Lezione 4 - I vincoli interni

- **[A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 6 ottobre 2012]**

Proseguendo nello studio dei corpi rigidi, adotteremo d'ora in poi la seguente classificazione geometrica, necessariamente alquanto vaga: chiameremo *trave, o solido monodimensionale* un corpo rigido in cui una dimensione sia nettamente preponderante rispetto alle altre due, chiameremo *piastre, o solidi bidimensionali*, i solidi caratterizzati da due dimensioni preponderanti rispetto alla terza dimensione, chiameremo infine *solido tridimensionale* un solido in cui le tre dimensioni siano paragonabili tra loro.

Il solido monodimensionale, o trave

Il modo piu' semplice di definire un solido monodimensionale del tipo trave e' considerare una figura piana che si muove nello spazio conservandosi ortogonale alla curva descritta dal suo baricentro G. La curva suddetta si dira' *asse della trave*, la figura piana suddetta si dira' *sezione retta della trave.*

In generale, l'asse della trave puo' essere una qualsiasi curva sghemba, ma d'ora in poi considereremo solo travi il cui asse e' contenuto in un piano (*piano medio della trave*), cosi' definendo le *travi piane*. Se poi l'asse della trave risulta essere una retta, parleremo di *travi piane ad asse rettilineo*.

Infine, si parlera' di *problema piano* quando si studia una trave piana soggetta a forze e reazioni contenute nel piano medio, e quando la sezione retta della trave e' simmetrica rispetto allo stesso piano medio.

E' evidente che un elemento strutturale del tipo trave non puo' superare certe dimensioni, e quindi il suo utilizzo e' limitato ai casi piu' semplici. D'altro canto, e' possibile ovviare a questo inconveniente connettendo tra loro piu' elementi trave, attraverso connessioni, o vincoli interni, che impediscono alcuni tra i movimenti relativi, e che trasmettono le corrispondenti forze interattive. In tal modo e' possibile giungere a strutture a geometria complessa, identificate come un insieme di travi rigide connesse tra loro in un numero discreto di punti attraverso opportune connessioni.

La cinematica dei vincoli interni

Si consideri una coppia di travi, collegate tra loro nel punto A, dove la sezione retta terminale della prima trave incontra la sezione iniziale della seconda trave. Nel caso spaziale, esistono tre traslazioni relative e tre rotazioni relative tra queste due sezioni. Nel caso piano, invece, i possibili movimenti relativi si riducono a due traslazioni relative Δu_1 e Δu_2 ed una singola rotazione relativa $\Delta\phi$, come illustrato in Figura 1, e quindi ne segue la seguente classificazione:

Vincoli semplici (sconnessioni doppie)

Se le due sezioni contigue sono collegate tra loro in modo che valga la seguente equazione di vincolo:

$$\triangle u_1 = 0 \tag{1}$$

allora si dice che nel punto A agisce una vincolo semplice, o - equivalentemente - una sconnessione doppia. Meccanicamente, tale vincolo puo' rappresentarsi con un pendolo ad asse orizzontale, che visualizza l'obbligo delle due sezioni ad avere lo stesso spostamento orizzontale. Del tutto analogo e' il caso in cui $\Delta u_2 = 0$, illustrato da un pendolo ad asse verticale.

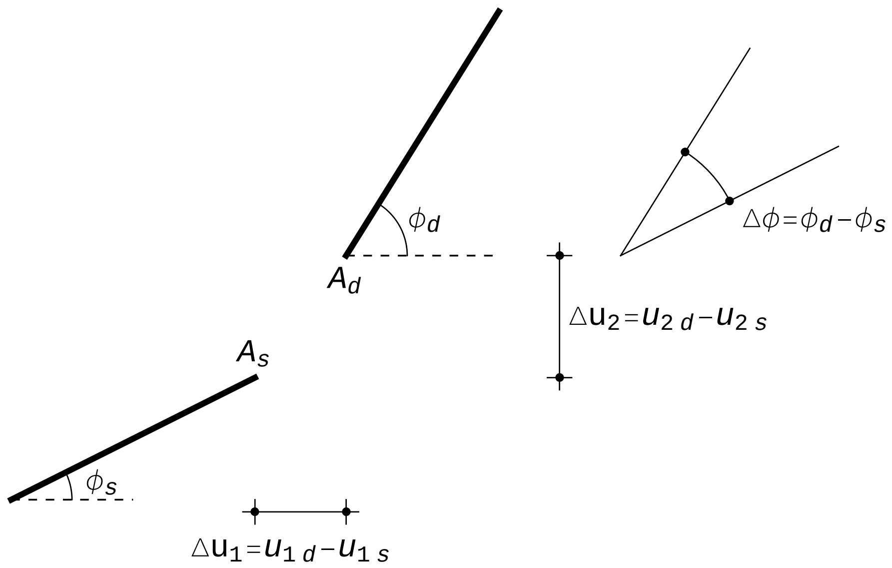


Figura 1 - I tre possibili movimenti relativi in corrispondenza del punto A

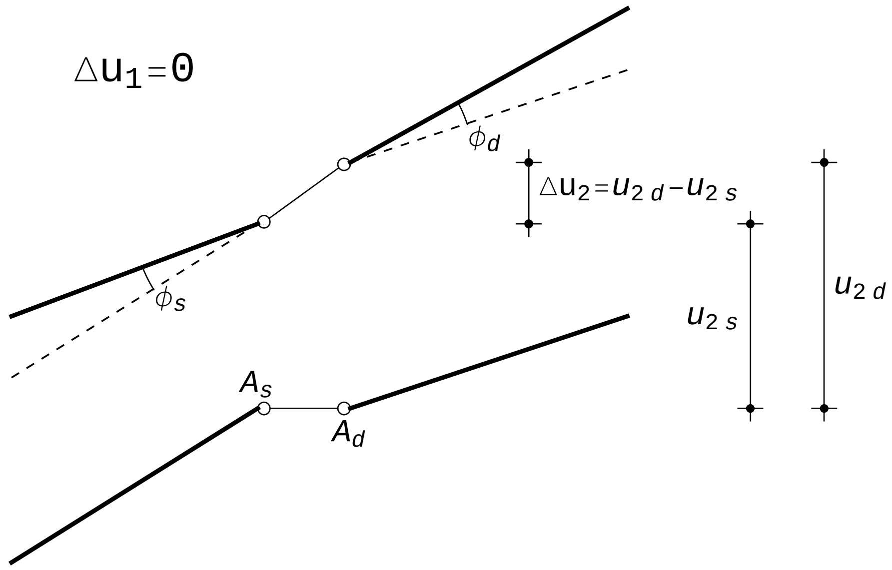


Figura 2 - Il pendolo ad asse orizzontale ed il suo cinematismo

Se le due sezioni contigue sono collegate tra loro in modo che valga la seguente equazione di vincolo:

$$\Delta\phi = 0 \tag{2}$$

allora si dice che nel punto A agisce una vincolo semplice, o - equivalentemente - una sconnessione doppia. Meccanicamente, tale vincolo puo' rappresentarsi con un doppio bipendolo, che visualizza l'obbligo delle due sezioni ad avere rotazione relativa nulla.

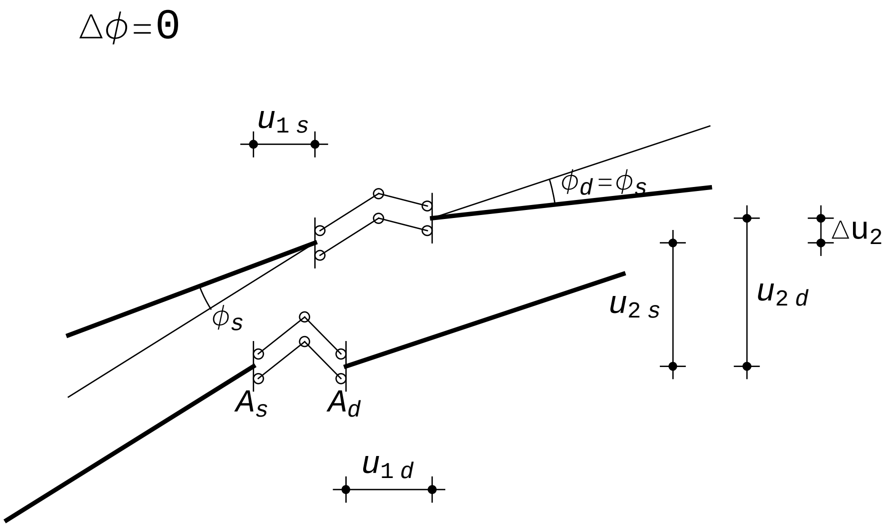


Figura 3 - Il doppio bipendolo ed il suo cinematismo

■ Vincoli doppi (sconnessioni semplici)

Se le due sezioni contigue sono collegate tra loro in modo che valgano le seguenti equazioni di vincolo:

$$\triangle u_1 = 0 \tag{3}$$

$$\triangle u_2 = 0 \tag{4}$$

allora si dice che nel punto A agisce un vincolo doppio, o - equivalentemente - una sconnessione semplice. Meccanicamente, tale vincolo puo' rappresentarsi con una *cerniera*, che visualizza l'obbligo delle due sezioni ad avere lo stesso spostamento, mentre le due travi possono ruotare indipendentemente intorno alla sezione A.

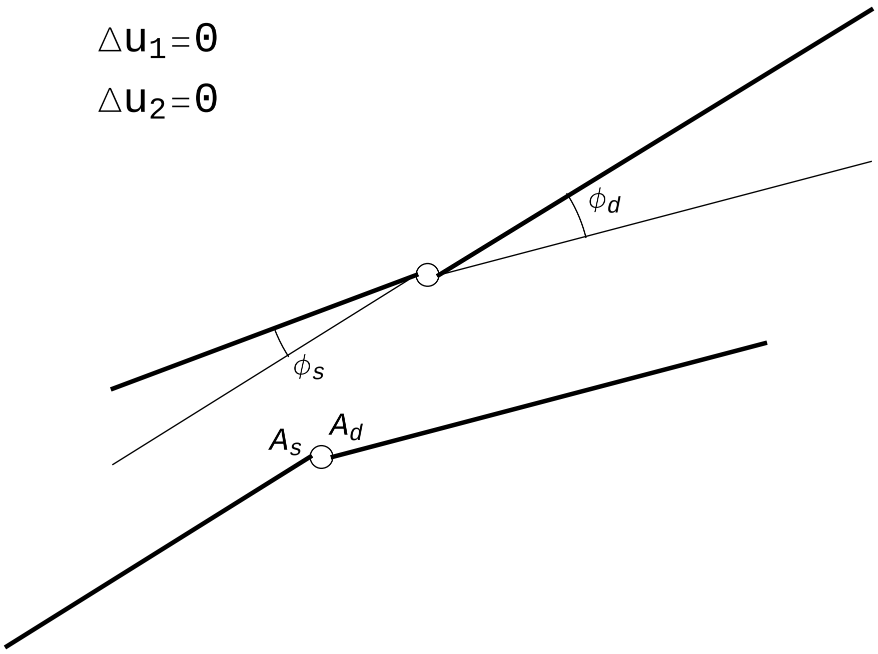


Figura 4 - La cerniera ed il suo cinematismo

Se le due sezioni contigue sono collegate tra loro in modo che valgano le seguenti equazioni di vincolo:

$$\triangle u_1 = 0 \qquad (5)$$

$$\triangle \phi = 0 \qquad (6)$$

anche in questo caso si dice che nel punto A agisce un vincolo doppio, o - equivalentemente - una sconnessione semplice. Meccanicamente, tale vincolo puo' rappresentarsi con un *doppio pendolo*, ad asse orizzontale, che visualizza l'obbligo delle due sezioni ad avere lo stesso spostamento orizzontale e la stessa rotazione, mentre le due travi possono avere differenti spostamenti verticali. Del tutto analogo e' il caso del bipendolo ad asse verticale, o di bipendolo ad asse inclinato.

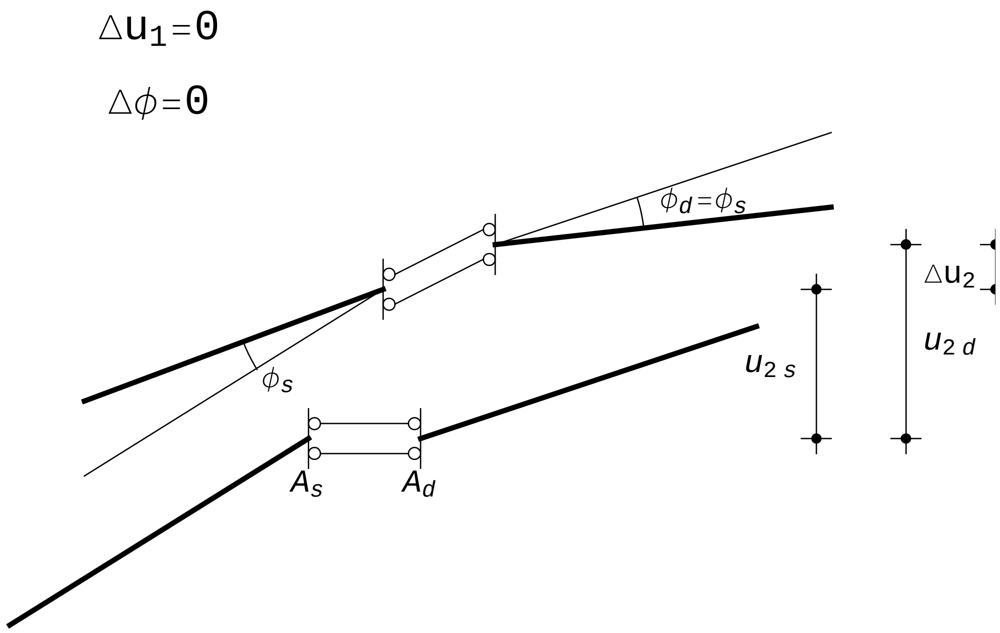


Figura 5 - Il doppio pendolo ad asse orizzontale ed il suo cinematismo

La statica dei vincoli interni

Cosi' come discusso per i vincoli esterni, anche i vincoli interni possono considerarsi equivalenti a forze o coppie reattive, di valore incognito, tali da imporre il rispetto del vincolo. Cosi', il pendolo puo' essere sostituito da due forze, uguali e contrarie, agenti secondo l'asse del pendolo, e tali da annullare lo spostamento relativo lungo l'asse del pendolo, mentre il doppio bipendolo e' equivalente a due coppie uguali e contrarie, di valore tale da impedire la rotazione relativa. La cerniera e' equivalente a due forze orizzontali e due forze verticali, tali da annullare lo spostamento relativo. Il bipendolo e' invece sostituibile con due coppie e due forze dirette lungo l'asse del bipendolo, tali da annullare le rotazioni relative e gli spostamenti relativi lungo l'asse del bipendolo. Tutto cio' viene sintetizzato nelle quattro figure seguenti.

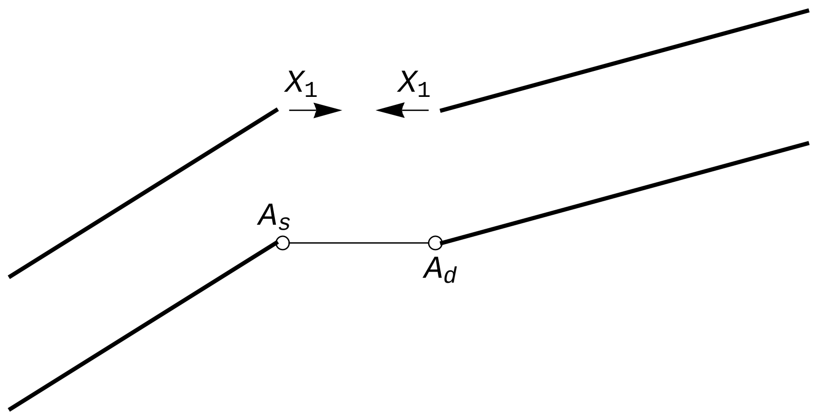


Figura 6 - Il pendolo ad asse orizzontale ed il suo equivalente statico

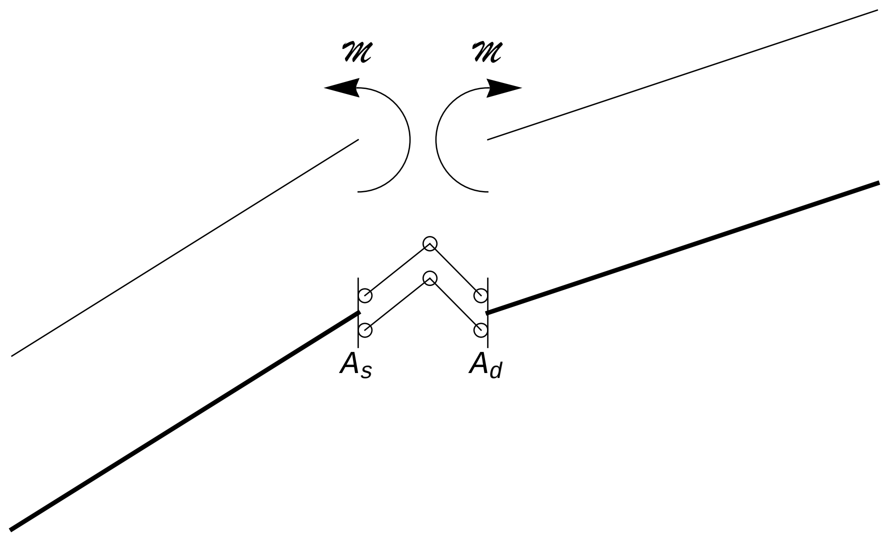


Figura 7 - Il doppio bipendolo ed il suo equivalente statico

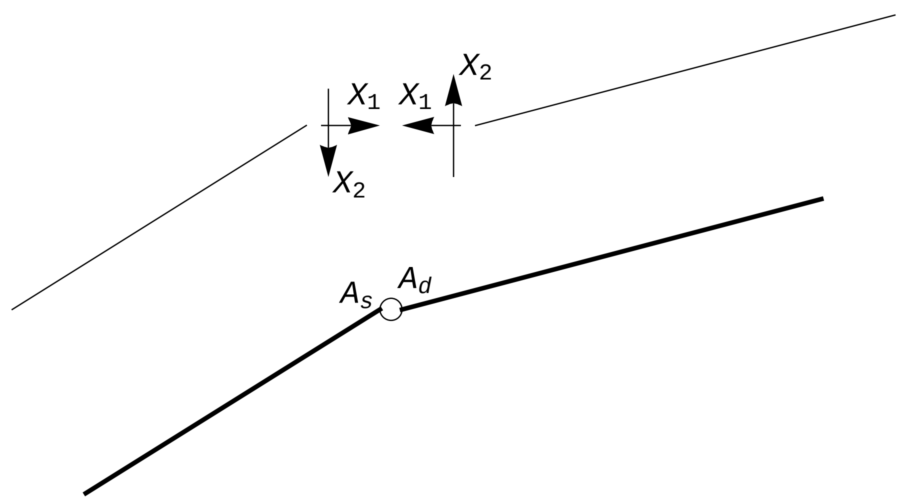


Figura 8 -La cerniera ed il suo equivalente statico

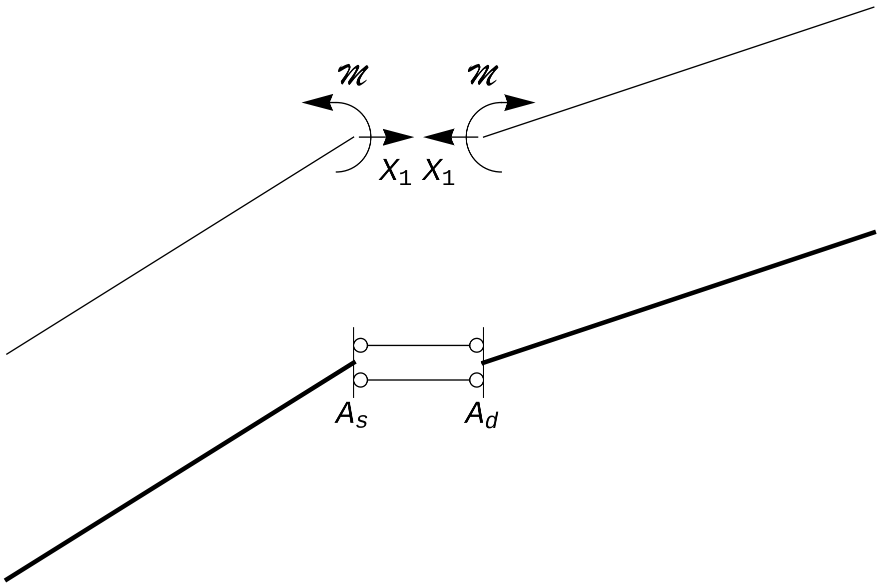


Figura 9 - Il doppio pendolo ad asse orizzontale ed il suo equivalente statico

Figure

- **Figura 1 - Vincoli singoli**
- **Figura 2 - Vincoli singoli**
- **Figura 3 - Vincoli singoli**
- **Figura 4 - Vincoli doppi**

■ Figura 5 - Vincoli doppi

```
e = .1; f = .1; sx = 6; sy = 1.8; r = .04;
$TextStyle = {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14};
(* Carrello con piano di scorrimento verticale *)
xA = 0; yA = 0; xB = 2; yB = 1.25;
xC = 2.75; yC = 1.25; xD = 5; yD = 2;
lAB = Sqrt[(xB - xA)^2 + (yB - yA)^2]; ϕs = ArcCos[(xB - xA) / lAB];
lCD = Sqrt[(xD - xC)^2 + (yD - yC)^2]; ϕd = ArcCos[(xD - xC) / lCD];
Membro1 = Line[{{xA, yA}, {xB, yB}}];
Membro2 = Line[{{xC, yC}, {xD, yD}}];
bip = .2;
Bipendolo1 = Line[{{xB, yB - bip}, {xB, yB + bip}}];
Bipendolo2 = Line[{{xC, yC - bip}, {xC, yC + bip}}];
Bipendolo3 = Circle[{xB + r, yB - bip / 2}, r];
Bipendolo4 = Circle[{xB + r, yB + bip / 2}, r];
Bipendolo5 = Circle[{xC - r, yC - bip / 2}, r];
Bipendolo6 = Circle[{xC - r, yC + bip / 2}, r];
Bipendolo9 = Line[{{xB + 2 r, yB - bip / 2}, {xC - 2 r, yB - bip / 2}}];
Bipendolo10 = Line[{{xB + 2 r, yB + bip / 2}, {xC - 2 r, yB + bip / 2}}];

u2s = 1; u2d = 1.3;
u1s = .5; u1d = .5;
Membro1traslato = Line[{{xA + u1s, yA + u2s}, {xB + u1s, yB + u2s}}];
Membro2traslato = Line[{{xC + u1d, yC + u2d}, {xD + u1d, yD + u2d}}];
x1B = xB + u1s; y1B = yB + u2s; x1C = xC + u1d; y1C = yC + u2d;
Bipendolot1 = Line[{{x1B, y1B - bip}, {x1B, y1B + bip}}];
Bipendolot2 = Line[{{x1C, y1C - bip}, {x1C, y1C + bip}}];
Bipendolot3 = Circle[{x1B + r, y1B - bip / 2}, r];
Bipendolot4 = Circle[{x1B + r, y1B + bip / 2}, r];
Bipendolot5 = Circle[{x1C - r, y1C - bip / 2}, r];
Bipendolot6 = Circle[{x1C - r, y1C + bip / 2}, r];
Bipendolot9 =
  Line[{{x1B + 2 r, y1B - bip / 2}, {x1C - 2 r, y1C - bip / 2}}];
Bipendolot10 = Line[{{x1B + 2 r, y1B + bip / 2},
    {x1C - 2 r, y1C + bip / 2}}];

u2agg = .5;
Membro1traslatoeruotato =
  Line[{{xA + u1s, yA + u2s + u2agg}, {xB + u1s, yB + u2s}}];
Membro2traslatoeruotato =
  Line[{{xC + u1d, yC + u2d}, {xD + u1d, yD + u2d - u2agg}}];
Angolos = Circle[{xB + u1s, yB + u2s}, 1, {1.12 π, 1.18 π}];
Angolod = Circle[{xC + u1d, yC + u2d}, 1, {.04 π, .1 π}];
Labelϕs =
  Text[Style["ϕs", FontSize → 12], {xB + u1s - .7, yB + u2s - .6}];
Labelϕd = Text[Style["ϕd=ϕs", FontSize → 12],
   {xC + u1d + 1.4, yC + u2d + .3}];

LabelAs = Text[Style["As", FontSize → 12], {xB, yB - 3 e}];
```

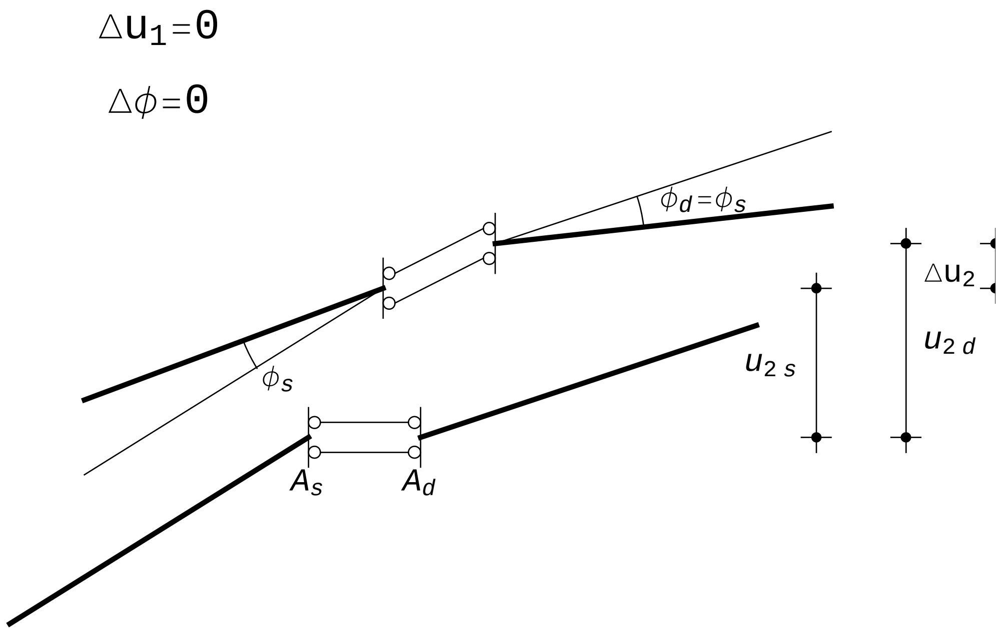
```
LabelAd = Text[Style["Ad", FontSize → 12], {xC, yC - 3 e}];

α1 = .9;
Quotav1 = Line[{{α1 sx, yB - e}, {α1 sx, yB + u2s + e}}];
Quotav2 = Line[{{α1 sx - f, yB}, {α1 sx + f, yB}}];
Quotav3 = Line[{{α1 sx - f, yB + u2s}, {α1 sx + f, yB + u2s}}];
Punto1 = Point[{{α1 sx, yB}, {α1 sx, yB + u2s}}];
Labelus =
  Text[Style["u2 s", FontSize → 12], {α1 sx - 3 e, yB + u2s / 2}];

Quotav4 = Line[{{1 sx, yC - e}, {1 sx, yC + u2d + e}}];
Quotav5 = Line[{{1 sx - f, yC}, {1 sx + f, yC}}];
Quotav6 = Line[{{1 sx - f, yC + u2d}, {1 sx + f, yC + u2d}}];
Punto2 = Point[{{1 sx, yC}, {1 sx, yC + u2d}}];
Labelud =
  Text[Style["u2 d", FontSize → 12], {1 sx + 3 e, yC + u2d / 2}];
α = 1.1;
Quotav7 = Line[{{α sx, yB + u2s - e}, {α sx, yC + u2d + e}}];
Quotav8 = Line[{{α sx - f, yB + u2s}, {α sx + f, yB + u2s}}];
Quotav9 = Line[{{α sx - f, yC + u2d}, {α sx + f, yC + u2d}}];
Punto3 = Point[{{α sx, yC + u2d}, {α sx, yB + u2s}}];
LabelΔus =
  Text[Style["Δu2", FontSize → 12], {α sx - 3 e, yB + u2s + e}];
LabelVinc = Text[Style["Δu1=0", FontSize → 16], {1, 4}];
LabelVinc1 = Text[Style["Δϕ=0", FontSize → 16], {1, 3.5}];

Graphics[{LabelVinc, LabelVinc1, Labelus, Labelud, LabelΔus,
   LabelAs, LabelAd, Angolos, Angolod, Labelϕs, Labelϕd,
   Membro1traslato, Membro2traslato, Bipendolo1, Bipendolo2,
   Bipendolo3, Bipendolo4, Bipendolo5, Bipendolo6, Bipendolo9,
   Bipendolo10, Bipendolot1, Bipendolot2, Bipendolot3,
   Bipendolot4, Bipendolot5, Bipendolot6, Bipendolot9,
   Bipendolot10, Quotav1, Quotav2, Quotav3, Quotav4, Quotav5,
   Quotav6, Quotav7, Quotav8, Quotav9, Arrowheads[.035],
   Thickness[0.0035], Thickness[0.005], Membro1, Membro2,
   Membro1traslatoeruotato, Membro2traslatoeruotato,
   Dashing[{0.01, 0.01}], Thickness[0.002], PointSize[0.01],
   Punto1, Punto2, Punto3, GrayLevel[0.6]},
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange → All];


Show[%]
```



- **Figura 6 - Vincoli singoli - statica**
- **Figura 7 - Vincoli singoli - statica**
- **Figura 8 - Vincoli doppi - statica**
- **Figura 9 - Vincoli doppi - statica**