

Lezione 38 - I carichi assiali sulle travi

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 29 agosto 2011]

Nella lezione 30 si e' iniziato lo studio della trave snella, o di Eulero-Bernoulli. In particolare, l'energia potenziale totale di una trave di lunghezza L , con sezione retta di area A , e momento di inerzia I , costituita da materiale omogeneo, linearmente elastico ed isotropo, con modulo di Young E , e soggetta ad una distribuzione di carico trasversale distribuito $p(z)$ ed una distribuzione di carico assiale distribuito $t(z)$, e' fornita da (cfr. 40 della Lezione 30):

$$E_t = \frac{1}{2} \int_0^L EA u_3'^2(x_3) dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI u_2''^2(x_3) dx_3 - \int_0^L p(x_3) u_2(x_3) dx_3 - \int_0^L t(x_3) u_3(x_3) dx_3 \quad (1)$$

A questa relazione si e' giunti per via energetica, utilizzando le deformazioni lineari, ossia confondendo il tensore di Green-Lagrange con la parte simmetrica del gradiente di spostamento, oppure per via geometrica, scrivendo l'equilibrio di un concio indeformato soggetto ai carichi esterni ed interni. In questo livello di approssimazione, quindi, lo studio del comportamento flessionale della trave puo' disaccoppiarsi dallo studio del comportamento assiale.

In realta', pero', la deformazione flessionale della trave causa anche un accorciamento assiale, come puo' dedursi visivamente dalla Figura 1.a, che non sempre e' possibile trascurare. Quando infatti la trave e' caricata assialmente, l'accorciamento assiale dovuto alla deformazione flessionale fara' compiere lavoro alle forze assiali, e quindi vi sara' un'aliquota supplementare di energia potenziale, che andra' debitamente introdotta nello studio delle linee elastiche.

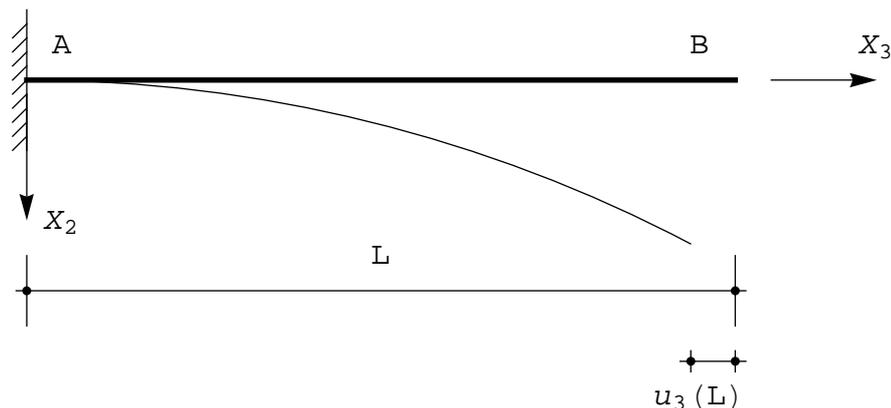


Figura 1 - L'accorciamento assiale dovuto alla deformazione flessionale

Questa lezione sara' dedicata alla deduzione dell'energia potenziale di un carico assiale F , applicato all'estremo di destra di una trave rettilinea di lunghezza L , come riportato in Figura 2. Applicando poi il principio di stazionarieta' dell'energia potenziale totale si dedurra' l'equazione differenziale della linea elastica con le opportune condizioni ai limiti.

L'energia potenziale del carico assiale

Si consideri un segmento di trave disteso lungo l'asse X_3 , di lunghezza dx_3 , che a seguito della deformazione si trasformerà in un segmento di lunghezza $d\xi_3$. La lunghezza del segmento deformato $d\xi_3$ potrà calcolarsi a partire dalla (7) della Lezione 14, che qui si riporta:

$$|M' N'|^2 = |MN|^2 + 2 \mathbf{ds}^T \mathbf{D} \mathbf{ds} \quad (2)$$

Questa equazione deve essere specializzata, per tener conto che:

$$\begin{aligned} |M' N'| &\equiv |d\xi_3| \\ |MN| &\equiv |dx_3| = dx_3 \\ \mathbf{ds} &= (0, 0, dx_3) \end{aligned} \quad (3)$$

e quindi diventa:

$$|d\xi_3|^2 = dx_3^2 + 2 d_{33} dx_3^2 = (1 + 2 d_{33}) dx_3^2 \quad (4)$$

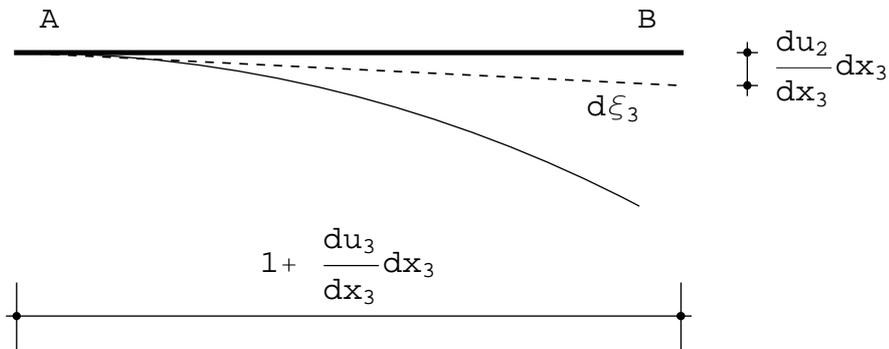


Figura 2.- Il segmento deformato $d\xi_3$ e le sue due componenti

Inoltre, poiché la terna di spostamenti sarà:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= u_2(x_3) \\ u_3 &= u_3(x_2, x_3) \end{aligned} \quad (5)$$

la componente d_{33} del tensore di Green – Lagrange si scriverà (cfr. eq. 14 della Lezione 14):

$$d_{33} = \frac{du_3}{dx_3} + \frac{1}{2} \left(\frac{du_2}{dx_3} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{du_3}{dx_3^2} \right)^2 \quad (6)$$

L'ipotesi fondamentale, a base della trattazione, è quella di *incomprimibilità* della trave durante la deformazione flessionale, per cui dovrà necessariamente risultare $|d\xi_3| = |dx_3|$, o, dalla (4):

$$d_{33} = 0 \quad (7)$$

Ne segue, dalla (6), la fondamentale relazione:

$$\left(1 + \frac{du_3}{dx_3} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dx_3} \right)^2 = 1 \quad (8)$$

da cui subito:

$$\frac{du_3}{dx_3} = \sqrt{1 - \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2} - 1 \tag{9}$$

La (9) puo' essere utilizzata per il calcolo della desiderata aliquota di energia potenziale del carico assiale, come illustrato in Figura 3. Ed infatti, poiche' l'energia potenziale puo' calcolarsi come inverso del lavoro, si avra':

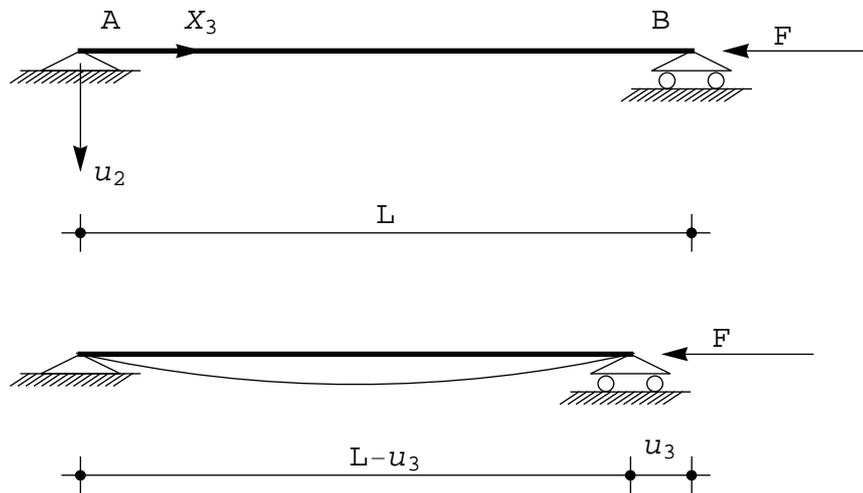


Figura 3 - L'accorciamento assiale in una trave soggetta a carico di compressione

$$P = F u_3 (L) = F \int_0^L \frac{du_3}{dx_3} dx_3 = F \int_0^L \left(\sqrt{1 - \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2} - 1 \right) dx_3 \tag{10}$$

ed utilizzando lo sviluppo in serie del binomio, si ha infine:

$$P = -\frac{F}{2} \int_0^L \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2 dx_3 = -\frac{F}{2} \int_0^L u_2'^2 (x_3) dx_3 \tag{11}$$

La deduzione dell'equazione differenziale della linea elastica

Si vogliono ora studiare le configurazioni di equilibrio di una trave soggetta ad una forza di compressione F, applicando il principio di stazionarieta' dell'energia potenziale totale, e quindi annullando la variazione prima del funzionale:

$$E_t = \frac{1}{2} \int_0^L EI u_2'^2 (x_3) dx_3 - \frac{F}{2} \int_0^L u_2'^2 (x_3) dx_3 \tag{12}$$

Come sempre, la variazione totale sara' data da:

$$\begin{aligned} \delta E_t &= E_t (u_2' + \delta u_2', u_2'' + \delta u_2'') - E_t (u_2', u_2'') = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EI (u_2'' + \delta u_2'')^2 dx_3 - \frac{F}{2} \int_0^L (u_2' + \delta u_2')^2 dx_3 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L EI u_2'^2 dx_3 + \frac{F}{2} \int_0^L u_2'^2 dx_3 = \\ \int_0^L EI u_2'' \delta u_2'' dx_3 - F \int_0^L u_2' \delta u_2' dx_3 + \\ \frac{1}{2} \int_0^L EI \delta u_2'^2 dx_3 - \frac{F}{2} \int_0^L \delta u_2'^2 dx_3 \end{aligned}$$

La variazione prima, da annullare, sarà allora:

$$\delta_1 E_t = \int_0^L EI u_2'' \delta u_2'' dx_3 - F \int_0^L u_2' \delta u_2' dx_3 = 0 \quad (14)$$

Occorre derivare due volte per parti il primo integrale, come del resto già fatto precedentemente, ed una volta il secondo integrale. Si giunge a scrivere:

$$\begin{aligned} \delta_1 E_t = \int_0^L (EI u_2'''' + Fu_2'') \delta u_2 \\ dx_3 + [EI u_2'' \delta u_2']_0^L + [(-Fu_2' - EI u_2''') \delta u_2]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Ne segue, per l'arbitrarietà della variazione δv , che dovrà essere soddisfatta la seguente equazione differenziale:

$$EI u_2'''' + Fu_2'' = 0 \quad (16)$$

nell'intervallo $[0, L]$, con le condizioni ai limiti tali da annullare i termini finiti della (14). In particolare è immediato verificare che l'unica condizione da modificare, rispetto a quanto detto nel caso classico di carichi trasversali, sarà la condizione sull'annullarsi del taglio nell'estremo libero, dove questa volta dovrà essere:

$$EI u_2''' + Fu_2' = 0 \quad (17)$$

L'approccio geometrico

Analogamente a quanto detto nel caso classico di forze trasversali, è possibile anche ora utilizzare un approccio geometrico per giungere ai risultati del paragrafo precedente. Volendo calcolare l'effetto del carico assiale in presenza di deformazioni flessionali non nulle, è necessario scrivere le equazioni di equilibrio di un concio *deformato*, ossia estratto da una situazione del tipo di Figura 4, e non più di un concio indeformato.

Le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione intorno alla faccia di destra del concio conducono a:

$$-T(x_3) + T(x_3 + dx_3) + p(x_3) dx_3 = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} -T(x_3) dx_3 + N(x_3) du_2 - \\ M(x_3) + M(x_3 + dx_3) - p(x_3) dx_3 \frac{dx_3}{2} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

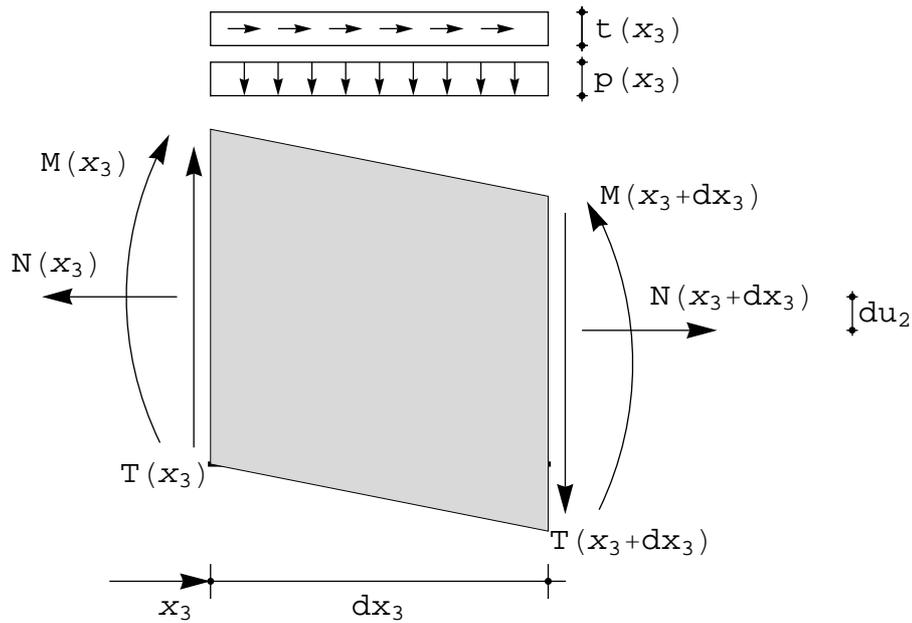


Figura 4 - Il concio in configurazione deformata

Utilizzando il solito sviluppo in serie, si puo' porre:

$$T(x_3 + dx_3) \approx T(x_3) + \frac{dT(x_3)}{dx_3} dx_3 \quad (20)$$

$$N(x_3 + dx_3) \approx N(x_3) + \frac{N(x_3)}{dx_3} dx_3 \quad (21)$$

$$M(x_3 + dx_3) \approx M(x_3) + \frac{dM(x_3)}{dx_3} dx_3 \quad (22)$$

e quindi le equazioni precedenti divengono:

$$\frac{dT}{dx_3} + p = 0 \quad (23)$$

$$-T dx_3 + N du_2 + \frac{dM}{dx_3} dx_3 - p \frac{dx_3^2}{2} = 0 \quad (24)$$

L'ultimo termine della seconda equazione puo' trascurarsi, e dividendo per dx_3 si ha:

$$-T + N \frac{du_2}{dx_3} + \frac{dM}{dx_3} = 0 \quad (25)$$

Derivando rispetto a x_3 , supponendo N costante, ed utilizzando la (22), si ha:

$$N \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} + \frac{d^2 M}{dx_3^2} + p = 0 \quad (26)$$

Infine, utilizzando la ben nota relazione:

$$M = -EI \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} \quad (27)$$

si giunge all'equazione differenziale della linea elastica:

$$EI \frac{d^4 u_2}{dx_3^4} - N \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = p \quad (28)$$

coincidente con la (16) non appena si noti che lo sforzo normale N e' pari a $-F$.

La condizione ai limiti sul taglio nell'estremo libero puo' suscitare delle perplessita'. Si consideri tuttavia che nella stessa ottica che ha indotto a scrivere l'equazione differenziale della linea elastica utilizzando la configurazione deformata, occorre ora utilizzare la configurazione deformata anche per imporre l'equilibrio all'estremo libero tra il taglio e la forza assiale. Si ha quindi, come illustrato in Figura 5:

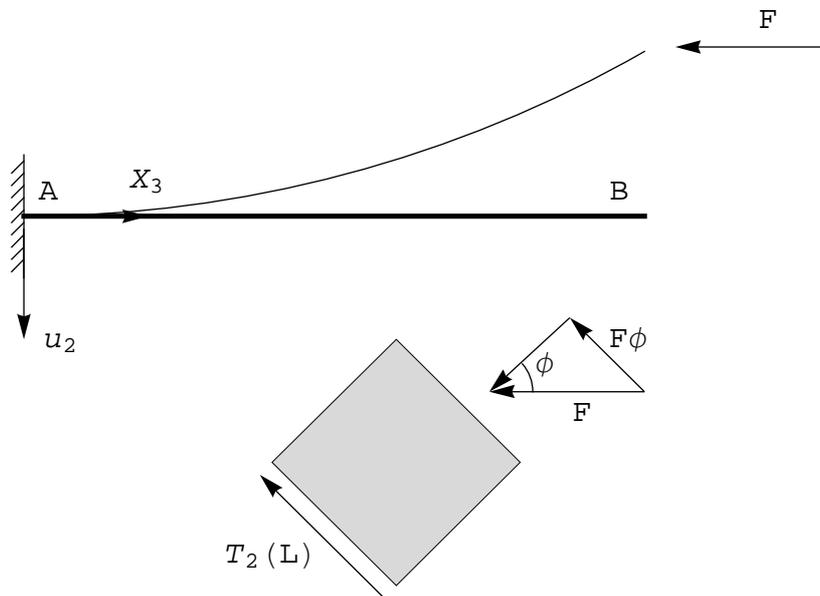


Figura 5 - L'equilibrio all'estremo libero sulla configurazione deformata

La soluzione dell'equazione differenziale della linea elastica

La (28) si puo' riscrivere convenientemente come:

$$\frac{d^4 u_2}{dx_3^4} + \alpha^2 \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = 0 \quad (29)$$

avendo introdotto il parametro positivo:

$$\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad (30)$$

ed il suo integrale generale e' fornito da:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2 x_3 + C_3 \cos(\alpha x_3) + C_4 \sin(\alpha x_3) \quad (31)$$

Le quattro costanti di integrazione andranno determinate imponendo le condizioni ai limiti. Se ad esempio la

trave si suppone appoggiata ad ambedue gli estremi, allora spostamenti e momenti flettenti dovranno essere nulli agli estremi. Dovra' essere, in altri termini:

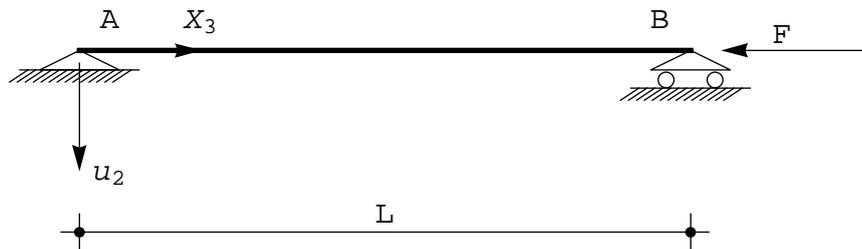


Figura 6 - La trave appoggiata soggetta ad un carico assiale di compressione

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 u_2'(0) &= 0 \\
 u_2(L) &= 0 \\
 u_2'(L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

La derivata seconda dello spostamento (31) puo' calcolarsi facilmente come:

$$u_2''(x_3) = -\alpha^2 C_3 \cos(\alpha x_3) - \alpha^2 C_4 \sin(\alpha x_3)
 \tag{33}$$

e quindi le (31) divengono:

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 0 \\
 -\alpha^2 C_3 &= 0 \\
 C_1 + C_2 L + C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \\
 -\alpha^2 C_3 \cos(\alpha L) - \alpha^2 C_4 \sin(\alpha L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\
 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L)
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 C_1 \\
 C_2 \\
 C_3 \\
 C_4
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}
 \tag{35}$$

E' questo un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite C_i , lineare ed omogeneo. Oltre alla soluzione banale, sempre presente, potranno aversi altre configurazioni di equilibrio non identicamente nulle se il determinante dei coefficienti si annulla. Dovra' quindi aversi:

$$\text{Det} \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\
 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L)
 \end{pmatrix} = 0
 \tag{36}$$

e svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione secolare in α :

$$\sin(\alpha L) = 0
 \tag{37}$$

con soluzione:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}
 \tag{38}$$

ed $n \in \mathbb{N}$.

Se quindi la forza assiale attinge uno dei seguenti valori:

$$F_n = n \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (39)$$

allora si puo' avere una deformata non nulla, di ampiezza non definita, la cui forma puo' essere dedotta calcolando le quattro costanti C_i .

La prima e la seconda delle (34) forniscono $C_1 = 0$ e $C_3 = 0$. Le altre due divengono :

$$\begin{aligned} C_2 L + C_4 \text{Sin} (\alpha_n L) &= 0 \\ C_4 \text{Sin} (\alpha_n L) &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

e quindi dovra' essere anche $C_2 = 0$, mentre C_4 resta non specificata. Le deformate saranno fornite (cfr. eqn.31) da:

$$u_{2n}(x_3) = C_4 \text{Sin} (\alpha_n x_3) \quad (41)$$

ossia, in definitiva, saranno onde sinusoidali.

Il concetto di carico critico

Da un punto di vista pratico, i valori (38) del carico assumono importanza fondamentale, tale che essi vengono chiamati usualmente i *carichi critici* della trave. Ed infatti si consideri una trave soggetta ad una forza di compressione, che a partire da un valore basso possa crescere a piacimento.

Per bassi valori della forza F , minori del primo carico critico, la trave resta indeformata, con spostamenti identicamente nulli. Quando F raggiunge il valore del primo carico critico, improvvisamente e senza alcun preavviso sorge la possibilita' di una deformata non nulla, di ampiezza non ricavabile con la presente trattazione, ma comunque diversa da zero. Il fenomeno, noto come *instabilita' euleriana*, e' tra i piu' pericolosi della meccanica strutturale, e come tale ad essa andra' rivolta particolare attenzione.

I valori successivi dei carichi critici hanno invece piu' limitato interesse pratico, perche' difficilmente potra' incrementarsi il valore del carico assiale oltre il primo carico critico, senza provocare lo sbandamento della trave, con la nascita della prima deformata non nulla.

Il calcolo del carico critico per differenti vincoli

■ La trave doppiamente incastrata

Per una trave incastrata ad ambedue gli estremi, spostamenti e rotazioni dovranno essere nulli agli estremi. Dovra' essere:

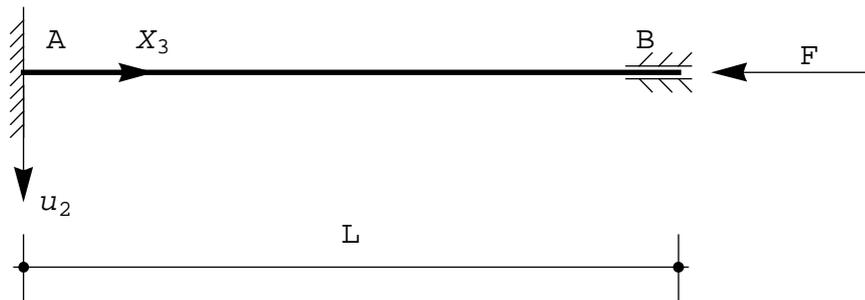


Figura 7 - La trave incastrata soggetta ad un carico assiale di compressione

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 u_2'(0) &= 0 \\
 u_2(L) &= 0 \\
 u_2'(L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

La derivata prima dello spostamento (31) puo' calcolarsi facilmente come:

$$u_2'(x_3) = C_2 - \alpha C_3 \sin(\alpha x_3) + \alpha C_4 \cos(\alpha x_3)
 \tag{43}$$

e quindi le (42) divengono:

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 0 \\
 C_2 + \alpha C_4 &= 0 \\
 C_1 + C_2 L + C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \\
 C_2 - \alpha C_3 \sin(\alpha L) + \alpha C_4 \cos(\alpha L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & \alpha \\
 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\
 0 & 1 & -\alpha \sin(\alpha L) & \alpha \cos(\alpha L)
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 C_1 \\
 C_2 \\
 C_3 \\
 C_4
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}
 \tag{45}$$

E' questo un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite C_i , lineare ed omogeneo. Oltre alla soluzione banale, sempre presente, potranno aversi altre configurazioni di equilibrio non identicamente nulle se il determinante dei coefficienti si annulla. Dovra' quindi aversi:

$$\text{Det} \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & \alpha \\
 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\
 0 & 1 & -\alpha \sin(\alpha L) & \alpha \cos(\alpha L)
 \end{pmatrix} = 0
 \tag{46}$$

e svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione secolare in α :

$$2(\cos(\alpha L) - 1) + \alpha L \sin(\alpha L) = 0
 \tag{47}$$

che puo' risciversi, utilizzando le formule di bisezione:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}
 \tag{48}$$

$$\cos x = 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 1
 \tag{49}$$

come:

$$\sin\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \left[\frac{\alpha L}{2} \cos\left(\frac{\alpha L}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \right] = 0 \quad (50)$$

Ne segue che la (50) sarà soddisfatta sia che valga la:

$$\sin\left(\frac{\alpha L}{2}\right) = 0 \quad (51)$$

sia la:

$$\frac{\alpha L}{2} \cos\left(\frac{\alpha L}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha L}{2}\right) = 0 \quad (52)$$

che si trasforma in:

$$\tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right) = \frac{\alpha L}{2} \quad (53)$$

La prima equazione, la (51), fornisce le radici:

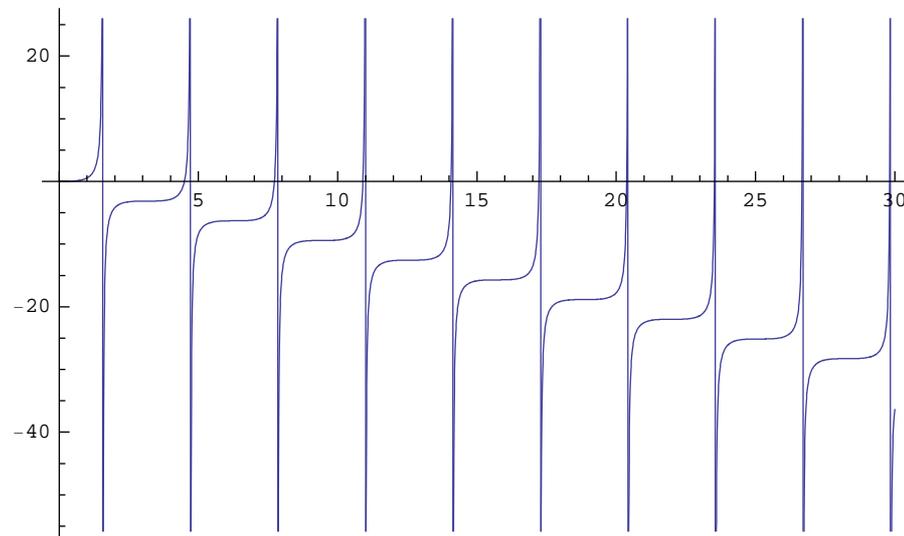
$$\frac{\alpha_n L}{2} = n \pi \quad (54)$$

da cui subito la prima serie di carichi critici:

$$F_n = 4 n^2 \pi^2 \frac{EI}{L^2} \quad (55)$$

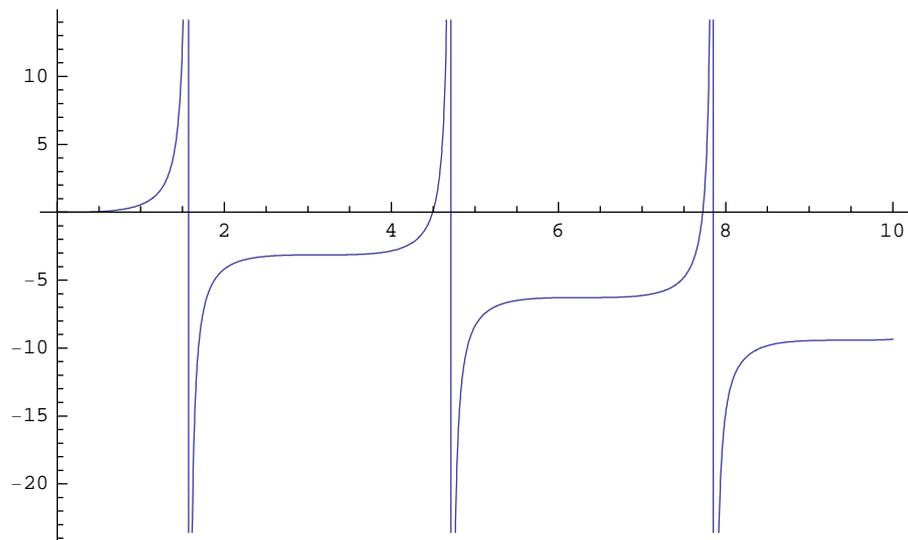
La seconda equazione, la (53), può essere risolta solo numericamente. Diagrammando in via preliminare la funzione si ha:

`Plot[Tan[x] - x, {x, 0, 30}]`



ed ingrandendo la parte iniziale:

Plot[Tan[x] - x, {x, 0, 10}]



Le prime due radici sono quindi calcolabili come:

FirstRoot = FindRoot[Tan[x] - x == 0, {x, 3, 5}]

{x -> 4.49341}

SecondRoot =

FindRoot[Tan[x] - x == 0, {x, 7, 8}, MaxIterations -> 100]

{x -> 7.72525}

In corrispondenza di queste due radici si hanno i carichi critici:

$$F_1' = 4 \times 4.49341^2 \frac{EI}{L^2} \approx 80.76 \frac{EI}{L^2}; \tag{56}$$

$$F_2' = 238.7 \frac{EI}{L^2}$$

Il piu' basso carico critico, quello che, come detto, ha effettiva importanza pratica, sara' pertanto:

$$F_{cr} = 4 \pi^2 \frac{EI}{L^2} \tag{57}$$

La forma della deformata corrispondente alle radici (54) si ottiene risolvendo il sistema omogeneo a determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2n\pi}{L} \\ 1 & L & \cos(2n\pi) & \sin(2n\pi) \\ 0 & 1 & -\frac{2n\pi}{L} \sin(2n\pi) & \frac{2n\pi}{L} \cos(2n\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

e quindi $C_1 = -C_3 = C$, e $C_2 = C_4 = 0$. La deformata e' percio' data da :

$$u_2(x_3) = C \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{L} x_3 \right) \tag{59}$$

La trave a mensola

Per una trave incastrata a sinistra e libera a destra dovrà essere, come discusso precedentemente:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 u_2'(0) &= 0 \\
 u_2''(L) &= 0 \\
 u_2'''(L) + \alpha^2 u_2'(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{60}$$

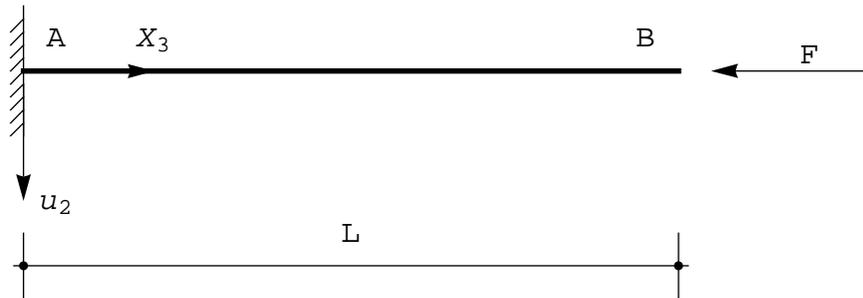


Figura 8 - La trave a mensola soggetta ad un carico assiale di compressione

Occorrono ora le prime tre derivate della linea elastica:

$$\begin{aligned}
 u_2'(x_3) &= C_2 - \alpha C_3 \sin(\alpha x_3) + \alpha C_4 \cos(\alpha x_3) \\
 u_2''(x_3) &= -\alpha^2 C_3 \cos(\alpha x_3) - \alpha^2 C_4 \sin(\alpha x_3) \\
 u_2'''(x_3) &= \alpha^3 C_3 \sin(\alpha x_3) - \alpha^3 C_4 \cos(\alpha x_3)
 \end{aligned} \tag{61}$$

e quindi le (60) divengono:

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 0 \\
 C_2 + \alpha C_4 &= 0 \\
 C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \\
 \alpha^2 C_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{62}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{63}$$

E' questo un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite C_i , lineare ed omogeneo. Oltre alla soluzione banale, sempre presente, potranno aversi altre configurazioni di equilibrio non identicamente nulle se il determinante dei coefficienti si annulla. Dovrà quindi aversi:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{64}$$

e svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione secolare in α :

$$\cos(\alpha L) = 0 \tag{65}$$

con radici:

$$\alpha_n L = \frac{\pi}{2} + n \pi \tag{66}$$

da cui subito i carichi critici:

$$F_n = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2 \frac{EI}{L^2} \tag{67}$$

Il primo valore sara' quindi:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 L^2} \tag{68}$$

La forma della deformata corrispondente alle radici (66) si ottiene risolvendo il sistema omogeneo a determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_n L) & \sin(\alpha_n L) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{69}$$

e quindi $C_1 = -C_3 = C$, e $C_2 = C_4 = 0$. La deformata e' percio' data da :

$$u_2(z) = C \left(1 - \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \frac{x_3}{L} \right] \right) \tag{70}$$

■ **La trave con incastro ed appoggio**

Per una trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra dovra' essere:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ u_2''(L) &= 0 \end{aligned} \tag{71}$$

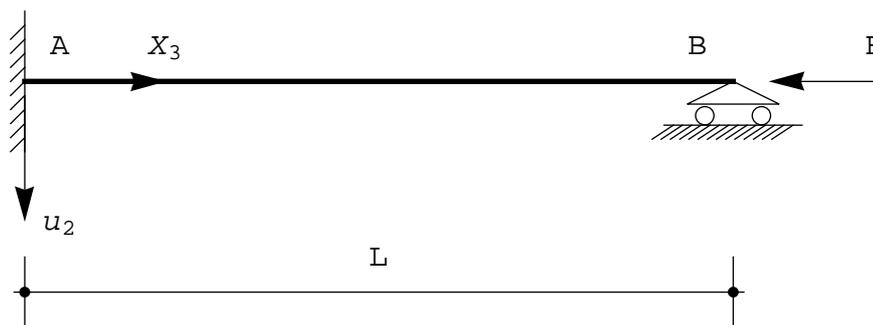


Figura 9 - La trave incastrata-appoggiata soggetta ad un carico assiale di compressione

Occorrono ora le prime due derivate della linea elastica:

$$\begin{aligned} u_2'(x_3) &= C_2 - \alpha C_3 \sin(\alpha x_3) + \alpha C_4 \cos(\alpha x_3) \\ u_2''(x_3) &= -\alpha^2 C_3 \cos(\alpha x_3) - \alpha^2 C_4 \sin(\alpha x_3) \end{aligned} \tag{72}$$

e quindi le (71) divengono:

$$\begin{aligned}
C_1 + C_3 &= 0 \\
C_2 + \alpha C_4 &= 0 \\
C_1 + C_2 L + C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0 \\
C_3 \cos(\alpha L) + C_4 \sin(\alpha L) &= 0
\end{aligned}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (74)$$

E' questo un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite C_i , lineare ed omogeneo. Oltre alla soluzione banale, sempre presente, potranno aversi altre configurazioni di equilibrio non identicamente nulle se il determinante dei coefficienti si annulla. Dovra' quindi aversi:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 1 & L & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \end{pmatrix} = 0 \quad (75)$$

e svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione secolare in α :

$$\tan(\alpha L) = \alpha L \quad (76)$$

con radici da calcolare numericamente, come gia' del resto illustrato.

```

FirstRoot = FindRoot[Tan[x] - x == 0, {x, 3, 5}]
{x → 4.49341}

SecondRoot =
FindRoot[Tan[x] - x == 0, {x, 7, 8}, MaxIterations -> 100]
{x → 7.72525}

```

da cui subito il carico critico:

$$F_{cr} = (4.49341)^2 \pi^2 \frac{EI}{L^2} \approx 20.19 \frac{EI}{L^2} \quad (77)$$

La forma della deformata corrispondente alle radici α_n della (76) si ottiene risolvendo il sistema omogeneo a determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_n \\ 1 & L & \cos(\alpha_n L) & \sin(\alpha_n L) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_n L) & \sin(\alpha_n L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (78)$$

e quindi si ha:

$$C_4 = C; \quad C_3 = -\alpha_n L C; \quad C_2 = -\alpha_n C; \quad C_1 = \alpha_n L C \quad (79)$$

con deformata:

$$u_2(x_3) = C (\alpha_n (L - x_3) - \alpha_n L \cos(\alpha_n x_3) + \sin(\alpha_n x_3)) \quad (80)$$

Grafici