
Lezione 34 - I vincoli imperfetti

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 310 agosto 2011]

In quanto si e' detto finora, si e' sempre ipotizzato che il vincolo sia in grado di svolgere perfettamente la sua funzione, annullando completamente l'abbassamento e/o la rotazione. Nella realta', un simile vincolo e' difficilmente costruibile, ed occorre prevedere in qualche modo uno schema teorico agli estremi che possa riprodurre piu' fedelmente cio' che accade nella pratica tecnica.

A questi casi e' dedicata la presente lezione.

I cedimenti anelastici

Si incontrano frequentemente vincoli che semplicemente non sono in grado di annullare totalmente lo spostamento e/o la rotazione, nel senso che, all'atto della costruzione, essi "cedono", subendo un ben quantificato spostamento (o rotazione), che poi resta fisso nel tempo. Si puo' quindi avere, ad esempio, un appoggio imperfetto, che abbia subito un cedimento di 3 centimetri, e di esso andra' tenuto debitamente conto nel calcolo della deformata.

In generale, questi cedimenti sono detti cedimenti *anelastici*, e possono dar luogo ai seguenti vincoli imperfetti:

- appoggio imperfetto, per cui $u_2 = v_0$
- bipendolo imperfetto, per cui $\phi = \phi_0$
- incastro imperfetto, per cui $u_2 = v_0$ e/o $\phi = \phi_0$

Non vi e' alcuna difficolta' a tenere in conto questa generalizzazione, nello studio di una trave cosi' come condotto nelle lezioni precedenti: le condizioni ai limiti di congruenza dovranno essere modificate, divenendo non omogenee, mentre le condizioni di equilibrio non subiranno modifiche.

■ Le travi isostatiche

Gli schemi isostatici finora studiati, e quelli piu' complessi che si studieranno in seguito, hanno la proprieta' di non veder sorgere caratteristiche della sollecitazione interna, a seguito di cedimenti anelastici dei loro vincoli. Si consideri infatti la trave a mensola di Figura 1, il cui incastro subisce un cedimento verticale di v_0 ed un cedimento rotazionale di ϕ_0 . Il problema ai limiti relativo a questo schema strutturale si scrive:

$$\begin{aligned}EI u_2''''(x_3) &= 0 \\ u_2(0) &= v_0 \\ u_2'(0) &= -\phi_0 \\ u_2''(L) &= 0 \\ u_2'''(L) &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

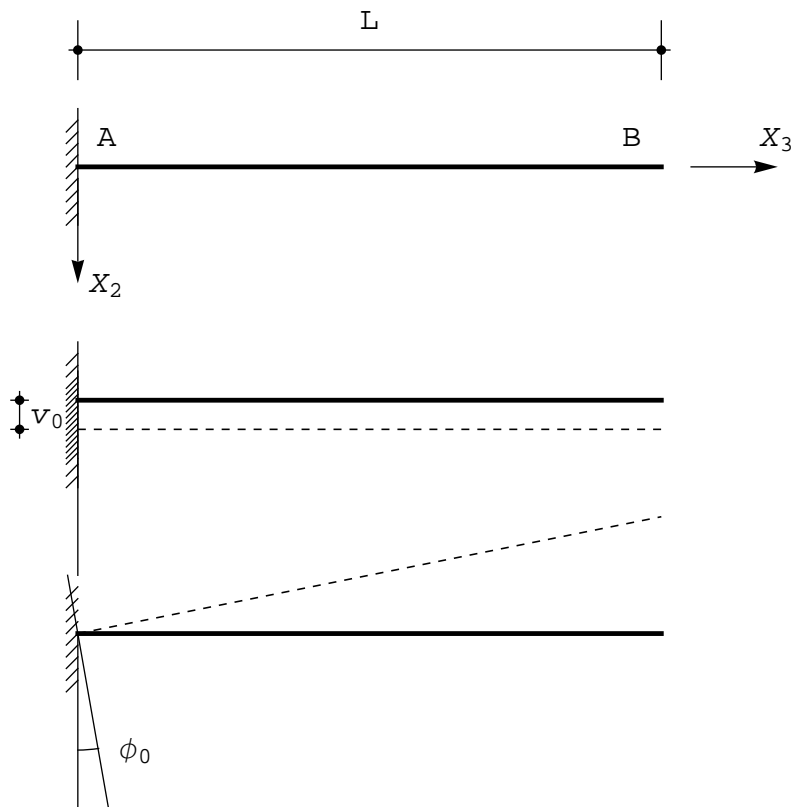


Figura 1 - Trave a mensola soggetta ad un cedimento anelastico verticale ed un cedimento anelastico rotazionale

dove già si è tenuto conto che $\phi(x_3) = -u_2'(x_3)$. L'usuale soluzione cubica dell'equazione differenziale (1):

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2 x_3 + C_3 x_3^2 + C_4 x_3^3 \quad (2)$$

conduce a trasformare le condizioni ai limiti in quattro equazioni nelle quattro incognite C_i :

$$\begin{aligned} C_1 &= v_0 \\ C_2 &= -\phi_0 \\ 2 C_3 + 6 C_4 L &= 0 \\ 6 C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Ne segue facilmente che la linea elastica può essere espressa come:

$$u_2(x_3) = v_0 - \phi_0 x_3 \quad (4)$$

ed è quindi interpretabile come sovrapposizione di una traslazione rigida di ampiezza v_0 e di una rotazione rigida di ampiezza ϕ_0 . Le caratteristiche, come anticipato, sono identicamente nulle. Analoghi risultati si ottengono dall'analisi di una trave appoggiata soggetta ai cedimenti verticali anelastici di ampiezza v_A e v_B degli appoggi, o dall'analisi di una trave con appoggio e bipendolo soggetta al cedimento verticale v_0 dell'appoggio, ed al cedimento rotazionale ϕ_0 del bipendolo.

■ Le travi iperstatiche

In una trave iperstatica, la presenza di un cedimento anelastico provoca l'insorgere di caratteristiche della sollecitazione interna, ed esse risultano proporzionali alla rigidezza flessionale EI_{11} , a differenza di quanto accade nei casi finora studiati di travi a vincoli perfetti. A titolo di esempio, si consideri una trave doppiamente incastrata, il cui incastro di destra subisca un cedimento verticale anelastico di ampiezza v_L ed un cedimento rotazionale ϕ_L . Il relativo problema ai limiti e' definito da:

$$\begin{aligned} EI u_2''''(x_3) &= 0 \\ u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \\ u_2(L) &= v_L \\ u_2'(L) &= -\phi_L \end{aligned} \quad (5)$$

ed ha soluzione:

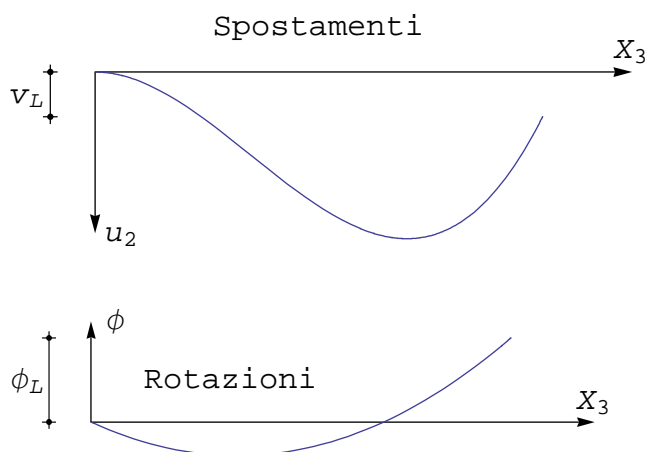
$$u_2(x_3) = \frac{x_3^2(3L - 2x_3)}{L^3} v_L + \frac{x_3^2(L - x_3)}{L^2} \phi_L \quad (6)$$

$$\phi(x_3) = \frac{6x_3(x_3 - L)}{L^3} v_L + \frac{x_3(3x_3 - 2L)}{L^2} \phi_L \quad (7)$$

$$M_1(x_3) = -6 \frac{EI_{11}}{L^3} (L - 2x_3) v_L - 2 \frac{EI_{11}}{L^2} (L - 3x_3) \phi_L \quad (8)$$

$$T_2(x_3) = \frac{12EI_{11}}{L^3} v_L + \frac{6EI_{11}}{L^2} \phi_L \quad (9)$$

I relativi diagrammi sono presentati in Figura 2. Si noti che nell'incastro di destra si dovra' avere un abbassamento pari al cedimento imposto v_L , ed una pendenza pari a $-\phi_L$.



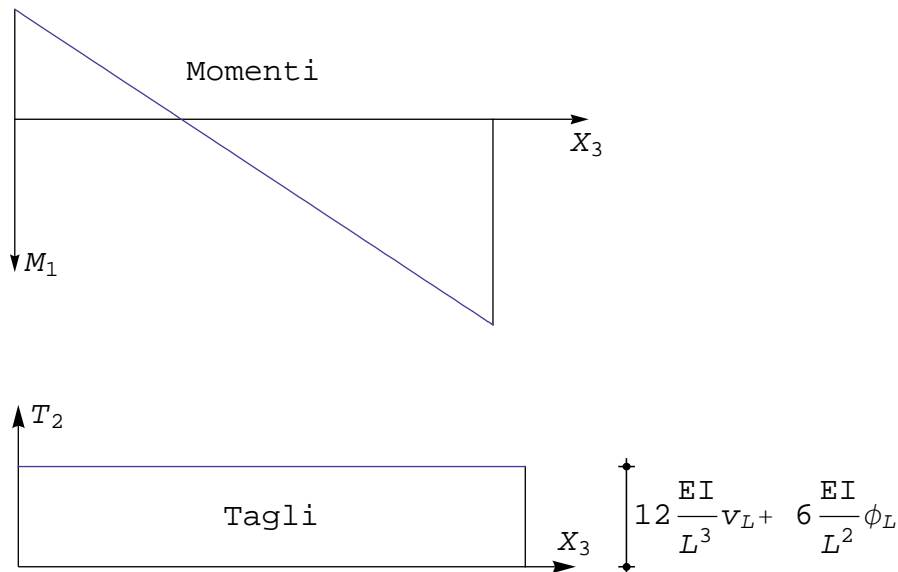


Figura 2- Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave doppiamente incastrata soggetta a cedimenti anelastici nell'incastro di destra

I cedimenti elastici

Nella sezione precedente si sono trattati i casi in cui un vincolo cedeva, per difetto di fabbricazione, per eccesso di carico, per colpa del terreno di fondazione, o per qualsiasi altro motivo. Il risultato era uno spostamento, o una rotazione, non più nulla, ma costante.

In altri casi, invece, il vincolo è costituito da materiale elastico, che permette spostamenti e/o rotazioni in funzione dei carichi, o meglio, delle reazioni ad esso applicate. In tal caso, il vincolo possiede una sua energia di deformazione, che andrà calcolata ed aggiunta all'energia di deformazione inerente alla struttura.

■ L'energia elastica del vincolo cedevole

Per semplicità, ed anche per ovvie ragioni di coerenza, si ipotizza un legame elastico lineare tra le reazioni ed i corrispondenti spostamenti, in modo da minimizzare le inevitabili complicazioni computazionali.

Se quindi si suppone che ambedue gli estremi della trave possano abbassarsi e ruotare elasticamente, come illustrato schematicamente in Figura 3, potranno scriversi le relazioni:

$$\begin{aligned} R_A &= -k_{vA} u_2(0) \\ \mathcal{M}_{rA} &= -k_{\phi A} \phi(0) \end{aligned} \quad (10)$$

nell'estremo di sinistra, e:

$$\begin{aligned} R_B &= -k_{vB} u_2(L) \\ \mathcal{M}_{rB} &= -k_{\phi B} \phi(L) \end{aligned} \quad (11)$$

nell'estremo di destra, dove R_A ed R_B sono le reazioni verticali agli estremi, e \mathcal{M}_{rA} ed \mathcal{M}_{rB} sono le coppie reattive agli estremi.

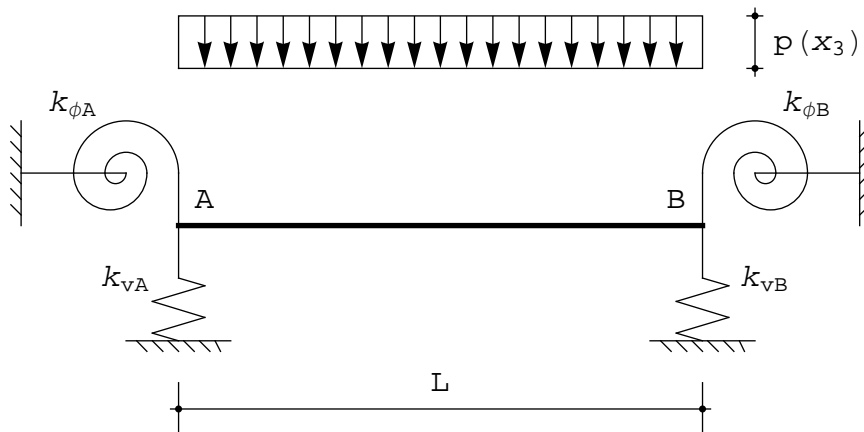


Figura 3. La trave su vincoli elasticamente cedevoli

Le quattro costanti k_{vA} , k_{vB} , $k_{\phi A}$ e $k_{\phi B}$ sono costanti di *rigidezza*, assiale o rotazionale, rispettivamente, ed hanno dimensione fisica di FL^{-1} nel caso assiale, e di FL nel caso rotazionale.

L'energia di deformazione domiciliata in ciascuno di questi vincoli cedevoli potra' essere calcolata, a partire dalla (10) e dalla (11). Per i vincoli assialmente cedevoli si avra':

$$L_{vA} = \frac{1}{2} k_{vA} u_2^2(0) ; L_{vB} = \frac{1}{2} k_{vB} u_2^2(L) \tag{12}$$

rispettivamente a sinistra ed a destra, mentre nel caso dei vincoli rotazionali si avra':

$$L_{\phi A} = \frac{1}{2} k_{\phi A} \phi^2(0) ; L_{\phi B} = \frac{1}{2} k_{\phi B} \phi^2(L) \tag{13}$$

nell'estremo di sinistra e, rispettivamente, nell'estremo di destra.

■ **Le condizioni ai limiti in corrispondenza di un vincolo elasticamente cedevole**

L'energia potenziale totale di un tronco di trave di luce L, soggetta ad un carico trasversale $p(x_3)$, e vincolata elasticamente come in Figura 3, puo' scriversi come:

$$E_t = \frac{EI_{11}}{2} \int_0^L u_2''^2(x_3) dx_3 + \frac{1}{2} k_{vA} u_2^2(0) + \frac{1}{2} k_{vB} u_2^2(L) + \frac{1}{2} k_{\phi A} \phi^2(0) + \frac{1}{2} k_{\phi B} \phi^2(L) - \int_0^L p(x_3) u_2 dx_3 \tag{14}$$

o anche, ricordando il legame tra rotazione e derivata prima dell'abbassamento, come:

$$E_t = \frac{EI_{11}}{2} \int_0^L u_2''^2(x_3) dx_3 + \frac{1}{2} k_{vA} u_2^2(0) + \frac{1}{2} k_{vB} u_2^2(L) + \frac{1}{2} k_{\phi A} u_2'(0)^2 + \frac{1}{2} k_{\phi B} u_2'(L)^2 - \int_0^L p(x_3) u_2 dx_3 \tag{15}$$

La variazione prima dell'energia potenziale (15) si calcola facilmente come:

$$\delta_1 E_t =$$

$$EI_{11} \int_0^L u_2'' \delta u_2'' dx_3 + k_{vA} u_2(0) \delta u_2(0) + k_{vB} u_2(L) \delta u_2(L) + k_{\phi A} u_2'(0) \delta u_2'(0) + k_{\phi A} u_2'(L) \delta u_2'(L) - \int_0^L p \delta u_2 dx_3$$

ed integrando per parti due volte il primo integrale si ha, come già illustrato in precedenza:

$$\delta_1 E_t = [EI_{11} u_2'' \delta u_2']_0^L - [EI_{11} u_2''' \delta u_2]_0^L + EI_{11} \int_0^L u_2'''' \delta u_2 dx_3 + k_{vA} u_2(0) \delta u_2(0) + k_{vB} u_2(L) \delta u_2(L) + k_{\phi A} u_2'(0) \delta u_2'(0) + k_{\phi B} u_2'(L) \delta u_2'(L) - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 \tag{17}$$

Per il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale totale, allora, dovrà essere, come usuale:

$$EI_{11} u_2'''' = p \tag{18}$$

con le condizioni ai limiti che possono leggersi dalla (17), annullando le parti finite:

$$[EI_{11} u_2''(L) + k_{\phi B} u_2'(L)] \delta u_2'(L) + [-EI_{11} u_2''(0) + k_{\phi A} u_2'(0)] \delta u_2'(0) + [-EI_{11} u_2'''(L) + k_{vB} u_2(L)] \delta u_2(L) + [EI_{11} u_2'''(0) + k_{vA} u_2(0)] \delta u_2(0) = 0 \tag{19}$$

Nell'estremo di sinistra, quindi, in $x_3 = 0$, dovrà aversi:

$$\begin{aligned} -EI_{11} u_2''(0) + k_{\phi A} u_2'(0) &= 0 \\ EI_{11} u_2'''(0) + k_{vA} u_2(0) &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

mentre in $x_3 = L$, nell'estremo di destra:

$$\begin{aligned} EI_{11} u_2''(L) + k_{\phi B} u_2'(L) &= 0 \\ -EI_{11} u_2'''(L) + k_{vB} u_2(L) &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

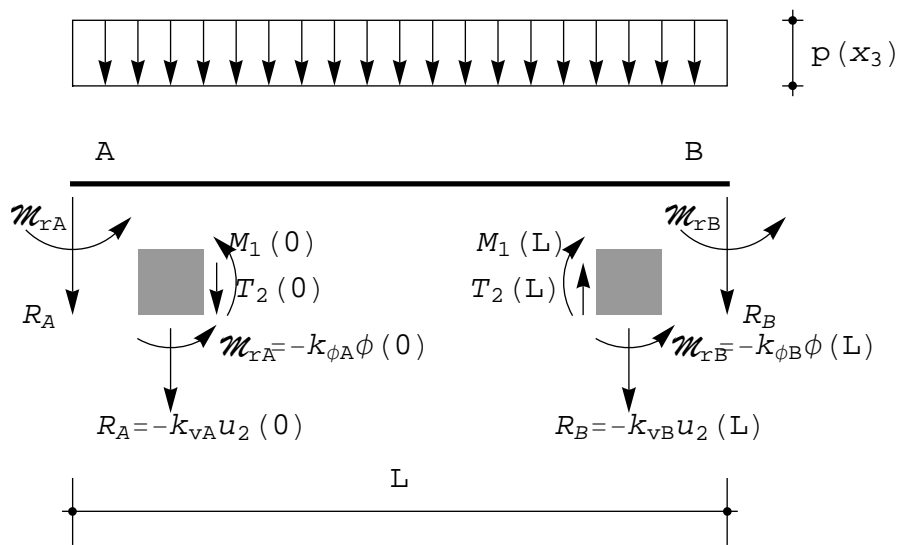


Figura 4 - Lo schema per la deduzione delle condizioni ai limiti per via geometrica

Ad analoghe conclusioni si arriva per via geometrica, equilibrando i concetti elementari enucleati in corrispon-

denza degli estremi. Ad esempio, a sinistra si ha, come puo' leggersi dalla Figura 4:

$$R_A + T_2 (0) = 0; \quad \mathcal{M}_{TA} + M_1 (0) = 0 \quad (22)$$

ed utilizzando le (10) e le relazioni che legano le caratteristiche alle derivate degli spostamenti si giunge a scrivere le (20).

■ La trave con incastro ed appoggio imperfetto

Si consideri la trave di Figura 5, incastrata perfettamente a sinistra, ed appoggiata a destra su un appoggio elasticamente cedevole, di rigidezza k_{vB} . Poiche' il carico si suppone costante su tutta la luce, $p(x_3) = p_0$, la deformata sara' data, come ormai noto, da:

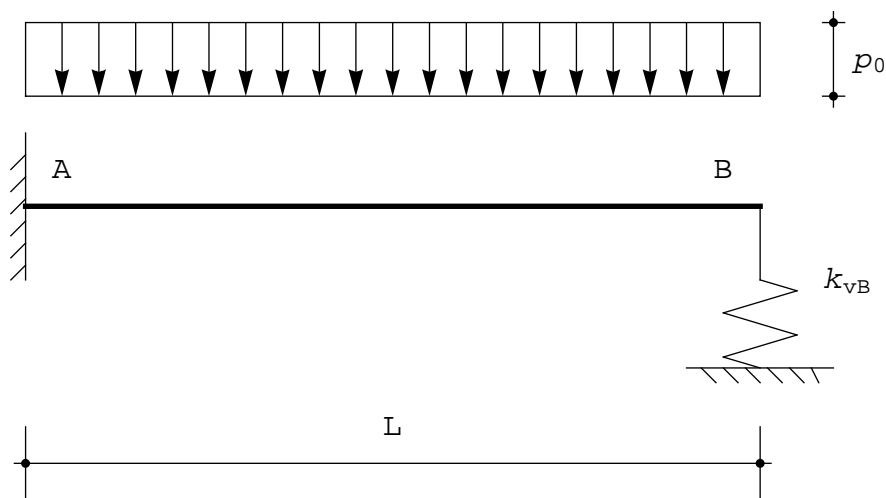


Figura 5 - Trave con incastro ed appoggio elasticamente cedevole

$$u_2 (x_3) = C_1 + C_2 x_3 + C_3 x_3^2 + C_4 x_3^3 + \frac{p_0 x_3^4}{24 EI_{11}} \quad (23)$$

mentre le quattro costanti di integrazione si calcolano in base all'imposizione delle seguenti condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2 (0) &= 0 \\ u_2' (0) &= 0 \\ u_2'' (L) &= 0 \\ -EI_{11} u_2''' (L) + k_{vB} u_2 (L) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Utilizzando la (23) e le sue successive derivate, si ottiene il seguente sistema di quattro equazioni algebriche nelle quattro costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ 6 C_4 + \frac{p_0 L}{EI_{11}} - \frac{k_{vB}}{EI_{11}} \left(C_1 + C_2 L + C_3 L^2 + C_4 L^3 + \frac{p_0 L^4}{24 EI_{11}} \right) &= 0 \\ 2 C_3 + 6 C_4 L + \frac{p_0 L^2}{2 EI_{11}} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Risolvendo, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 0 \\
 C_2 &= 0 \\
 C_3 &= -\frac{-12 EI_{11} L^2 - k_{vB} L^5}{16 EI_{11} (3 EI_{11} + k_{vB} L^3)} P_0 \\
 C_4 &= -\frac{24 EI_{11} L + 5 k_{vB} L^4}{48 EI_{11} (3 EI_{11} + k_{vB} L^3)} P_0
 \end{aligned}$$

Lo spostamento, quindi, si potrà scrivere:

$$v(x_3) = \frac{6 EI_{11} (6 L^2 - 4 L x_3 + x_3^2) + L^3 (3 L^2 - 5 L x_3 + 2 x_3^2) k_{vB}}{3 EI_{11} + k_{vB} L^3} \frac{P_0 x_3^2}{48 EI_{11}} \quad (27)$$

da cui, in cascata, rotazioni, momenti e tagli:

$$\phi(x_3) = -\frac{24 EI_{11} (3 L^2 - 3 L x_3 + x_3^2) + (6 L^2 - 15 L x_3 + 8 x_3^2) k_{vB} L^3}{3 EI_{11} + k_{vB} L^3} \frac{P_0 x_3}{48 EI_{11}} \quad (28)$$

$$M_1(x_3) = -\frac{12 EI_{11} (L - x_3) + (L - 4 x_3) k_{vB} L^3}{3 EI_{11} + k_{vB} L^3} \frac{P_0}{8} (L - x_3) \quad (29)$$

$$T_2(x_3) = \frac{24 EI_{11} (L - x_3) + (5 L - 8 x_3) k_{vB} L^3}{3 EI_{11} + k_{vB} L^3} \frac{P_0}{8} \quad (30)$$

Ponendo $k_{vB} = 0$, si ritrovano i risultati della trave a mensola, mentre il limite per k_{vB} che va all'infinito riproduce l'altro caso limite di trave con incastro ed appoggio.

Le reazioni vincolari possono calcolarsi a partire dallo schema in Figura 4:

$$R_A = -T_2(0) = -\frac{24 EI_{11} L + 5 k_{vB} L^4}{3 EI_{11} + k_{vB} L^3} \frac{P_0}{8} \quad (31)$$

$$\mathcal{M}_{rA} = -M_1(0) = \frac{12 EI_{11} L + k_{vB} L^4}{3 EI_{11} + k_{vB} L^3} P_0 \frac{L}{8} \quad (32)$$

$$R_B = -k_{vB} u_2(L) = T_2(L) = -\frac{3 k_{vB} L^4}{3 EI_{11} + k_{vB} L^3} \frac{P_0}{8} \quad (33)$$

ed e' possibile verificare a posteriori che sono rispettate le equazioni della statica:

$$\begin{aligned}
 R_A + R_B + P_0 L &= 0 \\
 \mathcal{M}_{rA} + R_A L + P_0 \frac{L^2}{2} &= 0
 \end{aligned} \quad (34)$$

■ Istruzioni *Mathematica*

I grafici