; T_{2A} = 0 \quad (11)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà permettere un taglio fittizio T_A^* ed un momento fittizio M_A^* diversi da zero, e quindi l'estremo libero si dovrà trasformare in un incastro

■ I vincoli esterni intermedi

Un vincolo locato all'ascissa generica $x_3 = \zeta$ che non interrompa la continuità fisica della trave, può essere:

1. un appoggio intermedio, e per esso:

$$u_{2\zeta} = 0; \phi_\zeta \neq 0; M_{1\zeta} = 0; \Delta T_{2\zeta} \neq 0 \quad (12)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il momento fittizio M_ζ^* mentre il taglio fittizio T_ζ^* potrà essere diverso da zero, e quindi l'appoggio si trasformerà in una cerniera

1. un bipendolo intermedio esterno, e per esso:

$$u_{2\zeta} \neq 0; \phi_\zeta = 0; \Delta M_\zeta \neq 0; T_\zeta = 0 \quad (13)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà annullare il taglio fittizio T_ζ^* mentre il momento fittizio

M_ζ^* potrà essere diverso da zero, e quindi il bipendolo esterno si trasformerà in un bipendolo interno

■ I vincoli interni intermedi (snodi)

Un vincolo locato all'ascissa generica $x_3 = \zeta$ che interrompa la continuità fisica della trave, può essere:

1. una cerniera, e per essa:

$$u_{2\zeta} \neq 0; \Delta\phi_\zeta \neq 0; M_{1\zeta} = 0; T_{2\zeta} \neq 0 \quad (14)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà permettere una discontinuità del taglio fittizio T_ζ^* , e quindi la cerniera si trasformerà in un appoggio

1. un bipendolo interno, e per esso:

$$\Delta u_{2\zeta} \neq 0; \phi_\zeta \neq 0; M_{1\zeta} \neq 0; T_{2\zeta} = 0 \quad (15)$$

In questo caso, il vincolo sulla trave ausiliaria dovrà permettere una discontinuità del momento fittizio M_ζ^* , e quindi il bipendolo interno diverrà un bipendolo esterno

La trave appoggiata

Si consideri una trave appoggiata ad ambedue gli estremi, di luce L , soggetta ad un carico distribuito $q(x_3)$, forze verticali e coppie concentrate, e si vogliano calcolare le rotazioni in corrispondenza dei vincoli ϕ_A e ϕ_B . La trave ausiliaria è ancora appoggiata agli estremi, sicché le rotazioni richieste possono identificarsi con i tagli in A e B per la trave appoggiata soggetta al carico fittizio q^* :

$$\phi_A = -T_A^*; \quad \phi_B = -T_B^* \quad (16)$$

e poiché come è noto, il taglio a sinistra è uguale e contrario alla reazione dell'appoggio, mentre a destra il taglio è uguale alla reazione, si può anche scrivere:

$$\phi_A = R_A^*; \quad \phi_B = -R_B^* \quad (17)$$

Nel seguito, si illustrano in dettaglio alcuni carichi particolari:

■ La trave appoggiata soggetta a forza in mezzera

Le reazioni R_A ed R_B sono fornite da:

$$R_A = R_B = -\frac{F}{2} \quad (18)$$

Il momento flettente è distribuito con legge lineare, si annulla ad ambedue gli estremi, e raggiunge un massimo in corrispondenza della forza, dove vale:

$$M_{1\max} = M_1 \left(\frac{L}{2} \right) = -R_B \frac{L}{2} = \frac{FL}{4} \quad (19)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico bi-triangolare di Figura, e si calcolino le reazioni:

$$R_A^* = R_B^* = -\frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{FL}{4EI_{11}} = -\frac{FL^2}{16EI_{11}} \quad (20)$$

Infine, le rotazioni si deducono in base alla (17):

$$\phi_A = R_A^* = -\frac{FL^2}{16EI_{11}}; \phi_B = -R_B^* = \frac{FL^2}{16EI_{11}}; \quad (21)$$

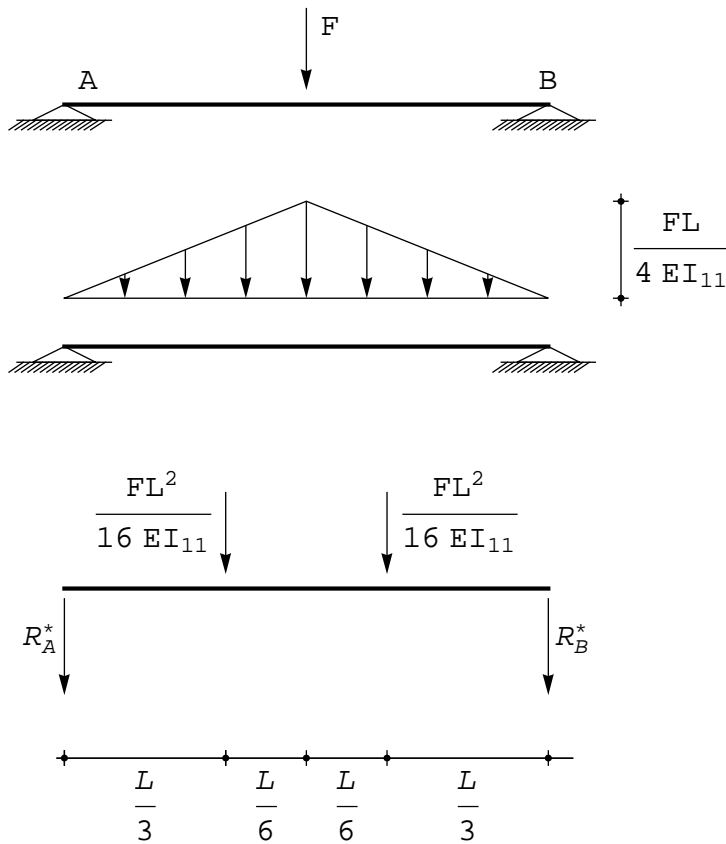


Figura 1 - Trave appoggiata soggetta a forza concentrata in mezzeria

L'abbassamento in mezzeria e' ricavabile tramite la (7), ossia calcolando il momento flettente sulla trave ausiliaria:

$$u_{2\max} = M_{\max}^* = -R_B^* \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{FL}{4EI_{11}} \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{FL^3}{48EI_{11}} \quad (22)$$

■ La trave appoggiata soggetta a carico uniformemente distribuito

Le reazioni \$R_A\$ ed \$R_B\$ sono fornite da:

$$R_A = R_B = -\frac{qL}{2} \quad (23)$$

Il momento flettente e' distribuito con legge parabolica, si annulla ad ambedue gli estremi, e raggiunge un massimo in corrispondenza della forza, dove vale:

$$M_{\max} = M_1 \left(\frac{L}{2} \right) = -R_B \frac{L}{2} - \frac{qL}{2} \frac{L}{4} = \frac{qL^2}{8} \quad (24)$$

Ne segue che la funzione momento e' esprimibile come:

$$M_1(x_3) = \frac{qx_3}{2} (L - x_3) \quad (25)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico parabolico:

$$q^*(x_3) = \frac{qx_3}{2EI_{11}} (L - x_3) \tag{26}$$

e si calcolino le reazioni, sfruttando la simmetria del sistema:

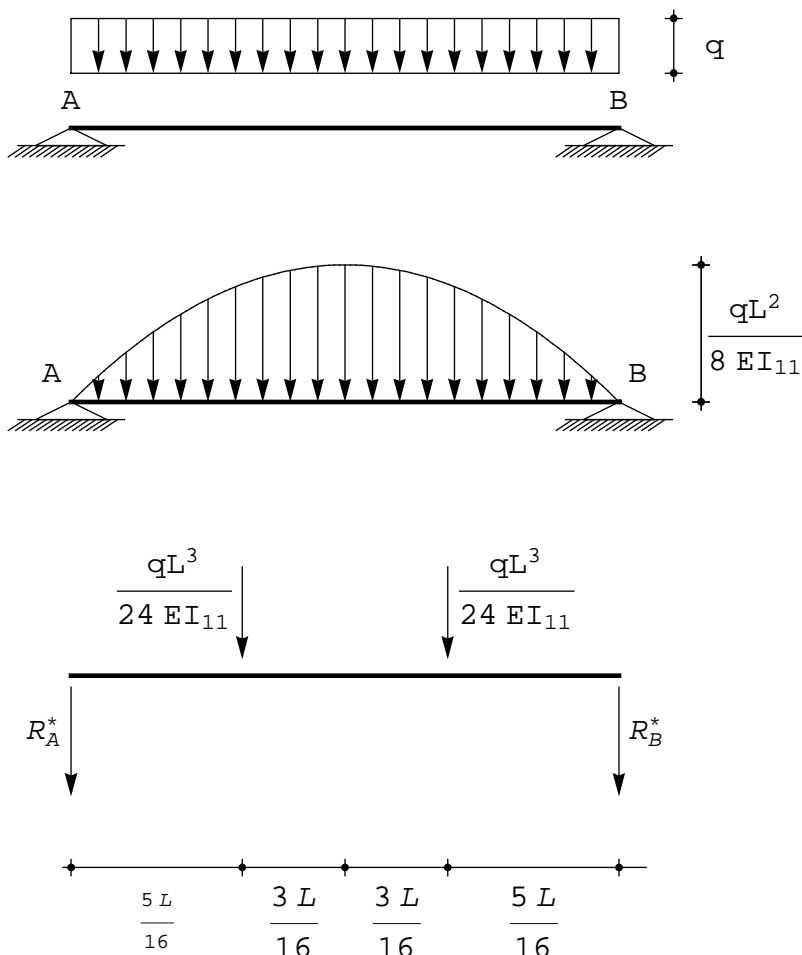


Figura 2 - Trave appoggiata soggetta a carico distribuito

$$R_A^* = R_B^* = -\frac{1}{2EI_{11}} \int qx_3 \frac{(L - x_3)}{2} dx_3 = -\frac{qL^3}{24EI_{11}} \tag{27}$$

Infine, le rotazioni si deducono in base alla (17):

$$\phi_A = R_A^* = -\frac{qL^3}{24EI_{11}} ; \phi_B = -R_B^* = \frac{qL^3}{24EI_{11}} \tag{28}$$

L'abbassamento in mezzeria e' ricavabile tramite la (7), ossia calcolando il momento flettente sulla trave ausiliaria. Tenendo conto che il baricentro del carico parabolico e' situato a 3/8 della semiluce si ha (cfr. Figura 2)

$$u_{2max} = M_{max}^* = -R_B^* \frac{L}{2} - \frac{qL^3}{24EI_{11}} \frac{3}{8} \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI_{11}} \tag{29}$$

■ La trave appoggiata soggetta a coppia concentrata in un estremo

Le reazioni R_A ed R_B sono fornite da:

$$R_A = \frac{-\mathcal{M}}{L}; \quad R_B = \frac{\mathcal{M}}{L} \quad (30)$$

Il momento flettente e' distribuito con legge lineare, si annulla a sinistra, e raggiunge un massimo in corrispondenza della coppia.

Ne segue che la funzione momento e' esprimibile come:

$$M_1(x_3) = \mathcal{M} \frac{x_3}{L} \quad (31)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico triangolare:

$$q^*(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} \frac{x_3}{L} \quad (32)$$

e si calcolino le reazioni, imponendo l'equilibrio alla traslazione ed alla rotazione. Si hanno le due equazioni

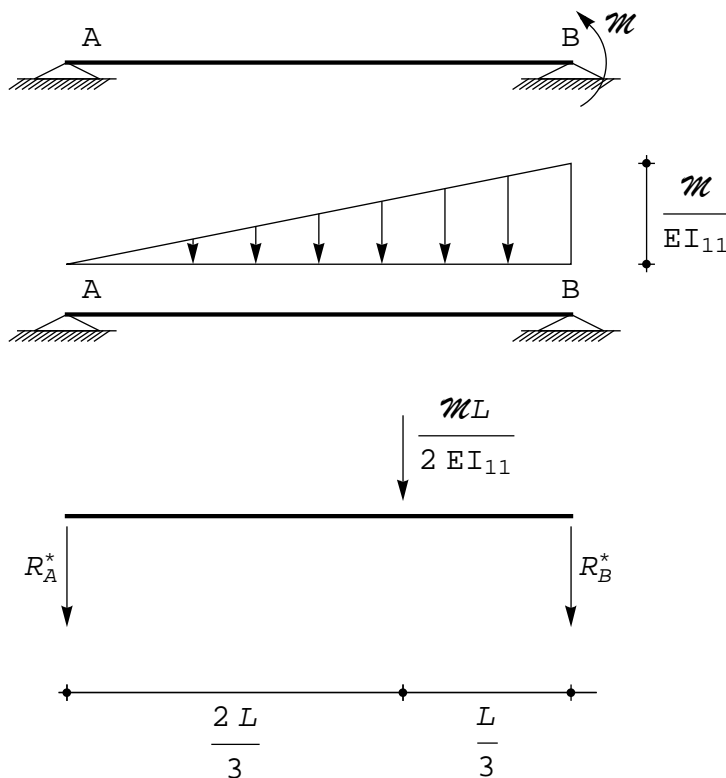


Figura 3 - Trave appoggiata soggetta a coppia nell'estremo

$$\begin{aligned} R_A^* + R_B^* + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} L &= 0; \\ R_A^* L + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} L \frac{L}{3} &= 0; \end{aligned} \quad (33)$$

che possono risolversi a fornire:

$$R_A^* = -\frac{\mathcal{M}L}{6EI_{11}}; R_B^* = -\frac{\mathcal{M}L}{3EI_{11}} \quad (34)$$

Infine, le rotazioni si deducono in base alla (17):

$$\phi_A = R_A^* = -\frac{\mathcal{M}L}{6EI_{11}}; \phi_B = -R_B^* = \frac{\mathcal{M}L}{3EI_{11}} \quad (35)$$

La trave a mensola

Si consideri ora una trave a mensola, di luce L , con incastro a sinistra e libera a destra, soggetta ad un carico distribuito $q(x_3)$, forze verticali e coppie concentrate, e si vogliano calcolare la rotazione ϕ_B e l'abbassamento u_{2B} in corrispondenza dell'estremo libero. La trave ausiliaria e' ancora una mensola, in cui pero' estremo libero e' a sinistra e l'incastro e' a destra, sicche' la rotazione e l'abbassamento richiesti possono identificarsi con il taglio ed il momento in B per la trave libera-incastata soggetta al carico fittizio q^* :

$$\phi_B = T_B^*; u_{2B} = M_B^* \quad (36)$$

Nel seguito, si illustrano in dettaglio alcuni carichi particolari:

■ La trave a mensola soggetta a forza nell'estremo libero

Il momento flettente e' distribuito con legge lineare, si annulla nell'estremo libero, e raggiunge un minimo in corrispondenza dell'incastro, dove vale:

$$M_{1\max} = M_1 \left(\frac{L}{2} \right) = -FL \quad (37)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico triangolare di Figura, e si calcolino le reazioni:

$$R_B^* = \frac{1}{2} \frac{FL}{EI_{11}} L = \frac{FL^2}{2EI_{11}} \quad (38)$$

$$M_{rB}^* = \frac{1}{2} \frac{FL}{EI_{11}} L \left(\frac{2}{3} L \right) = \frac{FL^3}{3EI_{11}} \quad (39)$$

Ne segue infine che le richieste rotazioni e spostamenti sono:

$$\phi_B = -\frac{FL^2}{2EI_{11}} \quad (40)$$

$$u_{2B} = \frac{FL^3}{3EI_{11}}; \quad (41)$$

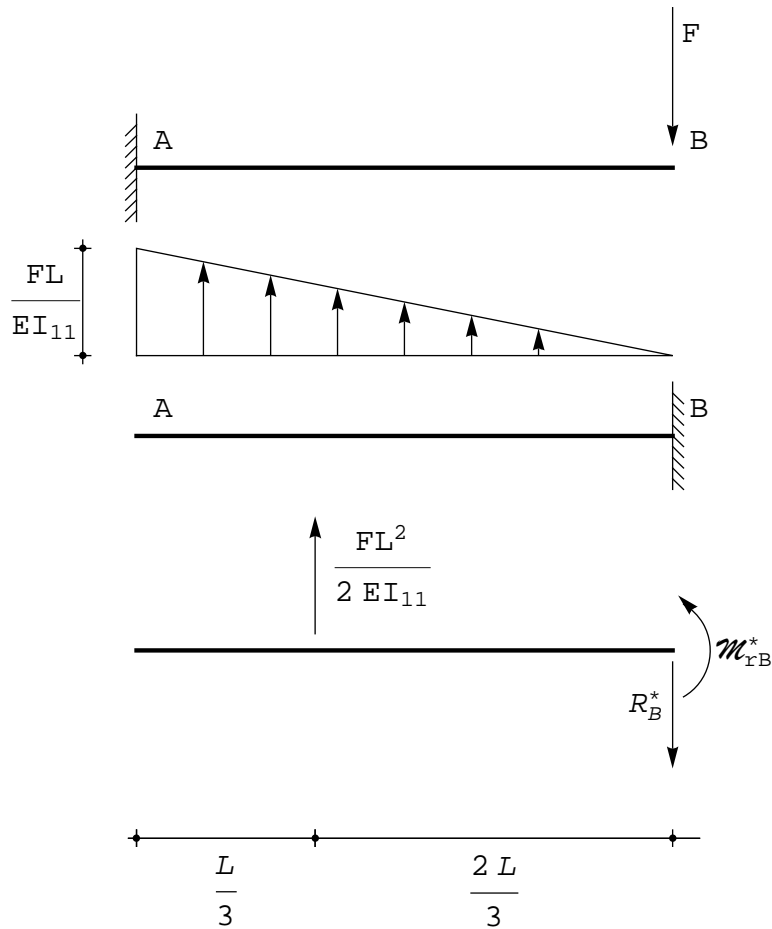


Figura 4 - Trave a mensola soggetta a forza nell'estremo

■ La trave a mensola soggetta a carico uniformemente distribuito

Le reazioni R_A ed M_{rA} sono fornite da:

$$R_A = -qL ; M_{rA} = \frac{qL^2}{2} \quad (42)$$

Il momento flettente e' distribuito con legge parabolica, si annulla nell'estremo libero, insieme alla sua derivata, e raggiunge un minimo in corrispondenza dell'incastro, dove vale:

$$M_{1 \min} = -M_{rA} = -\frac{qL^2}{2} \quad (43)$$

Ne segue che la funzione momento e' esprimibile come:

$$M(x_3) = -\frac{qL^2}{2} + qLx_3 - \frac{q}{2}x_3^2 \quad (44)$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico parabolico:

$$q^*(x_3) = -\frac{qL^2}{2EI_{11}} + \frac{qL}{EI_{11}}x_3 - \frac{q}{2EI_{11}}x_3^2 \quad (45)$$

e si calcolino le reazioni:

$$\begin{aligned}
 R_B^* &= - \int_0^L q^* (x_3) \, dx_3 = \\
 &= - \int_0^L \left(- \frac{q L^2}{2 EI_{11}} + \frac{q L}{EI_{11}} x_3 - \frac{q}{2 EI_{11}} x_3^2 \right) dx_3 = \frac{qL^3}{6 EI_{11}} \\
 M_{rB} &= - \int_0^L q^* (x_3) (L - x_3) \, dx_3 = \\
 &= - \int_0^L \left(- \frac{q L^2}{2 EI_{11}} + \frac{q L}{EI_{11}} x_3 - \frac{q}{2 EI_{11}} x_3^2 \right) (L - x_3) \, dx_3 = \frac{qL^4}{8 EI_{11}}
 \end{aligned} \tag{47}$$

Infine, le rotazioni e gli spostamenti si deducono in base alla (17):

$$\phi_B = -R_B^* = \frac{qL^3}{24 EI_{11}} ; u_{2B} = M_B^* = \frac{qL^4}{8 EI_{11}} \tag{48}$$

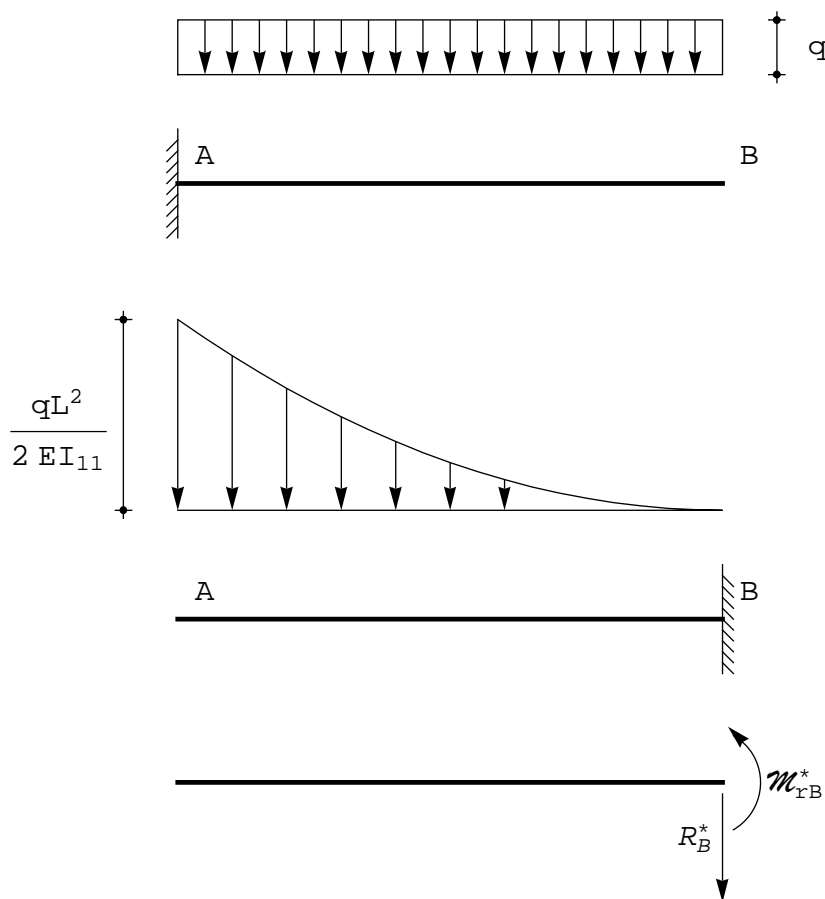


Figura 5 - Trave a mensola soggetta a carico distribuito

■ **La trave a mensola soggetta a coppia concentrata in un estremo**

Il momento flettente e' distribuito con legge costante:

$$M (x_3) = \mathcal{M} \tag{49}$$

Si assoggetti allora la trave ausiliaria al carico costante:

$$q^* (x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} \quad (50)$$

e si calcolino le reazioni, imponendo l'equilibrio alla traslazione ed alla rotazione. Si ha:

$$R_B^* = -\frac{\mathcal{M}}{EI_{11}} L; M_{rB}^* = -\frac{\mathcal{M}L}{EI_{11}} \frac{L}{2} \quad (51)$$

Infine, le rotazioni e gli spostamenti si deducono in base alla (17):

$$\phi_B = -R_B^* = \frac{\mathcal{M}L}{EI_{11}}; u_{2B} = M_B^* = -\frac{\mathcal{M}L^2}{2EI_{11}}; \quad (52)$$

Figure