Lezione 3 - La statica del corpo rigido

- **[A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 19 agosto 2011]**

In questa lezione si sintetizzano alcuni risultati di statica del corpo rigido, a partire da un enunciato assiomatico del principio dei lavori virtuali, da cui vengono dedotte le equazioni cardinali della statica.

Il principio dei lavori virtuali

Si consideri un corpo rigido S, soggetto ad un insieme di M forze $\boldsymbol{F}^{(i)}$. Le condizioni di vincolo cui il corpo S e' soggetto siano esprimibili tramite equazioni, e quindi si sia in presenza di vincoli bilaterali. Inoltre, si ipotizzi che i vincoli siano *lisci*, ossia privi di attrito.
Si definisce *spostamento virtuale* del corpo S un insieme di spostamenti infinitesimi dei punti del corpo che sia compatibile con le condizioni di vincolo, compresa la condizione di rigidita'.
Si definisce *lavoro virtuale* della generica forza **F**, per effetto dello spostamento virtuale $\boldsymbol{\delta u}$ del suo punto di applicazione, il prodotto scalare:

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} \tag{1}$$

Si accetta, quale assioma fondante della statica del corpo rigido, il seguente:
Principio dei lavori virtuali - Si consideri un corpo rigido S vincolato con vincoli lisci e bilaterali, soggetto alle forze $\boldsymbol{F}^{(i)}$. Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del corpo rigido nella configurazione C_0 e' che il lavoro virtuale delle forze applicate sia nullo per tutti i possibili spostamenti virtuali a partire da C_0

Si ricorda anche che, ai fini del calcolo del lavoro virtuale, e' possibile sostituire al sistema di forze applicate un qualsiasi altro insieme di forze equivalente, ossia con la stessa risultante e lo stesso momento risultante.

Le equazioni cardinali della statica

Si consideri ancora un corpo rigido S soggetto ad un insieme di M forze $\boldsymbol{F}^{(i)}$, e siano $\boldsymbol{\delta u}^{(i)}$ gli spostamenti virtuali degli M punti di applicazione delle forze. Il lavoro virtuale sara' allora fornito da:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{F}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^{(i)} \tag{2}$$

Si scelga ora un punto arbitrario O da assumere come polo, e si utilizzi quanto detto nella lezione precedente per esprimere gli spostamenti virtuali in funzione delle tre traslazioni del polo, e delle tre rotazioni:

$$\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}^{(i)} = \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} + \mathbf{d} \boldsymbol{\phi} \times \overrightarrow{OP_i} \tag{3}$$

essendosi indicato con P_i il punto di applicazione della i-ma forza. Introducendo la (3) nella (2) si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\delta L &= \sum_{i=1}^{M} \mathbf{F}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\delta u} + \sum_{i=1}^{M} \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{d\phi} \times \overrightarrow{\mathbf{OP_i}} \\
&= \boldsymbol{\delta u} \cdot \sum_{i=1}^{M} \mathbf{F}^{(i)} + \mathbf{d\phi} \cdot \sum_{i=1}^{M} \overrightarrow{OP_i} \times \mathbf{F}^{(i)}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Si definiscono ora il *vettore risultante* **R**:

$$
\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{F}^{(i)} \tag{5}
$$

ed il *vettore momento risultante* **M**(O):

$$
\mathbf{M}\,(\mathbf{O}) = \sum_{i=1}^{M} \overrightarrow{OP_i} \times \mathbf{F}^{(i)} \tag{6}
$$

giungendo ad esprimere il lavoro virtuale in funzione dei sei parametri lagrangiani del corpo rigido:

$$
\delta L = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\delta u} + \mathbf{M}\,(O) \cdot \mathbf{d\phi} \tag{7}
$$

Dal principio dei lavori virtuali discendono allora le equazioni cardinali della statica:

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido e' che il sistema di forze su di esso agente sia a risultante nullo ed a momento risultante nullo:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R} = \mathbf{0} \\
&\mathbf{M}\,(O) = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Le reazioni vincolari

Quando il corpo rigido e' vincolato, tutto quanto detto finora rimane valido, a patto di sostituire ai vincoli le reazioni vincolari, ossia quelle forze incognite in grado di imporre il rispetto delle condizioni di vincoli. Dividendo quindi le forze in attive (e note) e reattive (incognite) si dovranno scrivere le equazioni della statica come:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}^{(a)} + \mathbf{R}^{(r)} = \mathbf{0} \\
&\mathbf{M}^{(a)}\,(O) + \mathbf{M}^{(r)}\,(O) = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Le (9) sono da riguardarsi come sei equazioni nelle incognite reattive.