
Lezione 32 - Le travi ad una campata

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 14 giugno 2012]

Introduzione

In questa lezione si studiano le travi ad una sola campata con i più comuni tipi di vincolo. La classificazione completa è abbastanza agevole, e porta ad identificare 16 schemi, come riportato nella tabella seguente:

incastro – incastro	incastro – appoggio	incastro – bispendolo	incastro – libero
appoggio – incastro	appoggio – appoggio	appoggio – bispendolo	appoggio – libero
bispendolo – incastro	bispendolo – appoggio	bispendolo – bispendolo	bispendolo – libero
libero – incastro	libero – appoggio	libero – bispendolo	libero – libero

Tabella 1- La classificazione delle travi ad una campata di Eulero-Bernoulli

I 6 schemi del triangolo inferiore possono ricondursi ai corrispondenti casi del triangolo superiore, sicché si può limitare l'esame a 10 schemi strutturali. Una prima classificazione si può ottenere in base alla possibilità di calcolare le reazioni vincolari con le sole equazioni di equilibrio della statica del corpo rigido. È infatti immediato realizzare che per le travi in esame si hanno a disposizione due equazioni di equilibrio indipendenti, e precisamente un'equazione di equilibrio nei riguardi delle possibili traslazioni verticali, ed una equazione di equilibrio nei confronti delle rotazioni intorno ad un punto arbitrario (polo).

Nel caso di travi iperstatiche, non sarà possibile calcolare le reazioni vincolari in base a sole considerazioni di equilibrio, ma occorrerà affiancare ad esse ulteriori equazioni. Ad esempio, si potrà risolvere il problema ai limiti, calcolare i momenti ed i tagli, e da essi dedurre le reazioni.

Nel caso di travi isostatiche, si potranno usualmente ricavare le reazioni vincolari semplicemente risolvendo le equazioni di equilibrio. Nel caso di travi labili, invece, la trave non possiede abbastanza vincoli da eliminare i moti rigidi, e quindi subirà traslazioni e/o rotazioni. È evidente la limitata utilità di simili schemi strutturali, almeno in ingegneria strutturale.

Si controlli la classificazione seguente:

travi due volte iperstatiche: 1) incastro-incastro,

travi una volta iperstatica: 2) incastro-appoggio, 3) incastro-bispendolo

travi isostatiche: 4) incastro-libera, 5) appoggio-appoggio, 6) appoggio-bispendolo

travi una volta labile: 7) bispendolo-bispendolo, 8) appoggio-libera, 9) bispendolo-libera,

travi due volte labili: 10) libera-libera

Come già detto, la trave con doppio bispendolo è contemporaneamente labile ed iperstatica.

Nel seguito si esamineranno in un certo dettaglio i dieci schemi strutturali appena dedotti, supponendo inizialmente che siano assenti carichi concentrati.

La trave incastrata agli estremi

Il caso di carico più semplice è quello per cui $p(x_3) = p_0 = \text{costante}$. In questo caso l'equazione differenziale (23b) della Lezione 30 si scrive:

$$u_2''''(x_3) = \frac{p_0}{EI_{11}} \quad (1)$$

e l'integrale della (1) puo' ottenersi per integrazioni successive:

$$u_2(x_3) = C_1 + C_2 x_3 + C_3 x_3^2 + C_4 x_3^3 + \frac{p_0}{24 EI_{11}} x_3^4 \quad (2)$$

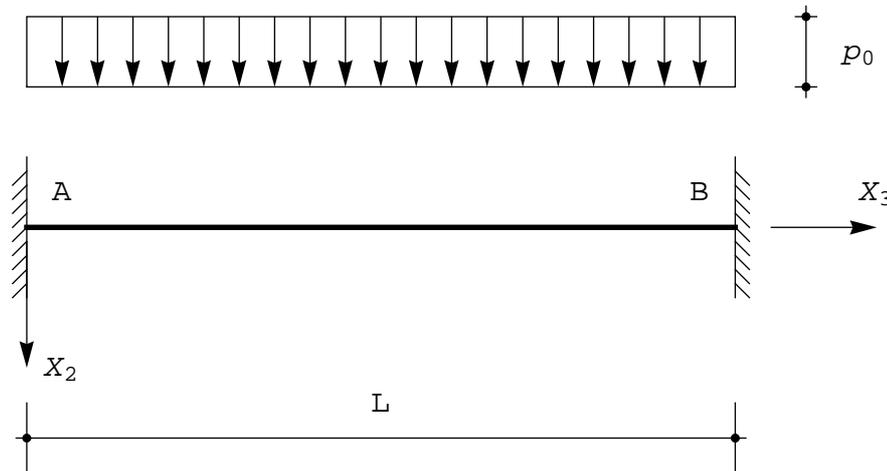


Figura 1 - La trave doppiamente incastrata soggetta ad un carico uniformemente distribuito

Per ottenere le quattro costanti di integrazione C_i , occorre specificare le condizioni di vincolo. Si osservi comunque, in via preliminare, che poiche' il carico e' distribuito con legge costante, il taglio sara' necessariamente una funzione lineare, il momento una funzione quadratica, la rotazione una funzione cubica, e lo spostamento - come confermato dalla (2) - sara' un polinomio del quarto ordine.

Per una trave i cui due estremi sono impediti sia di muoversi che di ruotare, occorrera' che sia:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \rightarrow C_1 = 0 \\ u_2'(0) &= 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ u_2(L) &= 0 \rightarrow C_1 + C_2 L + C_3 L^2 + C_4 L^3 + p_0 \frac{L^4}{24 EI_{11}} = 0 \\ u_2'(L) &= 0 \rightarrow C_2 + 2 C_3 L + 3 C_4 L^2 + p_0 \frac{L^3}{6 EI_{11}} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Le ultime due delle (3) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$C_3 = \frac{p_0 L^2}{24 EI_{11}}; \quad C_4 = -\frac{p_0 L}{12 EI_{11}} \quad (4)$$

sicche' gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0 x_3^2 (L - x_3)^2}{24 EI_{11}} \quad (5)$$

Conosciuti gli spostamenti, si possono facilmente ricavare rotazioni, momenti e tagli:

$$\phi(x_3) = -\frac{p_0 x_3}{12 EI_{11}} (L^2 - 3 Lx_3 + 2 x_3^2)$$

$$M_1(x_3) = -\frac{p_0}{12} (L^2 - 6Lx_3 + 6x_3^2)$$

$$T_2(x_3) = \frac{p_0}{2} (L - 2x_3)$$

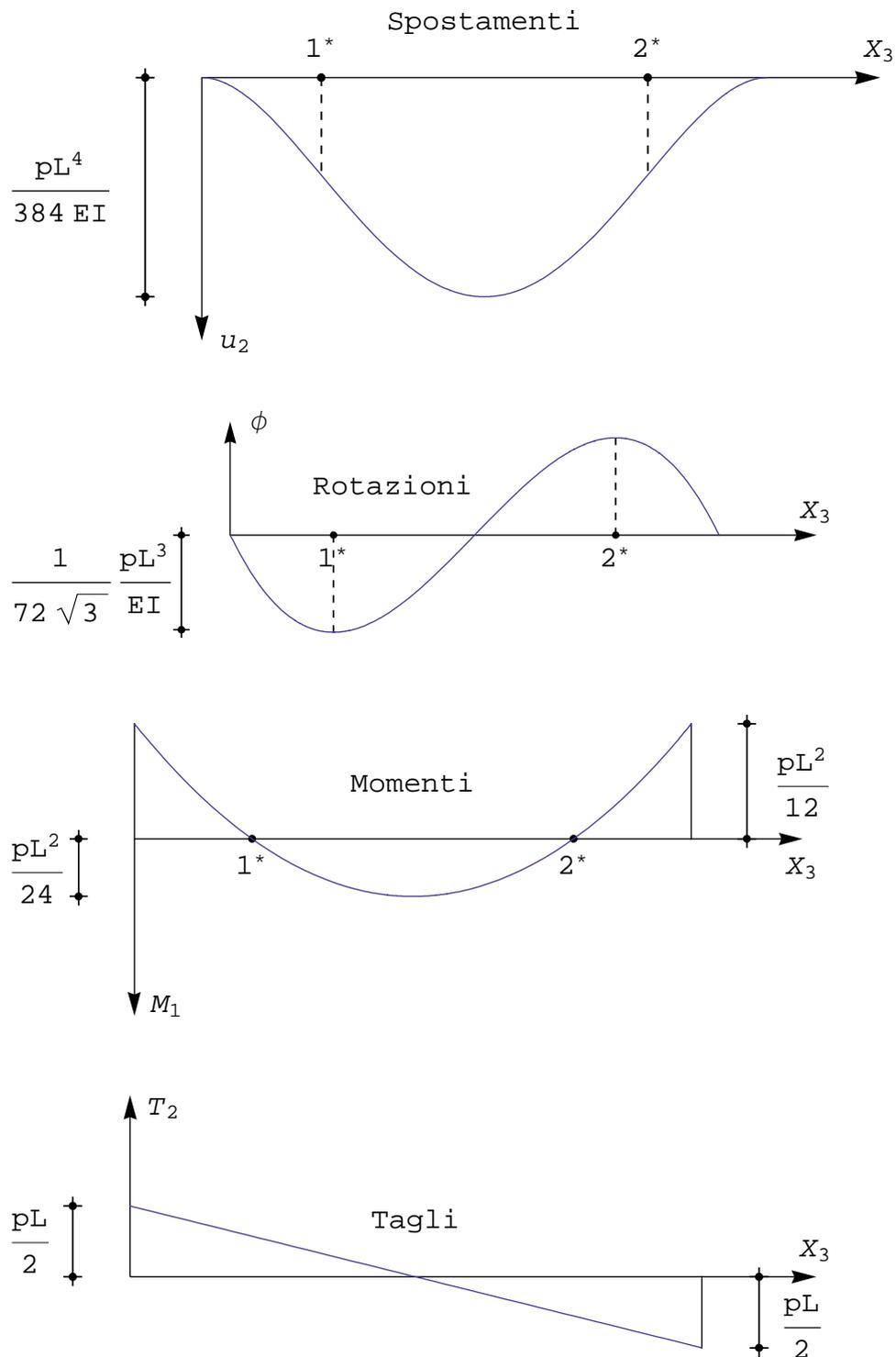


Figura 2 - Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave doppiamente incastrata

Si noti che il taglio varia con legge lineare, e, per la simmetria geometrica e di carico dello schema, si annulla in mezzeria ed assume valori uguali ed opposti agli estremi, mentre il momento varia con legge

parabolica, assumendo valori uguali agli estremi ed attingendo il suo massimo in mezzeria. Sarà:

$$\begin{aligned} T_2(0) &= P_0 \frac{L}{2}; \quad T_2(L) = -P_0 \frac{L}{2} \\ M_1(0) &= M_1(L) = -P_0 \frac{L^2}{12} \end{aligned} \quad (7)$$

mentre in mezzeria si ha:

$$M_1\left(\frac{L}{2}\right) = P_0 \frac{L^2}{24} \quad (8)$$

I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 2. Dal loro esame possono trarsi alcune conclusioni di carattere generale, che spesso possono aiutare sia nel tracciamento approssimato dei grafici, sia nel controllo di eventuali errori. Si noti allora:

1. la relazione che lega momenti e tagli garantisce che il diagramma del taglio rappresenta la derivata del momento flettente. Ne segue che il taglio fornisce informazioni sulla pendenza del diagramma del momento, sicché - ad esempio - dove il taglio si annulla il momento avrà pendenza orizzontale, attingendo un minimo, un massimo o un punto di flesso. Nella fattispecie, il taglio si annulla in mezzeria, dove il momento è massimo.

2. la relazione che lega rotazioni e spostamenti garantisce che il diagramma delle rotazioni rappresenta, a meno del segno, la derivata dell'abbassamento.

Ne segue che le rotazioni forniscono informazioni sulla pendenza del diagramma dell'abbassamento, a somiglianza di quanto detto prima per la coppia taglio- momento flettente. Nella fattispecie, le rotazioni sono nulle in mezzeria, dove si verifica l'abbassamento massimo.

3. la relazione che lega momenti flettenti e rotazioni garantisce che il diagramma del momento è proporzionale alla derivata delle rotazioni.

Ne segue che esso fornisce informazioni sulla pendenza del diagramma delle rotazioni. Se ad esempio si vuol conoscere le ascisse di rotazione massima e minima, occorre calcolare le ascisse dove il momento flettente viene ad annullarsi. Dalla (8) si ha:

$$L^2 - 6Lx_3 + 6x_3^2 = 0 \quad (9)$$

e quindi i momenti si annullano in 1^* e 2^* , di ascissa

$$\begin{aligned} x_3^{*1} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) L \approx 0.211325 L \\ x_3^{*2} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) L \approx 0.788675 L \end{aligned} \quad (10)$$

In corrispondenza di tali ascisse le rotazioni raggiungono i loro valori minimi e massimi, pari a:

$$\begin{aligned} \phi(x_3^{*1}) &= \phi_{\min} = -\frac{1}{72\sqrt{3}} P_0 \frac{L^3}{EI} \\ \phi(x_3^{*2}) &= \phi_{\max} = \frac{1}{72\sqrt{3}} P_0 \frac{L^3}{EI} \end{aligned} \quad (11)$$

4. la relazione che lega il momento all'abbassamento fornisce utili indicazioni sulla *curvatura* del diagramma degli abbassamenti.

Ed infatti puo' notarsi che la curvatura cambia di segno in 1* e 2*. Lo spostamento massimo e' attinto in mezzeria, dove sono nulle le rotazioni, e vale:

$$u_{2 \max} = u_2 \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{1}{384} p_0 \frac{L^4}{EI} \tag{12}$$

5. Infine, e' necessario che i diagrammi soddisfino le condizioni ai limiti. Nel caso in esame, ad esempio, nel diagramma delle rotazioni puo' controllarsi che esse si annullino agli estremi, mentre il diagramma degli spostamenti dovra' annullarsi agli estremi, e dovra' partire in questi punti con tangente orizzontale.

Come si e' detto, la trave incastrata agli estremi e' doppiamente iperstatica, e vano sarebbe il tentativo di calcolare le quattro reazioni vincolari attraverso le due equazioni di equilibrio della statica (cfr.Figura 3)):

$$\begin{aligned} R_A + R_B + p_0 L &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + \mathcal{M}_{rB} + R_A L + p_0 \frac{L^2}{2} &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Le reazioni quindi dovranno ricavarsi dalla conoscenza delle c.s.i. agli estremi, come illustrato in Figura 3:

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2(0) = -p_0 \frac{L}{2} \\ \mathcal{M}_{rA} &= -M_1(0) = p_0 \frac{L^2}{12} \\ R_B &= T_2(L) = -p_0 \frac{L}{2} \\ \mathcal{M}_{rB} &= M_1(L) = -p_0 \frac{L^2}{12} \end{aligned} \tag{14}$$

Ne segue che le due reazioni verticali sono dirette verso l'alto, che la coppia reattiva a sinistra e' antioraria, mentre la coppia reattiva a destra e' oraria.

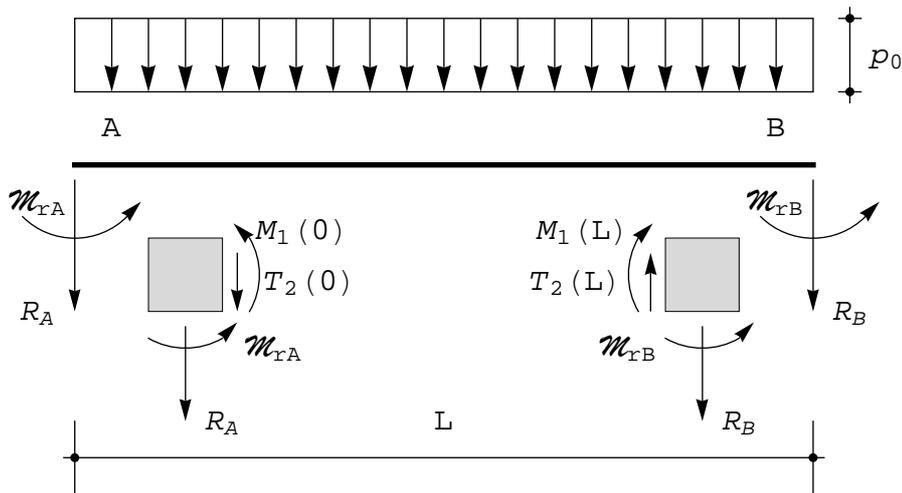


Figura 3 - Le reazioni per la trave incastrata agli estremi

■ Una digressione storica : l'errore di Weisbach

Come riportato da Karl-Eugen Kurrer ("The History of the Theory of Structures", Wiley 2009, pag.173), il primo ad utilizzare i diagrammi del momento per illustrarne la distribuzione lungo l'asse e' stato Julius Weisbach nel suo trattato enciclopedico "Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik" (1845). Ad esempio, per la trave doppiamente incastrata, soggetta ad un carico uniformemente distribuito, viene riportata la Figura seguente:

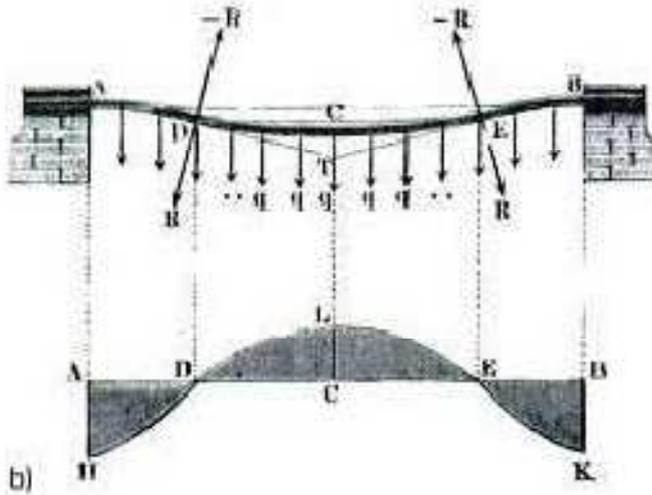


Figura 4 - Il diagramma del momento flettente per trave doppiamente incastrata, secondo Weisbach

Nella parte superiore della Figura, e' schematizzata la deformata della trave, e sono ben evidenziati i due punti di flesso in D ed E. Nel diagramma inferiore e' riportato il diagramma del momento flettente (con l'asse verticale diretto verso l'alto), con i due punti di nullo in D ed E; la correlazione tra il diagramma del momento flettente, e la curvatura del diagramma dello spostamento e' quindi correttamente osservata.

Tuttavia, il diagramma del momento non e' corretto, in quanto nei punti D ed E il momento non cambia curvatura, come invece implicito nel disegno di Weisbach. In realta', la relazione tra momento e carico distribuito:

$$\frac{d^2 M_1}{dx_3^2} = -p \quad (15)$$

implica, in questo caso, una curvatura costante del diagramma del momento.

La trave appoggiata agli estremi

Per una trave i cui due estremi sono impediti di muoversi, ma possono ruotare, occorrera' che sia:

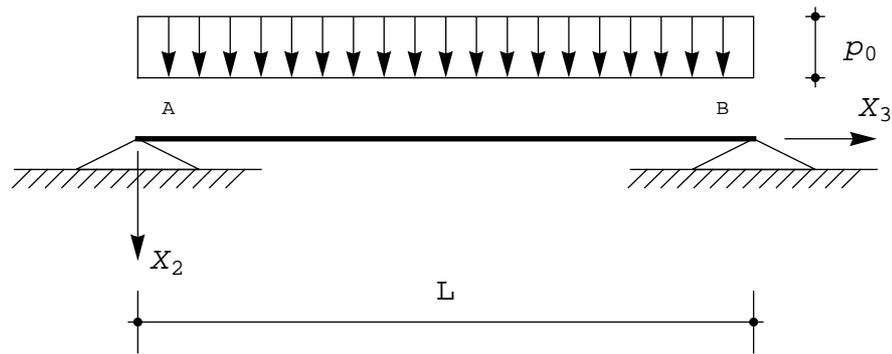


Figura 5 - La trave semplicemente appoggiata

$$u_2(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$M_1(0) = 0 \rightarrow u_2''(0) = 0 \rightarrow 2 C_3 = 0$$

$$u_2(L) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 L + C_3 L^2 + C_4 L^3 + p_0 \frac{L^4}{24 EI_{11}} = 0 \tag{16}$$

$$M_1(L) = 0 \rightarrow u_2''(L) = 0 \rightarrow 2 C_3 + 6 C_4 L + p_0 \frac{L^2}{2 EI_{11}} = 0$$

Le ultime due delle (16) possono facilmente risolversi, a fornire:

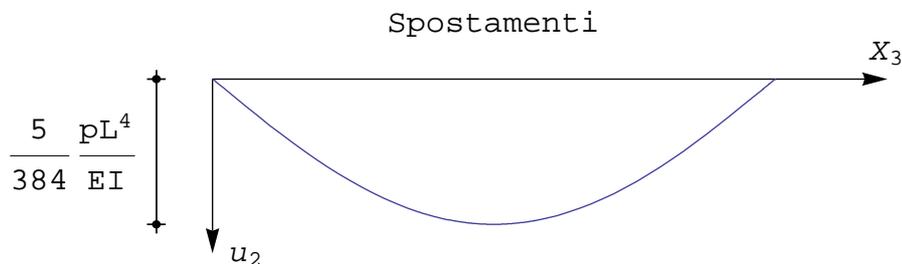
$$C_2 = \frac{p_0 L^3}{24 EI_{11}}; C_4 = -\frac{p_0 L}{12 EI_{11}} \tag{17}$$

sicche' gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0 x_3}{24 EI_{11}} (L^3 - 2 L x_3^2 + x_3^3) \tag{18}$$

Conosciuti gli spostamenti, si possono facilmente ricavare rotazioni, momenti e tagli:

$$\begin{aligned} \phi(x_3) &= -\frac{p_0}{24 EI_{11}} (L^3 - 6 L x_3^2 + 4 x_3^3) \\ M_1(x_3) &= \frac{p_0}{2} (L - x_3) x_3 \\ T_2(x_3) &= \frac{p_0}{2} (L - 2 x_3) \end{aligned} \tag{19}$$



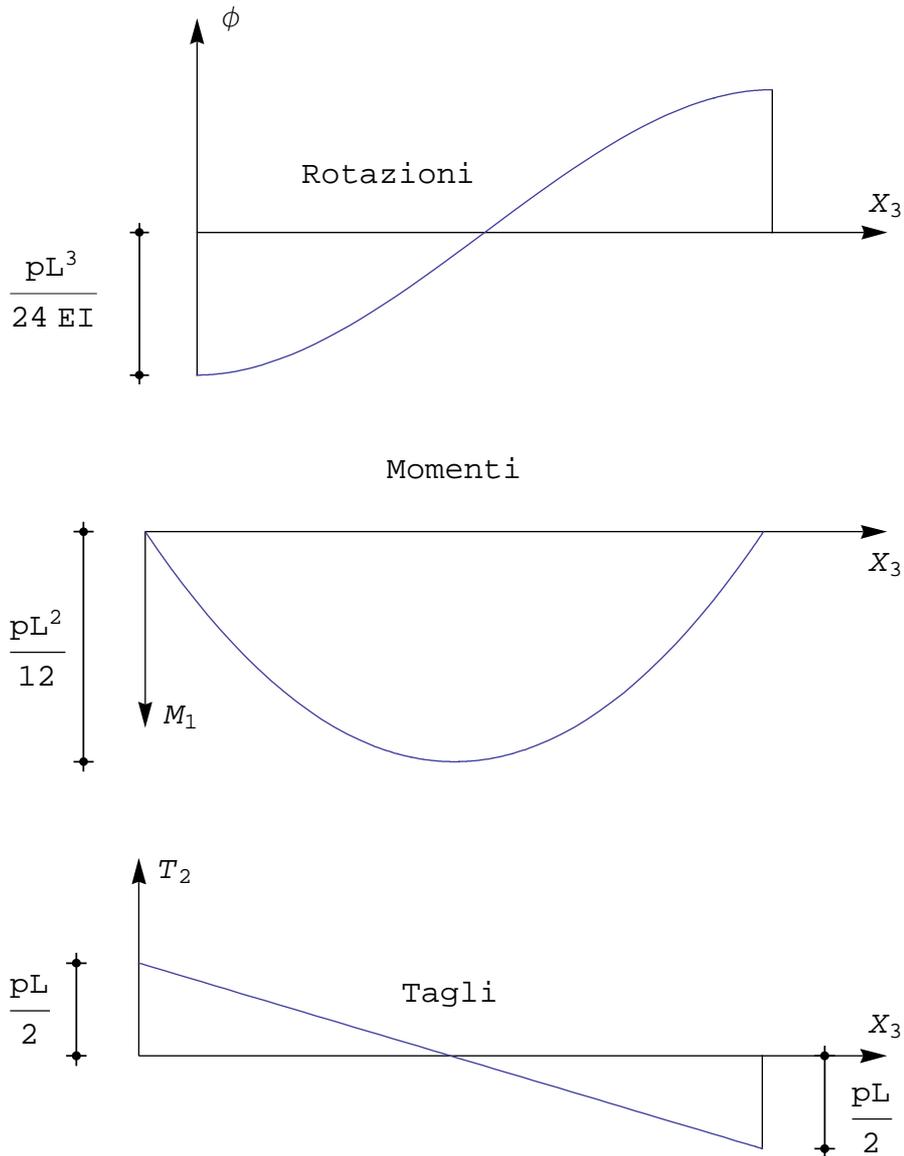


Figura 6 - Spostamenti, rotazioni, momenti e tagli per una trave doppiamente appoggiata

Si noti che il taglio varia con la stessa legge lineare della trave doppiamente incastrata, mentre il momento varia con legge parabolica, assumendo valori nulli agli estremi. Cio' basta per garantire che il diagramma delle rotazioni partira', nei due estremi, con tangente orizzontale, come riportato in Figura 6, dove sono anche definiti alcuni valori significativi:

$$\phi_{\min} = \phi(0) = -\frac{1}{24} p_0 \frac{L^3}{EI}$$

$$\phi_{\max} = \phi(L) = \frac{1}{24} p_0 \frac{L^3}{EI}$$
(20)

mentre in mezzeria si hanno i valori massimi di momenti e spostamenti:

$$M_{1 \max} = M \left(\frac{L}{2} \right) = P_0 \frac{L^2}{8}$$

$$u_{2 \max} = u_2 \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{5}{384} P_0 \frac{L^4}{EI}$$
(21)

Nota - Rispetto alla trave doppiamente incastrata, il momento in mezzeria e' triplicato, e l'abbassamento massimo e' quintuplicato.

Le due reazioni verticali degli appoggi possono calcolarsi - stante l'isostaticita' della struttura - attraverso la scrittura delle due equazioni di equilibrio della statica:

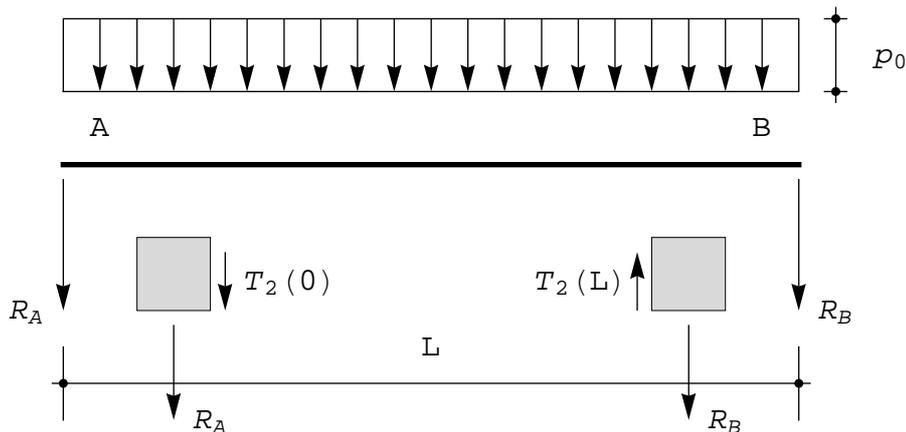


Figura 7 - Le reazioni per la trave appoggiata agli estremi

$$R_A + R_B + P_0 L = 0$$

$$R_A L + P_0 \frac{L^2}{2} = 0$$
(22)

da cui:

$$R_A = R_B = - P_0 \frac{L}{2}$$
(23)

Alternativamente, si puo' leggere dallo schema di Figura 7:

$$R_A = - T_2 (0) = - P_0 \frac{L}{2}$$

$$R_B = T_2 (L) = - P_0 \frac{L}{2}$$
(24)

E' interessante osservare che nel caso di strutture isostatiche e' spesso possibile ottenere i diagrammi delle c.s.i. senza dover risolvere il problema ai limiti. Ed infatti, in questo caso si conoscono le reazioni, attraverso le (23), da cui possono ricavarsi i tagli agli estremi, e poiche' l'andamento del diagramma e' lineare, non resta che congiungere i due valori di $T_2(0)$ e di $T_2(L)$. Inoltre, il diagramma del momento ha andamento parabolico, e quindi per il suo tracciamento basta conoscere il valore in due punti (agli estremi, dove esso e' nullo) e la pendenza in mezzeria (nulla, perche' nullo e' il taglio in mezzeria).

La trave a mensola

Si consideri ora una trave il cui estremo sinistro sia incastrato, mentre il destro sia libero, soggetta al solito carico uniformemente distribuito su tutta la luce. A sinistra occorre quindi imporre le due condizioni di congruenza, annullando spostamenti e rotazioni, mentre nell'estremo libero dovranno essere soddisfatte le condizioni di equilibrio che annullano le caratteristiche delle sollecitazioni interne. Sarà allora:

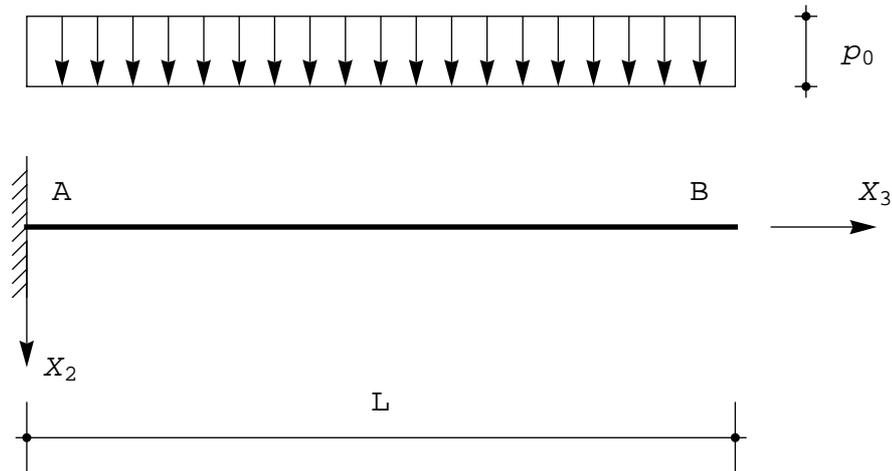


Figura 8 - La trave a mensola

$$u_2(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$u_2'(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$M_1(L) = 0 \rightarrow u_2''(L) = 0 \rightarrow 2C_3 + 6C_4L + p_0 \frac{L^2}{2EI_{11}} = 0 \quad (25)$$

$$T_2(L) = 0 \rightarrow u_2'''(L) = 0 \rightarrow 6C_4 + p_0 \frac{L}{EI_{11}} = 0$$

Le ultime due delle (25) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$C_3 = p_0 \frac{L^2}{4EI_{11}}; \quad C_4 = -p_0 \frac{L}{6EI_{11}} \quad (26)$$

sicche' gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0 x_3^2}{24EI_{11}} (6L^2 - 4Lx_3 + x_3^3) \quad (27)$$

da cui, per derivazioni successive:

$$\phi(x_3) = -\frac{p_0 x_3}{6EI_{11}} (3L^2 - 3Lx_3 + x_3^2) \quad (28)$$

$$M_1(x_3) = -\frac{p_0}{2} (L - x_3)^2$$

$$T_2(x_3) = p_0 (L - x_3)$$

I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 9

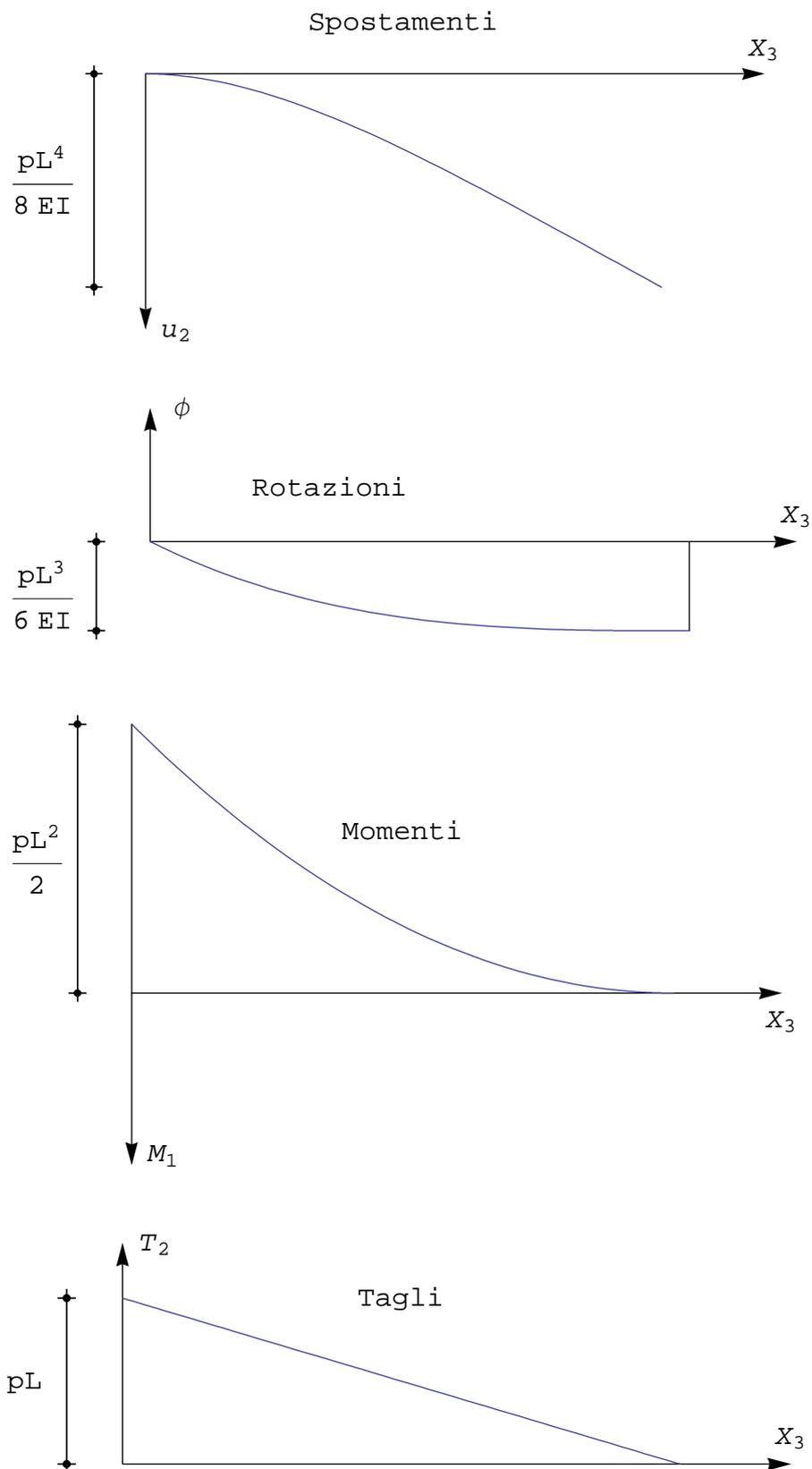


Figura 9 - La trave a mensola soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

Partendo dal diagramma del taglio, esso e' lineare, si annulla in corrispondenza dell'estremo libero (quarta condizione ai limiti), ed ha pendenza pari a $-p_0$. Ne segue univocamente il diagramma di Figura.

Il diagramma del momento flettente e' parabolico, si annulla nell'estremo libero (terza condizione ai limiti), e in questo stesso estremo presenta una tangente orizzontale. Le rotazioni, invece, sono nulle nell'incastro (seconda condizione ai limiti), ed assumono il loro valore massimo nell'estremo libero, dove il diagramma presenta una tangente orizzontale, dovuta all'annullarsi del momento in tale punto. Infine, gli spostamenti sono nulli nell'incastro, ed il relativo diagramma parte con tangente orizzontale, fino ad arrivare ad un valore massimo all'estremo libero.

I valori significativi per le caratteristiche della sollecitazione interna si raggiungono in corrispondenza dell'incastro:

$$\begin{aligned} M_{1 \min} = M_1(0) &= -\frac{P_0}{2} L^2 \\ T_{2 \max} = T_2(0) &= P_0 L \end{aligned} \quad (29)$$

mentre rotazioni e spostamenti massimi si attingono nell'estremo libero:

$$\begin{aligned} \phi_{\min} = \phi(L) &= -\frac{P_0 L^3}{6 EI_{11}} \\ u_{2 \max} = u_2(L) &= \frac{P_0 L^4}{8 EI_{11}} \end{aligned} \quad (30)$$

Anche la trave a mensola e' isostatica, sicche' la reazione e la coppia reattiva dell'incastro possono calcolarsi dalle due equazioni di equilibrio della statica:

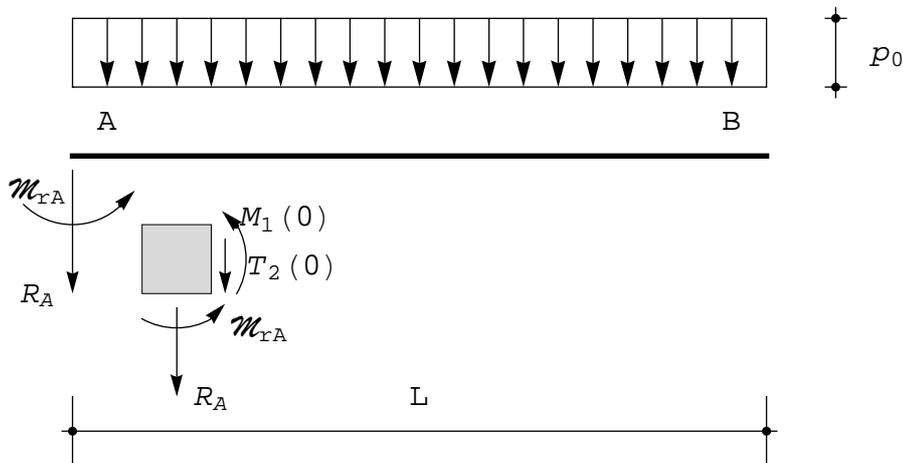


Figura 10 - Le reazioni per la trave a mensola

$$\begin{aligned} R_A + P_0 L &= 0 \rightarrow R_A = -P_0 L \\ M_{rA} + R_A L + P_0 \frac{L^2}{2} &= 0 \rightarrow M_{rA} = P_0 \frac{L^2}{2} \end{aligned} \quad (31)$$

Alternativamente, esse possono calcolarsi dall'equilibrio del concio elementare, e come sempre sono uguali e contrarie alle corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna.

La trave incastrata-appoggiata

Si consideri ora una trave il cui estremo sinistro sia incastrato, mentre il destro sia appoggiato, soggetta al solito carico uniformemente distribuito su tutta la luce. A sinistra occorre quindi imporre le due condizioni di congruenza, annullando spostamenti e rotazioni, mentre nell'appoggio di destra alla condizione di congruenza, che annulla lo spostamento, occorre affiancare la condizione di equilibrio, secondo cui dovrà essere nullo il momento flettente. Sarà allora:

$$u_2(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$u_2'(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$u_2(L) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 L + C_3 L^2 + C_4 L^3 + p_0 \frac{L^4}{24 EI_{11}} = 0 \quad (32)$$

$$M_1(L) = 0 \rightarrow u_2''(L) = 0 \rightarrow 2 C_3 + 6 C_4 L + p_0 \frac{L^2}{2 EI_{11}} = 0$$

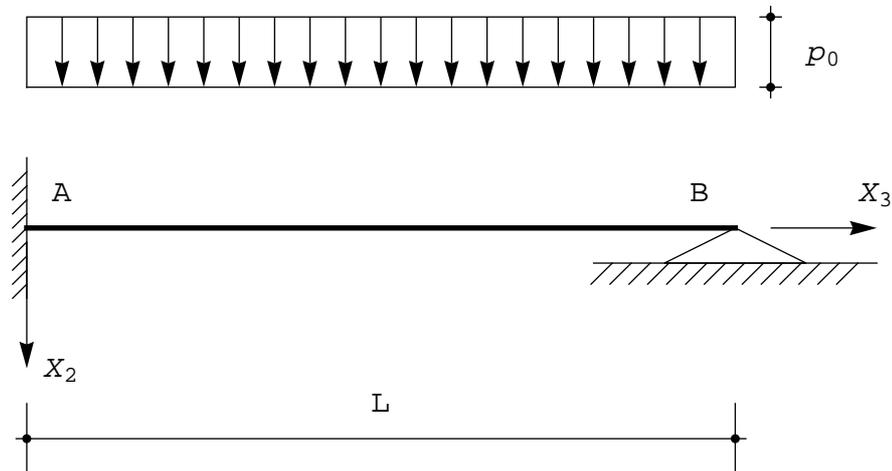


Figura 11 - La trave incastrata-appoggiata

Le ultime due delle (32) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$C_3 = p_0 \frac{L^2}{16 EI_{11}}; \quad C_4 = -\frac{5}{48} p_0 \frac{L}{EI_{11}} \quad (33)$$

sicché gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0}{48 EI_{11}} x_3^2 (3 L^2 - 5 L x_3 + 2 x_3^2) \quad (34)$$

da cui, per derivazioni successive:

$$\phi(x_3) = -\frac{p_0}{48 EI_{11}} x_3 (6 L^2 - 15 L x_3 + 8 x_3^2)$$

$$M_1(x_3) = -\frac{p_0}{8} (L^2 - 5 L x_3 + 4 x_3^2) \quad (35)$$

$$T_2(x_3) = p_0 \left(\frac{5}{8} L - x_3 \right)$$

I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 12. Il diagramma del taglio e' - come sempre finora - lineare, si annulla in corrispondenza dei 5/8 della luce, ed attinge i due valori estremi sull'appoggio e nell'incastro:

$$T_{2\max} = T_2(0) = \frac{5}{8} p_0 L; \quad T_{2\min} = T_2(L) = -\frac{3}{8} p_0 L \quad (36)$$

Il momento flettente variera' con legge parabolica, annullandosi sull'appoggio e ad 1/4 della luce. Inoltre esso raggiungera' il suo valore massimo laddove il taglio si annulla, ossia a 5/8 della luce, ed il suo valore minimo nell'incastro:

$$M_{1\min} = M(0) = -\frac{p_0 L^2}{8}; \quad M_{1\max} = M\left(\frac{5}{8}L\right) = \frac{9}{128} p_0 L^2 \quad (37)$$

Le rotazioni si annulleranno di sicuro in corrispondenza dell'incastro, e sicuramente presenteranno una tangente orizzontale sull'appoggio, dove il momento e' nullo. Inoltre raggiungeranno un altro valore estremo (di minimo) ad 1/4 della luce, in corrispondenza dell'altro punto di nullo del momento. Infine, la curvatura del diagramma, proporzionale alla derivata seconda della funzione - ossia proporzionale al taglio - si annullera' ai 5/8 della luce. I valori massimi e minimi sono forniti da:

$$\phi_{\min} = \phi\left(\frac{L}{4}\right) = -\frac{11}{768} p_0 \frac{L^3}{EI_{11}}; \quad \phi_{\max} = \phi(L) = p_0 \frac{L^3}{48 EI_{11}} \quad (38)$$

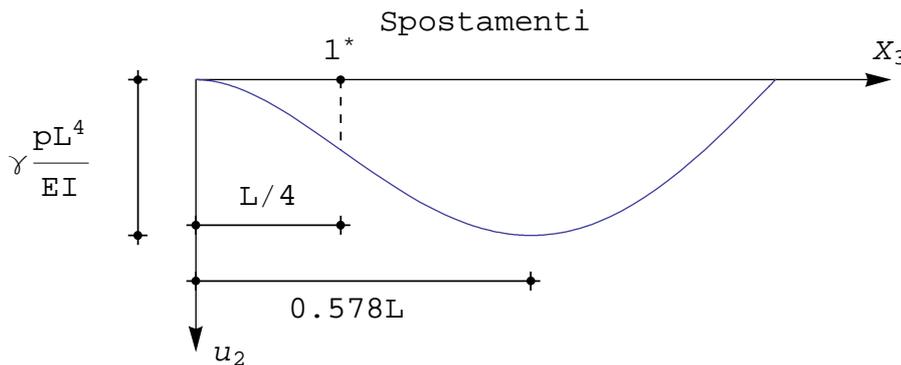
L'ascissa della trave in cui le rotazioni si annullano puo' trovarsi risolvendo l'equazione:

$$x_3 (6L^2 - 15Lx_3 + 8x_3^2) = 0 \quad (39)$$

ed ottenendo quindi la soluzione $x_3=0$, corrispondente all'incastro, e le due soluzioni:

$$x_3^{1,2} = \frac{L}{16} (15 \pm \sqrt{33}) \quad (40)$$

La soluzione col segno positivo ricade al di fuori dell'intervallo $[0,L]$, e quindi non ha significato fisico, mentre la soluzione col segno negativo identifica una ascissa αL , con $\alpha \approx 0.578$.



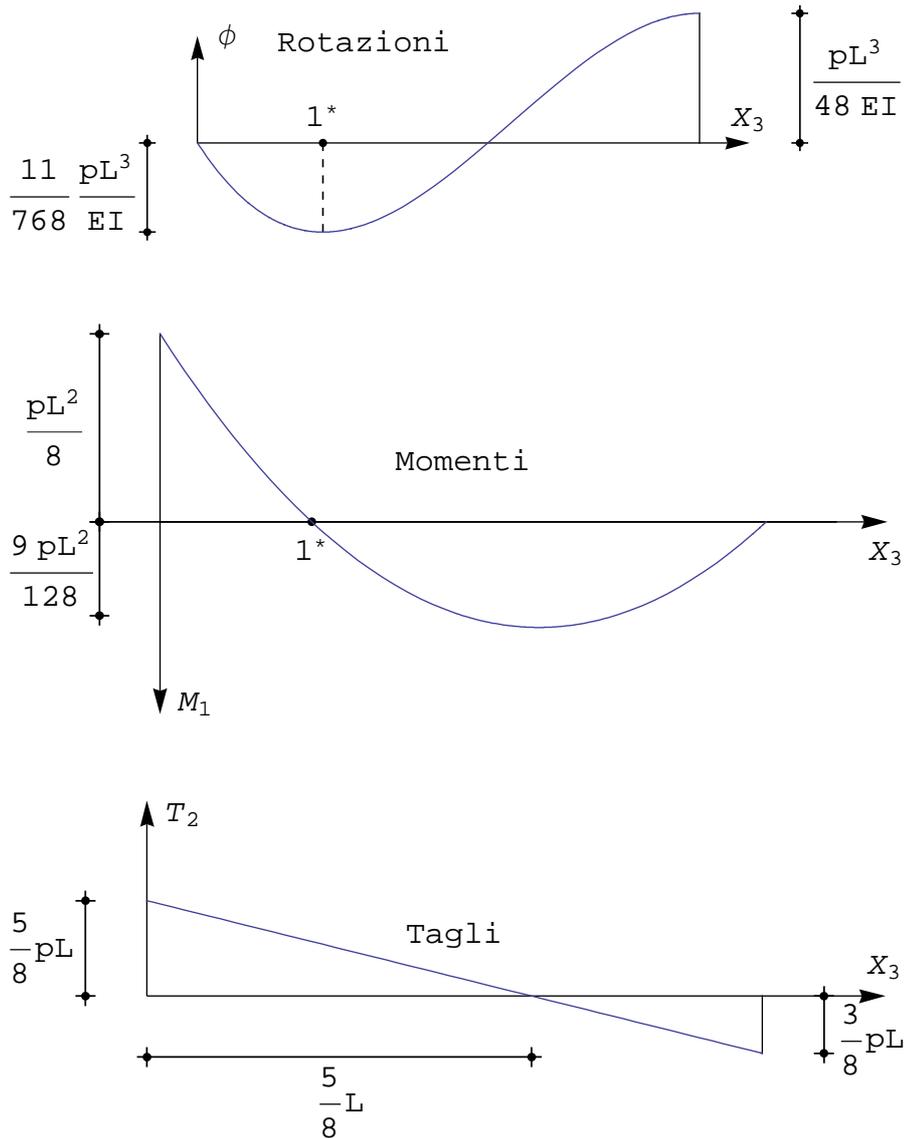


Figura 12 - La trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

Per tracciare il diagramma degli abbassamenti si hanno i seguenti dati: esso deve annullarsi agli estremi, e nell'incastro deve avere tangente orizzontale. Inoltre, deve avere tangente orizzontale in corrispondenza dell'ascissa αL , e la sua curvatura deve cambiare di segno ad $1/4$ della luce, dove si annulla il momento flettente. L'abbassamento massimo si verifica in αL , e vale:

$$u_{2 \max} = u_2 (\alpha L) = \gamma p_0 \frac{L^4}{EI_{11}} \quad (41)$$

ed il coefficiente γ e' valutabile come:

$$\gamma = \frac{39 + 55 \sqrt{33}}{65 \cdot 536} \approx 0.00541612 \quad (42)$$

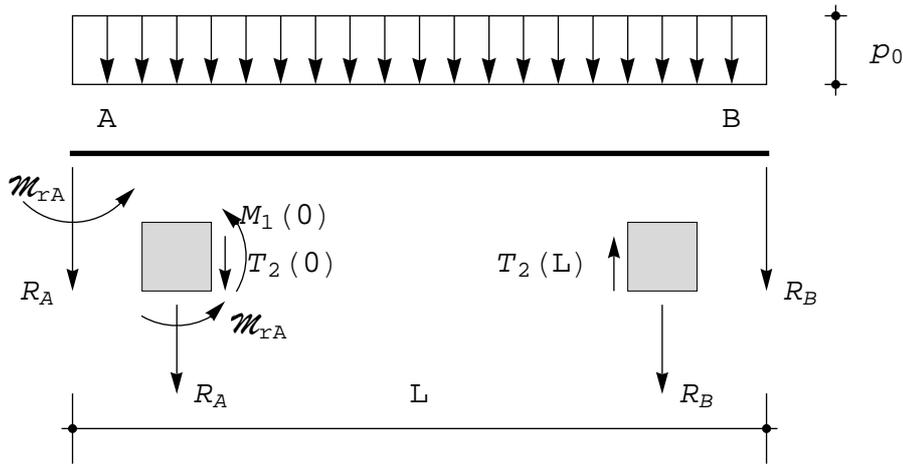


Figura 13 - Le reazioni per la trave incastrata ed appoggiata

Le tre reazioni non possono calcolarsi in base alle sole equazioni della statica, poiché la trave è una volta iperstatica. Ne segue che esse dovranno dedursi *a posteriori*, in base ai valori delle caratteristiche della sollecitazione interna agli estremi:

$$\begin{aligned}
 R_A &= -T_2(0) = -\frac{5}{8} p_0 L \\
 M_{rA} &= -M_1(0) = p_0 \frac{L^2}{8} \\
 R_B &= T_2(L) = -\frac{3}{8} p_0 L
 \end{aligned} \tag{43}$$

La trave con incastro e bipendolo

Si consideri ora una trave il cui estremo sinistro sia incastrato, mentre il destro sia libero di abbassarsi ma non di ruotare (bipendolo), soggetta al solito carico uniformemente distribuito su tutta la luce. A sinistra occorre quindi imporre le due condizioni di congruenza, annullando spostamenti e rotazioni, mentre nel bipendolo di destra alla condizione di congruenza, che annulla la rotazione, occorre affiancare la condizione di equilibrio, secondo cui dovrà essere nullo lo sforzo di taglio. Sarà allora:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \rightarrow C_1 = 0 \\
 u_2'(0) &= 0 \rightarrow C_2 = 0 \\
 \phi(L) &= 0 \rightarrow u_2'(L) = 0 \rightarrow C_2 + 2C_3L + 3C_4L^2 + p_0 \frac{L^3}{6EI_{11}} = 0 \\
 T_2(L) &= 0 \rightarrow u_2''''(L) = 0 \rightarrow 6C_4 + p_0 \frac{L}{EI_{11}} = 0
 \end{aligned} \tag{44}$$

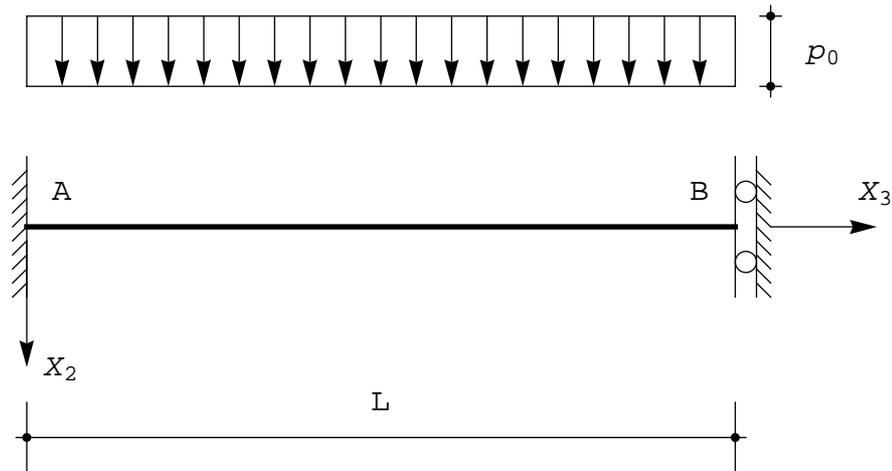


Figura 14 - La trave con incastro e bipendolo

Le ultime due delle (44) possono facilmente risolversi, a fornire:

$$C_4 = -p_0 \frac{L}{6 EI_{11}} ; C_3 = p_0 \frac{L^2}{6 EI_{11}} \quad (45)$$

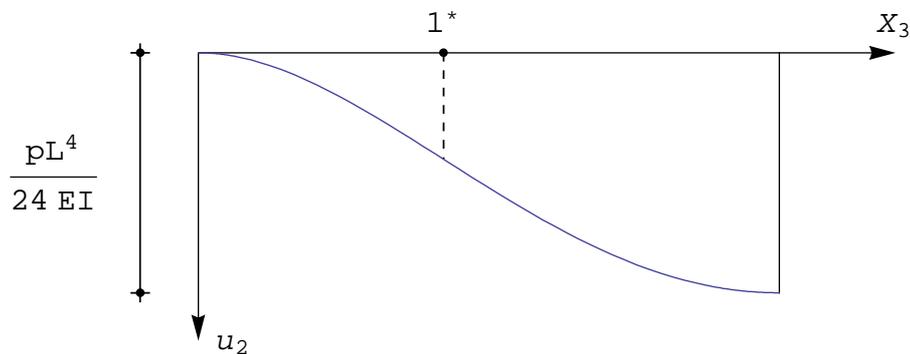
sicche' gli spostamenti sono forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0}{24 EI_{11}} x_3^2 (x_3 - 2L)^2 \quad (46)$$

da cui, per derivazioni successive:

$$\begin{aligned} \phi(x_3) &= -\frac{p_0}{6 EI_{11}} x_3 (2L^2 - 3Lx_3 + x_3^2) \\ M_1(x_3) &= -\frac{p_0}{6} (2L^2 - 6Lx_3 + 3x_3^2) \\ T_2(x_3) &= p_0 (L - x_3) \end{aligned} \quad (47)$$

Spostamenti



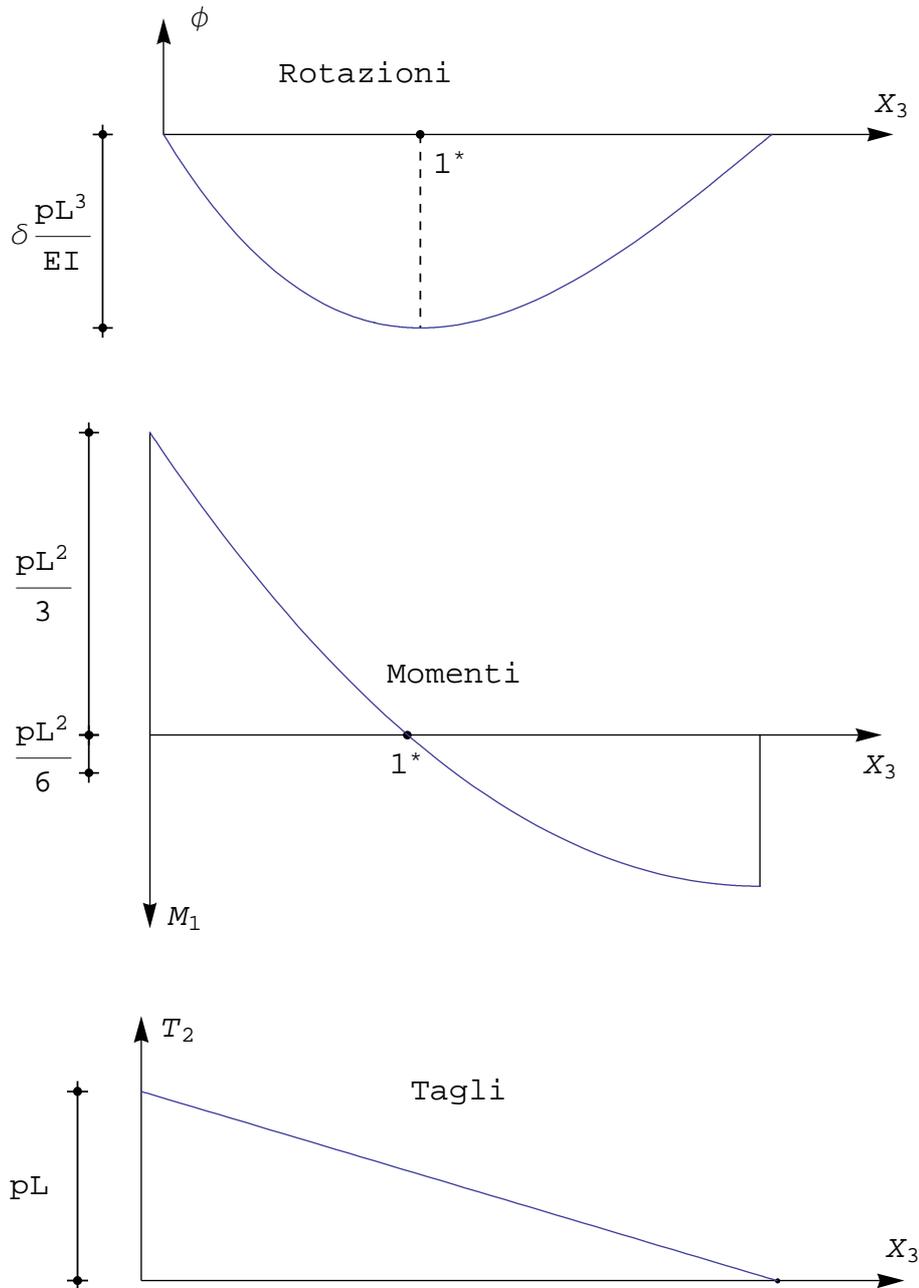


Figura 15 - La trave con incastro a sinistra e con bipendolo a destra, soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 15. Il diagramma del taglio è - come sempre finora - lineare, si annulla in corrispondenza del bipendolo, ed avendo pendenza pari a $-p_0$ attinge il valore $-p_0 L$ nell'incastro.

Il momento flettente varierà con legge parabolica, giungendo sul bipendolo con tangente orizzontale. I valori estremi si verificano in corrispondenza dei vincoli, e valgono:

$$M_{1 \min} = M_1(0) = -\frac{p_0 L^2}{3} ; M_{1 \max} = M_1(L) = \frac{p_0 L^2}{6} \quad (48)$$

Infine, esso si annulla nel punto 1^* di ascissa $L - \frac{L}{\sqrt{3}} \approx 0.422 L$. Le rotazioni si annulleranno di sicuro in

corrispondenza dell'incastro e del bipendolo, e sicuramente presenteranno una tangente orizzontale in 1^* , dove i momenti sono nulli. In tale punto si avra' il valore massimo, pari a:

$$\phi_{\min} = \phi (1^*) = - \frac{1}{9 \sqrt{3}} P_0 \frac{L^3}{EI_{11}} = \delta P_0 \frac{L^3}{EI_{11}} \quad (49)$$

Il diagramma delle rotazioni non presenta punti di nullo interni all'intervallo $[0,L]$, e di conseguenza il diagramma degli abbassamenti non avra' punti di estremo. Comunque, l'abbassamento sara' nullo nell'incastro, ed il diagramma avra' tangente orizzontale nel bipendolo. Infine, la curvatura sara' nulla in 1^* . L'abbassamento massimo si avra' nel bipendolo, e vale:

$$u_{2 \max} = u_2 (L) = P_0 \frac{L^4}{24 EI_{11}} \quad (50)$$

Anche in questo le tre reazioni non possono calcolarsi in base alle sole equazioni della statica, poiche' la trave e' una volta iperstatica. Ne segue che esse dovranno dedursi *a posteriori*, in base ai valori delle caratteristiche della sollecitazione interna agli estremi:

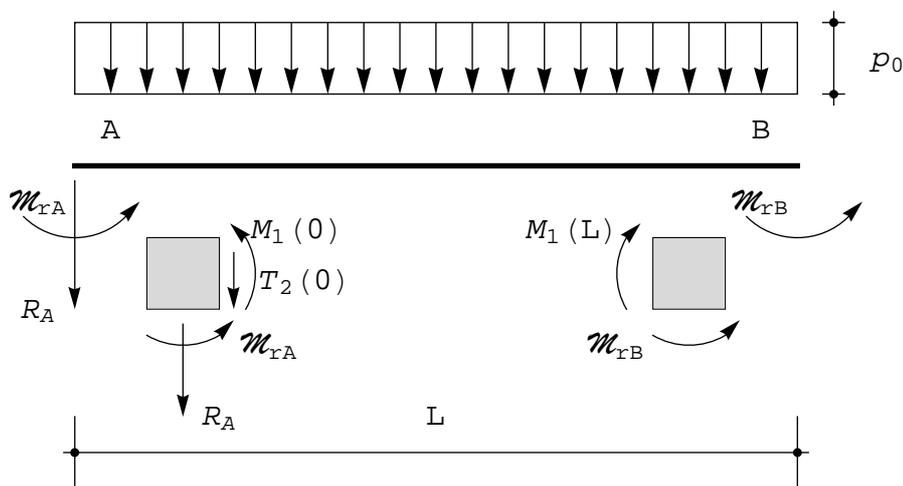


Figura 16 - Le reazioni per la trave con incastro e bipendolo

$$\begin{aligned} R_A &= -T_2 (0) = -P_0 L \\ \mathcal{M}_{rA} &= -M_1 (0) = P_0 \frac{L^2}{3} \\ \mathcal{M}_{rB} &= M_1 (L) = P_0 \frac{L^2}{6} \end{aligned} \quad (51)$$

La trave con appoggio e bipendolo

Concludiamo questa rassegna con il caso piu' semplice, in cui la trave e' semplicemente appoggiata a sinistra, mentre l'estremo di destra e' vincolato con un bipendolo. La risultante struttura e' isostatica, e le due reazioni possono calcolarsi in base alle due equazioni della statica:

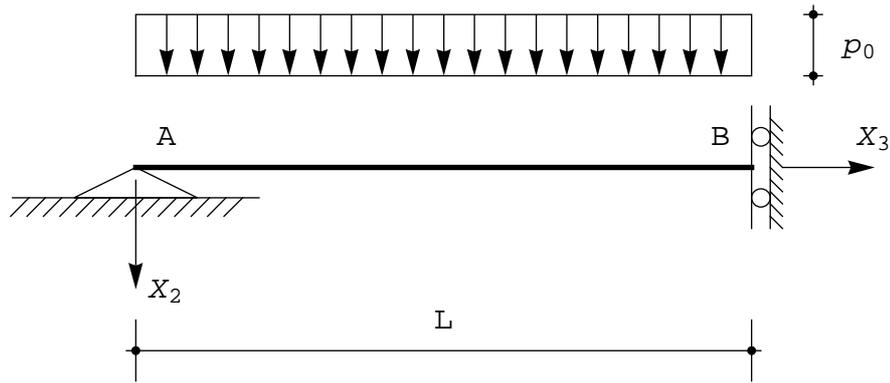


Figura 17 - La trave con appoggio e bipendolo

$$\begin{aligned}
 R_A + p_0 L &= 0 \rightarrow R_A = - p_0 L \\
 - p_0 \frac{L^2}{2} + \mathcal{M}_{rB} &= 0 \rightarrow \mathcal{M}_{rB} = p_0 \frac{L^2}{2}
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Si noti che la seconda equazione esprime l'equilibrio alla rotazione intorno al punto A.

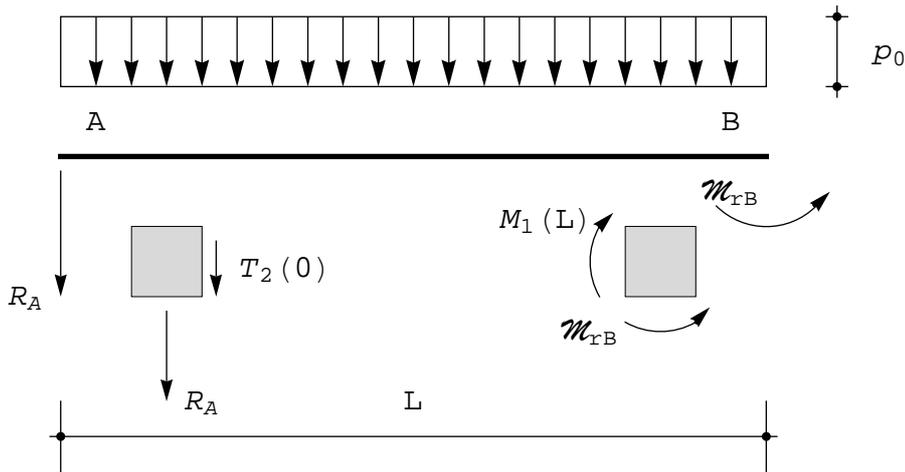


Figura 18 - Le reazioni per la trave con appoggio e bipendolo

Il diagramma del taglio segue immediatamente, in quanto se ne conosce l'andamento (lineare) e due valori, in corrispondenza dell'appoggio, dove sarà $T_2(0) = -R_A = p_0 L$, ed in corrispondenza del bipendolo, dove $T_2(L) = 0$. Sarà quindi:

$$T_2(x_3) = p_0(L - x_3)
 \tag{53}$$

Il diagramma del momento è altrettanto semplice, in quanto si conosce il suo valore a sinistra $M_1(0) = 0$ e a destra $M_1(L) = \mathcal{M}_{rB} = p_0 \frac{L^2}{2}$, ed inoltre esso avrà tangente orizzontale in corrispondenza del bipendolo. Assegnato un generico andamento quadratico:

$$M_1(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2
 \tag{54}$$

le tre condizioni suddette permettono il calcolo delle tre costanti:

$$M_1(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$M_1 (L) = p_0 \frac{L^2}{2} \rightarrow a_0 + a_1 L + a_2 L^2 = p_0 \frac{L^2}{2}$$

$$\frac{dM_1}{dx_3} (L) = 0 \rightarrow a_1 + 2 a_2 L = 0$$

Ne segue:

$$M_1 (x_3) = p_0 L x_3 - \frac{p_0}{2} x_3^2 = p_0 x_3 \left(L - \frac{x_3}{2} \right) \quad (56)$$

Per conoscere il diagramma delle rotazioni, si puo' utilizzare la relazione:

$$\phi' (x_3) = \frac{M_1 (x_3)}{EI_{11}} \quad (57)$$

che integrata fornisce:

$$\phi (x_3) = \frac{p_0}{EI_{11}} \left(\frac{x_3^2}{2} L - \frac{x_3^3}{6} \right) + c_0 \quad (58)$$

La costante di integrazione c_0 puo' calcolarsi imponendo che la rotazione sia nulla in corrispondenza del bipendolo:

$$\phi (L) = \frac{p_0 L^3}{3 EI_{11}} + c_0 = 0 \rightarrow c_0 = - \frac{p_0 L^3}{3 EI_{11}} \quad (59)$$

Infine, le rotazioni sono fornite da:

$$\phi (x_3) = \frac{p_0}{EI_{11}} \left(\frac{x_3^2}{2} L - \frac{x_3^3}{6} - \frac{L^3}{3} \right) \quad (60)$$

Gli abbassamenti si deducono dalla relazione:

$$u_2' (x_3) = -\phi (x_3) \quad (61)$$

che conduce, utilizzando la (60), a:

$$u_2 (x_3) = - \frac{p_0}{EI_{11}} \left(\frac{x_3^3}{6} L - \frac{x_3^4}{24} - \frac{L^3 x_3}{3} \right) + c_0 \quad (62)$$

In questo caso, la costante di integrazione c_0 si annulla, in quanto occorre imporre che l'abbassamento sia nullo sull'appoggio, ossia in $x_3 = 0$. I diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli sono riportati in Figura 19, dove sono anche indicati alcuni valori notevoli.

Si confermi attraverso la via usuale quanto ottenuto in questa sezione.

Nota - L'approccio illustrato per la trave appoggiata e con bipendolo e' noto come *metodo di Saviotti*, o delle *quattro integrazioni*, ed ha valore generale per le travi isostatiche.

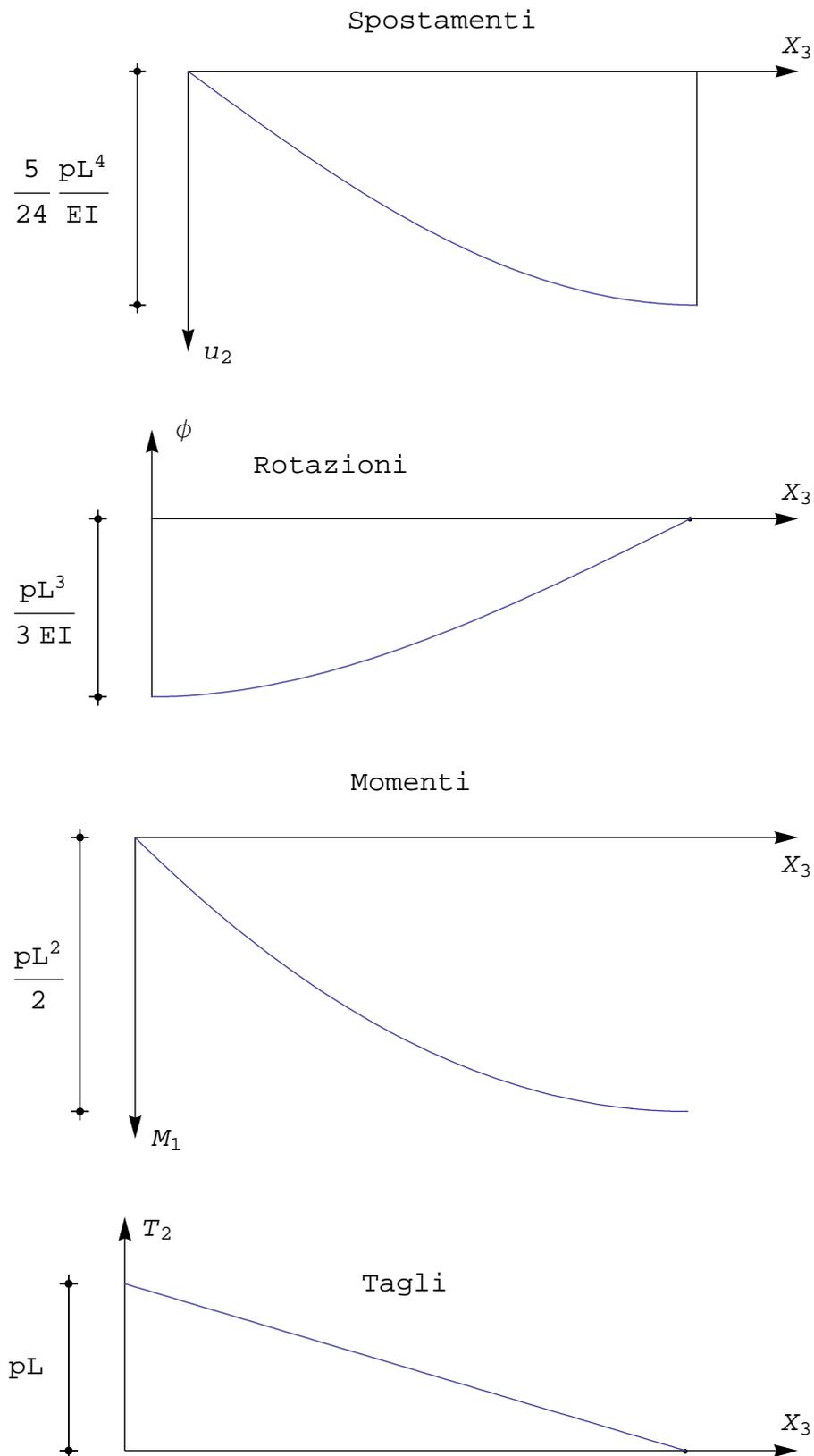


Figura 19 - La trave con appoggio a sinistra e con bipendolo a destra, soggetta a carico distribuito: spostamenti, rotazioni, momenti e tagli