Lezione 39 - Le equazioni di congruenza

- **[A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 27 agosto 2011]**

Per definizione, in una trave iperstatica non e' possibile calcolare le reazioni vincolari con sole equazioni di equilibrio.
In questa Lezione si illustra un metodo per affrontare lo studio di travi iperstatiche, affiancando alle equazioni della statica opportune equazioni di congruenza.

Le travi isostatiche ed iperstatiche

Si consideri una trave rettilinea costituita da t tratti, intendendo per tratto un segmento di trave non interrotto da vincoli interni , e per cui possano scriversi 2t equazioni di equilibrio. Se il numero s di reazioni incognite dei vincoli agenti sulla trave e' maggiore di 2t, ne segue che esse non possono essere calcolate con sole considerazioni di statica.

Alcuni esempi

Ipotizzando, per semplicita', che non esistano possibilita' di moti rigidi (labilita'), le travi per cui i = s- 2t > 0 si dicono travi iperstatiche, il numero i e' il corrispondente grado di iperstaticita', e per esse occorre fornire i equazioni aggiuntive. Se invece s = 2t, allora le travi si dicono isostatiche, o staticamente determinate, e le reazioni possono calcolarsi applicando le equazioni cardinali della statica.

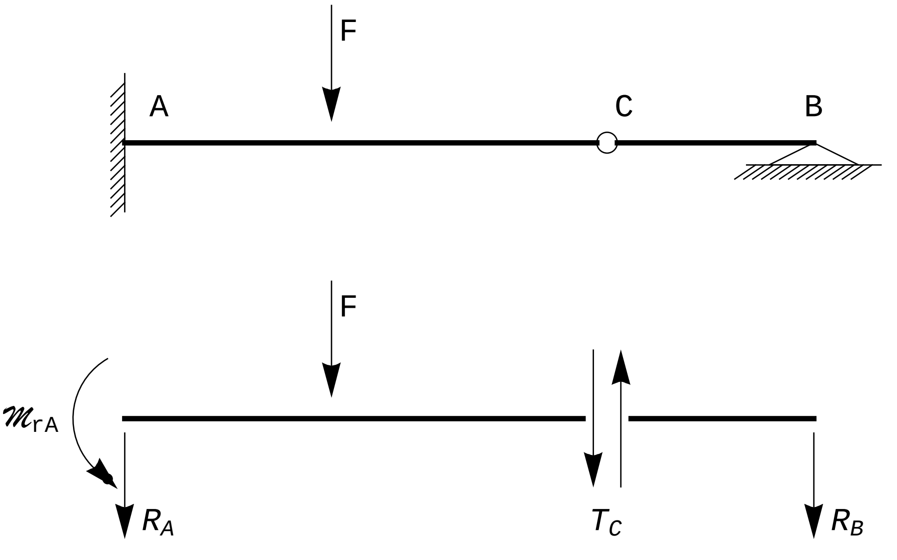

Figura 1 - Un esempio di trave isostatica, quattro reazioni incognite, quattro equazioni di equilibrio

La prima trave e' incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, ed inoltre la sua continuita' fisica e' interrotta da una cerniera. Pertanto per essa t = 2, e possono scriversi quattro equazioni di equilibrio. Sostituendo ai vincoli di estremita' le reazioni, ed esplicitando la caratteristica tagliante in corrispondenza della cerniera, si hanno quattro incognite reattive, e pertanto la trave e' isostatica.

La seconda trave e' una trave su tre appoggi, costituita da un unico tratto. Le incognite reattive sono le tre reazioni degli appoggi, e quindi la trave e' una volta iperstatica.

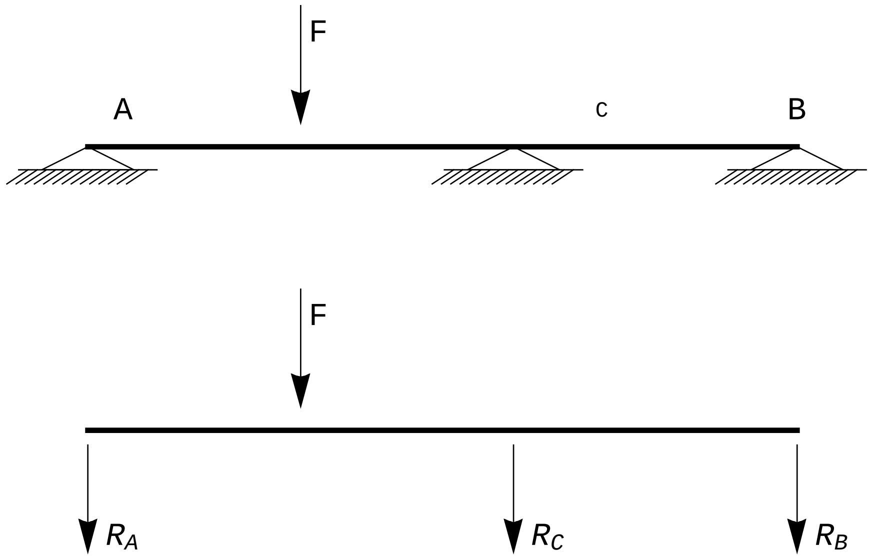

Figura 2 - Un esempio di trave iperstatica, tre reazioni incognite, due equazioni di equilibrio, e grado di iperstaticita' pari ad uno

La terza trave e' incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, e vede la sua continuita' fisica interrotta dalla cerniera in D. Sul primo tratto insiste un appoggio esterno, sul secondo un bipendolo esterno. Per essa sara' t = 2 ed s = 6, e quindi i = s-2t = 2 e la trave risulta due volte iperstatica.

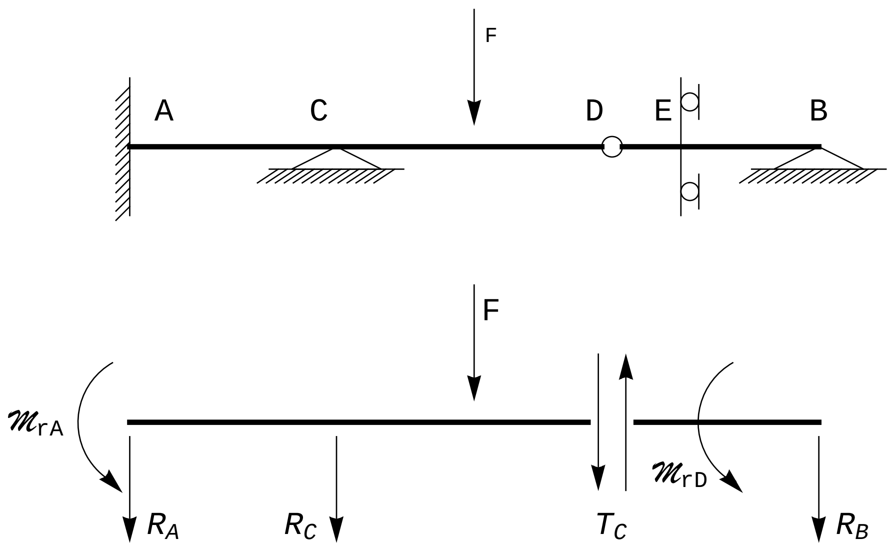

Figura 3 - Un esempio di trave doppiamente iperstatica

La quarta trave e' appoggiata a sinistra ed incastrata a destra, e vede la sua continuita' fisica interrotta dal bipendolo interno in B e dalla cerniera in D. Sul tratto intermedio insiste un appoggio esterno. Per essa sara' t = 3 ed s = 6, e quindi i = s-2t = 0 e la trave risulta isostatica

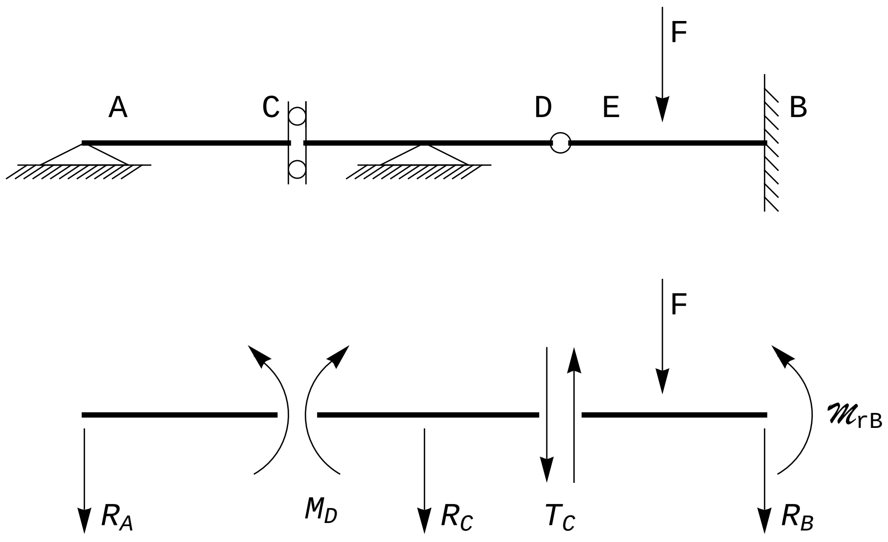

Figura 4 - Un esempio di trave suddivisa in tre tratti, con sei incognite reattive: la trave risulta isostatica

Le equazioni di congruenza

Si consideri una trave incastrata ai due estremi e soggetta ad una carico uniformemente distribuito di intensita' q. Essa e' ovviamente due volte iperstatica, e quindi non e' possibile calcolare direttamente le reazioni vincolari, in quanto le due equazioni della statica:

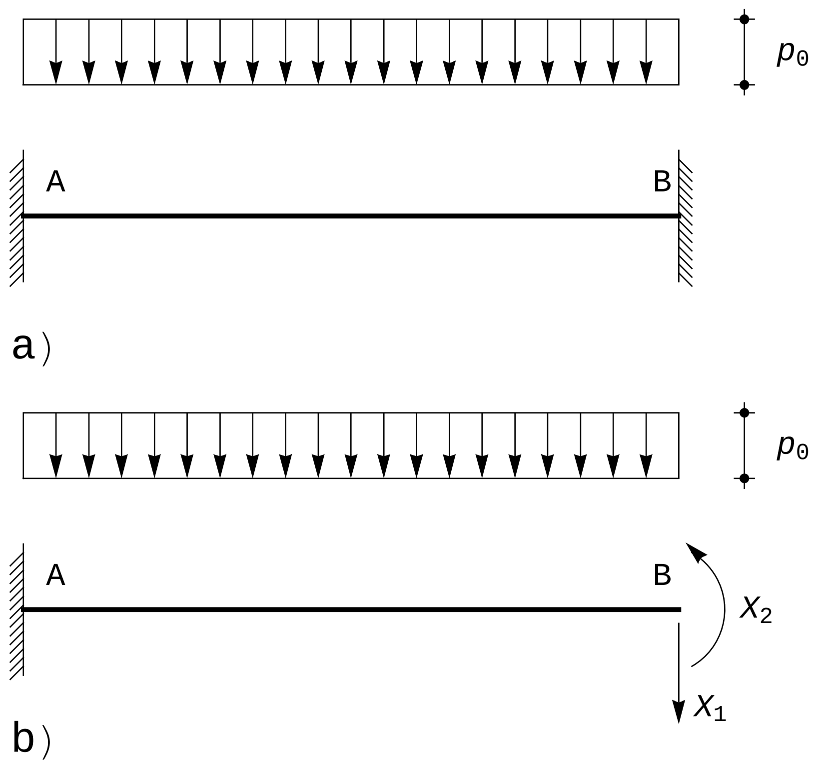

Figura 5 - Una struttura doppiamente iperstatica ed una possibile scelta delle incognite iperstatiche

$$
\begin{aligned}
&R_A + R_B + qL = 0\\
&\mathcal{M}_{rA} + \mathcal{M}_{rB} + \frac{qL^2}{2} = 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

non permettono il calcolo delle quattro incognite. Tuttavia per la trave in esame e' possibile scrivere quattro equazioni di congruenza, che esprimono l'annullarsi di spostamenti e rotazioni in corrispondenza degli incastri:

$$
\begin{aligned}
&v_A = 0\\
&\phi_A = 0\\
&v_B = 0\\
&\phi_B = 0
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Utilizzando due di queste quattro equazioni risulta agevole calcolare due reazioni incognite, e ricondurre lo studio della trave iperstatica di partenza allo studio di una trave isostatica equivalente. Si operi nel modo seguente:

1. si scelgano due reazioni incognite, ad esempio le reazioni dell'incastro di destra, e si ponga:

$$
\begin{aligned}
&R_B = X_1\\
&\mathcal{M}_{rB} = X_2
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Si ottiene in tal modo la *struttura isostatica equivalente* di Figura 5b, ossia la mensola soggetta al carico p_0, alla forza incognita X_1 ed alla coppia incognita X_2. Il valore di queste due incognite si calcola imponendo il rispetto delle due condizioni di congruenza:

$$
\begin{aligned}
&v_B = 0\\
&\phi_B = 0
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

operando sulla struttura isostatica equivalente. Ed infatti, per il principio di sovrapposizione degli effetti, potra' scriversi, come illustrato in Figura 6.

$$
\begin{aligned}
&v_B = v_B^0 + v_B^1 X_1 + v_B^2 X_2 = 0\\
&\phi_B = \phi_B^0 + \phi_B^1 X_1 + \phi_B^2 X_2 = 0
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

dove v_B^0 e ϕ_B^0 sono l'abbassamento e la rotazione all'estremo libero di una mensola soggetta al carico q, v_B^1 e ϕ_B^1 sono l'abbassamento e la rotazione all'estremo libero di una mensola soggetta ad una forza di intensita' unitaria, e v_B^2 e ϕ_B^2 sono l'abbassamento e la rotazione all'estremo libero di una mensola soggetta ad una coppia di intensita' unitaria.
E' questo un sistema di due equazioni nelle due incognite X_1ed X_2, i cui coefficienti sono ormai noti, o possono calcolarsi applicando i corollari di Mohr. Si ha:

$$
\begin{aligned}
&X_1 \frac{L^3}{3\,EI} - X_2 \frac{L^2}{2\,EI} + \frac{qL^4}{8\,EI} = 0\\
&-X_1 \frac{L^2}{2\,EI} + X_2 \frac{L}{EI} - \frac{qL^3}{6\,EI} = 0
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

e quindi:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = R_B = -\frac{qL}{2}\\
&X_2 = \mathcal{M}_{rB} = -\frac{qL^2}{12}
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Cio' fatto, le ulteriori reazioni possono calcolarsi a partire dalle equazioni della statica (1)

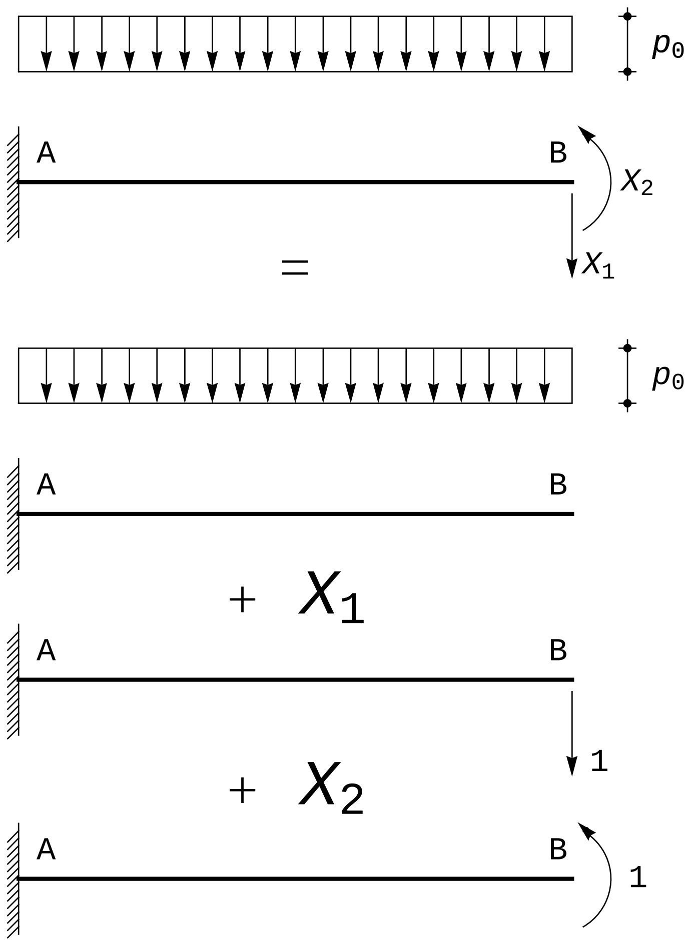

Figura 6 - Il principio di sovrapposizione degli effetti applicato al calcolo delle iperstatiche

ESERCIZI -
1.Si risolva ora lo stesso schema utilizzando come incognite iperstatiche le due coppie reattive $\mathcal{M}_{rA}$ ed $\mathcal{M}_{rB}$, e quindi operando su una struttura isostatica equivalente di trave appoggiata agli estremi

2. Si risolvano gli schemi iperstatici descritti in precedenza

Le equazioni dei tre momenti

Una delle strutture di piu' frequente impiego nell'ambito dell'ingegneria civile e' la trave continua su *n* appoggi, dallo studio dei solai ai piu' complessi schemi di ponti a travata su molti piloni. Essa e' *n-2* volte iperstatica, ed e' opportuno scegliere le incognite iperstatiche in modo da poter semplificare al massimo le *n-2* equazioni di congruenza.

E' evidente infatti che per incognite iperstatiche potrebbero legittimamente scegliersi le n-2 reazioni degli appoggi intermedi, ed in tal modo la trave isostatica equivalente sarebbe la trave appoggiata agli estremi, soggetta al carico q ed a n forze verticali incognite. E' pero' altrettanto evidente che lo studio di tale sistema non e' particolarmente agevole. Se invece si introducono n-2 cerniere intermedie, in corrispondenza degli n-2 appoggi interni, si riduce la trave continua ad una serie di travi appoggiate, l'una indipendente dall'altra, e su di esse le equazioni di congruenza assumono una forma ripetitiva.

Si consideri allora una generica porzione di trave continua, costituita dalle due campate immediatamente precedente e seguente il generico appoggio i-esimo, come illustrato in Figura 7.

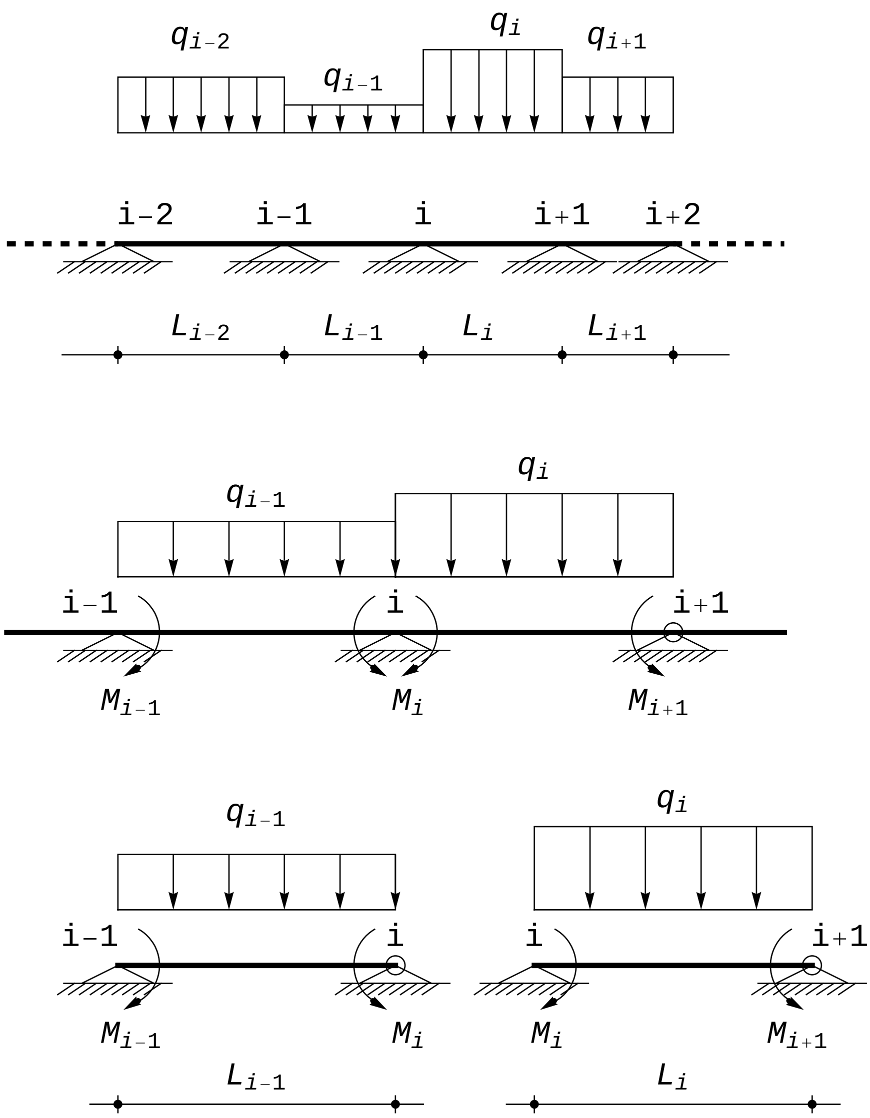

Figura 7 - Lo schema per la scrittura dell'equazione dei tre momenti

L' i-esima equazione di congruenza e' intesa a ripristinare la continuita' delle rotazioni in corrispondenza dell'i-esimo appoggio, e puo' scriversi simbolicamente:

$$\phi_i^S = \phi_i^D \qquad (8)$$

esprimendo con essa che la rotazione sull'appoggio i-esimo, considerato appartenente alla campata di sinistra, deve essere uguale alla rotazione dello stesso appoggio considerato appartenente alla campata di destra. Sara' quindi, esplicitamente:

$$-q_{i-1}\frac{L_{i-1}^3}{24\,EI} + M_{i-1}\frac{L_{i-1}}{6\,EI} + M_i\frac{L_{i-1}}{3\,EI} = q_i\frac{L_i^3}{24\,EI} - M_i\frac{L_i}{3\,EI} - M_{i+1}\frac{L_{i+1}}{6\,EI} \qquad (9)$$

ossia:

$$M_{i-1}\frac{L_{i-1}}{6} + \frac{M_i}{3}\left(L_{i-1} + L_i\right) + M_{i+1}\frac{L_{i+1}}{6} = q_{i-1}\frac{L_{i-1}^3}{24} + q_i\frac{L_i^3}{24} \qquad (10)$$

ed ancora:

$$M_{i-1}\,L_{i-1} + 2\,M_i\,(L_{i-1} + L_i) + M_{i+1}\,L_{i+1} = q_{i-1}\,\frac{L_{i-1}^3}{4} + q_i\,\frac{L_i^3}{4} \tag{11}$$

E' facile osservare che con questa scelta delle incognite iperstatiche la singola equazione di congruenza non contiene piu' di tre incognite, e quindi la matrice dei coefficienti assume un comodo aspetto tri-diagonale.

Le equazioni appena dedotte sono note come *equazioni dei tre momenti*, o *equazioni di Clapeyron* (1857).

La reazione R_i sul generico appoggio e' fornita dalla somma della reazione calcolata per la campata i-1 e della reazione calcolata per la trave i. Si ha allora, per la campata i-1:

$$-R_i\,L_{i-1} - M_{i-1} + M_i - q_{i-1}\,\frac{L_{i-1}^2}{2} = 0 \tag{12}$$

e per la campata successiva:

$$R_i\,L_i - M_i + M_{i+1} + q_i\,\frac{L_i^2}{2} = 0 \tag{13}$$

e quindi la reazione complessiva sara':

$$R_i = -\frac{M_{i-1}}{L_{i-1}} + M_i\left(\frac{1}{L_{i-1}} + \frac{1}{L_i}\right) - \frac{M_{i+1}}{L_i} - q_{i-1}\,\frac{L_{i-1}}{2} - q_i\,\frac{L_i}{2} \tag{14}$$

Figure