
Lezione 30 - La teoria di Eulero per la trave snella

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 11 marzo 2012]

In questa parte del corso si particolarizzano i risultati della teoria dell'elasticità e della teoria della trave di De Saint-Venant, studiando un solido monodimensionale piano ad asse rettilineo (trave piana). Dopo aver definito la geometria del solido, si specificano le possibili condizioni di carico, in modo da annullare identicamente gli spostamenti lungo un asse, e si pongono alcune ipotesi cinematiche, che costituiscono la base per la cosiddetta "teoria di Eulero-Bernoulli" per la trave. Infine, si particolarizzano le equazioni dell'equilibrio elastico giungendo a due equazioni differenziali disaccoppiate, con le corrispondenti condizioni ai limiti. A far ciò, si utilizza sia il principio degli spostamenti virtuali che il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, identificando così i vincoli che la teoria permette di utilizzare. Infine, si applica il metodo geometrico, o metodo diretto, illustrando in dettaglio i meccanismi di vincolo (incastro, appoggio e bipendolo).



Figura 1 - L. Eulero

Le due vie esposte in questa lezione sono ambedue antichissime, come può dedursi dalla seguente citazione di Eulero:

"Poiche' la fabbrica dell'Universo e' perfetta, ed e' il lavoro del piu' saggio Creatore, nulla accade nell'universo per cui non si manifesti qualche relazione di massimo o minimo.

Non c'e' quindi alcun dubbio che qualunque cosa nell'universo possa spiegarsi in modo soddisfacente a partire dalle cause finali, con l'ausilio del metodo dei massimi e minimi, cosi' come con l'ausilio delle stesse cause effettive.

Percio', si aprono due vie per studiare i fenomeni naturali, uno tramite l'analisi delle cause effettive, comunemente chiamato metodo diretto, e l'altro per mezzo delle cause finali"

Le ipotesi geometriche di base

Si consideri un solido del tipo trave, di luce L , con una sezione retta caratterizzata da un asse di simmetria rispetto all'asse x_1 , e si ipotizzi anche che i carichi su di essa agenti non abbiano componenti lungo l'asse X_1 , mentre le altre due componenti siano simmetricamente disposte rispetto allo stesso asse X_1 . Sono quindi ammessi:

- carichi distribuiti secondo l'asse della trave X_3 , (*carichi assiali*), che possono ricondursi - considerando una striscia di trave di larghezza unitaria - a stese di carico di intensita' $t(x_3)$ con dimensione fisica $[FL^{-1}]$
- carichi distribuiti secondo l'asse verticale X_2 , (*carichi trasversali*) che possono ricondursi - considerando una striscia di trave di larghezza unitaria - a stese di carico di intensita' $p(x_3)$ con dimensione fisica $[FL^{-1}]$
- distribuzioni di coppie con asse momento coincidente con l'asse X_1 , che possono ricondursi - considerando una striscia di trave di larghezza unitaria - a stese di coppie di intensita' $m(x_3)$ con dimensione fisica $[F]$. Di esse si terra' raramente conto.
- forze concentrate dirette secondo l'asse della trave (forze assiali), o secondo l'asse verticale (forze trasversali), e coppie concentrate con asse momento coincidente con l'asse X_1 .

Da queste ipotesi sulla geometria e sui carichi segue che i punti della trave potranno subire spostamenti in senso assiale e trasversale, mentre saranno necessariamente nulle le componenti di spostamento secondo l'asse X_1 . Ci si puo' quindi limitare a studiare i punti del piano $X_2 - X_3$, riducendo il problema spaziale di De Saint Venant ad un piu' semplice problema bidimensionale, in cui la terna di spostamenti si e' semplificata in:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(x_2, x_3) \\ u_3(x_2, x_3) \end{pmatrix} \quad (1)$$

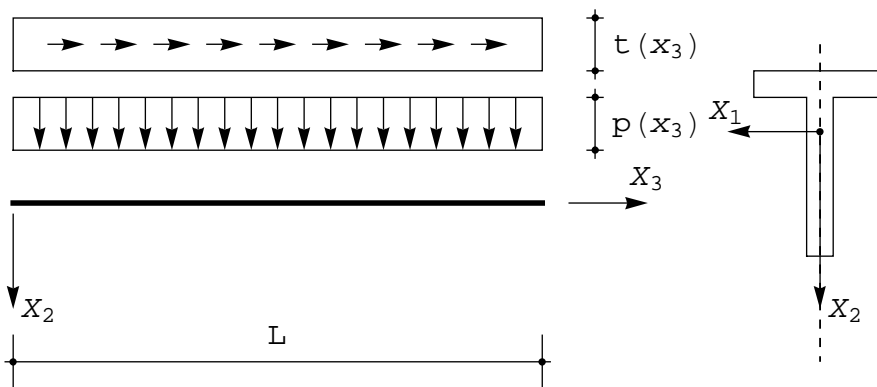


Figura 2 - La trave da studiare

Le ipotesi cinematiche di base

Tutti i modelli strutturali di trave piana possono ricondursi ad una terna di spostamenti del tipo (1), in cui le due componenti u_2 e u_3 andranno ulteriormente specificate attraverso opportune ipotesi cinematiche. La piu' semplice teoria rimonta a Bernoulli ed Eulero, ed e' basata sulle seguenti ipotesi:

1. gli spostamenti verticali ed assiali dei punti dell'asse dipendono solo dalla variabile x_3 . Indicando con

l'apice a i punti dell'asse, si ha allora:

$$\begin{aligned} u_2^a &= u_2^a(x_3) \\ u_3^a &= u_3^a(x_3) \end{aligned} \tag{2}$$

2. segmenti normali all'asse si conservano segmenti a seguito della deformazione (*ipotesi di planeità delle sezioni rette*). Ad esempio, il segmento A-A, situato in Figura 3 a distanza x_3 dalla base di sinistra, si trasformerà in un segmento A'-A'.

3. segmenti normali all'asse si conservano normali all'asse deformato. Quindi il segmento A-A subisce la rotazione $\phi(x_3)$ pari alla rotazione dell'asse neutro alla stessa ascissa.

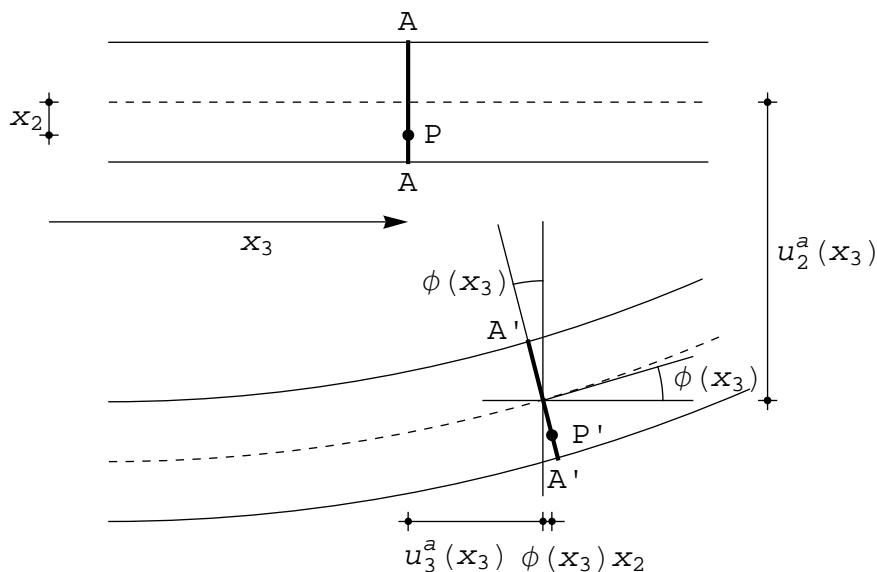


Figura 3 - Le ipotesi di Eulero-Bernoulli

Segue dalle tre ipotesi appena formulate, che una sezione retta a distanza x_3 dalla base di sinistra subisce un abbassamento $u_2(x_3) = u_2^a(x_3)$, uguale per tutti i punti della sezione, uno spostamento assiale $u_3(x_2, x_3)$, ed una rotazione $\phi(x_3)$ dello stesso angolo di cui ruota l'asse. Pertanto, tale angolo è fornito da:

$$\phi(x_3) = - \frac{du_2}{dx_3} = - u_2'(x_3) \tag{3}$$

indicando con l'apice la derivazione rispetto ad x_3 . Ne segue che lo spostamento assiale $u_3(x_2, x_3)$ di un punto generico P della sezione retta, situato a distanza x_2 dal baricentro, è pari a:

$$u_3(x_2, x_3) = u_3^a(x_3) + x_2 \phi(x_3) = u_3^a(x_3) - x_2 u_2'(x_3) \tag{4}$$

Il vettore \mathbf{s} della terna di spostamenti è fornito pertanto da:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(x_2, x_3) \\ u_3(x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2(x_3) \\ u_3^a(x_3) - x_2 u_2'(x_3) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Le corrispondenti deformazioni sono deducibili a partire dalle ben note leggi che legano le deformazioni alle derivate prime degli spostamenti:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \\
e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\
e_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\
e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\
e_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(u_2' (x_3) - u_2' (x_3) \right) = 0 \\
e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{du_3^a}{dx_3} - x_2 \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = u_3^{a'} (x_3) - x_2 u_2'' (x_3)
\end{aligned}$$

Le precedenti relazioni si conciliano con la relazione generale di De Saint-Venant, (11) della Lezione 23:

$$e_{11} = e_{22} = -\nu e_{33} \quad (7)$$

solo nel caso $\nu = 0$, ossia di solido a contrazione laterale impedita. Nella stessa ipotesi, la legge di Hooke porta alla sola tensione normale σ_{33} , pari a:

$$\sigma_{33} = E \left(u_3^{a'} (x_3) - x_2 u_2'' (x_3) \right) \quad (8)$$

Ne segue che le caratteristiche sforzo normale $N(x_3)$ e momento flettente $M_1(x_3)$ sono fornite da:

$$N(x_3) = \int_{\Sigma} E \left(u_3^{a'} (x_3) - x_2 u_2'' (x_3) \right) dA = E A u_3^{a'} (x_3) \quad (9)$$

$$M_1(x_3) = \int_{\Sigma} E \left(x_2 u_3^{a'} (x_3) - x_2^2 u_2'' (x_3) \right) dA = -E I_{11} u_2'' (x_3) \quad (10)$$

coincidente con i risultati ottenuti nella lezione 24 (cfr. eqn. 44).

■ Il calcolo dello sforzo di taglio

Una notevole incongruenza della teoria di Eulero-Bernoulli risiede nella impossibilita' di calcolare lo sforzo di taglio T_2 come risultante delle tensioni tangenziali, secondo la definizione (21) della lezione 22. Ed infatti, essendo nulla la componente tangenziale di tensione σ_{23} si avra' senz'altro:

$$T_2(x_3) = \int_{\Sigma} \sigma_{23} dA = 0 \quad (11)$$

D'altro canto, banali considerazioni di equilibrio mostrano che uno sforzo di taglio dovra' essere necessariamente presente. Ed infatti, si consideri un concio di trave di larghezza dx_3 , situato all'ascissa x_3 , come riportato in Figura 4. . Perche' esso sia in equilibrio, occorrera' che siano soddisfatte le tre equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale, alla traslazione verticale, ed alla rotazione intorno ad una sezione generica, ed e' immediato realizzare che l'assenza di forze taglianti verticali impedisce di soddisfare l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale. Si puo' giungere pero' ad una definizione soddisfacente dello sforzo di taglio imponendo l'equilibrio delle forze presenti alla rotazione intorno alla faccia di destra:

$$-M_1(x_3) + M_1(x_3 + dx_3) - T_2(x_3) dx_3 + p(x_3) dx_3 \frac{dx_3}{2} = 0 \quad (12)$$

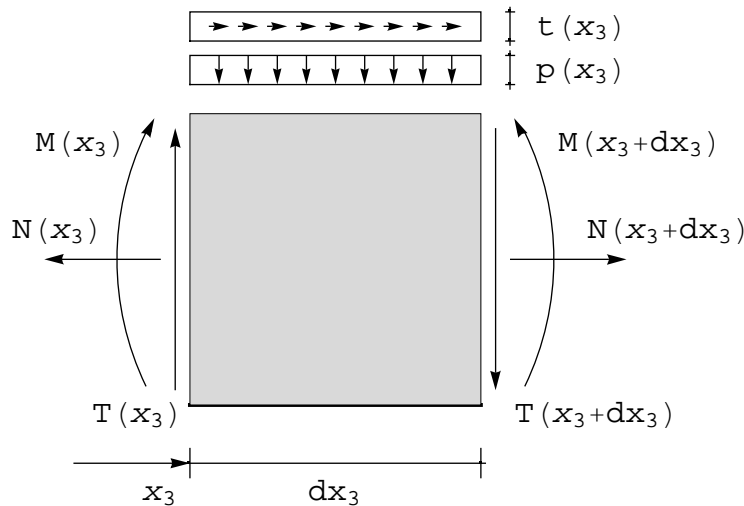


Figura 4. Il concio elementare e le forze su di esso agenti

Se dx_3 e' abbastanza piccolo, si puo' approssimare $M_1(x_3 + dx_3)$ con i primi termini di un suo sviluppo in serie:

$$M_1(x_3 + dx_3) = M_1(x_3) + \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} dx_3 \tag{13}$$

ed inoltre l'ultimo termine della (12) puo' trascurarsi. Se ne trae:

$$-M_1(x_3) + M_1(x_3) + \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} dx_3 - T_2(x_3) dx_3 = 0 \tag{14}$$

ed infine si giunge alla *definizione* di taglio secondo la teoria di Eulero-Bernoulli:

$$T_2(x_3) = \frac{dM_1(x_3)}{dx_3} = -E I_{11} u_2''''(x_3) \tag{15}$$

La (15) e' in netta contraddizione con la (11), ma e' il prezzo da pagare per l'estrema semplicita' della teoria di Eulero-Bernoulli per travi snelle.

Lo studio della linea elastica col principio degli spostamenti virtuali

Si scriva il principio degli spostamenti virtuali (cfr. 28 della Lezione 20):

$$\int_B \sigma_{33} \delta e_{33} dV = \int_0^L p(x_3) \delta u_2 dx_3 + \int_0^L t(x_3) \delta u_3^a dx_3 \tag{16}$$

ossia ancora, utilizzando l'ultima delle (6) e la legge di Hooke:

$$\int_0^L \int_{\Sigma} E (u_3^{a'}(x_3) - x_2 u_2''(x_3)) (\delta u_3^{a'}(x_3) - x_2 \delta u_2''(x_3)) dA dx_3 = \int_0^L p(x_3) \delta u_2 dx_3 + \int_0^L t(x_3) \delta u_3^a dx_3 \tag{17}$$

Svolgendo i prodotti, si ha, eliminando per semplicita' la dipendenza funzionale da x_3 :

$$\int_0^L (EA u_3^{a'} \delta u_3^{a'} + EI_{11} u_2' \delta u_2' - p \delta u_2 - t \delta u_3^a) dx_3 \quad (18)$$

tenendo conto che:

$$\int_{\Sigma} dA = A; \quad \int_{\Sigma} x_2 dA = 0; \quad \int_{\Sigma} x_2^2 dA = I_{11} \quad (19)$$

dove A e' l'area della sezione retta, ed I_{11} e' il suo momento di inerzia rispetto all'asse x_1 .

Ipotizzando da ora in poi che la trave sia omogenea ed a sezione costante, e che quindi il modulo di Young, l'area ed il momento di inerzia possano considerarsi costanti, il primo integrale della (17) puo' integrarsi per parti una volta, ottenendo:

$$\int_0^L u_3^{a'} \delta u_3^{a'} dx_3 = [u_3^{a'} \delta u_3^a]_0^L - \int_0^L u_3^{a''} \delta u_3^a dx_3 \quad (20)$$

mentre il secondo va integrato per parti due volte:

$$\begin{aligned} \int_0^L u_2' \delta u_2' dx_3 &= [u_2' \delta u_2]_0^L - \\ \int_0^L u_2'' \delta u_2 dx_3 &= [u_2'' \delta u_2]_0^L - [u_2''' \delta u_2]_0^L + \int_0^L u_2'''' \delta u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (21)$$

Inserendo la (20) e la (21) nella (17) si giunge a scrivere:

$$\begin{aligned} \int_0^L [(-EA u_3^{a''} - t) \delta u_3^a + (EI_{11} u_2'''' - p) \delta u_2] dx_3 + [\\ EA u_3^{a'} \delta u_3^a]_0^L + [EI_{11} u_2' \delta u_2]_0^L - [EI_{11} u_2'' \delta u_2]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Le variazioni δu_3^a e δu_2 sono arbitrarie, e quindi dovranno annullarsi le quantita' in parentesi, conducendo alle due equazioni differenziali disaccoppiate in u_3^a ed in u_2 :

$$\begin{aligned} EA u_3^{a''} &= -t \\ EI u_2'''' &= p \end{aligned} \quad (23)$$

Le restanti quantita' dovranno annullarsi ai due estremi della trave. Per lo spostamento u_3^a dovra' quindi essere:

$$EA u_3^{a'}(0) \delta u_3^a(0) = 0 \quad (24)$$

$$EA u_3^{a'}(L) \delta u_3^a(L) = 0 \quad (25)$$

mentre per lo spostamento u_2 sara' necessariamente:

$$EI_{11} u_2'(0) \delta u_2(0) = 0 \quad (26)$$

$$EI_{11} u_2'(L) \delta u_2(L) = 0 \quad (27)$$

$$EI_{11} u_2''(0) \delta u_2(0) = 0 \quad (28)$$

$$EI_{11} u_2''(L) \delta u_2(L) = 0 \quad (29)$$

Nota - Lo studio della funzione $u_3^a(x_3)$ degli spostamenti assiali e' completamente separato dallo studio della funzione $u_2(x_3)$ degli spostamenti trasversali. Inoltre, gli spostamenti assiali sono governati da un problema ai limiti differenziale del secondo ordine, mentre quelli trasversali da un problema ai limiti differenziale del

quarto ordine. Occorre quindi risolvere le equazioni differenziali (23), e determinare le costanti di integrazione imponendo le condizioni ai limiti (24-25) per lo spostamento assiale, e le condizioni (26-29) per lo spostamento trasversale.

■ La soluzione delle equazioni differenziali della linea elastica

La soluzione delle (23) puo' scriversi come somma di un integrale generale, soluzione dell'omogenea associata, e di un integrale particolare, che dipende dalla particolare forma delle funzioni $t(x_3)$ e $p(x_3)$. Riscritte le equazioni nella forma piu' conveniente:

$$\begin{aligned} u_3^{a'''} &= -\frac{t}{EA} \\ u_2^{''''} &= \frac{p}{EI} \end{aligned} \quad (30)$$

si ha:

$$u_3^a(x_3) = A_0 + A_1 x_3 + I_w \quad (31)$$

$$u_2(x_3) = C_0 + C_1 x_3 + C_2 x_3^2 + C_3 x_3^3 + I_v \quad (32)$$

con I_w e I_v integrali particolari, A_0, A_1, C_0, C_1, C_2 e C_3 costanti di integrazione da specificare imponendo le opportune condizioni ai limiti, in $x_3 = 0$ ed in $x_3 = L$. Tali condizioni, da ricavare in base alle (24-29) riflettono le condizioni con cui e' vincolata la trave, secondo la classificazione riportata nel prossimo sottoparagrafo

■ Le condizioni di vincolo

E' conveniente separare lo studio del problema assiale dallo studio del problema flessionale.

■ Il problema assiale

In base alla (9), le condizioni (24) e (25) si possono scrivere:

$$N(0) \delta u_3^a(0) = 0 \quad (33)$$

$$N(L) \delta u_3^a(L) = 0 \quad (34)$$

Agli estremi della trave, pertanto, si puo' avere questa duplice alternativa:

- **Estremo fisso** $\rightarrow u_3^a = 0$
- **Estremo libero** $\rightarrow N = 0$ ossia $u_3^{a'} = 0$

■ Il problema flessionale

In base alla (10) ed alla (15) le condizioni (26-29) si possono scrivere:

$$M_1(0) \delta \phi(0) = 0 \quad (35)$$

$$M_1(L) \delta \phi(L) = 0 \quad (36)$$

$$T_2(0) \delta u_2(0) = 0 \quad (37)$$

$$T_2(L) \delta u_2(L) = 0 \quad (38)$$

Agli estremi della trave, pertanto, si possono simulare queste condizioni di vincolo:

- **Estremo fisso** $\rightarrow u_2 = 0$ e $\phi = 0$
- **Estremo appoggiato** $\rightarrow u_2 = 0$ e $M_1 = 0$, ossia $u_2'' = 0$
- **Estremo con bipendolo** $\rightarrow \phi = 0$ e $T_2 = 0$, ossia $u_2''' = 0$
- **Estremo libero** $\rightarrow M_1 = 0$, ossia $u_2'' = 0$ e $T_2 = 0$, ossia $u_2''' = 0$

Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale

Come si è visto, il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale discende dal principio degli spostamenti virtuali. Nessuna sorpresa, quindi, se utilizzando questo principio si giungerà alle stesse equazioni del paragrafo precedente.

Si parte dalla definizione dell'energia potenziale totale, somma dell'energia elastica e dell'energia potenziale dei carichi:

$$E_t = \frac{1}{2} \int_B E e_{33}^2 dV - \int_0^L p(x_3) u_2(x_3) dx_3 - \int_0^L t(x_3) u_3^a(x_3) dx_3 \quad (39)$$

ed utilizzando l'ultima delle (6), si può scrivere l'energia elastica come un funzionale delle due componenti di spostamento u_2 ed u_3^a :

$$E_t = \frac{1}{2} \int_0^L E A u_3^{a'}{}^2(x_3) dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} u_2''{}^2(x_3) dx_3 - \int_0^L p(x_3) u_2(x_3) dx_3 - \int_0^L t(x_3) u_3^a(x_3) dx_3 \quad (40)$$

Si scriva ora la *variazione* di E_t rispetto alle due variabili u_3^a ed u_2 , ottenendo:

$$\begin{aligned} \delta E_t &= E_t(u_3^a + \delta u_3^a, u_2 + \delta u_2) - E_t(u_3^a, u_2) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L E A (u_3^{a'} + \delta u_3^{a'})^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} (u_2'' + \delta u_2'')^2 dx_3 - \\ &= \int_0^L p(u_2 + \delta u_2) dx_3 - \int_0^L t(u_3^a + \delta u_3^a) dx_3 - \frac{1}{2} \int_0^L E A u_3^{a'}{}^2 dx_3 - \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} u_2''{}^2 dx_3 + \int_0^L p u_2 dx_3 + \int_0^L t u_3^a dx_3 \end{aligned} \quad (41)$$

Svolgendo i quadrati e semplificando si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta E_t &= \int_0^L E A u_3^{a'} \delta u_3^{a'} dx_3 + \int_0^L EI_{11} u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \\ &= \int_0^L t \delta u_3^a dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L E A \delta u_3^{a'}{}^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} \delta u_2''{}^2 dx_3 \end{aligned} \quad (42)$$

Ne segue che la variazione dell'energia potenziale totale si esaurisce in due aliquote: la prima, lineare, e la seconda quadratica:

$$\delta_1 E_t = \int_0^L E A u_3^{a'} \delta u_3^{a'} dx_3 + \int_0^L EI_{11} u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3^a dx_3 \quad (43)$$

$$\delta_2 E_t = \frac{1}{2} \int_0^L E A \delta u_3^{a'}{}^2 dx_3 + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{11} \delta u_2''{}^2 dx_3 \quad (44)$$

Per il principio di stazionarieta', dovra' essere:

$$\delta_1 E_t = \int_0^L E A u_3^{a'} \delta u_3^{a'} dx_3 + \int_0^L EI_{11} u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3^a dx_3 = 0 \quad (45)$$

coincidente con la (18).

L'approccio geometrico

Talvolta e' utile impiegare il metodo geometrico, o diretto, per dedurre le equazioni differenziali della linea elastica. Si tratta di imporre l'equilibrio del concio di Figura 4, oltre che alla rotazione, anche rispetto alla traslazione orizzontale ed alla traslazione verticale. Si ha:

- Equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$-N(x_3) + N(x_3 + dx_3) + t(x_3) dx_3 = 0 \quad (46)$$

ossia:

$$-N(x_3) + N(x_3) + \frac{dN(x_3)}{dx_3} dx_3 + t(x_3) dx_3 = 0 \quad (47)$$

ed infine:

$$\frac{dN(x_3)}{dx_3} + t(x_3) = 0 \quad (48)$$

- Equilibrio alla traslazione verticale:

$$-T_2(x_3) + T_2(x_3 + dx_3) + p(x_3) dx_3 = 0 \quad (49)$$

ossia:

$$-T_2(x_3) + T_2(x_3) + \frac{dT_2(x_3)}{dx_3} dx_3 + p(x_3) dx_3 = 0 \quad (50)$$

ed infine:

$$\frac{dT_2(x_3)}{dx_3} + p(x_3) = 0 \quad (51)$$

- Equilibrio alla rotazione

$$\frac{dM_1(x_3)}{dx_3} = T_2(x_3) \quad (52)$$

come già visto.

Ciò fatto, occorre introdurre nella (48) l'espressione dello sforzo normale (9). Se E ed A sono costanti, si ritrova l'equazione differenziale (30):

$$EA \frac{d^2 u_3^a(x_3)}{dx_3^2} + t(x_3) = 0 \quad (53)$$

Analogamente, combinando la (51) e la (52) si giunge a scrivere:

$$\frac{d^2 M_1(x_3)}{dx_3^2} + p(x_3) = 0 \quad (54)$$

ed inserendo la (10) si riottiene l'equazione differenziale (30):

$$EI_{11} \frac{d^4 u_2(x_3)}{dx_3^4} = p(x_3) \quad (55)$$

■ Le condizioni ai limiti

Proseguendo nello spirito dell'approccio diretto, è opportuno suddividere le condizioni ai limiti che è possibile imporre in due distinte categorie: condizioni di congruenza, che coinvolgono spostamenti e rotazioni, e condizioni di equilibrio, che coinvolgono i momenti flettenti, gli sforzi di taglio e gli sforzi normali. Limitandosi all'esame del problema flesso-tagliante, le condizioni di congruenza vanno imposte *a priori*, in base al tipo di vincolo che si vuole realizzare. Se quindi si prevede che un estremo della trave debba essere *incastrato*, si dovrà imporre che in quell'estremo siano nulli sia gli spostamenti che le rotazioni, se invece l'estremo è solo *appoggiato*, allora le rotazioni saranno libere, e dovrà annullarsi solo lo spostamento. Dualmente, un *bipendolo* prevede rotazioni nulle e spostamenti liberi, mentre un *estremo* lasciato *libero* può spostarsi e può ruotare.

Tali condizioni possono essere realizzate predisponendo opportuni dispositivi di vincolo, in grado di annullare gli spostamenti e/o le rotazioni sviluppando opportune *forze reattive*. Da questo punto di vista, l'appoggio può essere considerato equivalente ad una forza verticale *incognita* R , in grado di annullare il corrispondente spostamento, il bipendolo è equivalente ad una coppia reattiva *incognita* \mathcal{M}_R , in grado di annullare la rotazione della sezione retta cui il bipendolo è applicato, e l'incastro può essere sostituito con una forza reattiva R ed una coppia reattiva \mathcal{M}_R , in grado di annullare sia lo spostamento che la rotazione.

Imposte le condizioni di congruenza, possono *dedursi* le ulteriori condizioni di equilibrio, imponendo l'equilibrio del concio vincolato, sia nei confronti di una eventuale traslazione verticale che di una rotazione. Le due condizioni che in tal modo si ottengono andranno considerate condizioni di vincolo se non coinvolgono reazioni incognite, oppure equazioni in grado di far conoscere le reazioni, *dopo* aver risolto il problema ai limiti.

In Figura 5 è offerta una panoramica dettagliata delle condizioni di vincolo possibili ai due estremi di una trave di Eulero-Bernoulli. La prima riga si riferisce all'estremo di sinistra, la riga inferiore invece all'estremo di destra. Per ciascuno di questi due estremi sono illustrati i quattro vincoli possibili, nell'ordine a) incastro, b) appoggio, c) bipendolo, d) estremo libero.

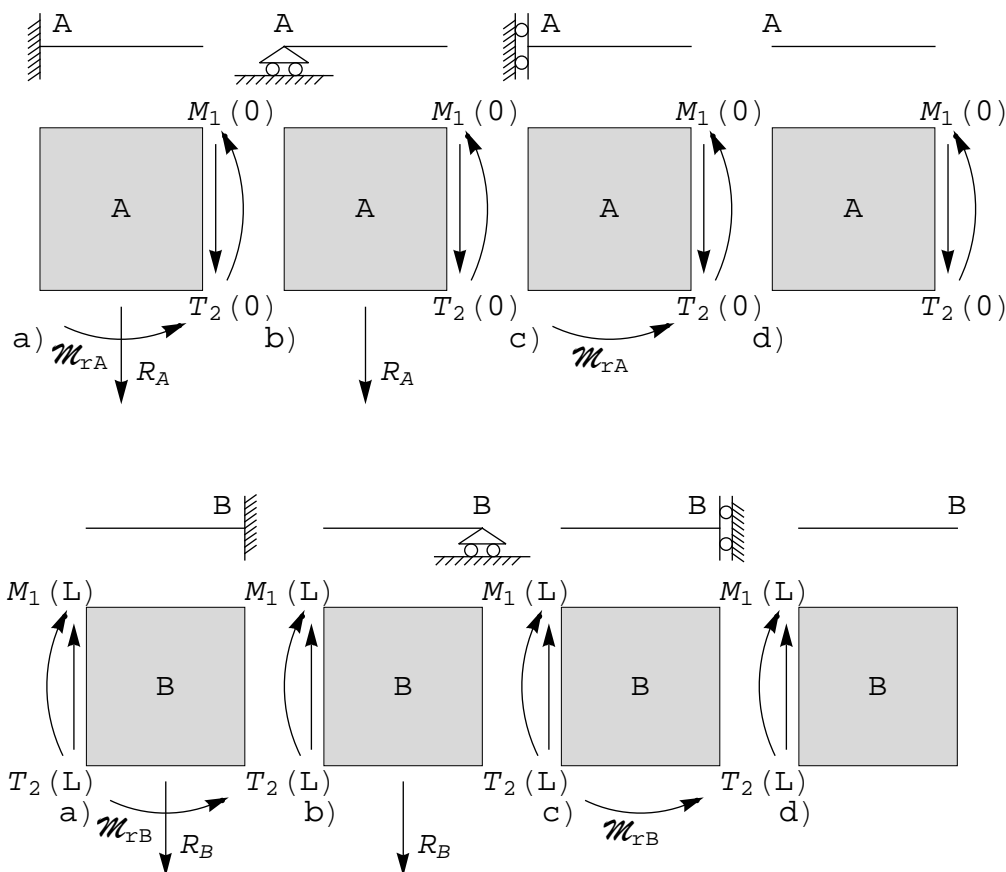


Figura 5 - Le condizioni di vincolo previste dalla teoria di Eulero-Bernoulli - a) incastro, b) appoggio, c) bipendolo, d) estremo libero

■ a) incastro

Le due condizioni di congruenza che definiscono l'incastro esprimono l'annullarsi di spostamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned}
 u_2(\xi) &= 0 \\
 \phi(\xi) &= 0 \rightarrow u_2'(\xi) = 0
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

dove $\xi = 0$ se l'incastro e' a sinistra, e $\xi = L$ se l'incastro e' a destra.

Esse definiscono completamente l'incastro, ai fini delle condizioni ai limiti da introdurre nel corrispondente problema ai limiti.

Come detto, per annullare spostamenti e rotazioni l'incastro sviluppera' una forza reattiva R_ξ ed una coppia reattiva $\mathcal{M}_{R\xi}$, di cui occorrera' tener conto nell'imposizione delle condizioni di equilibrio del concio elementare. Se l'incastro e' situato a sinistra, in $\xi = 0$, allora le forze agenti sul concio elementare sono quelle indicate in Figura 5a), in prima riga: la reazione verticale R_0 , positiva se equivversa all'asse x_2 , e quindi positiva se verso il basso, la coppia reattiva \mathcal{M}_{R0} , positiva se antioraria, il taglio $T_2(0)$, positivo se induce rotazioni *orarie* del concio elementare, il momento flettente $M_1(0)$, positivo se tende le fibre inferiori del concio. Si noti che le caratteristiche della sollecitazione interna, ossia il taglio ed il momento, sono state applicate solo sulla faccia di destra del concio, in quanto la faccia di sinistra coincide con la faccia esterna della trave. Tutto cio' premesso, l'equilibrio del concio e' garantito dalle due condizioni:

$$\begin{aligned}
 R_0 + T_2(0) &= 0 \\
 \mathcal{M}_{R0} + M_1(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{57}$$

Tali condizioni possono essere utilizzate, dopo aver risolto il problema ai limiti, per calcolare le reazioni dell'incastro.

Se l'incastro è situato a destra, in $\xi = L$, allora le forze agenti sul concio elementare sono quelle indicate in Figura 4a), in seconda riga: la reazione verticale R_L , positiva se equivversa all'asse x_2 , e quindi sempre positiva se verso il basso, la coppia reattiva \mathcal{M}_{RL} , positiva se antioraria, il taglio $T_2(L)$, positivo se induce rotazioni *orarie* del concio elementare, il momento flettente $M_1(L)$, positivo se tende le fibre inferiori del concio. Si noti che le caratteristiche della sollecitazione interna, ossia il taglio ed il momento, sono state applicate solo sulla faccia di sinistra del concio, in quanto la faccia di destra coincide con la faccia esterna della trave, e che quindi ora il taglio positivo è diretto verso l'alto, mentre il momento flettente è positivo se orario. Tutto ciò premesso, l'equilibrio del concio è garantito dalle due condizioni:

$$\begin{aligned} R_L - T_2(L) &= 0 \\ \mathcal{M}_{RL} - M_1(L) &= 0 \end{aligned} \quad (58)$$

Le (57) e (58) esprimono una conclusione di carattere generale:

- nell'estremo di sinistra, le reazioni sono uguali e contrarie alle corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna, mentre nell'estremo di destra le reazioni sono uguali ed equivverse alle corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna.

■ b) appoggio

L'unica condizione di congruenza che definisce l'appoggio esprime l'annullarsi dello spostamento:

$$u_2(\xi) = 0 \quad (59)$$

Ad essa deve essere affiancata una condizione di equilibrio, da introdurre nel corrispondente problema ai limiti.

A ciò fare, si consideri che l'appoggio sviluppa una forza reattiva R_ξ , di cui occorrerà tener conto nell'imposizione delle condizioni di equilibrio del concio elementare. Se l'appoggio è situato a sinistra, in $\xi = 0$, allora le forze agenti sul concio elementare sono quelle indicate in Figura 5b), in prima riga: la reazione verticale R_0 , positiva se equivversa all'asse x_2 , e quindi positiva se verso il basso, il taglio $T_2(0)$, positivo se induce rotazioni *orarie* del concio elementare, il momento flettente $M_1(0)$, positivo se tende le fibre inferiori del concio. Ne segue che l'equilibrio del concio è garantito dalle due condizioni:

$$\begin{aligned} R_0 + T_2(0) &= 0 \\ M_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (60)$$

La seconda condizione, esprimente l'annullarsi del momento flettente, può e deve essere utilizzata come condizione ai limiti, per cui le condizioni che definiscono completamente l'appoggio, saranno:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ M_1(0) = 0 &\longrightarrow u_2''(0) = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

La prima delle (60), invece, può essere utilizzata, dopo aver risolto il problema ai limiti, per conoscere la reazione dell'appoggio.

Infine, se l'appoggio è situato a destra, è immediato analizzare la situazione di Figura 5b), seconda riga, e dedurre che le due condizioni ai limiti da imporre sono:

$$\begin{aligned} u_2(L) &= 0 \\ M_1(L) = 0 &\longrightarrow u_2''(L) = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

mentre la restante condizione di equilibrio serve a calcolare la reazione:

$$R_L - T_2(L) = 0 \longrightarrow R_L = T_2(L) \quad (63)$$

c) bipendolo

Il bipendolo e' un vincolo che puo' essere considerato duale all'appoggio: la condizione di congruenza che lo definisce esprime infatti l'annullarsi della rotazione:

$$\phi(\xi) = u_2'(\xi) = 0 \quad (64)$$

e di conseguenza esso sviluppera' una coppia reattiva incognita. Alla (63) bisognera' affiancare una condizione di equilibrio, ottenibile come usuale esaminando il concio elementare dove agisce il bipendolo stesso.

Se il bipendolo e' situato a sinistra, in $\xi = 0$, allora le forze agenti sul concio elementare sono quelle indicate in Figura 5c), in prima riga: la coppia reattiva \mathcal{M}_{R0} , positiva se antioraria, il taglio $T_2(0)$, positivo se induce rotazioni orarie del concio elementare, il momento flettente $M_1(0)$, positivo se tende le fibre inferiori del concio. Ne segue che l'equilibrio del concio e' garantito dalle due condizioni:

$$\begin{aligned} T_2(0) &= 0 \\ \mathcal{M}_{R0} + M_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

La prima condizione, esprime l'annullarsi del taglio, puo' e deve essere utilizzata come condizione ai limiti, per cui le condizioni che definiscono completamente il bipendolo, saranno:

$$\begin{aligned} \phi(0) = 0 &\rightarrow u_2'(0) = 0 \\ T_2(0) = 0 &\rightarrow u_2''(0) = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

La seconda delle (65), invece, puo' essere utilizzata, dopo aver risolto il problema ai limiti, per conoscere la coppia reattiva del bipendolo.

Infine, se il bipendolo e' situato a destra, e' immediato analizzare la situazione di Figura 5c), seconda riga, e dedurre che le due condizioni ai limiti da imporre sono:

$$\begin{aligned} \phi(L) = 0 &\rightarrow u_2'(L) = 0 \\ T_2(L) = 0 &\rightarrow u_2''(L) = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

mentre la restante condizione di equilibrio serve a calcolare la reazione:

$$\mathcal{M}_{RL} - M_1(L) = 0 \rightarrow \mathcal{M}_{RL} = M_1(L) \quad (68)$$

■ d) estremo libero

Se un estremo della trave e' libero sia di spostarsi che di ruotare, non sara' possibile in esso scrivere alcuna equazione di congruenza, mentre imponendo l'equilibrio del concio di Figura 5d) verranno scritte due equazioni di equilibrio, esprimenti l'annullarsi del momento e del taglio:

$$\begin{aligned} M_1(\xi) = 0 &\rightarrow u_2''(\xi) = 0 \\ T_2(\xi) = 0 &\rightarrow u_2'''(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

Problemi

Problema n.1 - Utilizzando il principio degli spostamenti virtuali, dedurre i due problemi ai limiti della teoria della trave presupponendo che il modulo di Young, l'area ed il momento di inerzia della sezione retta siano arbitrarie funzioni continue di x_3 (trave non omogenea a sezione variabile)

Problema n.2 - Dedurre per via geometrica le condizioni ai limiti del problema ai limiti assiale

Grafici