Lezione 31 - Il problema ai limiti assiale

- **[A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 13 marzo 2011]**

In questa lezione si applicano i risultati della lezione precedente, calcolando spostamenti e caratteristiche di alcune travi ad una sola campata soggette a carichi di tipo assiale. Si imposta quindi e si risolve il problema ai limiti del secondo ordine, illustrando alcuni semplici condizioni di carico. Nel seguito si intendera' con il termine "asta" una trave soggetta a soli carichi assiali, mentre il termine "trave" sara' riservato ai casi di forze trasversali.

L'asta soggetta a carico uniformemente distribuito

Il caso di carico piu' semplice e' quello per cui $t(x_3) = t_0$ = costante. In questo caso l'equazione differenziale che regge il problema ai limiti si scrive:

$$u_3^{a''} = -\frac{t_0}{EA} \tag{1}$$

ed e' immediato constatare, per integrazioni successive, che l'integrale della (1) e'pari a:

$$u_3^a(x_3) = A_0 + A_1 x_3 - t_0 \frac{x_3^2}{2\,EA} \tag{2}$$

Per ottenere le due costanti di integrazione A_0 ed A_1occorre specificare le condizioni di vincolo. Si hanno due casi di interesse pratico.

Asta fissa agli estemi

Per un'asta i cui due estremi sono impediti a muoversi, occorrera' che sia:

$$u_3^a(0) = u_3^a(L) = 0 \tag{3}$$

ossia, dalla (2):

$$\begin{aligned} &A_0 = 0 \\ &A_0 + A_1 L - t_0 \frac{L^2}{2\,EA} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

e quindi la linea elastica e' data da:

$$u_3^a(x_3) = \frac{t_0 x_3}{2\,EA}(L - x_3) \tag{5}$$

mentre lo sforzo normale e' dato da:

$$N(x_3) = EA\,u_3^{a'}(x_3) = t_0\left(\frac{L}{2} - x_3\right) \tag{6}$$

In Figura 1 e' riportato l'andamento dei grafici degli spostamenti e degli sforzi normali. Come puo' osservarsi, e come deducibile dalle formule, lo sforzo normale e' distribuito con legge lineare, mentre lo spostamento assiale varia con legge quadratica lungo l'asse, raggiungendo il suo massimo in mezzeria.

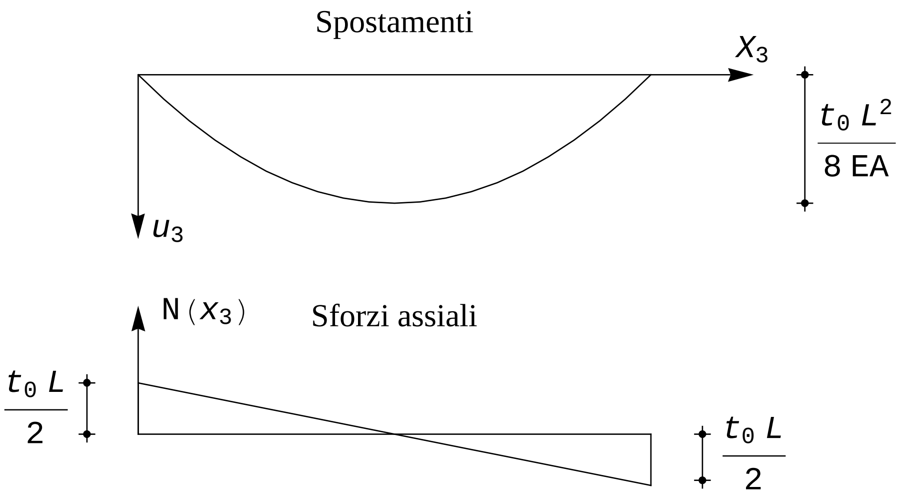

Figura 1 - Asta fissa agli estremi soggetta a carico distribuito uniforme: diagramma degli spostamenti e degli sforzi assiali

Le reazioni dei due vincoli agli estremi sono facilmente calcolabili con considerazioni di equilibrio. A sinistra si avra', come deducibile dalla Figura 2:

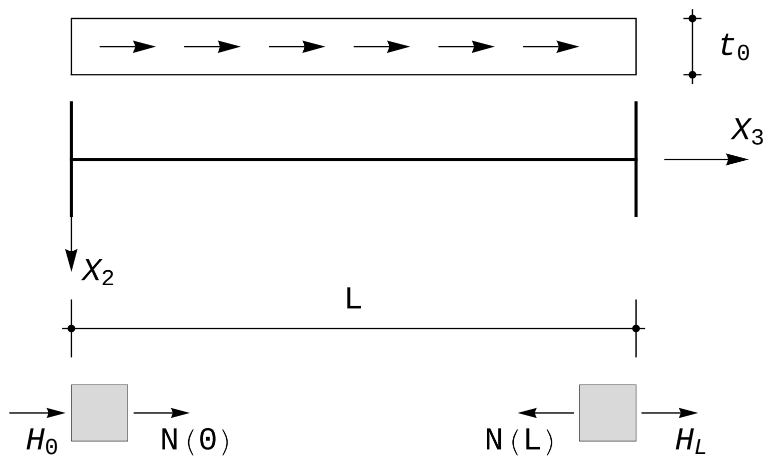

Figura 2 - Le reazioni assiali per l'asta soggetta a carico uniformemente distribuita

$$H_0 + N(0) = 0 \longrightarrow H_0 = -N(0) = -t_0 \frac{L}{2} \tag{7}$$

ed a destra:

$$H_L - N(L) = 0 \longrightarrow H_L = N(L) = -t_0 \frac{L}{2} \tag{8}$$

■ Asta fissa a sinistra e libera a destra

In questo caso dovra' essere:

$$u_3^a(0) = u_3^{a'}(L) = 0 \tag{9}$$

ossia, dalla (2):

$$A_0 = 0$$
$$A_1 - \frac{t_0 L}{EA} = 0 \tag{10}$$

e quindi la linea elastica e' data da:

$$u_3(x_3) = \frac{t_0 x_3}{EA}\left(L - \frac{x_3}{2}\right) \tag{11}$$

mentre lo sforzo normale e' dato da:

$$N(x_3) = EA\, u_3^{a'}(x_3) = t_0 (L - x_3) \tag{12}$$

In Figura 3 sono riportati i grafici degli spostamenti e degli sforzi normali. Calcolare le reazioni vincolari.

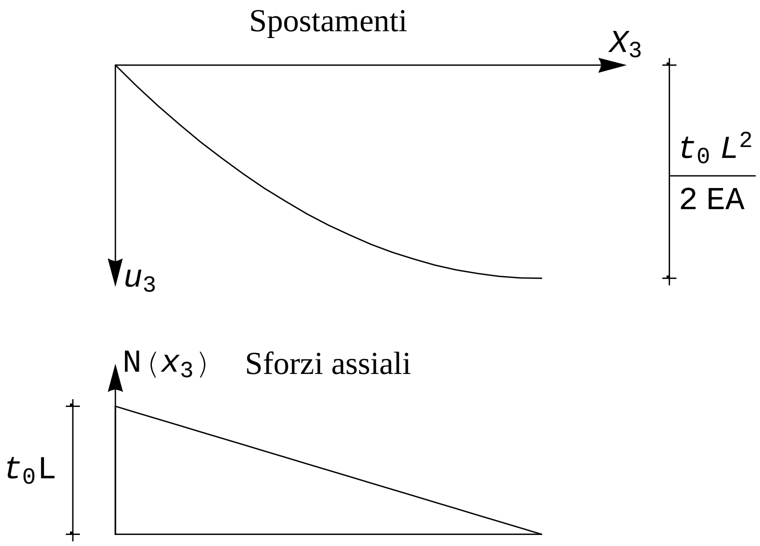

Figura 3 - Asta fissa a sinistra e libera a destra : diagramma degli spostamenti e degli sforzi assiali

L'asta soggetta a forza concentrata all'estremo

Si consideri ora un'asta fissa a sinistra, libera a destra, e soggetta ad una forza concentrata F all'estremo libero. Utilizzando il principio di stazionarieta' dell'energia potenziale totale, al fine di stabilire le condizioni al contorno all'estremo libero, si scrive l'energia potenziale totale come:

$$E_t = \frac{1}{2}\int_0^L EA\, u_3^{a'2}(x_3)\, dx_3 - F\, u_3^a(L) \tag{13}$$

e quindi la variazione prima di E_t e' fornita da :

$$\delta_1 E_t = \int_0^L EA\, u_3^{a'}\, \delta u_3^{a'}\, dx_3 - F\, \delta u_3^a(L) = 0 \tag{14}$$

Integrando per parti si giunge alla solita equazione differenziale, con $t_0 = 0$, ed alle condizioni ai limiti:

$$EA u_3^{a'}(0)\, \delta u_3^a(0) = 0 \tag{15}$$

$$\left(EAu_3^{a'}(L) - F\right)\delta u_3^a(L) = 0 \tag{16}$$

Nell' estremo di sinistra, fisso, dovra' essere $u_3^a(0) = 0$, mentre a destra, nell' estremo libero, sara' :

$$EAu_3^{a'}(L) = F \tag{17}$$

Nota - La (17) esprime l'equilibrio tra sforzo normale e forza applicata, come puo' facilmente evincersi enucleando il concio elementare all'ascissa x_3= L, ed esprimendo la condizione di equilibrio nei riguardi delle possibili traslazioni orizzontali (cfr.Figura 4)

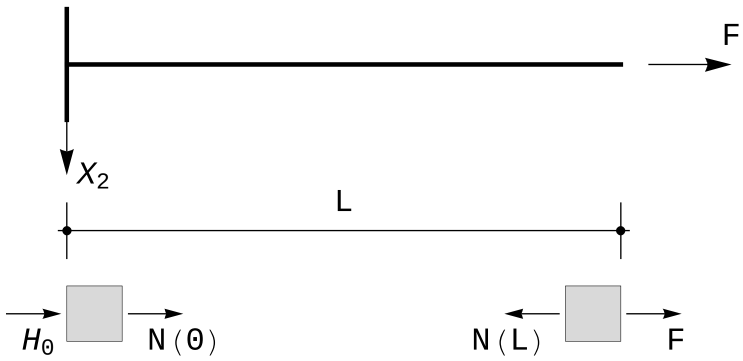

Figura 4 - L'asta soggetta a carico concentrato nell'estremo libero

Gli spostamenti saranno allora dati da:

$$u_3^a(x_3) = \frac{F}{EA}x_3 \tag{18}$$

mentre lo sforzo normale e' costante, e pari ad F. Si noti che non e' necessario, in queso caso, risolvere il problema ai limiti per ottenere la (18). Ed infatti, in assenza di carichi distribuiti, la condizione (47) della lezione precedente:

$$\frac{dN(x_3)}{dx_3} + t(x_3) = 0 \tag{19}$$

implica che lo sforzo normale sia costante lungo l'asse x_3. Di conseguenza, per la (17), esso sara' pari ovunque ad F, e per la (8) della lezione precedente:

$$N(x_3) = E\,A\,u_3^{a'}(x_3) \tag{20}$$

sara' subito:

$$u_3^{a'}(x_3) = \frac{F}{EA} \longrightarrow u_3^a(x_3) = \frac{F}{EA}x_3 + C \tag{21}$$

Infine, la costante di integrazione C si annulla, in base alla condizione a sinistra, dove $u_3^a(0) = 0$.

Grafici