
Lezione 35 - Le travi a piu' campate

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 20 marzo 2012]

L'analisi delle travi a piu' campate, in linea di principio, non presenta difficolta' insormontabili. Si consideri infatti una trave suddivisa in t tratti, identificando quindi $t-1$ sezioni intermedie in cui una, o piu', delle quattro quantita' spostamento, rotazione, momento e taglio, subisce una discontinuita'. Cio' puo' essere dovuto alla presenza di un vincolo esterno, oppure di un vincolo interno, oppure ancora di una forza o coppia concentrata.

Per ciascuno dei t tratti si puo' scrivere una equazione differenziale della linea elastica, la cui soluzione dipende da quattro parametri incognite, ed in questo modo si hanno, in totale, $4t$ parametri da determinare. Per la loro determinazione si possono pero' scrivere due condizioni ai limiti in ciascuno dei due estremi, e quattro condizioni in ciascuna delle $t-1$ sezioni intermedie di discontinuita'. Si giunge in tal modo ad un sistema di $4t$ equazioni in $4t$ incognite, la cui soluzione definisce univocamente la funzione spostamento.

Tuttavia la complessita' computazionale di un simile approccio cresce rapidamente all'aumentare del numero di tratti, e pertanto, se non si dispone di un programma di calcolo, solo le piu' semplici situazioni possono essere affrontate secondo questa via.

In questa lezione si fornisce un largo catalogo di possibili vincoli intermedi e si danno alcuni esempi che per la loro semplicita' possono svolgersi manualmente.

I vincoli intermedi esterni

Si intende per *vincolo intermedio esterno* un dispositivo di vincolo agente in corrispondenza di una sezione retta non di estremita', e che sia tale da non interrompere la continuita' fisica della trave. Nell'ambito delle strutture considerate, sono ipotizzabili due diversi vincoli, in grado rispettivamente di annullare l'abbassamento (appoggio) o la rotazione (bipendolo esterno) della sezione retta cui essi sono applicati. Per far cio' essi esplicheranno sulla trave una reazione verticale - nel caso dell'appoggio - o una coppia reattiva - nel caso del bipendolo.

■ Il caso dell'appoggio

Si consideri una situazione come quella di Figura 1, in cui esiste un appoggio intermedio posto a distanza L_1 dalla sezione di sinistra. La trave e' quindi suddivisa in due tratti, di luce L_1 ed L_2 , rispettivamente, e conviene definire due sistemi di riferimento locali, ciascuno con origine nel suo estremo di sinistra, cosi' come illustrato in Figura. Il primo sistema, $(O_1, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$, ha origine in A ed e' definito in $[0, L_1]$, il secondo sistema $(O_2, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})$ ha origine in C ed e' definito in $[0, L_2]$.

Se il prodotto EI_{11} e' costante lungo tutta la trave, si possono scrivere le due equazioni della linea elastica:

$$EI_{11} u_2^{(1)''''} (x_3^{(1)}) = P_1 (x_3^{(1)}) \quad (1)$$

valida in $[0, L_1]$, e:

$$EI_{11} u_2^{(2)''''} (x_3^{(2)}) = P_2 (x_3^{(2)}) \quad (2)$$

valida in $[0, L_2]$.

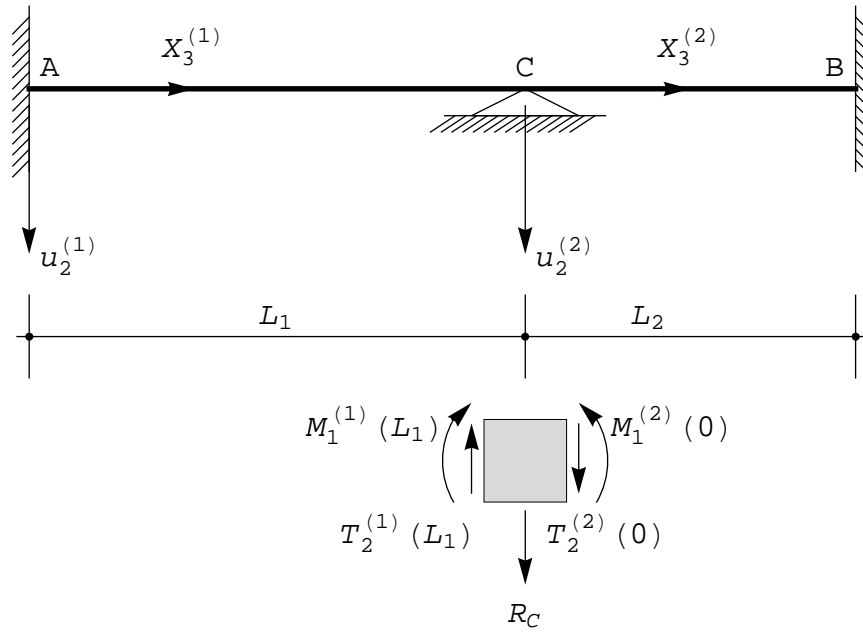


Figura 1 - Il caso dell'appoggio intermedio

con soluzioni:

$$u_2^{(1)}(x_3^{(1)}) = C_1 + C_2 x_3^{(1)} + C_3 x_3^{(1)2} + C_4 x_3^{(1)3} + I_1(x_3^{(1)}) \quad (3)$$

$$u_2^{(2)}(x_3^{(2)}) = C_5 + C_6 x_3^{(2)} + C_7 x_3^{(2)2} + C_8 x_3^{(2)3} + I_2(x_3^{(2)}) \quad (4)$$

con I_1 ed I_2 integrali particolari da calcolare in base al particolare carico agente sulla trave. Le otto costanti di integrazione C_i andranno determinate imponendo otto condizioni, di congruenza o di equilibrio, nelle tre sezioni A, B e C, e piu' in particolare, scrivendo le usuali condizioni ai limiti nei due estremi A e B, e quattro condizioni nella sezione intermedia C, dove agisce il vincolo.

In corrispondenza di un appoggio intermedio, in particolare, occorre riprodurre analiticamente quanto avviene nella realta' fisica: l'appoggio sicuramente impone che lo spostamento del punto C sia nullo, sia che esso venga considerato come ultimo punto del primo tratto, sia che esso venga considerato il primo punto del secondo tratto. Sara' pertanto:

$$\begin{aligned} u_2^{(1)}(L_1) &= 0 \\ u_2^{(2)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Poiche' poi l'appoggio non interrompe in alcun modo la continuita' della trave, la rotazione in C dovra' essere continua, e quindi:

$$u_2^{(1)'}(L_1) = u_2^{(2)'}(0) \quad (6)$$

Queste tre condizioni sono di tipo esclusivamente geometrico, ed esprimono la *congruenza* degli spostamenti e delle rotazioni con il vincolo presente.

Passando all'esame delle caratteristiche, l'appoggio intermedio in C introduce una reazione verticale, incognita, che impedisce di affermare che il taglio in C e' unico. Viceversa, il momento in C sara' sicuramente unico, e quindi la quarta ed ultima condizione impone l'uguaglianza dei momenti:

$$-EI_{11} u_2^{(1)'''}(L_1) = -EI_{11} u_2^{(2)'''}(0) \quad (7)$$

Quest'ultima condizione esprime l'*equilibrio* rotazionale della sezione retta in C, come illustrato in Figura 1.

Dalla stessa Figura si puo' dedurre che la reazione dell'appoggio sara' data da:

$$R_C = T_2^{(1)}(L_1) - T_2^{(2)}(0) \tag{8}$$

■ Il caso del bipendolo

E' concettualmente possibile introdurre un secondo tipo di vincolo esterno intermedio, duale dell'appoggio, che imponga che la rotazione sia nulla:

$$\begin{aligned} u_2^{(1)'}(L_1) &= 0 \\ u_2^{(2)'}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

mentre la continuita' degli abbassamenti e' garantita dalla ulteriore condizione:

$$u_2^{(1)}(L_1) = u_2^{(2)}(0) \tag{10}$$

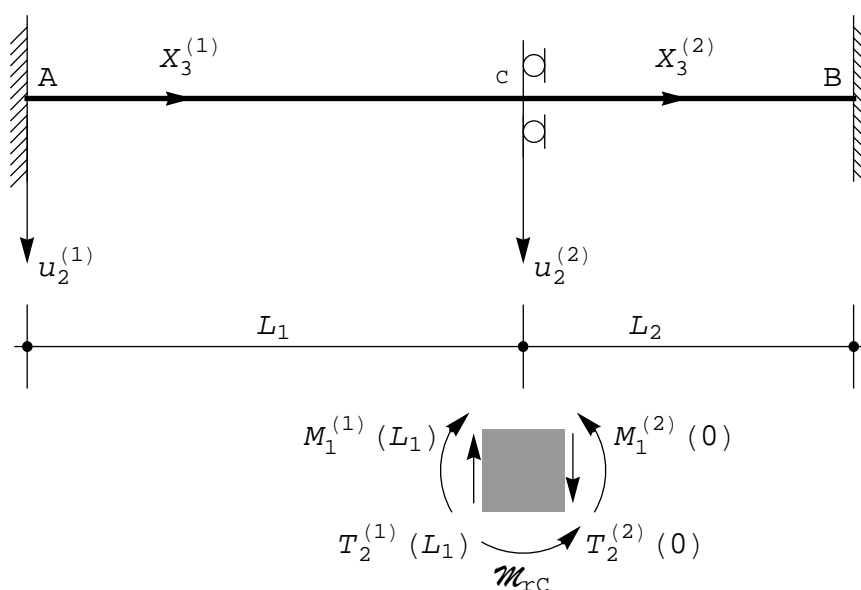


Figura 2 - Il caso del bipendolo esterno intermedio

Un tal tipo di vincolo, per bloccare la rotazione, dovra' reagire con una coppia, incognita, e quindi il momento sara' discontinuo in C. Viceversa, il taglio non subira' discontinuita', e quindi l'ultima condizione (di *equilibrio*) sara':

$$-EI_{11} u_2^{(1)''''}(L_1) = -EI_{11} u_2^{(2)''''}(0) \tag{11}$$

$$\mathcal{M}_{xC} = M_1^{(1)}(L_1) - M_1^{(2)}(0) \tag{12}$$

Quest'ultima condizione esprime l'*equilibrio* traslazionale della sezione retta in C, come illustrato in Figura 2. Dalla stessa figura si puo' dedurre che la coppia reattiva del bipendolo sara' data da:

Esempi

Si consideri, quale primo esempio, la trave di Figura 3, incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, con un ulteriore appoggio intermedio situato ad un terzo della luce complessiva della trave. Ipotizzando che essa sia soggetta al carico uniformemente distribuito di intensita' p_0 , l'abbassamento potra' esprimersi come:

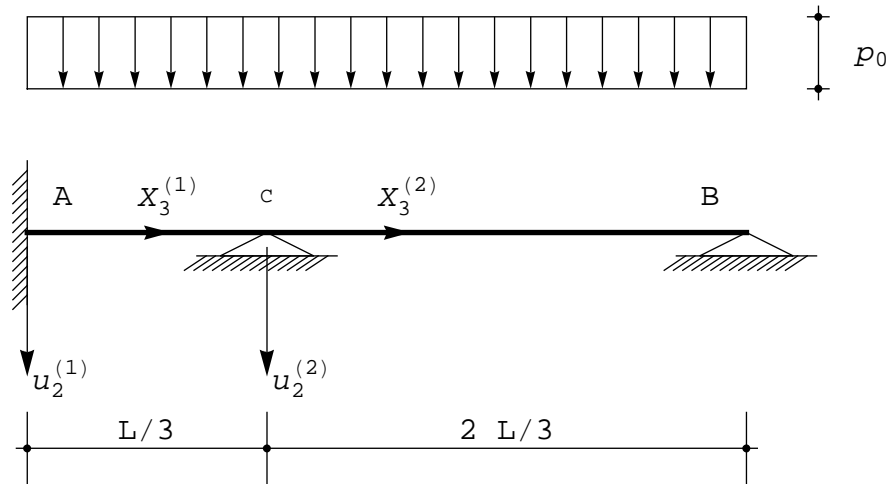


Figura 3 - La trave incastrata con appoggio ad un terzo della luce, soggetta a carico uniformemente distribuito

$$u_2^{(1)}(x_3^{(1)}) = C_1 + C_2 x_3^{(1)} + C_3 x_3^{(1)2} + C_4 x_3^{(1)3} + p_0 \frac{x_3^{(1)4}}{24 EI_{11}} \quad (13)$$

lungo il primo terzo di trave, e come:

$$u_2^{(2)}(x_3^{(2)}) = C_5 + C_6 x_3^{(2)} + C_7 x_3^{(2)2} + C_8 x_3^{(2)3} + p_0 \frac{x_3^{(2)4}}{24 EI_{11}} \quad (14)$$

lungo la restante porzione di trave. Le otto costanti di integrazione si calcolano imponendo le seguenti condizioni ai limiti:

nell'incastro di sinistra:

$$\begin{aligned} 1. \quad u_2^{(1)}(0) &= 0 \\ 2. \quad u_2^{(1)'}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

sull'appoggio intermedio:

$$3. \quad u_2^{(1)}\left(\frac{L}{3}\right) = 0 \quad (16)$$

$$4. \quad u_2^{(2)}(0) = 0$$

$$5. \quad u_2^{(1)'}\left(\frac{L}{3}\right) = u_2^{(2)'}(0) \quad (17)$$

$$6. \quad u_2^{(1)''}\left(\frac{L}{3}\right) = u_2^{(2)''}(0) \quad (18)$$

sull'appoggio di destra:

$$7. \quad u_2^{(2)}\left(2\frac{L}{3}\right) = 0 \quad (19)$$

$$8. \quad u_2^{(2)''}\left(2\frac{L}{3}\right) = 0$$

Derivando le (13) e (14), e valutando nei punti opportuni si giunge cosi' alle otto equazioni algebriche nelle otto incognite:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$C_1 + \frac{L}{3} C_2 + \frac{L^2}{9} C_3 + \frac{L^3}{27} C_4 + \frac{P_0 L^4}{1944 EI_{11}} = 0 \quad (21)$$

$$C_5 = 0 \quad (22)$$

$$C_2 + \frac{2L}{3} C_3 + \frac{L^2}{3} C_4 + \frac{P_0 L^3}{162 EI_{11}} = C_6 \quad (23)$$

$$2 C_3 + 2 L C_4 + \frac{P_0 L^2}{18 EI_{11}} = 2 C_7 \quad (24)$$

$$C_5 + \frac{2L}{3} C_6 + \frac{4L^2}{9} C_7 + \frac{8L^3}{27} C_8 + \frac{2P_0 L^4}{243 EI_{11}} \quad (25)$$

$$2 C_7 + 4 L C_8 + \frac{2 P_0 L^2}{9 EI_{11}} \quad (26)$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{3} & \frac{L^2}{9} & \frac{L^3}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2L}{3} & \frac{L^2}{3} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2L & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2L}{3} & \frac{4L^2}{9} & \frac{8L^3}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{P_0 L^4}{1944 EI_{11}} \\ 0 \\ -\frac{P_0 L^3}{162 EI_{11}} \\ -\frac{P_0 L^2}{18 EI_{11}} \\ -\frac{2 P_0 L^4}{243 EI_{11}} \\ -\frac{2 P_0 L^2}{9 EI_{11}} \end{pmatrix} \quad (27)$$

La soluzione del sistema (27) puo' ottenersi con un qualsiasi metodo di calcolo numerico, per sostituzione, con la regola di Cramer, tramite riduzione alla Gauss, etc., ottenendo le soluzioni:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0; C_2 = 0; C_3 = -\frac{P_0 L^2}{264 EI_{11}}; C_4 = -\frac{P_0 L}{396 EI_{11}}; \\ C_5 &= 0; C_6 = \frac{5 P_0 L^3}{1782 EI_{11}}; C_7 = \frac{17 P_0 L^2}{792 EI_{11}}; C_8 = -\frac{35 P_0 L}{528 EI_{11}} \end{aligned} \quad (28)$$

Gli spostamenti possono infine scriversi come:

$$u_2^{(1)}(x_3^{(1)}) = \frac{x_3^{(1)2} \left(33 x_3^{(1)2} - 2 L x_3^{(1)} - 3 L^2 \right)}{792} \frac{P_0}{EI_{11}} \quad (29)$$

$$u_2^{(2)}(x_3^{(2)}) = \frac{x_3^{(2)} \left(40 L^3 + 306 L^2 x_3^{(2)} - 945 L x_3^{(2)2} + 594 x_3^{(2)3} \right)}{14256} \frac{P_0}{EI_{11}} \quad (30)$$

da cui, derivando, si possono ottenere rotazioni, momenti e tagli:

$$\phi^{(1)}(x_3^{(1)}) = - \frac{x_3^{(1)} \left(22 x_3^{(1)2} - L x_3^{(1)} - L^2 \right)}{132} \frac{P_0}{EI_{11}} \quad (31)$$

$$\phi^{(2)}(x_3^{(2)}) = - \frac{\left(2376 x_3^{(2)3} - 2835 L x_3^{(2)2} + 612 L^2 x_3^{(2)} + 40 L^3 \right)}{14\,256} \frac{P_0}{EI_{11}} \quad (32)$$

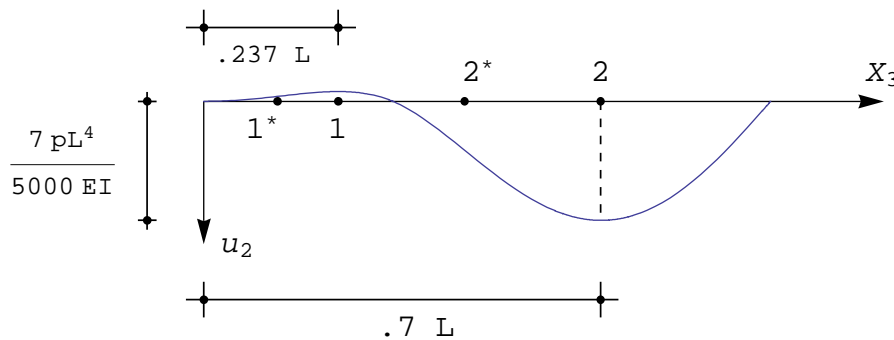
$$M_1^{(1)}(x_3^{(1)}) = - \left(66 x_3^{(1)2} - 2 L x_3^{(1)} - L^2 \right) \frac{P_0}{132} \quad (33)$$

$$M_1^{(2)}(x_3^{(2)}) = - \left(396 x_3^{(2)2} - 315 L x_3^{(2)} + 34 L^2 \right) \frac{P_0}{792} \quad (34)$$

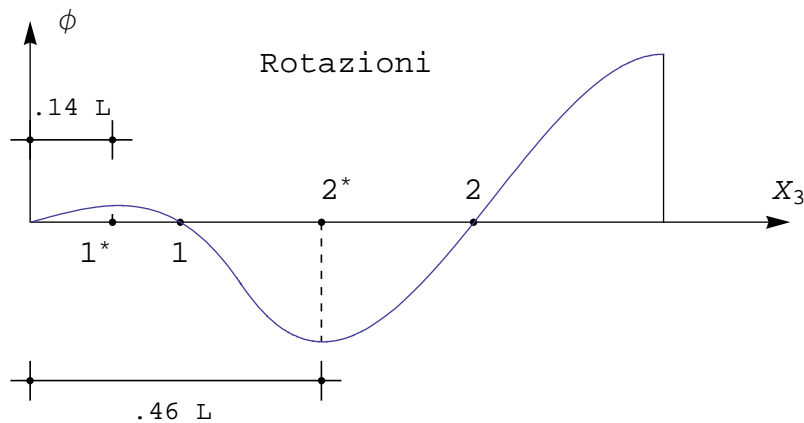
$$T_2^{(1)}(x_3^{(1)}) = (L - 66 x_3^{(1)}) \frac{P_0}{66} \quad (35)$$

$$T_2^{(2)}(x_3^{(2)}) = (35 L - 88 x_3^{(2)}) \frac{P_0}{88} \quad (36)$$

Spostamenti



Rotazioni



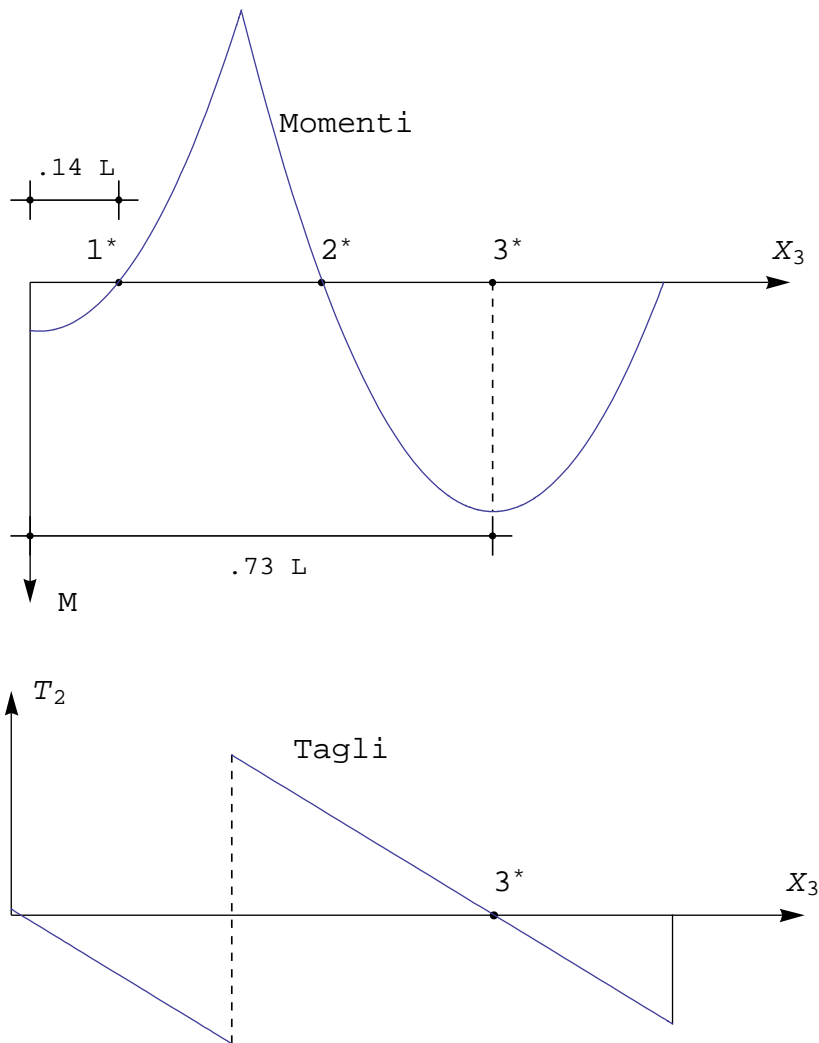


Figura 4 - La trave incastrata con appoggio ad un terzo della luce, soggetta a carico uniformemente distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

I relativi diagrammi sono presentati in Figura 4, e per il loro tracciamento qualitativo valgono le stesse raccomandazioni valide per le travi ad una sola campata. Si noti solo che i due punti di nullo del diagramma delle rotazioni, 1 e 2, posti rispettivamente alle ascisse $0.237L$ e $0.7L$, corrispondono ai minimi e massimi valori dello spostamento, mentre i punti di nullo del diagramma del momento, 1^* e 2^* , posti rispettivamente a $0.14L$ e $0.46L$, corrispondono a punti di massimo e minimo delle rotazioni, ed a punti di flesso per il diagramma degli spostamenti. Infine, il punto 3^* di nullo del taglio, situato a $0.73L$, corrisponde all'ascissa di massimo momento flettente.

Nella trave in esame sono presenti quattro reazioni vincolari, le tre reazioni verticali in A, B e C, e la coppia reattiva in A, mentre potranno scriversi solo due equazioni di equilibrio, poiche' la trave e' costituita da un singolo tratto. Ne segue che essa e' doppiamente iperstatica, e le reazioni andranno calcolate *a posteriori*:

$$R_A = -T_2^{(1)}(0) = -\frac{p_0 L}{66}$$

$$M_{rA} = -M_1^{(1)}(0) = -\frac{p_0 L^2}{132}$$

$$R_B = T_2^{(2)} \left(\frac{2}{3} L \right) = - \frac{71 P_0 L}{264}$$

$$R_C = T_2^{(1)} \left(\frac{L}{3} \right) - T_2^{(2)} (0) = - \frac{63 P_0 L}{88}$$

I vincoli interni

Si intende per *vincolo intermedio interno*, o *sconnessione*, un dispositivo di vincolo agente in corrispondenza di una sezione retta non di estremita', e che sia tale da interrompere la continuita' fisica della trave. Nell'ambito delle strutture considerate, e' ipotizzabile una *sconnessione doppia*, che suddivide la trave in due tronchi indipendenti tra di loro, e due *sconnessioni semplici*: la prima, detta *cerniera*, permette ai due tronchi di trave di ruotare intorno ad essa indipendentemente l'uno dall'altro, mentre impone che i due tronchi conservino lo stesso spostamento trasversale. In altri termini, e' ammessa una rotazione relativa $\Delta\phi$ tra le due facce del vincolo. La seconda sconnessione semplice, detta *bipendolo interno*, permette ai due tronchi di trave di subire spostamenti trasversali indipendenti l'uno dall'altro, mentre la rotazione dovra' essere la stessa. Equivalentemente, potra' dirsi che il bipendolo interno permette una traslazione relativa Δu_2 tra le sue due facce. Le convenzioni sui segni per gli spostamenti relativi si possono stabilire riconducendo tali spostamenti a spostamenti assoluti, pensando bloccata la parte di sinistra della trave. In tal caso lo spostamento relativo coincide con lo spostamento assoluto della parte di destra, e come tale sara' positivo se antiorario, nel caso della rotazione, e positivo se verso il basso, nel caso dello spostamento. Tutto cio' e' riportato in Figura 3.

■ Il caso della cerniera

Si consideri il caso della Figura 3a). Una *cerniera intermedia* a distanza L_1 dall'estremo di sinistra permette ai due tratti adiacenti di ruotare in modo indipendente l'uno dall'altro. Viceversa, lo spostamento in corrispondenza della cerniera e' unico, e quindi la prima (ed unica) condizione di congruenza e':

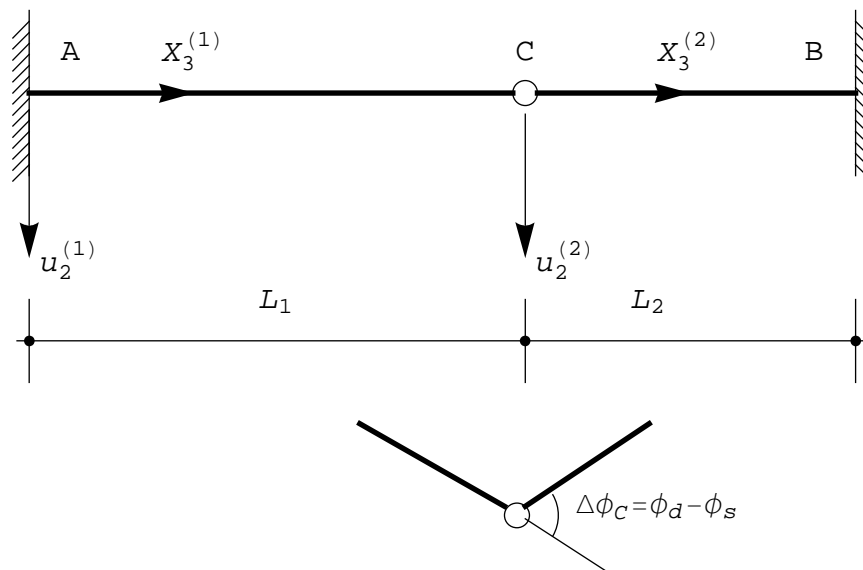


Figura 5 - La sconnessione semplice del tipo cerniera

$$u_2^{(1)}(L_1) = u_2^{(2)}(0) \quad (38)$$

L'equilibrio della stessa cerniera impone poi che i momenti flettenti siano nulli, e che il taglio abbia valore unico:

$$\begin{aligned} -EI_{11} u_2^{(1)'''} (L_1) &= 0 \\ -EI_{11} u_2^{(2)'''} (0) &= 0 \end{aligned} \tag{39}$$

$$-EI_{11} u_2^{(1)''''} (L_1) = -EI_{11} u_2^{(2)''''} (0) \tag{40}$$

■ Il caso del bipendolo

Duale della cerniera e' il *bipendolo interno*, che permette ai due tratti adiacenti di muoversi verticalmente in modo indipendente l'uno dall'altro. Viceversa, la rotazione in corrispondenza del bipendolo e' unica, e quindi la prima (ed unica) condizione di congruenza e':

$$u_2^{(1)'} (L_1) = u_2^{(2)'} (0) \tag{41}$$

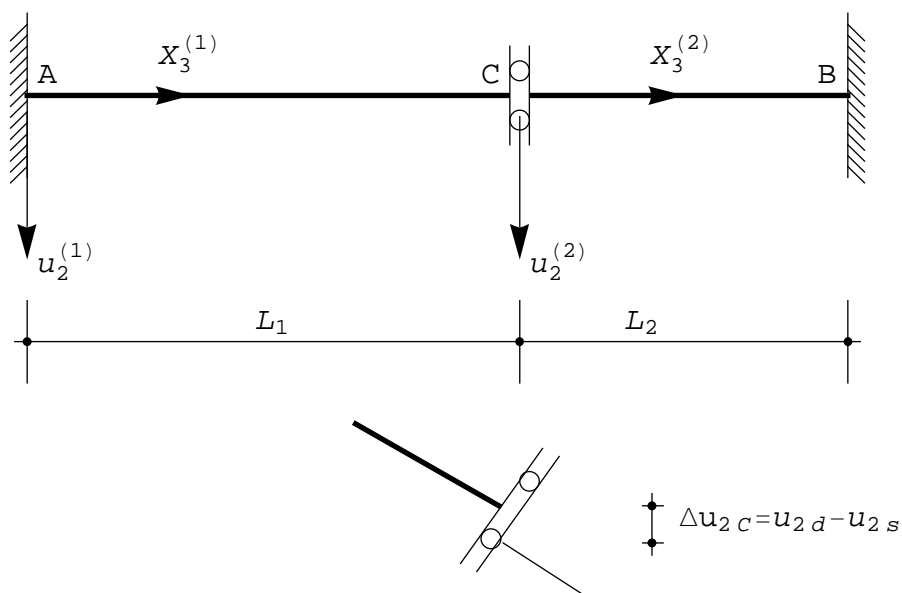


Figura 6 - La sconnessione semplice del tipo bipendolo

L'equilibrio impone poi che il momento flettente sia unico, e che il taglio sia nullo:

$$-EI_{11} u_2^{(1)'''} (L_1) = -EI_{11} u_2^{(2)'''} (0) \tag{42}$$

$$\begin{aligned} -EI_{11} u_2^{(1)''''} (L_1) &= 0 \\ -EI_{11} u_2^{(2)''''} (0) &= 0 \end{aligned} \tag{43}$$

Esempi

Si consideri la trave di Figura 7, incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, con una cerniera in mezzeria, soggetta al carico uniformemente distribuito di intensita' p_0 . Introdotti i due soliti sistemi di riferimento, gli spostamenti saranno esprimibili, lungo le due semiluci, dalle (13-14). Le otto condizioni ai limiti che permettono la determinazione delle otto costanti di integrazione si scrivono, nell'incastro a sinistra:

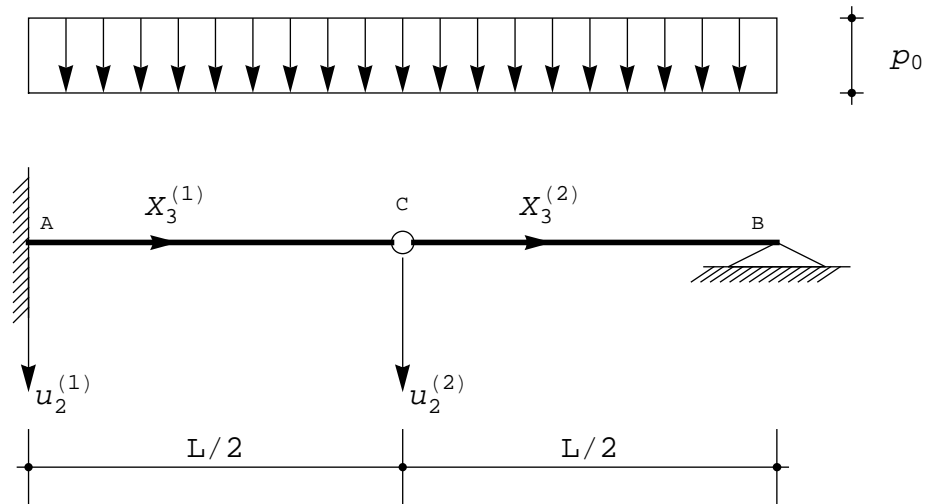


Figura 7 - Trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, con una cerniera in mezzeria, soggetta al carico uniformemente distribuito

$$\begin{aligned} 1. \quad u_2^{(1)}(0) &= 0 \\ 2. \quad u_2^{(1)'}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

nella cerniera intermedia:

$$\begin{aligned} 3. \quad u_2^{(1)}\left(\frac{L}{2}\right) &= u_2^{(2)}(0) \\ 4. \quad u_2^{(1)''}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{45}$$

$$5. \quad u_2^{(2)''}(0) = 0 \tag{46}$$

$$6. \quad u_2^{(1)''''}\left(\frac{L}{2}\right) = u_2^{(2)''''}(0) \tag{47}$$

sull'appoggio di destra:

$$7. \quad u_2^{(2)}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \tag{48}$$

$$8. \quad u_2^{(2)''}\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

Derivando le (13) e (14), e valutando nei punti opportuni si giunge così alle otto equazioni algebriche nelle otto incognite:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \tag{49}$$

$$C_1 + \frac{L}{2} C_2 + \frac{L^2}{4} C_3 + \frac{L^3}{8} C_4 + \frac{p_0 L^4}{384 EI_{11}} = C_5 \tag{50}$$

$$2 C_3 + 3 L C_4 + \frac{p_0 L^2}{8 EI_{11}} = 0 \tag{51}$$

$$C_6 = 0 \tag{52}$$

$$6 C_4 + \frac{P_0 L}{2 EI_{11}} = 6 C_8 \quad (53)$$

$$C_5 + \frac{L}{2} C_6 + \frac{L^2}{4} C_7 + \frac{L^3}{8} C_8 + \frac{P_0 L^4}{384 EI_{11}} \quad (54)$$

$$2 C_7 + 3 L C_8 + \frac{P_0 L^2}{8 EI_{11}} \quad (55)$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{P_0 L^4}{384 EI_{11}} \\ -\frac{P_0 L^2}{8 EI_{11}} \\ 0 \\ -\frac{P_0 L}{2 EI_{11}} \\ -\frac{P_0 L^4}{384 EI_{11}} \\ -\frac{P_0 L^2}{8 EI_{11}} \end{pmatrix} \quad (56)$$

In cascata si possono ottenere spostamenti, rotazioni, momenti e tagli:

La soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} C_1 = 0; C_2 = 0; C_3 = -\frac{P_0 L^2}{8 EI_{11}}; C_4 = -\frac{P_0 L}{8 EI_{11}}; \\ C_5 = \frac{7}{384} \frac{P_0 L^4}{EI_{11}}; C_6 = -\frac{P_0 L^3}{32 EI_{11}}; C_7 = 0; C_8 = -\frac{P_0 L}{24 EI_{11}} \end{aligned} \quad (57)$$

permette di esplicitare gli spostamenti come:

$$u_2^{(1)}(x_3^{(1)}) = \frac{x_3^{(1)2} \left(x_3^{(1)2} - 3L x_3^{(1)} + 3L^2 \right)}{24} \frac{P_0}{EI_{11}} \quad (58)$$

$$u_2^{(2)}(x_3^{(2)}) = \frac{\left(7L^4 - 12L^3 x_3^{(2)} - 16L x_3^{(2)3} + 16x_3^{(2)4} \right)}{384} \frac{P_0}{EI_{11}} \quad (59)$$

da cui, derivando, si possono ottenere rotazioni, momenti e tagli:

$$\phi^{(1)}(x_3^{(1)}) = -\frac{x_3^{(1)} \left(4x_3^{(1)2} - 9L x_3^{(1)} + 6L^2 \right)}{24} \frac{P_0}{EI_{11}} \quad (60)$$

$$\phi^{(2)}(x_3^{(2)}) = -\frac{\left(16x_3^{(2)3} - 12L x_3^{(2)2} - 3L^3 \right)}{96} \frac{P_0}{EI_{11}} \quad (61)$$

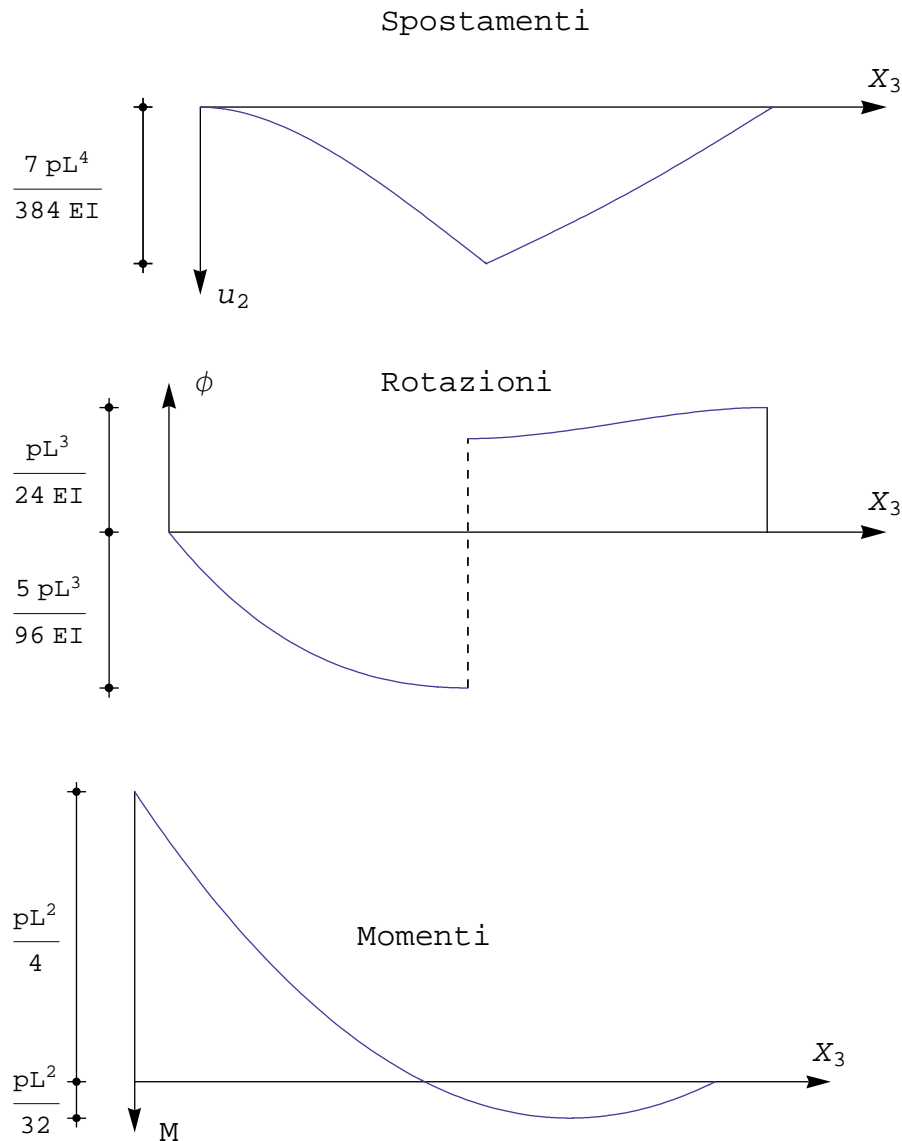
$$M_1^{(1)}(x_3^{(1)}) = -\left(2x_3^{(1)2} - 3L x_3^{(1)} + L^2 \right) \frac{P_0}{4} \quad (62)$$

$$M_1^{(2)}(x_3^{(2)}) = - \left(2 x_3^{(2)2} - L x_3^{(2)} \right) \frac{p_0}{4} \quad (63)$$

$$T_2^{(1)}(x_3^{(1)}) = \left(3 L - 4 x_3^{(1)} \right) \frac{p_0}{4} \quad (64)$$

$$T_2^{(2)}(x_3^{(2)}) = \left(L - 4 x_3^{(2)} \right) \frac{p_0}{4} \quad (65)$$

I relativi diagrammi sono presentati in Figura 8. Il taglio varia con legge lineare, annullandosi a tre quarti della luce, sicche' in questa sezione il diagramma del momento avra' tangente orizzontale, raggiungendo il suo valore massimo:



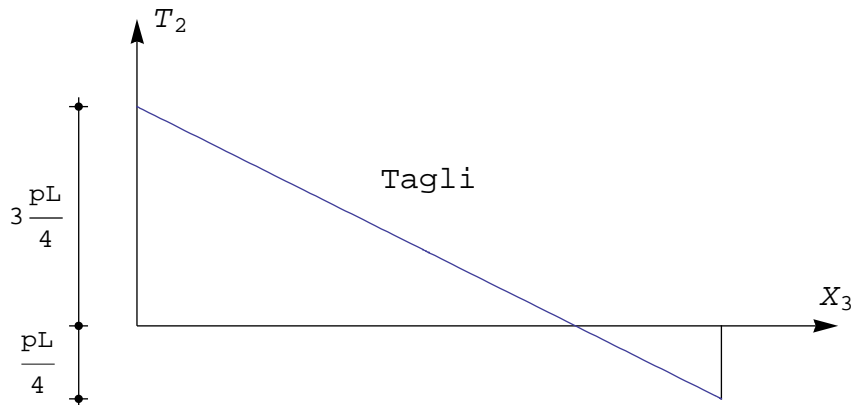


Figura 8 - Trave incastrata ed appoggiata con cerniera in mezzeria. Diagrammi degli spostamenti, delle rotazioni, dei momenti e dei tagli

$$M_{1 \max} = M_1 \left(\frac{3}{4} L \right) = \frac{p_0 L^2}{32} \quad (66)$$

Il minimo momento, invece, e' raggiunto sull'incastro, e vale:

$$M_{1 \min} = M_1 (0) = -\frac{p_0 L^2}{4} \quad (67)$$

Le rotazioni saranno nulle nell'incastro, ed il relativo diagramma presentera' tangente orizzontale laddove il momento e' nullo, ossia in mezzeria (dove e' presente la cerniera) e sull'appoggio. Inoltre, in corrispondenza della cerniera il diagramma sara' discontinuo, indicando con la discontinuita' la presenza di una rotazione relativa $\Delta\phi$ tra le due facce della cerniera. Si avra':

$$\Delta\phi = \phi^{(2)} (0) - \phi^{(1)} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{p_0 L^3}{EI_{11}} \left(\frac{1}{32} + \frac{5}{96} \right) = \frac{p_0 L^3}{12 EI_{11}} \quad (68)$$

Infine, gli abbassamenti saranno nulli agli estremi, il relativo diagramma presentera' tangente orizzontale nell'incastro, la sua curvatura cambiera' di segno in mezzeria. L'abbassamento della cerniera coincide con l'abbassamento massimo, e vale:

$$u_{2 \max} = u_2^{(1)} \left(\frac{L}{2} \right) = u_2^2 (0) = \frac{7}{384} \frac{p_0 L^4}{EI_{11}} \quad (69)$$

Le reazioni vincolari possono dedursi dalla conoscenza delle caratteristiche della sollecitazione interna:

$$R_A = -T_2^{(1)} (0) = -\frac{3}{4} p_0 L \quad (70)$$

$$R_B = T_2^{(2)} \left(\frac{L}{2} \right) = -\frac{1}{4} p_0 L$$

$$\mathcal{M}_{rA} = -M_1^{(1)} (0) = \frac{p_0 L^2}{4} \quad (71)$$

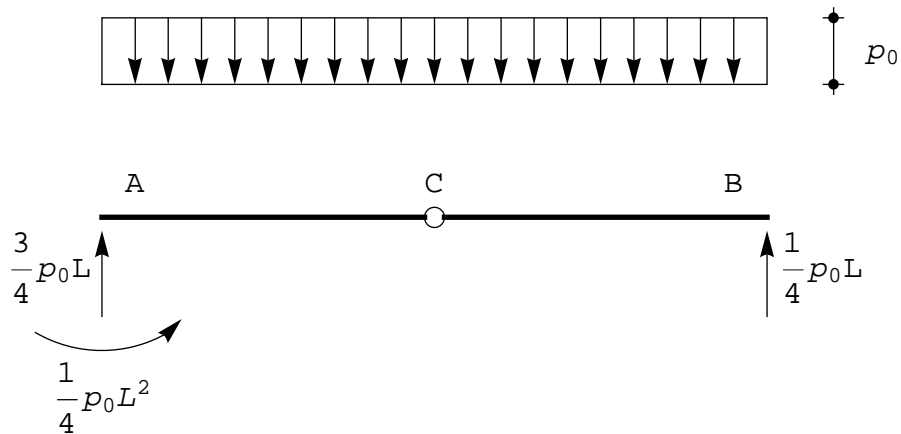


Figura 9 - Le reazioni per una trave incastrata ed appoggiata con cerniera in mezzeria. Diagrammi degli spostamenti, delle rotazioni, dei momenti e dei tagli

Alternativamente, si consideri che la cerniera spezza la continuita' fisica della trave, che puo' essere vista come un assemblaggio di due travi di luce $L/2$, a patto di applicare al punto C lo sforzo di taglio; per ciascuno dei due tratti devono valere le equazioni di equilibrio per la traslazione verticale e per la rotazione. Si hanno quindi quattro equazioni nelle quattro incognite R_A ed \mathcal{M}_{rA} , T_{2C} ed R_B , e la trave risulta isostatica. Le equazioni di equilibrio sono:

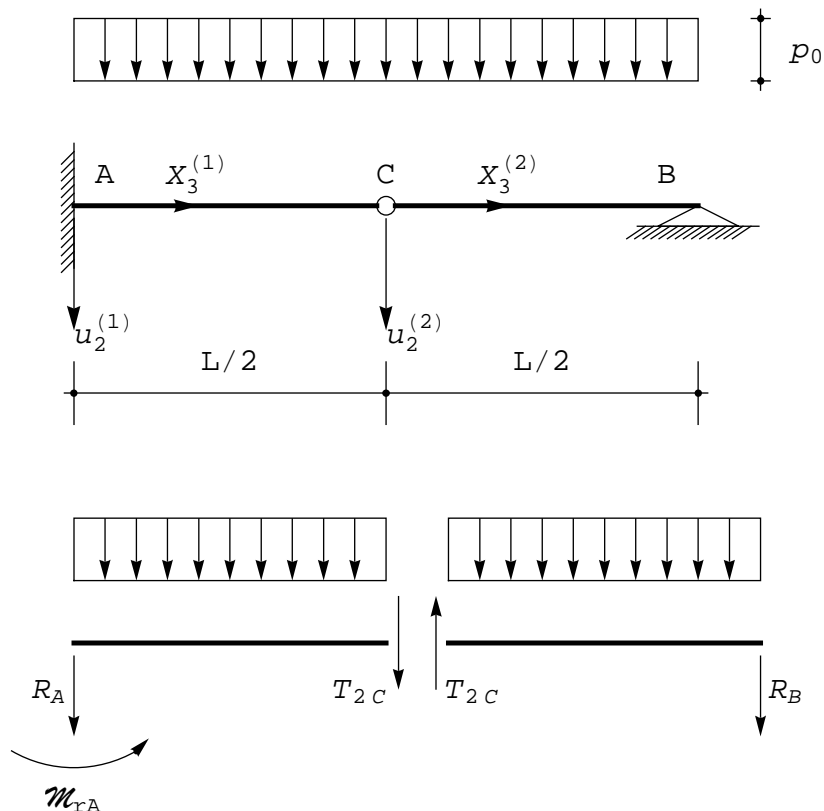


Figura 10 - Lo schema per il calcolo delle reazioni in una trave incastrata ed appoggiata con cerniera intermedia

$$\begin{aligned}
 R_A + T_{2C} + p_0 \frac{L}{2} &= 0 \\
 M_{rA} + R_A \frac{L}{2} + p_0 \frac{L^2}{8} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{72}$$

$$\begin{aligned}
 -T_{2C} + R_B + p_0 \frac{L}{2} &= 0 \\
 -T_{2C} \frac{L}{2} + p_0 \frac{L^2}{8} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{73}$$

e risolvendole si ritrovano i valori (70-71).

Come ulteriore esempio, si consideri la trave di Figura 11, appoggiata a sinistra ed incastrata a destra, con un bipendolo interno situato ad un terzo della luce, e soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensita' p_0 , agente dall'appoggio fino al bipendolo. Per essa, l'equazione differenziale della linea elastica ha soluzione:

$$u_2^{(1)}(x_3^{(1)}) = C_1 + C_2 x_3^{(1)} + C_3 x_3^{(1)2} + C_4 x_3^{(1)3} + p_0 \frac{x_3^{(1)4}}{24 EI_{11}}
 \tag{74}$$

lungo il primo terzo di trave, e:

$$u_2^{(2)}(x_3^{(2)}) = C_5 + C_6 x_3^{(2)} + C_7 x_3^{(2)2} + C_8 x_3^{(2)3}
 \tag{75}$$

lungo la restante porzione di trave. Le otto costanti di integrazione si calcolano imponendo le seguenti condizioni ai limiti:

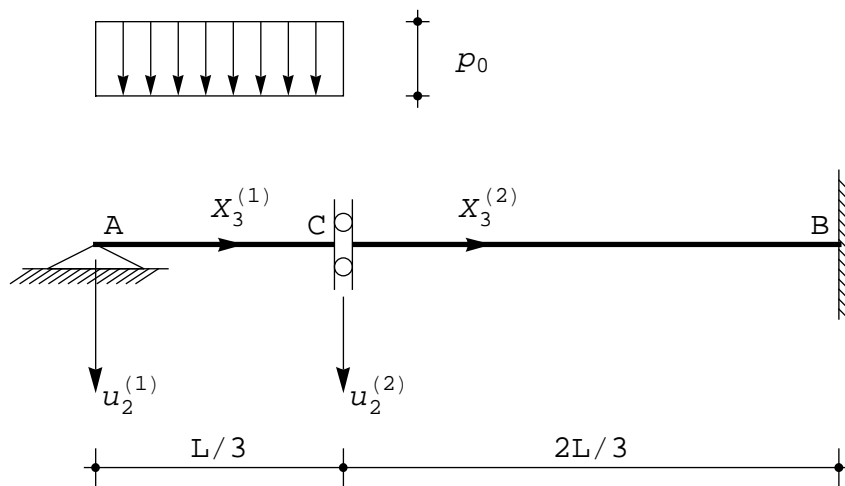


Figura 11 - Trave appoggiata ed incastrata con bipendolo interno ad un terzo della luce., soggetta a carico uniformemente distribuito sulla sola luce di sinistra

sull'appoggio di sinistra sono nulli sia gli spostamenti che i momenti:

$$\begin{aligned}
 1. \quad u_2^{(1)}(0) &= 0 \\
 2. \quad u_2^{(1)''}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{76}$$

nel bipendolo interno la rotazione e' unica, il momento e' unico, ed il taglio e' nullo:

$$3. u_2^{(1)'} \left(\frac{L}{3} \right) = u_2^{(2)'} (0)$$

$$4. u_2^{(1)''} \left(\frac{L}{3} \right) = u_2^{(2)''} (0)$$

$$5. u_2^{(1)''''} \left(\frac{L}{3} \right) = 0 \quad (78)$$

$$6. u_2^{(2)''''} (0) = 0 \quad (79)$$

nell'incastro di destra sono nulli sia gli spostamenti che la rotazione:

$$7. u_2^{(2)} \left(2 \frac{L}{3} \right) = 0 \quad (80)$$

$$8. u_2^{(2)'} \left(2 \frac{L}{3} \right) = 0$$

Come sempre, queste otto condizioni si traducono in un sistema di otto equazioni algebriche nelle otto costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ 2 C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (81)$$

$$C_2 + \frac{2}{3} L C_3 + \frac{L^2}{3} C_4 + p_0 \frac{L^3}{162 EI_{11}} = C_6$$

$$6 C_4 + p_0 \frac{L}{3 EI_{11}} = 0 \quad (82)$$

$$6 C_8 = 0$$

$$2 C_3 + 2 L C_4 + p_0 \frac{L^2}{18 EI_{11}} = 2 C_7$$

$$C_5 + \frac{2 L}{3} C_6 + \frac{4 L^2}{9} C_7 + \frac{8 L^3}{27} C_8 = 0 \quad (83)$$

$$C_6 + \frac{4 L}{3} C_7 + \frac{4 L^2}{3} C_8 = 0$$

con soluzione:

$$C_1 = 0; C_2 = \frac{4 L^3}{81 EI_{11}} p_0; C_3 = 0; C_4 = -\frac{L}{18 EI_{11}} p_0 \quad (84)$$

$$C_5 = -\frac{L^4}{81 EI_{11}} p_0; C_6 = \frac{L^3}{27 EI_{11}} p_0; C_7 = -\frac{L^2}{36 EI_{11}} p_0; C_8 = 0$$

Gli spostamenti possono allora scriversi:

$$u_2^{(1)} (x_3^{(1)}) = \frac{x_3^{(1)} \left(32 L^3 - 36 L x_3^{(1)2} + 27 x_3^{(1)3} \right)}{648} \frac{p_0}{EI_{11}} \quad (85)$$

$$u_2^{(2)} (x_3^{(2)}) = -\frac{L^2 \left(2 L - 3 x_3^{(2)2} \right)^2}{324} \frac{p_0}{EI_{11}} \quad (86)$$

da cui, derivando, si possono ottenere rotazioni, momenti e tagli:

$$\phi^{(1)}(x_3^{(1)}) = - \frac{(8 L^3 - 27 L x_3^{(1)2} + 27 x_3^{(1)3})}{162} \frac{p_0}{EI_{11}} \quad (87)$$

$$\phi^{(2)}(x_3^{(2)}) = - \frac{L^2 (2 L - 3 x_3^{(2)})}{54} \frac{p_0}{EI_{11}} \quad (88)$$

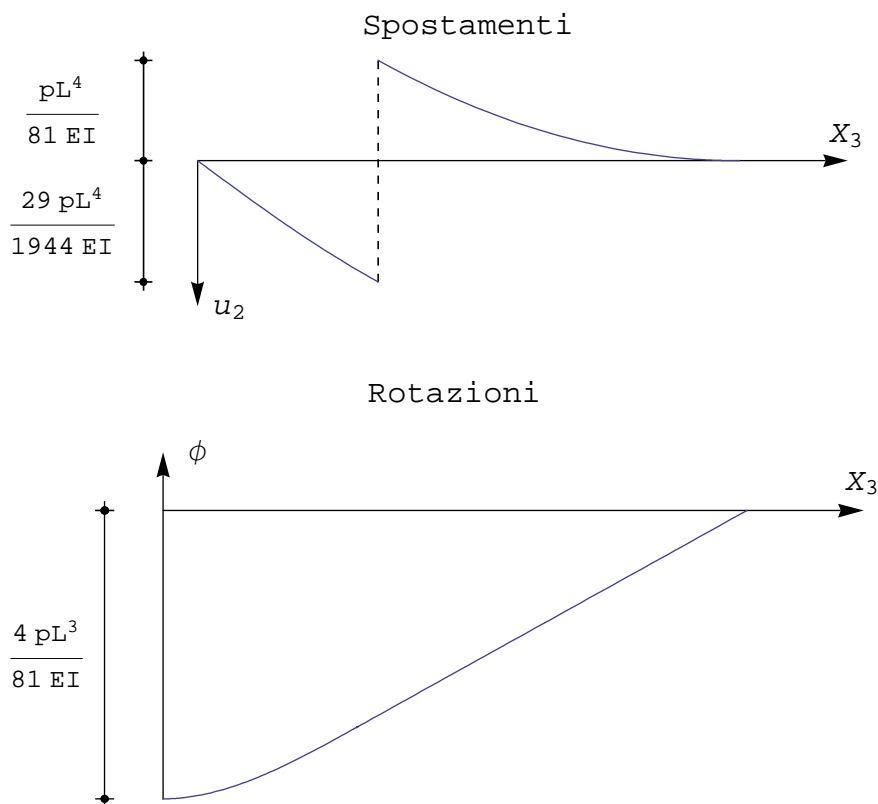
$$M_1^{(1)}(x_3^{(1)}) = \frac{1}{6} (2 L - 3 x_3^{(1)}) x_3^{(1)} p_0 \quad (89)$$

$$M_1^{(2)}(x_3^{(2)}) = \frac{p_0 L^2}{18} \quad (90)$$

$$T_2^{(1)}(x_3^{(1)}) = \frac{1}{3} (L - 3 x_3^{(1)}) p_0 \quad (91)$$

$$T_2^{(2)}(x_3^{(2)}) = 0 \quad (92)$$

I grafici risultanti sono riprodotti in Figura 12, insieme ad alcuni valori notevoli, quali il taglio massimo e la rotazione massima (nell'appoggio), il momento massimo (lungo il tratto di destra) ed i due valori dello spostamento nelle due fasce del bipendolo.



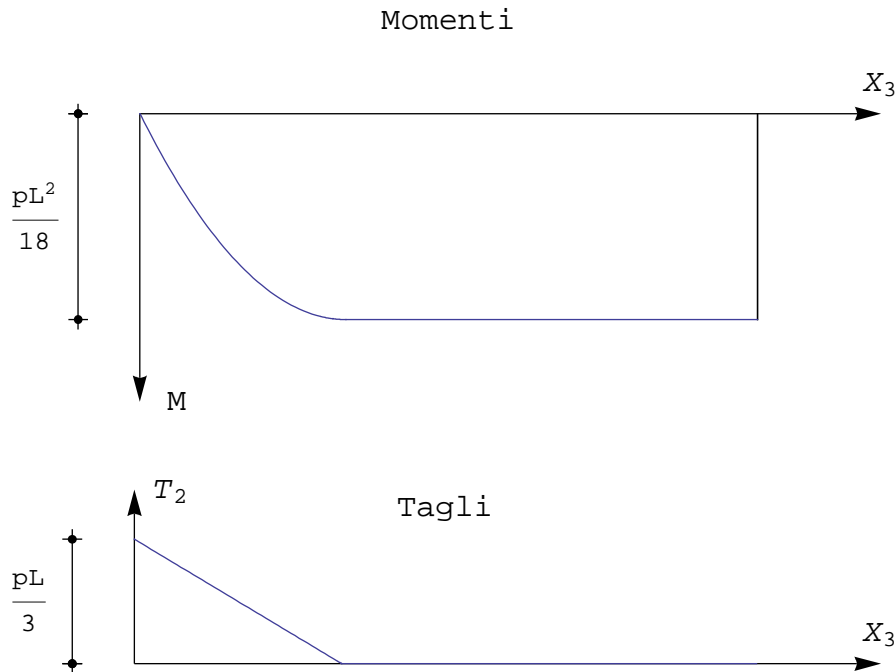


Figura 12 - Trave appoggiata ed incastrata con bipendolo interno ad un terzo della luce., soggetta a carico uniformemente distribuito sulla sola luce di sinistra: diagrammi degli spostamenti, delle rotazioni, dei momenti e dei tagli

Anche in questo caso la trave risulta isostatica, in quanto essa e' composta da due tratti, e quindi si possono scrivere quattro equazioni della statica, necessarie a calcolare la reazione verticale dell'appoggio di sinistra, la reazione verticale e la coppia reattiva dell'incastro a destra, ed il momento agente in C. Si ha quindi la situazione di Figura 13, da cui si possono trarre le quattro equazioni:

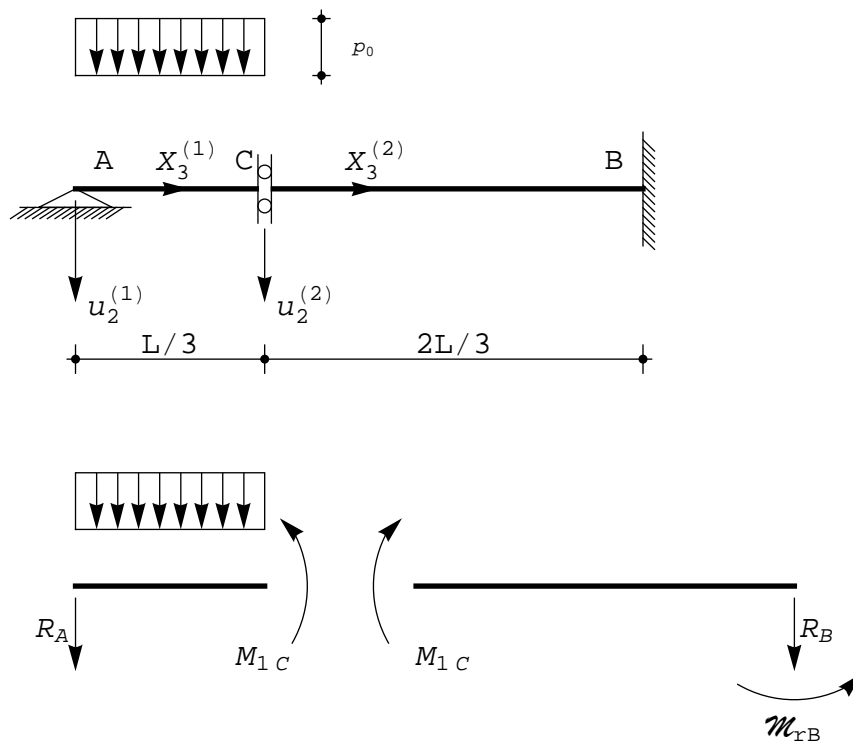


Figura 13 - Lo schema per il calcolo delle reazioni in una trave appoggiata ed incastrata con un bipendolo interno ad un terzo della luce

$$R_A + p_0 \frac{L}{3} = 0 \rightarrow R_A = - p_0 \frac{L}{3}$$

$$M_{1C} - p_0 \frac{L}{3} \frac{L}{6} = 0 \rightarrow M_{1C} = p_0 \frac{L^2}{18}$$

$$R_B = 0$$

$$\mathcal{M}_{xB} - M_{1C} = 0 \rightarrow \mathcal{M}_{xB} = p_0 \frac{L^2}{18}$$

Figure