
Lezione 29 - La teoria approssimata

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 27 agosto 2011]

Nella Lezione precedente si è illustrata la trattazione del quinto e sesto caso di sollecitazione semplice di De Saint-Venant, giungendo a definire uno stato tensionale caratterizzato da una tensione normale variabile linearmente lungo l'asse della trave e da un campo vettoriale piano di tensioni tangenziali. Tuttavia, la determinazione effettiva di tale campo vettoriale richiede la conoscenza della funzione di taglio $\Phi(x_1, x_2)$, soluzione di un problema di Dini-Neumann definito sulla sezione retta, e tale strada risulta poco agevole, conducendo a formule troppo complesse da poter essere utilizzate nella pratica tecnica.

Si illustra pertanto in questa Lezione una trattazione approssimata per la ricerca delle tensioni tangenziali, che rinuncia a soddisfare la condizione di congruenza, sulla terza componente del rotore, limitandosi a soddisfare le condizioni di equilibrio. Tale teoria, precedente la soluzione esatta di De Saint-Venant e' dovuta all'ingegnere russo D.J. Jourawski, ed e' anche talvolta attribuita al francese Bredt.[Jourawsky]



Figura 1 . Dmitrij Ivanovič Žuravskij

La trattazione di Jourawski

Si consideri un solido del tipo trave, soggetto a momento flettente e taglio, e si isoli un elemento di trave dV , identificato da due sezioni rette qualsiasi a distanza x_3 ed $x_3 + dx_3$ dalla base di sinistra. Poi si identifichi la porzione dV' di dV , ottenuta segnando dV con un piano ABCD parallelo al piano $X_1 X_3$ che divide la sezione retta Σ mediante una corda b , come illustrato in Figura 2.

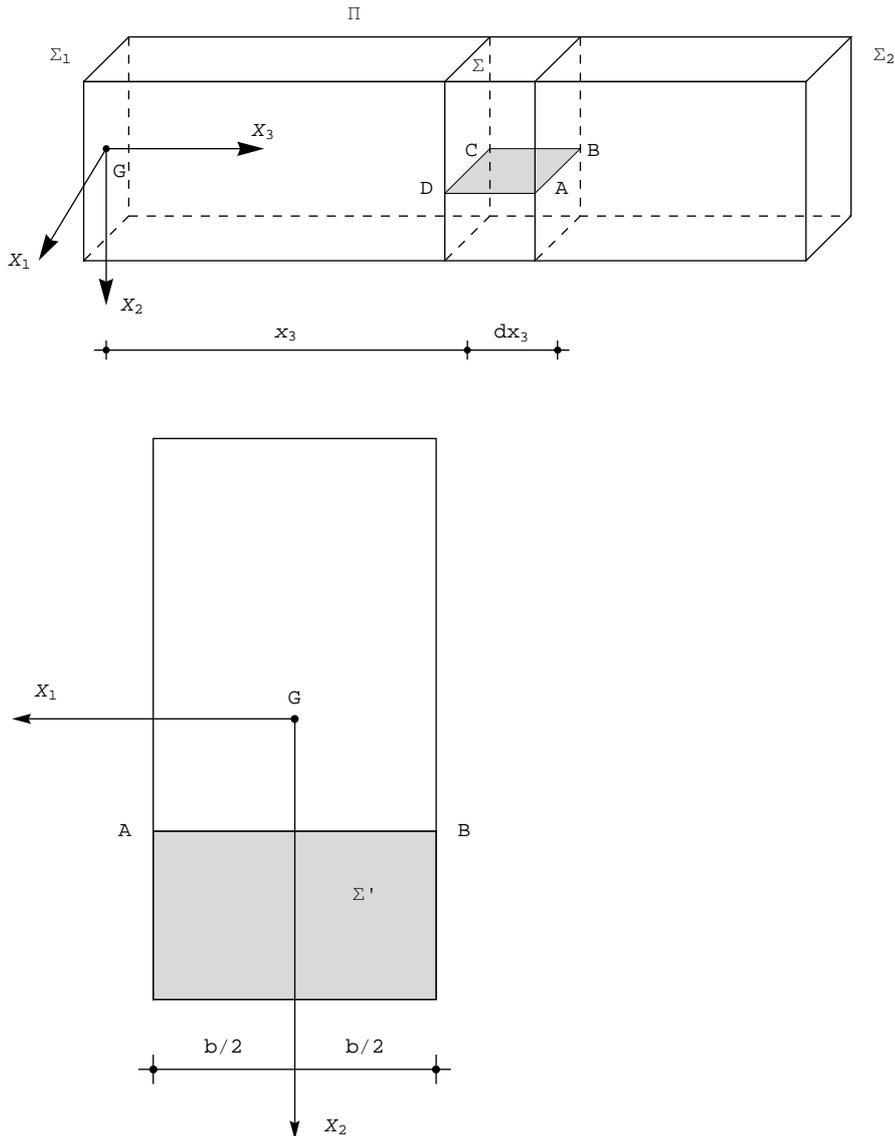


Figura 2- Il volume dV' , e la corrispondente sezione Σ'

Come illustrato in Figura 3, l'elemento di volume dV' è soggetto alle tensioni normali σ_{33} , positive se di trazione, agenti sulle due facce verticali del volume, ad una distribuzione di tensioni tangenziali σ_{23} agenti sul piano ABCD, positive se dirette in senso contrario all'asse della trave (atteso che la normale uscente dal piano è orientata in senso contrario all'asse X_2), e ad una distribuzione di tensioni tangenziali σ_{32} agenti sui piani verticali e dirette - secondo la convenzione sui segni - verso l'alto sulla sezione a distanza x_3 dalla base, e verso l'alto sulla sezione a distanza $x_3 + dx_3$ dalla base di sinistra.

Imponendo l'equilibrio del volume dV' alla traslazione lungo l'asse x_3 della trave si ha:

$$-\int_{\Sigma'} \sigma_{33}(x_3) dA + \int_{\Sigma'} \sigma_{33}(x_3 + dx_3) dA - \int_{ABCD} \sigma_{23} dA = 0 \quad (1)$$

dove Σ' è l'area della sezione retta sottostante la corda b . Si potrà poi sfruttare l'arbitrarietà di dx_3 per scrivere:

$$\sigma_{33}(x_3 + dx_3) = \sigma_{33}(x_3) + \frac{\partial \sigma_{33}(x_3)}{\partial x_3} dx_3 \quad (2)$$

trascurando i contributi di ordine superiore. Ne segue che la (1) potrà' scriversi:

$$\int_{\Sigma'} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3 dA - \int_{ABCD} \sigma_{23} dA = 0 \tag{3}$$

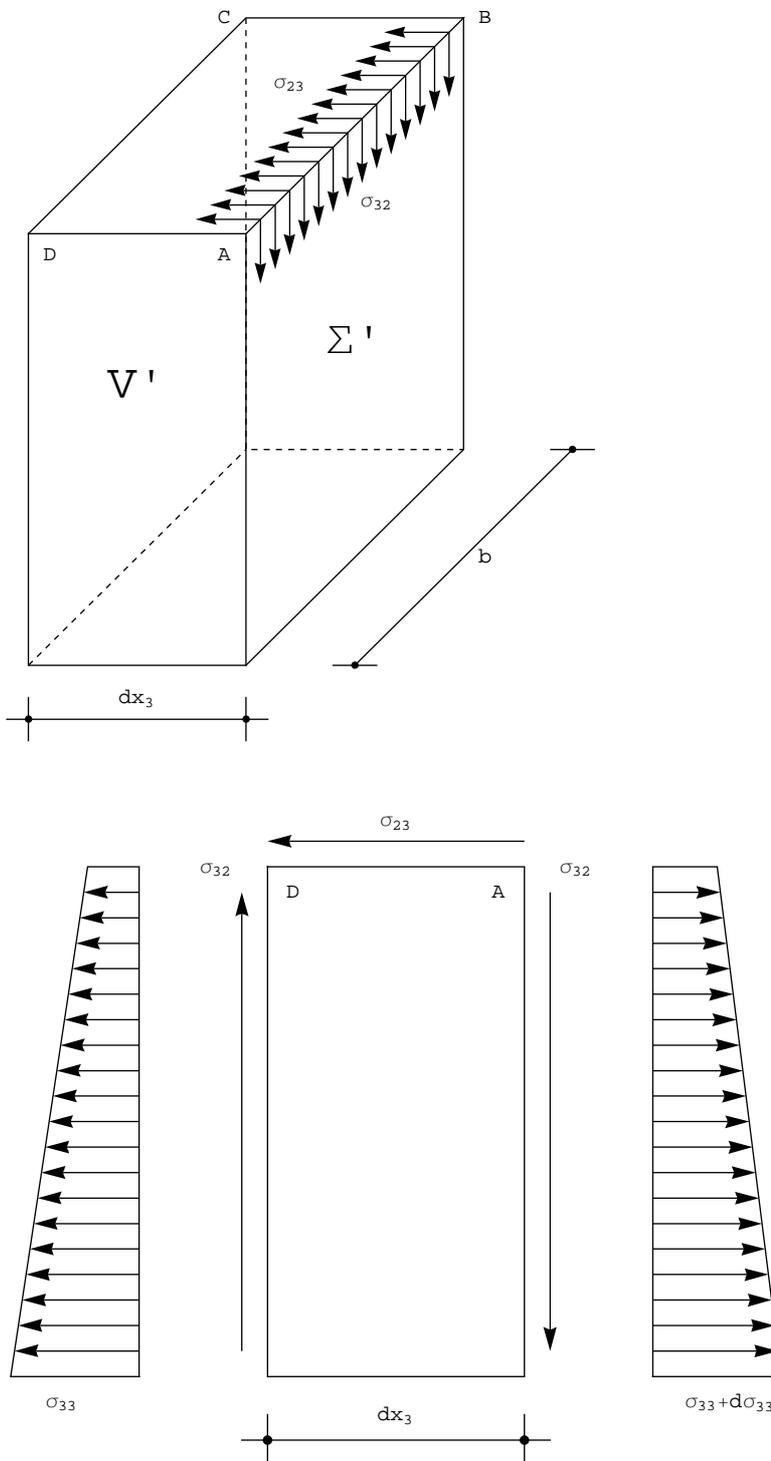


Figura 3 - L'elemento di trave da equilibrare alla Jourawski e le tensioni su di esso agenti

e sfruttando la (69) della Lezione precedente:

$$\sigma_{33} = -\frac{T_2}{I_{11}} x_2 (1 - x_3) \quad (4)$$

si ha:

$$\frac{T_2}{I_{11}} dx_3 \int_{\Sigma'} x_2 dA - \int_{ABCD} \sigma_{23} dA = 0 \quad (5)$$

Indicando con S'_1 il momento statico della parte di sezione retta Σ' rispetto all'asse x_1 baricentrico si ha poi:

$$\frac{T_2 S'_1}{I_{11}} dx_3 - \int_{ABCD} \sigma_{23} dA = 0 \quad (6)$$

Infine, si utilizza la fondamentale:

Ipotesi di Jourawsky - La tensione tangenziale σ_{23} si puo' supporre costante sul piano ABCD

In questa ipotesi, l'integrale e' facilmente risolvibile, ottenendo:

$$\frac{T_2 S'_1}{I_{11}} dx_3 - \sigma_{23} b dx_3 = 0 \quad (7)$$

Data l'arbitrarieta' di dx_3 si giunge infine alla *formula di Jourawski*:

$$\sigma_{23} = \frac{T_2 S'_1}{I_{11} b} \quad (8)$$

che permette il calcolo approssimato della componente tangenziale di tensione σ_{23} senza conoscere la funzione di taglio Φ .

L'altra componente di tensione, σ_{13} , puo' calcolarsi in base alla terza equazione indefinita dell'equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (9)$$

e derivando rispetto ad x_1 :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{13}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \quad (10)$$

Utilizzando la (8) e la (4), si vede che sia il secondo che il terzo termine si annullano, e quindi si puo' dedurre che σ_{13} e' lineare in x_1 . Conoscendo due valori di σ_{13} lungo la corda b , di conseguenza, si puo' ricavare la σ_{13} in qualsiasi altro punto.

Ma nei punti estremi A e B della corda b , (cfr. Figura 4) occorre che sia verificata la condizione di equilibrio:

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0 \quad (11)$$

e quindi la tensione σ_t risultante di σ_{13} e σ_{23} dovra' essere tangente al contorno, come gia' noto dalla teoria generale di De Saint-Venant. Questo risultato permette di ricavare l'andamento di σ_{13} . Se infatti le tangenti al contorno in A ed in B si incontrano nel punto Q, la σ_{13} in un qualsiasi altro punto R di AB puo' esser determinata dalla conoscenza della direzione del vettore σ_t , e del valore della sua componente verticale σ_{23} . Se α e' l'angolo formato tra RQ e l'asse x_2 , si ha:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} \tan \alpha \quad (12)$$

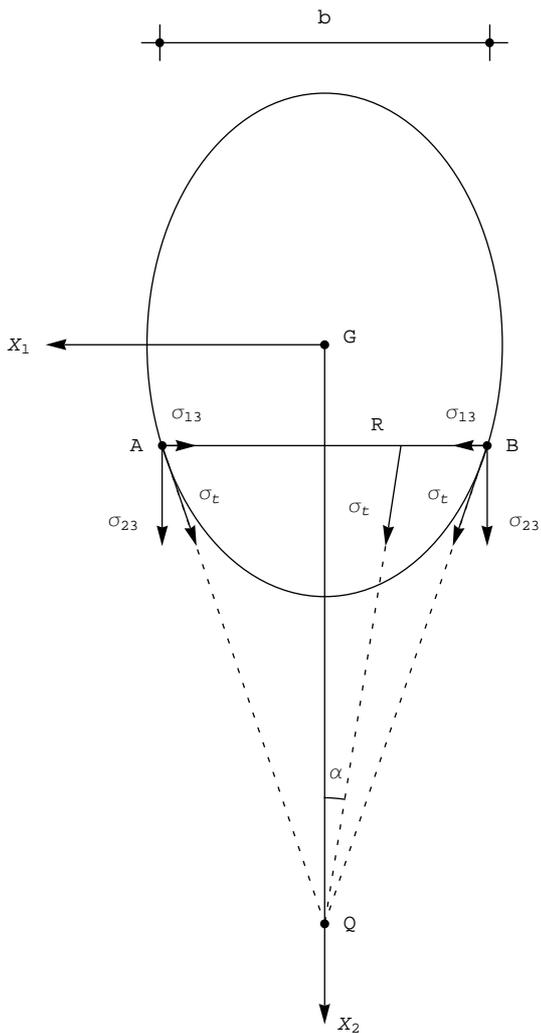
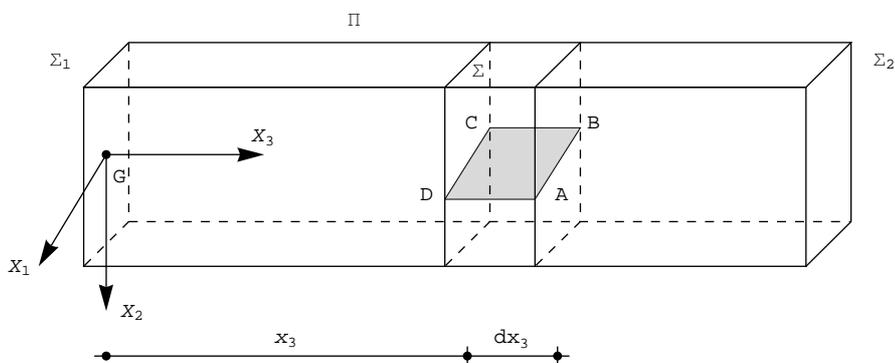


Figura 4. - Il calcolo della componente σ_{13} di tensione

■ Il caso generale

La teoria fin qui discussa e' caratterizzata dall'aver scelto la corda $b = AB$ parallelamente all'asse neutro X_1 , e quindi un piano $ABCD$ parallelo al piano coordinato $X_1 - X_3$. Tuttavia l'ipotesi di Jourawski puo' ritenersi valida su qualunque piano (Figura 5), come si illustrera' in questo paragrafo.



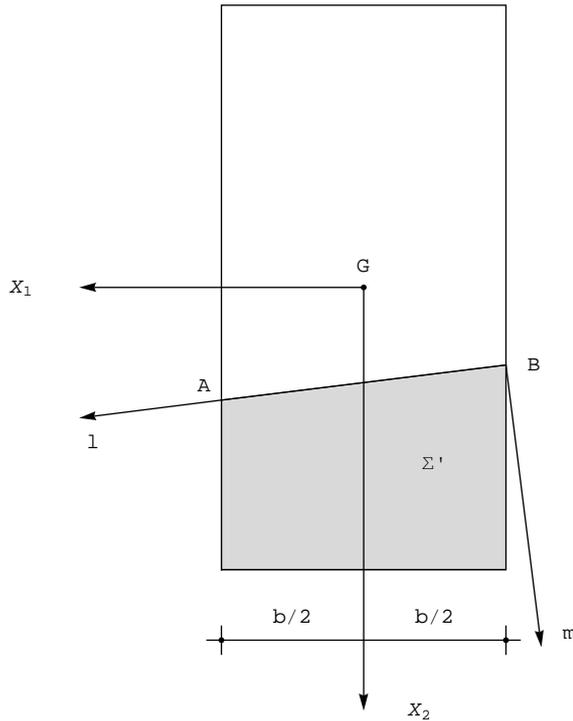


Figura 5 - Il caso della corda generica

Scelta allora una corda AB generica, atta ad identificare il volume di trave dV' , si fissi un sistema di riferimento locale (O, l, m, x_3) , con asse l lungo la corda, e l'asse m ad esso ortogonale, ed in modo che la terna (l, m, x_3) sia levogira. Ne segue che le componenti di tensione che ora entreranno in gioco per l'equilibrio del volume dV' lungo l'asse X_3 sono la tensione normale σ_{33} e la componente tangenziale σ_{m3} , come illustrato in Figura 6:

$$\sigma_{m3} = \frac{T_{x_2} S_1'}{I_{11} b} \quad (13)$$

Le componenti tangenziali σ_{l3} lungo la corda possono calcolarsi, a somiglianza di quanto detto nel caso particolare, partendo dalla terza equazione indefinita dell'equilibrio, che ora si scrive:

$$\frac{\partial \sigma_{l3}}{\partial l} + \frac{\partial \sigma_{m3}}{\partial m} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (14)$$

Si dovrà ora derivare *due* volte rispetto ad l , ottenendo:

$$\frac{\partial^3 \sigma_{l3}}{\partial l^3} + \frac{\partial^3 \sigma_{m3}}{\partial l^2 \partial m} + \frac{\partial^3 \sigma_{33}}{\partial l^2 \partial x_3} = 0 \quad (15)$$

Il secondo termine è nullo, in quanto σ_{m3} è per ipotesi costante lungo la corda, mentre il terzo termine è nullo perché σ_{33} varia linearmente lungo la corda stessa. Ne segue che dovrà essere:

$$\frac{\partial^3 \sigma_{l3}}{\partial l^3} = 0 \quad (16)$$

e quindi l'andamento di σ_{l3} lungo la corda sarà parabolico:

$$\sigma_{l3} = a l^2 + b l + c \quad (17)$$

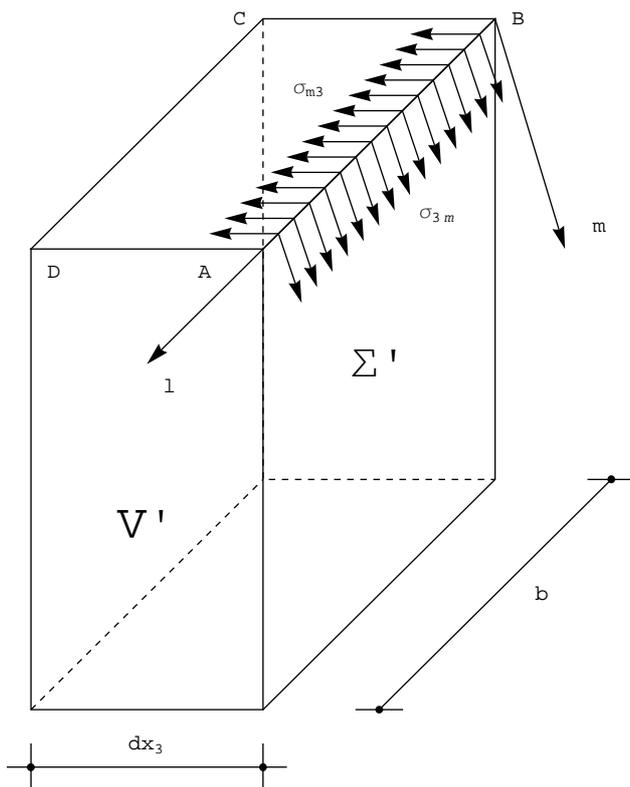


Figura 6 -Le tensioni tangenziali nel caso della corda non parallela all'asse neutro

Come già discusso, è possibile conoscere i due valori della σ_{13} agli estremi della corda, sfruttando la conoscenza della direzione del vettore τ . Occorre ora un terzo valore, che potrà essere fornito dalla pendenza del diagramma in un punto qualsiasi. Tale pendenza si calcola, a partire dalla (14), come:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial l} = - \frac{\partial \sigma_{m3}}{\partial m} - \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = - \frac{T_2}{I_{11}} \left(\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{S_1'}{b} \right) - x_2 \right) = - \frac{T_2}{I_{11}} \left(\frac{1}{b} \frac{\partial S_1'}{\partial m} - \frac{S_1'}{b^2} \frac{\partial b}{\partial m} - x_2 \right) \tag{18}$$

Il fattore di taglio

L'energia di deformazione tagliante si scriverà ora, adottando le espressioni approssimate di Jourawski:

$$L_t = \frac{1}{2} \int_V (2 \sigma_{13} e_{13} + 2 \sigma_{23} e_{23}) dV = \frac{1}{2 G} \int_V (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) dV = \frac{T_2^2}{2 G I_{11}^2} \int_E \frac{S_1'^2}{b^2} (1 + \tau g^2 \alpha) dA \tag{19}$$

Volendo scrivere l'energia di deformazione tagliante nella forma:

$$L_t = \frac{\kappa}{2} \frac{T_2^2}{GA} \tag{20}$$

occorrerà introdurre un *fattore di taglio*, fornito da:

$$\kappa = \frac{A}{I_{11}^2} \int_{\Sigma} \frac{S_1'^2}{b^2} (1 + \tau g^2 \alpha) dA \quad (21)$$

La sezione rettangolare

Si consideri la trave a sezione rettangolare di luce l , e sia essa soggetta ad uno sforzo di taglio diretto secondo una delle direzioni centrali di inerzia, ad esempio la verticale, come illustrato in Figura 7. Ne segue che la flessione che sempre si accompagna allo sforzo di taglio sarà una flessione retta con asse di sollecitazione verticale, $s = X_2$ ed asse neutro X_1 .

Identificata la generica corda parallela all'asse neutro, a distanza x_2 da esso, il momento statico dell'area ombreggiata rispetto all'asse X_1 è fornito da:

$$S_1' = b \left(\frac{h}{2} - x_2 \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - x_2 \right) + x_2 \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (22)$$

e poiché il momento di inerzia baricentrico I_{11} dell'intera sezione rispetto all'asse X_1 è pari a:

$$I_{11} = \frac{bh^3}{12} \quad (23)$$

si ha subito, per la formula di Jourawski:

$$\sigma_{23} = \frac{TS_1'}{I_{11} b} = \frac{6 T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) \quad (24)$$

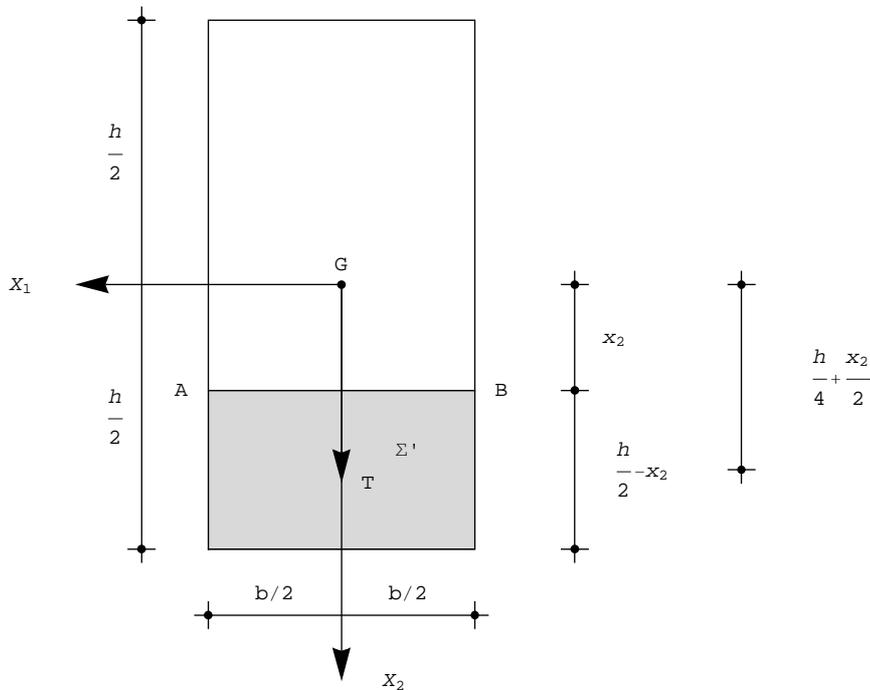


Figura 7 - La sezione rettangolare soggetta a taglio

La componente di tensione σ_{23} varia quindi linearmente lungo l'altezza, si annulla agli estremi, dove $x_2 = \pm h/2$, e raggiunge il valore massimo in mezzeria, ossia in corrispondenza dell'asse neutro, dove $x_2 = 0$ (cfr, Figura 8):

$$\sigma_{23 \max} = \frac{3 T}{2 b h} \tag{25}$$

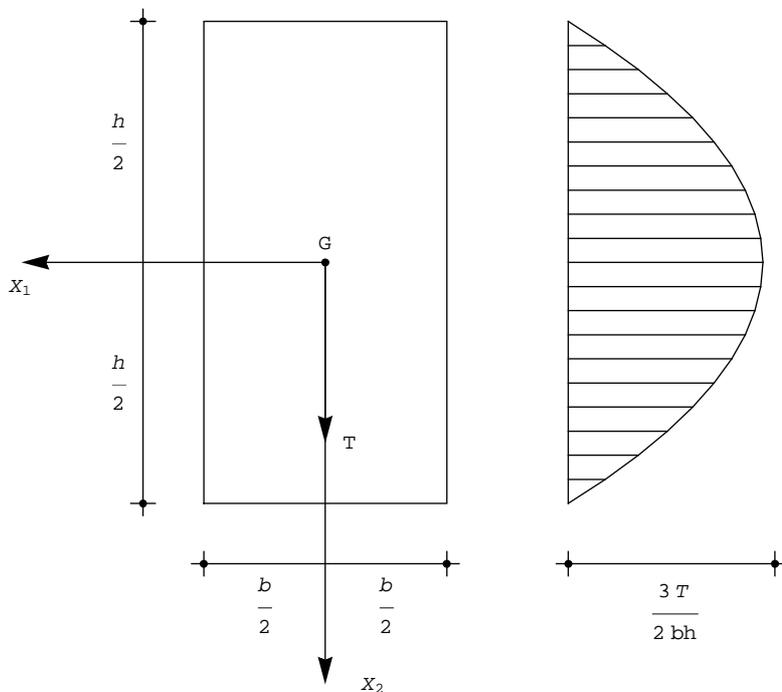


Figura 8 - Il diagramma delle tensioni per la sezione rettangolare

La risultante delle tensioni $\sigma_{23}e'$ una forza T_r pari allo sforzo T , baricentrale e diretta verso il basso:

$$T_r = \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_1 dx_2 = \frac{6 T}{bh^3} \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) dx_1 dx_2 = T \tag{26}$$

La componente σ_{13} e' ovunque nulla, poiche' e' ovunque $\alpha = 0$, mentre il fattore di taglio puo' calcolarsi come:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{A}{I_{11}^2} \int_{\Sigma} \frac{S_1'^2}{b^2} (1 + \text{tg}^2 \alpha) dA = \\ &= 12^2 \frac{bh}{b^2 h^6} \frac{1}{b^2} \int_{\Sigma} \frac{b^2}{4} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right)^2 dA = 12^2 \frac{1}{4 h^5} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right)^2 dx_2 \end{aligned} \tag{27}$$

e svolgendo l'integrale si ha, in definitiva:

$$\kappa = \frac{6}{5} \tag{28}$$

Note

[Jourawsky] - Traggo queste notizie da S.P. Timoshenko, "History of Strength of Materials", McGraw-Hill Book Company 1953, pagg. 141-142:

Jourawsky [1821-1891] si diplomò nel 1842 presso l'Istituto di Ingegneria delle Comunicazioni di S. Pietroburgo, dove ebbe per professori M.V. Ostrogradsky (matematica) e A.T. Kupffer (resistenza dei materiali). Sviluppò la teoria degli sforzi da taglio nelle sezioni rettangolari durante la progettazione dei ponti in legno per la ferrovia Mosca-S. Pietroburgo, negli anni 1844-50, presentandola all'Accademia russa delle scienze nel 1854. Per essa, ottenne il premio Demidoff. [Torna al testo]

Grafici