
Lezione 37 - La teoria di Timoshenko per le travi alte

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 29 agosto 2011]

Quali sono i limiti della teoria di Eulero-Bernoulli? Come e' possibile migliorare la teoria, senza rinunciare alla semplicita' analitica ed alla rapidita' computazionale?

Per rispondere alla prima domanda, conviene ripensare alla incongruenza di base della teoria di Eulero-Bernoulli, gia' evidenziata nella Lezione 30: la impossibilita' di definire lo sforzo di taglio come risultante delle azioni elementari σ_{23} , nulle per ipotesi, e la conseguente necessita' di definire il taglio tramite considerazioni di equilibrio.

Affrontando il problema da un'altra ottica, puo' partirsi dalla definizione del taglio come derivata del momento flettente, e poi applicare la *definizione* di taglio come risultante delle azioni elementari (cfr. eqn.21 della Lezione 22):

$$T_2 = \int_{\Sigma} \sigma_{23} dA \quad (1)$$

Ipotizzando una distribuzione costante di tensione, ed introducendo un coefficiente correttivo κ , si ha:

$$T_2 = \kappa \sigma_{23} A \quad (2)$$

e quindi la tensione tangenziale e':

$$\sigma_{23} = \frac{T_2}{\kappa A} \quad (3)$$



Figura 1 - S.P. Timoshenko

A questo punto non puo' pero' evitarsi la contraddizione insita nella legge tensioni-deformazioni, che porterebbe alla deformazione tagliante:

$$e_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \quad (4)$$

che invece è nulla per costruzione. Se però il modulo G assume valori molto elevati (materiale poco deformabile a taglio), allora si può ragionevolmente trascurare la deformazione tagliante e_{23} anche in presenza di un valore finito della tensione e del taglio. [Nota].

Inoltre, una distribuzione costante di tensioni contraddice l'ipotesi di mantello laterale scarico.

Un miglioramento della teoria di Eulero-Bernoulli è stato proposto da Timoshenko, e coniuga semplicità e vantaggi analitici in modo talmente soddisfacente da essere ormai utilizzato in quasi tutti i codici di calcolo agli elementi finiti.

Le ipotesi di base per la trave di Timoshenko

Si consideri un solido del tipo trave, di lunghezza L , con una sezione retta caratterizzata da un asse di simmetria rispetto all'asse x_1 , soggetto ai carichi distribuiti $p(x_3)$ diretti trasversalmente all'asse della trave, ai carichi distribuiti $t(x_3)$ diretti lungo l'asse, ed alle coppie distribuite $m(x_3)$.

In generale, seguendo la teoria di De Saint-Venant, si può dire che, per problemi di simmetria e di carico, gli spostamenti $u_1(x_1, x_2, x_3)$ secondo l'asse x_1 sono nulli. Per quanto riguarda le altre due componenti $u_2(x_1, x_2, x_3)$ e $u_3(x_1, x_2, x_3)$, conviene introdurre ipotesi 'ad hoc', che caratterizzano la particolare teoria utilizzata.

Le ipotesi a base della teoria di Timoshenko sono:

1. gli spostamenti verticali ed assiali dei punti dell'asse dipendono solo dalla variabile x_3 : $u_2^a = u_2^a(x_3)$, $u_3^a = u_3^a(x_3)$

2. segmenti normali all'asse si conservano segmenti a seguito della deformazione

3. segmenti normali all'asse *non* si conservano normali all'asse deformato, ma ruotano rispetto ad esso di un angolo addizionale ψ , come illustrato in Figura 2

Segue dalle tre ipotesi appena formulate, che una sezione retta a distanza x_3 dalla base di sinistra subisce un abbassamento $u_2(x_3) = u_2^a(x_3)$, uguale per tutti i punti della sezione, uno spostamento assiale $u_3(x_2, x_3)$, ed una rotazione $\phi(x_3)$ fornita da:

$$\phi(x_3) = -u_2'(x_3) + \psi \quad (5)$$

Ne segue che lo spostamento assiale $u_3(x_2, x_3)$ di un punto generico della sezione retta, situato a distanza x_2 dal baricentro, è pari a:

$$u_3(x_2, x_3) = u_3(x_3) + \phi(x_3) x_2 \quad (6)$$

Il vettore $\mathbf{u}$ della terna di spostamenti è fornito pertanto da:

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\} = \{0, u_2(x_3), u_3^a(x_3) + \phi(x_3) x_2\} \quad (7)$$

Le corrispondenti deformazioni sono deducibili a partire dalle ben note leggi che legano le deformazioni alle derivate prime degli spostamenti:

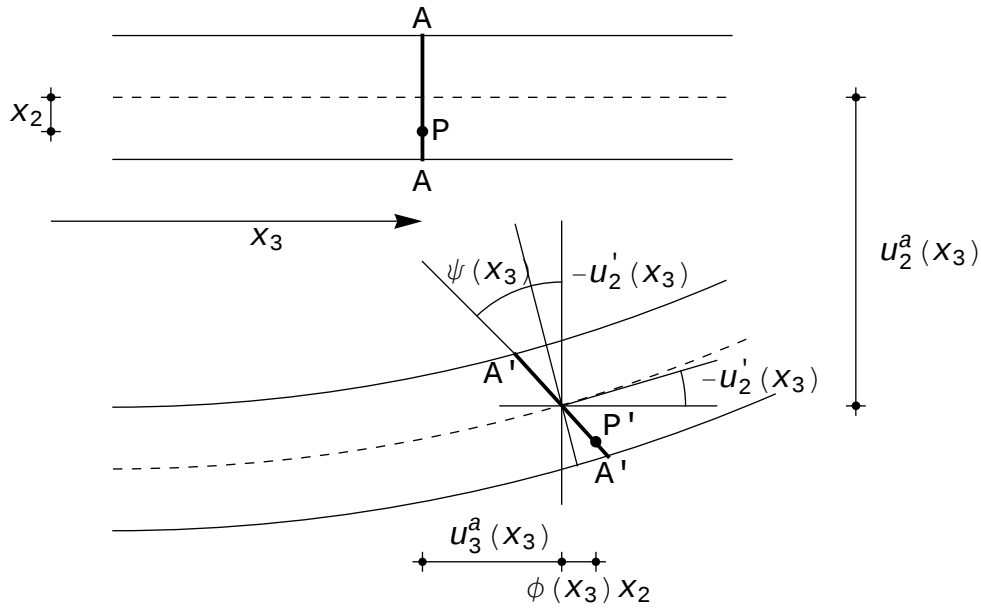


Figura 2 - Le ipotesi di Timoshenko: $\phi(x_3) = -u_2'(x_3) + \psi$

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \\
 e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\
 e_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\
 e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\
 e_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (u_2'(x_3) + \phi(x_3)) = \frac{1}{2} \psi(x_3) \\
 e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{du_3^a}{dx_3} + x_2 \frac{d\phi}{dx_3} = u_3^{a'}(x_3) + x_2 \phi'(x_3)
 \end{aligned} \tag{8}$$

Le componenti di tensione σ_{23} e σ_{33} , in ipotesi di validità della legge di Hooke, sono fornite da:

$$\sigma_{33} = E (u_3^{a'}(x_3) + x_2 \phi'(x_3)) \tag{9}$$

$$\sigma_{23} = G (u_2'(x_3) + \phi(x_3)) \tag{10}$$

Ne segue che le caratteristiche sforzo normale $N(x_3)$, momento flettente $M_1(x_3)$ e taglio $T_2(x_3)$ possono calcolarsi come:

$$N = \int_{\Sigma} E (u_3^{a'}(x_3) + x_2 \phi'(x_3)) dA = E A u_3^{a'}(x_3) \tag{11}$$

$$M_1 = \int_{\Sigma} E (x_2 u_3^{a'}(x_3) + x_2^2 \phi'(x_3)) dA = E I_{11} \phi'(x_3) \tag{12}$$

$$T_2 = \int_{\Sigma} G (u_2'(x_3) + \phi(x_3)) dA \tag{13}$$

Nota 1 - Lo sforzo normale non è influenzato dalla ipotesi di Timoshenko, e la sua trattazione resta disaccop-

piata da quella dello sforzo di taglio - momento flettente.

Nota 2- La (10) indica che la tensione tangenziale non dipende dalla variabile x_2 , e quindi e' in contraddizione con l' ipotesi di De Saint-Venant sulla superficie laterale scarica. Per tener conto della effettiva distribuzione delle tensioni tangenziali lungo x_2 , si introduce, secondo Timoshenko, un fattore correttivo κ , detto *fattore di taglio*, scrivendo, al posto della (13):

$$T_2 = \int_{\Sigma} G \left(u_2' (x_3) + \phi (x_3) \right) dA = GA \kappa \psi (x_3) \quad (14)$$

Si puo' dimostrare che κ e' minore di uno, e spesso si introduce l'area ridotta della sezione retta $A_s = \kappa A$, detta *area efficace a taglio*.

Nota 3- L'incongruenza della teoria di Eulero-Bernoulli e' stata superata, e la condizione di equilibrio:

$$T_2 (x_3) = \frac{dM_1 (x_3)}{dx_3} \quad (15)$$

non deve piu' essere utilizzata come definizione, ma si traduce nella relazione:

$$GA \kappa \left(u_2' (x_3) + \phi (x_3) \right) = E I_{11} \phi'' (x_3) \quad (16)$$

Lo studio della linea elastica

Si parte dalla definizione dell'energia potenziale totale, somma dell'energia elastica e dell'energia potenziale dei carichi:

$$E_t = \frac{1}{2} \int_B E e_{33}^2 dV + \frac{1}{2} \int_B 4 G e_{23}^2 dV - \int_0^1 p (x_3) u_2 (x_3) dx_3 - \int_0^1 t (x_3) u_3 (x_3) dx_3 - \int_0^1 m (x_3) \phi (x_3) dx_3 \quad (17)$$

ed utilizzando le ultime due delle (8), si puo' scrivere l'energia elastica come:

$$E_t = \frac{1}{2} \int_0^L E A u_3'^2 (x_3) dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L E I \phi'^2 (x_3) dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L GA_s \left(u_2' (x_3) + \phi (x_3) \right)^2 dV - \int_0^L p (x_3) u_2 (x_3) dx_3 - \int_0^L t (x_3) u_3 (x_3) dx_3 - \int_0^L m (x_3) \phi (x_3) dx_3 \quad (18)$$

A questo punto, si puo' scrivere la variazione di E_t rispetto alle variabili $u_3, u_3', u_2, u_2', \phi$ e ϕ' , ottenendo:

$$\delta E_t = E_t (u_3 + \delta u_3, u_3' + \delta u_3', u_2 + \delta u_2, u_2' + \delta u_2', \phi + \delta \phi, \phi' + \delta \phi') - E_t (u_3, u_3', u_2, u_2', \phi, \phi') = \frac{1}{2} \int_0^L E A (u_3' + \delta u_3')^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L E I_{11} (\phi' + \delta \phi')^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L GA_s (u_2' + \delta u_2' + \phi + \delta \phi)^2 dx_3 -$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L p (u_2 + \delta u_2) dx_3 - \int_0^L t (u_3 + \delta u_3) dx_3 - \\
& \int_0^L m (\phi + \delta \phi) dx_3 - \frac{1}{2} \int_0^L E A u_3'^2 dx_3 - \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} \phi'^2 dx_3 - \\
& \frac{1}{2} \int_0^L GA_s (u_2' + \phi)^2 dx_3 + \int_0^L p u_2 dx_3 + \int_0^L t u_3 dx_3 + \int_0^L m \phi dx_3
\end{aligned}$$

Svolgendo i quadrati e semplificando si ottiene:

$$\begin{aligned}
\delta E_t = & \int_0^L E A u_3' \delta u_3' dx_3 + \int_0^L EI_{11} \phi' \delta \phi' dx_3 + \int_0^L GA_s (u_2' + \phi) \delta u_2' dx_3 + \\
& \int_0^L GA_s (u_2' + \phi) \delta \phi dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 - \int_0^L m \delta \phi dx_3 + \quad (20) \\
& \frac{1}{2} \int_0^L E A \delta u_3'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} \delta \phi'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L GA_s (\delta u_2' + \delta \phi)^2 dx_3
\end{aligned}$$

Ne segue che la variazione dell'energia potenziale totale si esaurisce in due aliquote: la prima, lineare, e la seconda quadratica:

$$\begin{aligned}
\delta_1 E_t = & \int_0^L E A u_3' \delta u_3' dx_3 + \int_0^L EI_{11} \phi' \delta \phi' dx_3 + \int_0^L GA_s (u_2' + \phi) \delta u_2' dx_3 + \\
& \int_0^L GA_s (u_2' + \phi) \delta \phi dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 - \int_0^L m \delta \phi dx_3 \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_2 E_t = & \frac{1}{2} \int_0^L E A \delta u_3'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} \delta \phi'^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L GA_s (\delta u_2' + \delta \phi)^2 dx_3 \quad (22)
\end{aligned}$$

Per il principio di stazionarietà, dovrà essere:

$$\begin{aligned}
\delta_1 E_t = & \int_0^L E A u_3' \delta u_3' dx_3 + \int_0^L EI_{11} \phi' \delta \phi' dx_3 + \\
& \int_0^L GA_s (u_2' + \phi) \delta u_2' dx_3 + \int_0^L GA_s (u_2' + \phi) \delta \phi dx_3 - \quad (23) \\
& \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 - \int_0^L m \delta \phi dx_3 = 0
\end{aligned}$$

I primi tre integrali della (23) possono integrarsi per parti una volta, ottenendo:

$$\int_0^L u_3' \delta u_3' dx_3 = [u_3' \delta u_3]_0^L - \int_0^L u_3'' \delta u_3 dx_3 \quad (24)$$

$$\int_0^L \phi' \delta \phi' dx_3 = [\phi' \delta \phi]_0^L - \int_0^L \phi'' \delta \phi dx_3 \quad (25)$$

$$\int_0^L (u_2' + \phi) \delta u_2' dx_3 = [(u_2' + \phi) \delta u_2]_0^L - \int_0^L (u_2'' + \phi') \delta u_2 dx_3 \quad (26)$$

Inserendo le (24-26) nella (23) si giunge a scrivere:

$$\int_0^L \left[(EA u_3'' + t) \delta u_3 + (EI_{11} \phi'' + m - GA_s (u_2' + \phi)) \delta \phi + (GA_s (u_2' + \phi') + t) \delta u_2 \right] dx_3 + [EA u_3']_0^L + [EI_{11} \phi']_0^L + [GA_s (u_2' + \phi) \delta u_2]_0^L = 0$$

Le variazioni δu_3 , $\delta \phi$, e δu_2 sono arbitrarie, e quindi dovranno annullarsi le tre quantità in parentesi, conducendo alle tre equazioni differenziali in u_3 , ϕ ed in u_2 :

$$\begin{aligned} EA u_3'' &= -t \\ EI_{11} \phi'' - GA_s (u_2' + \phi) &= -m \\ GA_s (u_2' + \phi') &= -p \end{aligned} \quad (28)$$

Le restanti quantità dovranno annullarsi ai due estremi della trave. Per lo spostamento u_3 dovrà quindi essere:

$$EA u_3' (0) \delta u_3 (0) = 0 \quad (29)$$

$$EA u_3' (L) \delta u_3 (L) = 0 \quad (30)$$

mentre per lo spostamento u_2 e la rotazione ϕ sarà necessariamente:

$$EI_{11} \phi' (0) \delta \phi (0) = 0 \quad (31)$$

$$EI_{11} \phi' (L) \delta \phi (L) = 0 \quad (32)$$

$$GA_s (\phi (0) + u_2' (0)) \delta u_2 (0) = 0 \quad (33)$$

$$GA_s (\phi (L) + u_2' (L)) \delta u_2 (L) = 0 \quad (34)$$

Nota 4- Lo studio della funzione u_3 degli spostamenti assiali è completamente separato dallo studio delle altre due funzioni, come già detto. Invece le ultime due equazioni delle (28) rappresentano un sistema accoppiato di due equazioni differenziali del secondo ordine.

Esercizio 1 - Generalizzare le equazioni (28) al caso di trave a sezione variabile.

Esercizio 2- Utilizzare il principio degli spostamenti virtuali per riottenere le equazioni della linea elastica e le corrispondenti condizioni ai limiti

Esercizio 3 - Utilizzare l'approccio geometrico per riottenere le equazioni della linea elastica

■ Le condizioni di vincolo

È inutile studiare il problema assiale, non modificato rispetto al caso di Eulero-Bernoulli. Per quanto riguarda il problema flessionale, invece, in base alla (12) ed alla (14) le condizioni (31) - (34) si possono scrivere:

$$M_1 (0) \delta \phi (0) = 0 \quad (35)$$

$$M_1 (L) \delta \phi (L) = 0 \quad (36)$$

$$T_2 (0) \delta u_2 (0) = 0 \quad (37)$$

$$T_2 (L) \delta u_2 (L) = 0 \quad (38)$$

Agli estremi della trave, pertanto, si possono simulare queste condizioni di vincolo:

Estremo incastrato $\rightarrow u_2 = 0$ e $\phi = 0$

- **Estremo appoggiato** $\rightarrow u_2 = 0$ e $M_1 = 0$, ossia $\phi' = 0$
- **Estremo con bipendolo** $\rightarrow \phi = 0$ e $T_2 = 0$, ossia $u_2' + \phi = 0$
- **Estremo libero** $\rightarrow M_1 = 0$, ossia $\phi' = 0$ e $T_2 = 0$, ossia $u_2' + \phi = 0$

La trave a mensola con forza all'estremo libero

Le equazioni da risolvere per il caso illustrato nel titolo sono:

$$\begin{aligned} EI \phi'''' - GA_s (u_2' + \phi) &= 0 \\ GA_s (u_2' + \phi) &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

con le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \\ M(L) &= EI \phi'(L) = 0 \\ T(L) &= GA_s (\phi(L) + u_2'(L)) = F \end{aligned} \quad (40)$$

dove F e' il valore della forza applicata nell'estremo libero. (cfr. Figura 3)

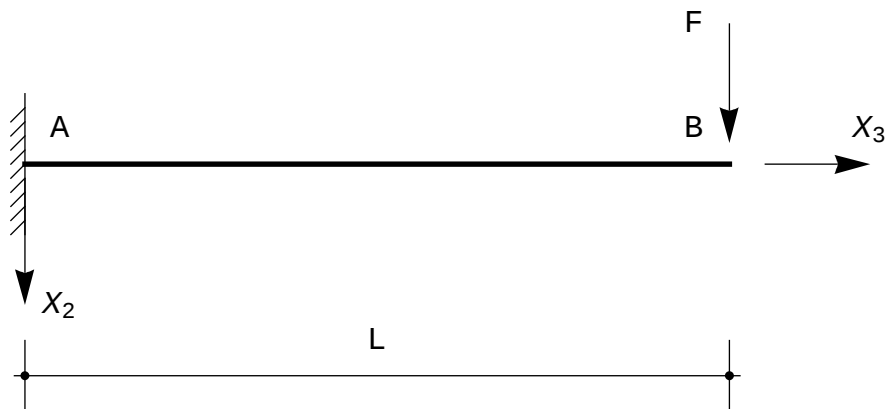


Figura 3 - Trave a mensola con forza all'estremo

Per affrontare questo problema, si inizi ad integrare la seconda delle (39):

$$GA_s (u_2' + \phi) = C_1 \quad (41)$$

e per la quarta condizione ai limiti si ha subito $C_1 = F$. Ne segue che la (41) diviene:

$$GA_s (u_2' + \phi) = F \quad (42)$$

Sostituendo questa relazione nella prima delle (39) si ha:

$$EI \phi'''' = F \quad (43)$$

e quindi subito:

$$\phi' = \frac{F x_3}{EI} + C_2 \quad (44)$$

$$\phi = \frac{Fx_3^2}{2EI} + C_2 x_3 + C_3 \quad (45)$$

La seconda e terza condizione ai limiti permettono di calcolare le due costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} \phi(0) = 0 &\rightarrow C_3 = 0 \\ \phi'(L) = 0 &\rightarrow C_2 = -\frac{FL}{EI} \end{aligned} \quad (46)$$

e quindi la rotazione e' data da:

$$\phi(x_3) = \frac{Fx_3}{EI} \left(\frac{x_3}{2} - L \right) \quad (47)$$

Infine, dalla (42) si puo' scrivere:

$$u_2' = \frac{F}{GA_s} - \phi = \frac{F}{GA_s} + \frac{Fx_3}{EI} \left(L - \frac{x_3}{2} \right) \quad (48)$$

e quindi l'abbassamento e' dato da:

$$u_2 = \frac{Fx_3}{GA_s} + \frac{Fx_3^2}{2EI} \left(L - \frac{x_3}{3} \right) + C_4 \quad (49)$$

La costante di integrazione, comunque, si annulla per la prima condizione ai limiti, giungendo a:

$$u_2(x_3) = \frac{Fx_3}{GA_s} + \frac{Fx_3^2}{2EI} \left(L - \frac{x_3}{3} \right) \quad (50)$$

■ Discussione dei risultati

La rotazione all'estremo libero e':

$$\phi(L) = -\frac{FL^2}{2EI} \quad (51)$$

e quindi coincide con quanto predetto dalla teoria di Eulero-Bernoulli.

L'abbassamento nell'estremo libero e' invece fornito da:

$$u_2(L) = \frac{FL}{GA_s} + \frac{FL^3}{3EI} \quad (52)$$

Si ha quindi una aliquota flessionale, uguale a quella predetta da Eulero-Bernoulli, ed una aliquota addizionale tagliante, che si viene a sommare alla aliquota classica. Si vede subito che all'aumentare della luce, l'influenza del termine flessionale diviene dominante. Per evidenziare l'influenza del taglio, e' opportuno riscrivere la (52) come:

$$u_2(L) = \frac{FL^3}{3EI} \left(1 + \frac{3}{L^2} \frac{EI}{GA_s} \right) = \frac{FL^3}{3EI} \left(1 + \frac{3}{\alpha} \right) \quad (53)$$

con:

$$\alpha = \frac{GA_s L^2}{EI} \quad (54)$$

parametro adimensionale che ben misura l'importanza relativa delle deformazioni da taglio rispetto agli

effetti flessionali. Per $\alpha \rightarrow \infty$ si ritrovano i risultati classici di Eulero-Bernoulli.

■ Esempio numerico

Si consideri una trave di luce $L = 5$ metri, a sezione retta rettangolare di base $b = 50$ centimetri ed altezza $h = 80$ centimetri, e quindi con area $A = bh$ ed inerzia $I = bh^3/12$. Inoltre, il modulo di Young sia pari a 300.000 Kg/cm^2 , il coefficiente ν di Poisson sia pari a 0.25 , ed il fattore di taglio sia pari a $\kappa = 0.85$.

Per calcolare l'influenza relativa del taglio si calcola la parte flessionale dello spostamento all'estremo libero, dovuto ad una forza unitaria:

$$u_f = \frac{L^3}{3EI} = 0.0000651042 \text{ cm} \quad (55)$$

ed analogamente la parte tagliante dello stesso spostamento:

$$u_t = \frac{L}{\kappa GA} = 1.22549 \times 10^{-6} \text{ cm} \quad (56)$$

L'influenza relativa delle deformazioni taglianti e' quindi calcolabile come $\frac{u_t}{u_t + u_f}$, ed e' in questo caso pari a circa 1.8 per cento.

La trave a mensola con carico distribuito

Le equazioni da risolvere per il caso illustrato nel titolo sono:

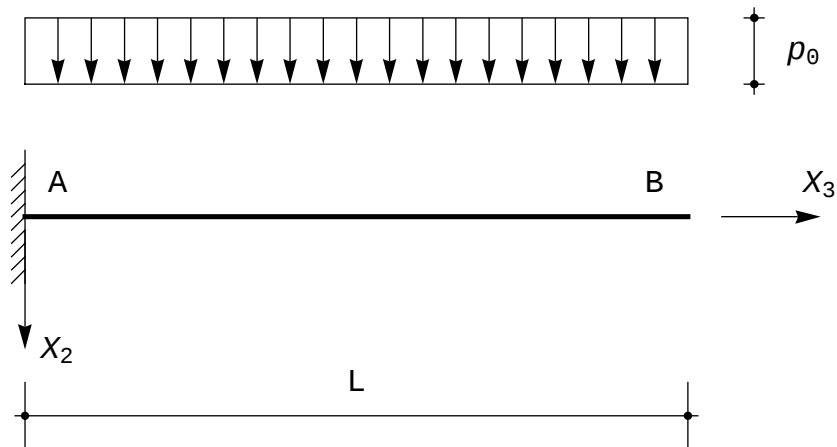


Figura 4 - Trave a mensola soggetta a carico distribuito

$$\begin{aligned} EI \phi'' - GA_s (u_2' + \phi) &= 0 \\ GA_s (u_2'' + \phi') &= -p \end{aligned} \quad (57)$$

con le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ \phi(0) &= 0 \\ M(L) = EI \phi'(L) &= 0 \\ T(L) = GA_s (\phi(L) + u_2'(L)) &= 0 \end{aligned} \quad (58)$$

dove p e' il valore del carico distribuito. (cfr. Figura 4)

Per affrontare questo problema, si inizi ad integrare la seconda delle (57):

$$GA_s (u_2' + \phi) = -p x_3 + C_1 \quad (59)$$

e per la quarta condizione ai limiti si ha subito $C_1 = pL$. Ne segue che la (59) diviene:

$$GA_s (u_2' + \phi) = p (L - x_3) \quad (60)$$

Sostituendo questa relazione nella prima delle (57) si ha:

$$EI \phi'' = p (L - x_3) \quad (61)$$

e quindi subito:

$$\phi' = \frac{px_3}{EI} \left(L - \frac{x_3}{2} \right) + C_2 \quad (62)$$

$$\phi = \frac{px_3^2}{2EI} \left(L - \frac{x_3}{3} \right) + C_2 x_3 + C_3 \quad (63)$$

La seconda e terza condizione ai limiti permettono di calcolare le due costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} \phi(0) = 0 &\rightarrow C_3 = 0 \\ \phi'(L) = 0 &\rightarrow C_2 = -\frac{pL^2}{2EI} \end{aligned} \quad (64)$$

e quindi la rotazione e' data da:

$$\phi(x_3) = -\frac{px_3}{2EI} \left(L^2 - Lx_3 + \frac{x_3^2}{3} \right) \quad (65)$$

Infine, dalla (60) si puo' scrivere:

$$u_2' = \frac{p(L - x_3)}{GA_s} - \phi = \frac{p(L - x_3)}{GA_s} + \frac{px_3}{2EI} \left(L^2 - \frac{Lx_3}{2} + \frac{x_3^2}{3} \right) \quad (66)$$

e quindi l'abbassamento e' dato da:

$$u_2 = \frac{px_3}{GA_s} \left(L - \frac{x_3}{2} \right) + \frac{px_3^2}{EI} \left(\frac{L^2}{4} - \frac{Lx_3}{6} + \frac{x_3^2}{24} \right) \quad (67)$$

annullandosi anche in questo caso la costante di integrazione, per la prima condizione ai limiti.

■ Discussione dei risultati

La rotazione all'estremo libero e':

$$\phi(L) = -\frac{pL^3}{6EI} \quad (68)$$

e quindi coincide con quanto predetto dalla teoria di Eulero-Bernoulli.

L'abbassamento nell'estremo libero e' invece fornito da:

$$v(L) = \frac{pL^2}{2GA_s} + \frac{pL^4}{8EI} = \frac{pL^4}{8EI} \left(1 + \frac{4}{\alpha}\right) \quad (69)$$

La trave appoggiata con carico distribuito

Le equazioni da risolvere per il caso illustrato nel titolo sono (cfr. Figura 5):

$$\begin{aligned} EI \phi'' - GA_s (u_2' + \phi) &= 0 \\ GA_s (u_2' + \phi) &= -p \end{aligned} \quad (70)$$

con le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ \phi'(0) &= 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ \phi'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (71)$$

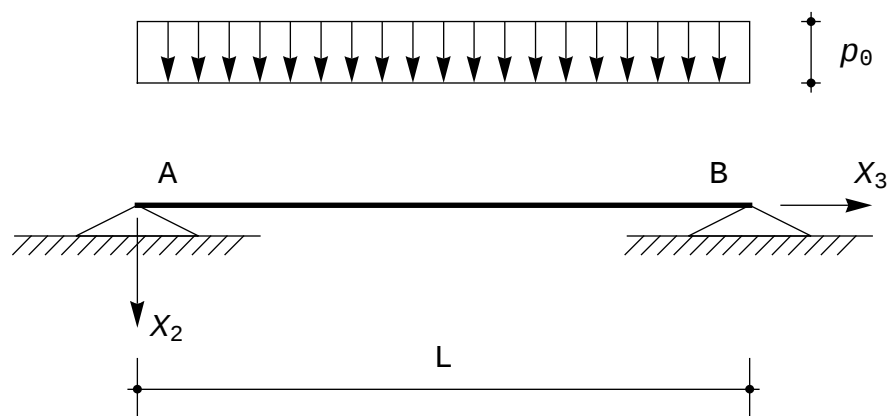


Figura 5 - Trave appoggiata soggetta a carico distribuito

Per affrontare questo problema, si inizi ad integrare la seconda delle (70):

$$GA_s (u_2' + \phi) = -p x_3 + C_1 \quad (72)$$

e la si sostituisca nella prima delle (70):

$$EI \phi'' + p x_3 - C_1 = 0 \quad (73)$$

e quindi subito:

$$\phi' = -\frac{p x_3^2}{2EI} + \frac{C_1 x_3}{EI} + C_2 \quad (74)$$

$$\phi = -\frac{p x_3^3}{6EI} + \frac{C_1 x_3^2}{2EI} + C_2 x_3 + C_3 \quad (75)$$

La seconda e quarta condizione ai limiti permettono di calcolare le due costanti di integrazione C_1 e C_2 :

$$\begin{aligned} \phi'(0) &= 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ \phi'(L) &= 0 \rightarrow C_1 = \frac{pL}{2} \end{aligned} \quad (76)$$

e quindi la rotazione e' data da:

$$\phi = -\frac{p x_3^3}{6 EI} + \frac{p L x_3^2}{4 EI} + C_3 \quad (77)$$

Infine, dalla (72) si puo' scrivere:

$$u_2' = \frac{p (L - x_3)}{GA_s} - \phi = \frac{p (L - x_3)}{GA_s} + \frac{p x_3^3}{6 EI} - \frac{p L x_3^2}{4 EI} - C_3 \quad (78)$$

e quindi l'abbassamento e' dato da:

$$u_2 = \frac{p x_3}{2 GA_s} (L - x_3) + \frac{p x_3^4}{24 EI} - \frac{p L x_3^3}{12 EI} - C_3 x_3 + C_4 \quad (79)$$

Le condizioni ai limiti su u_2 impongono che sia:

$$C_4 = 0$$

$$\frac{p L^4}{24 EI} - \frac{p L^4}{12 EI} - C_3 L + C_4 = 0 \rightarrow C_3 = -\frac{p L^3}{24 EI} \quad (80)$$

e quindi infine:

$$u_2 = \frac{p x_3}{2 GA_s} (L - x_3) + \frac{p x_3^4}{24 EI} - \frac{p L x_3^3}{12 EI} + \frac{p L^3 x_3}{24 EI} \quad (81)$$

$$\phi = -\frac{p x_3^3}{6 EI} + \frac{p L x_3^2}{4 EI} - \frac{p L^3}{24 EI} \quad (82)$$

■ Discussione dei risultati

La rotazione in corrispondenza degli appoggi e'

$$\phi(0) = -\frac{p L^3}{24 EI} \quad (83)$$

$$\phi(L) = \frac{p L^3}{24 EI} \quad (84)$$

e quindi coincide con quanto predetto dalla teoria di Eulero-Bernoulli.

L'abbassamento in mezzera e' invece fornito da:

$$u_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{p L^2}{8 GA_s} + \frac{5}{384} \frac{p L^4}{EI} = \frac{5}{384} \frac{p L^4}{EI} \left(1 + \frac{48}{5 \alpha}\right) \quad (85)$$

Il caso della cerniera interna

La trattazione di vincoli intermedi, interni o esterni, o di forze intermedie, siano esse forze o coppie, non presenta particolari problemi concettuali, ma solo una maggiore complessita' analitica.

A scopo esemplificativo, si voglia calcolare gli spostamenti e le rotazioni per una trave incastrata a sinistra, appoggiata a destra, con una cerniera interna situata in mezzera, e soggetta ad una coppia concentrata $\mathcal{M}$

agente sull'appoggio di destra. (cfr. Figura 6).

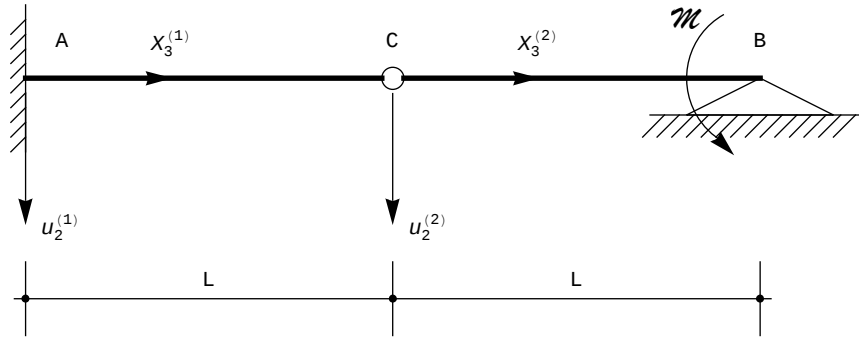


Figura 6 - Trave incastrata-appoggiata con cerniera in mezzzeria

Introdotti, al solito, due sistemi di riferimento con origine nell'incastro e nella cerniera interna, rispettivamente, si hanno le quattro equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} EI \phi^{(1)'''} - GA_s (u_2^{(1)'} + \phi^{(1)}) &= 0 \\ GA_s (u_2^{(1)''} + \phi^{(1)'}) &= 0 \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} EI \phi^{(2)'''} - GA_s (u_2^{(2)'} + \phi^{(2)}) &= 0 \\ GA_s (u_2^{(2)''} + \phi^{(2)'}) &= 0 \end{aligned} \quad (87)$$

con le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2^{(1)}(0) &= 0 \\ \phi^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} u_2^{(1)}(L) &= u_2^{(2)}(0) \\ M^{(1)}(L) &= 0 \\ M^{(2)}(0) &= 0 \\ T^{(1)}(L) &= T^{(2)}(0) \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} u_2^{(2)}(L) &= 0 \\ M^{(2)}(L) &= M \end{aligned} \quad (90)$$

In termini di spostamenti e rotazioni, si hanno quindi le otto condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2^{(1)}(0) &= 0 \\ \phi^{(1)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} u_2^{(1)}(L) &= u_2^{(2)}(0) \\ \phi^{(1)'}(L) &= 0 \\ \phi^{(2)'}(0) &= 0 \\ \phi^{(1)}(L) + u_2^{(1)'}(L) &= \phi^{(2)}(0) + u_2^{(2)'}(0) \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} u_2^{(2)}(L) &= 0 \\ EI \phi^{(2)'}(L) &= M \end{aligned} \quad (93)$$

Dalla seconda della (86) si ha:

$$GA_s (u_2^{(1)'} + \phi^{(1)}) = C_1 \quad (94)$$

ed inserendo nella prima delle (86) si ha:

$$EI \phi^{(1)''} = C_1 \quad (95)$$

da cui subito:

$$\phi^{(1)'} = \frac{C_1}{EI} x_3^{(1)} + C_2 \quad (96)$$

$$\phi^{(1)} = \frac{C_1}{EI} \frac{x_3^{(1)2}}{2} + C_2 x_3^{(1)} + C_3 \quad (97)$$

Segue dalla (94):

$$u_2^{(1)'} = \frac{C_1}{GA_s} - \frac{C_1}{EI} \frac{x_3^{(1)2}}{2} - C_2 x_3^{(1)} - C_3 \quad (98)$$

e quindi infine:

$$u_2^{(1)} = \frac{C_1 x_3^{(1)}}{GA_s} - \frac{C_1}{EI} \frac{x_3^{(1)3}}{6} - C_2 \frac{x_3^{(1)2}}{2} - C_3 x_3^{(1)} + C_4 \quad (99)$$

Del tutto analogamente si ha anche, per il secondo tratto:

$$\phi^{(2)'} = \frac{C_5}{EI} x_3^{(2)} + C_6 \quad (100)$$

$$\phi^{(2)} = \frac{C_5}{EI} \frac{x_3^{(2)2}}{2} + C_6 x_3^{(2)} + C_7 \quad (101)$$

$$u_2^{(2)'} = \frac{C_5}{GA_s} - \frac{C_5}{EI} \frac{x_3^{(2)2}}{2} - C_6 x_3^{(2)} - C_7 \quad (102)$$

$$u_2^{(2)} = \frac{C_5 x_3^{(2)}}{GA_s} - \frac{C_5}{EI} \frac{x_3^{(2)3}}{6} - C_6 \frac{x_3^{(2)2}}{2} - C_7 x_3^{(2)} + C_8 \quad (103)$$

Valutando opportunamente queste funzioni, ed inserendo il risultato nelle condizioni ai limiti si giunge al seguente sistema di otto equazioni nelle otto incognite $C_1, C_2, \dots, C_8$:

$$\begin{aligned} C_3 &= 0 \\ C_4 &= 0 \\ \frac{C_1 L}{GA_s} - \frac{C_1 L^3}{6 EI} - \frac{C_2 L^2}{2} - C_3 L + C_4 - C_8 &= 0 \\ \frac{C_1 L}{EI} + C_2 &= 0 \\ C_6 &= 0 \\ C_1 - C_5 &= 0 \\ \frac{C_5 L}{GA_s} - \frac{C_5 L^3}{6 EI} - \frac{C_6 L^2}{2} - C_7 L + C_8 &= 0 \\ \frac{C_5 L}{EI} + C_6 &= 0 \end{aligned} \quad (104)$$

con soluzione:

$$C_1 = \frac{\mathcal{M}}{L}; C_2 = -\frac{\mathcal{M}}{EI}; C_3 = C_4 = 0$$

$$C_5 = \frac{\mathcal{M}}{L}; C_6 = 0; C_7 = \frac{2\mathcal{M}}{GA_s L} + \frac{\mathcal{M}L}{6EI}; C_8 = \frac{\mathcal{M}}{GA_s} + \frac{\mathcal{M}L^2}{3EI}$$

Spostamenti e rotazioni sono quindi forniti da:

$$u_2^{(1)}(x_3^{(1)}) = \frac{\mathcal{M} x_3^{(1)}}{GA_s L} + \frac{\mathcal{M} x_3^{(1)2}}{2EI} - \frac{\mathcal{M} x_3^{(1)3}}{6EI L} \quad (106)$$

$$u_2^{(2)}(x_3^{(2)}) = \frac{\mathcal{M}}{GA_s} \left(1 - \frac{x_3^{(2)}}{L} \right) + \frac{\mathcal{M} L^2}{3EI} - \frac{\mathcal{M} L}{6EI} x_3^{(2)} - \frac{\mathcal{M} x_3^{(2)3}}{6EI L} \quad (107)$$

$$\phi^{(1)}(x_3^{(1)}) = -\frac{\mathcal{M} x_3^{(1)}}{EI} \left(1 - \frac{x_3^{(1)}}{2L} \right) \quad (108)$$

$$\phi^{(2)}(x_3^{(2)}) = \frac{2\mathcal{M}}{GA_s L} + \frac{\mathcal{M} L}{6EI} + \frac{\mathcal{M} x_3^{(2)2}}{2EI L} \quad (109)$$

$$M^{(1)}(x_3^{(1)}) = \mathcal{M} \left(-1 + \frac{x_3^{(1)}}{L} \right) \quad (110)$$

$$M^{(2)}(x_3^{(2)}) = \mathcal{M} \frac{x_3^{(2)}}{L} \quad (111)$$

$$T^{(1)}(x_3^{(1)}) = \frac{\mathcal{M}}{L} \quad (112)$$

$$T^{(2)}(x_3^{(2)}) = \frac{\mathcal{M}}{L} \quad (113)$$

Esercizio - Risolvere lo stesso problema in ipotesi di trave di Eulero-Bernoulli, e verificare le differenze.

Note

[Nota]- In realta', G ha dimensioni fisiche di forza per unita' di superficie, e quindi parlare di valori "elevati" non ha molto significato. Piu' preciso risulta introdurre il fattore adimensionale:

$$\alpha = \frac{GA L^2}{EI_{11}} \quad (114)$$

e dire che la teoria di Eulero-Bernoulli e' tanto piu' affidabile quanto piu' elevato risulta il valore di α . [Torna al testo]

Grafici