
Lezione 28 - Taglio, impostazione generale

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 29 gennaio 2012]

Si studia in questa lezione l'ultimo caso di sollecitazione elementare, caratterizzata da una distribuzione di tensioni tangenziale ed assiale:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ipotizzando che la tensione normale sia funzione lineare delle x_2 sulla sezione di sinistra:

$$\sigma_{33} (x_3 = 0) = c x_2 \quad (2)$$

e che si annulli sulla sezione di destra:

$$\sigma_{33} (x_3 = 1) = 0 \quad (3)$$

Assumendo infine una variazione lineare di σ_{33} lungo l'asse si giunge alla ipotizzata forma della tensione normale:

$$\sigma_{33} (x_2, x_3) = c x_2 \left(1 - \frac{x_3}{1} \right) \quad (4)$$

Le tensioni tangenziali, per rispettare le prime due equazioni indefinite dell'equilibrio elastico non dovranno dipendere dalla x_3 :

$$\sigma_{13} = \sigma_{13} (x_1, x_2) \quad (5)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{23} (x_1, x_2) \quad (6)$$

La deduzione degli spostamenti

Dalla distribuzione di tensioni (1) si trae lo stato deformativo:

$$e_{11} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} = -\frac{\nu}{E} c x_2 \left(1 - \frac{x_3}{1} \right) \quad (7)$$

$$e_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} = -\frac{\nu}{E} c x_2 \left(1 - \frac{x_3}{1} \right) \quad (8)$$

$$e_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} = \frac{c}{E} c x_2 \left(1 - \frac{x_3}{1} \right) \quad (9)$$

$$e_{12} = 0 \quad (10)$$

$$e_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} = e_{13} (x_1, x_2) \quad (11)$$

$$e_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} = e_{23}(x_1, x_2) \quad (12)$$

I corrispondenti spostamenti potranno calcolarsi integrando le sei seguenti relazioni:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\nu}{E} c x_2 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\nu}{E} c x_2 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{c}{E} x_2 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\sigma_{13}}{G} \quad (17)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\sigma_{23}}{G} \quad (18)$$

Dalle prime tre relazioni si trae subito:

$$u_1 = -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) + \phi_1(x_2, x_3) \quad (19)$$

$$u_2 = -\frac{\nu}{2E} c x_2^2 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) + \phi_2(x_1, x_3) \quad (20)$$

$$u_3 = \frac{c}{E} x_2 x_3 - \frac{c}{2El} x_2 x_3^2 + \phi_3(x_1, x_2) \quad (21)$$

La quarta relazione porge allora, utilizzando le (19-20):

$$-\frac{\nu}{E} c x_1 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = 0 \quad (22)$$

e quindi:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = \frac{\nu}{E} c x_1 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \quad (23)$$

da cui:

$$\phi_2 = \frac{\nu}{2E} c x_1^2 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) + \psi_2(x_1, x_3) \quad (24)$$

e quindi la seconda componente di spostamento e' divenuta:

$$u_2 = -\frac{\nu}{2E} c (x_2^2 - x_1^2) \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) + \psi_2(x_1, x_3) \quad (25)$$

Dalla (18) puo' trarsi ora:

$$\frac{\nu}{2El} c x_2^2 - \frac{\nu}{2El} c x_1^2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + \frac{c}{E} x_3 - \frac{c}{2El} x_3^2 + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} = \frac{\sigma_{23}}{G} \quad (26)$$

da cui si deduce:

$$\sigma_{23} = \frac{G\nu}{2 E I} c (x_2^2 - x_1^2) + G \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \quad (27)$$

e:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} = -\frac{c}{E} x_3 + \frac{c}{2 E I} x_3^2 \quad (28)$$

da cui:

$$\psi_2 = -\frac{c}{2 E} x_3^2 + \frac{c}{6 E I} x_3^3 + \chi_2 (x_1) \quad (29)$$

La seconda componente di spostamento si scriverà ora:

$$u_2 = -\frac{\nu}{2 E} c x_2^2 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) + \frac{\nu}{2 E} c x_1^2 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) - \frac{c}{2 E} x_3^2 + \frac{c}{6 E I} x_3^3 + \chi_2 (x_1) \quad (30)$$

ossia, semplificando:

$$u_2 = -\frac{\nu}{2 E} c \left(x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu}\right) + \frac{c}{E} \left(\frac{x_3^2}{6} + \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right) \frac{x_3}{l} + \chi_2 (x_1) \quad (31)$$

Infine, dalla (17) si deduce:

$$\frac{\nu}{E I} c x_1 x_2 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} = \frac{\sigma_{13}}{G} \quad (32)$$

e quindi sarà:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} = 0 \rightarrow \phi_1 = \phi_1 (x_2) \quad (33)$$

$$\sigma_{13} = \frac{\nu G}{E I} c x_1 x_2 + G \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \quad (34)$$

La terna di spostamenti in esame potrà quindi esprimersi come:

$$u_1 = -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) + \phi_1 (x_2) \quad (35)$$

$$u_2 = -\frac{\nu}{2 E} c \left(x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu}\right) + \frac{c}{E} \left(\frac{x_3^2}{6} + \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right) \frac{x_3}{l} + \chi_2 (x_1, x_3) \quad (36)$$

$$u_3 = \frac{c}{E} x_2 x_3 - \frac{c}{2 E I} x_2 x_3^2 + \phi_3 (x_1, x_2) \quad (37)$$

Sarà ora:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{\nu}{E} c x_1 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\nu}{E} c x_1 - \frac{c\nu}{E} x_1 \frac{x_3}{l} + \frac{\partial \chi_2}{\partial x_1} =$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \chi_2}{\partial x_1} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\sigma_{13}}{G} \rightarrow \frac{\nu}{E l} c x_1 x_2 + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} = \frac{\sigma_{13}}{G} \quad (39)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\sigma_{23}}{G} \rightarrow -\frac{c}{E} x_3 + \frac{c}{2 E l} x_3^2 + \frac{c \nu}{2 E l} (x_2^2 - x_1^2) + \quad (40)$$

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial x_3} + \frac{c}{E} x_3 - \frac{c}{2 E l} x_3^2 + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} = \frac{\sigma_{23}}{G} \rightarrow \frac{\partial \chi_2}{\partial x_3} = 0$$

Si puo' concludere che il campo di spostamenti $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1(x_2) \\ \chi_2(x_1) \\ 0 \end{pmatrix}$ rappresenta uno spostamento rigido, e puo' essere trascurato, e quindi la terna definitiva di spostamenti sara':

$$u_1 = -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) \quad (41)$$

$$u_2 = -\frac{\nu}{2 E} c \left(x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu}\right) + \frac{c}{E} \left(\frac{x_3^2}{6} + \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\right) \frac{x_3}{l} \quad (42)$$

$$u_3 = \frac{c}{E} x_2 x_3 - \frac{c}{E l} \left(\frac{x_2 x_3^2}{2} + \Phi(x_1, x_2)\right) \quad (43)$$

avendo definito per comodita' una nuova funzione $\Phi(x_1, x_2) = \frac{-E l}{c} \phi_3$

La deduzione della funzione Φ

La terna di spostamenti (41-43) conduce, per il modo in cui e' stata costruita, alle tensioni:

$$\sigma_{13} = G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{G c}{E l} \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \quad (44)$$

$$\sigma_{23} = G \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{G c}{E l} \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \quad (45)$$

$$\sigma_{33} = c x_2 \left(1 - \frac{x_3}{l}\right) \quad (46)$$

Le prime due equazioni dell'equilibrio elastico sono soddisfatte, in quanto le tensioni tangenziali non dipendono dalla variabile x_3 . La terza equazione:

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = 0 \quad (47)$$

si traduce in un'equazione da soddisfare nel dominio piano della sezione retta:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = -2 x_2 \quad (48)$$

Sul contorno Γ occorrera' soddisfare l'unica condizione ai limiti non identicamente nulla:

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0 \quad (49)$$

che si traduce nello scrivere:

$$\left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) n_1 + \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) n_2 = 0 \quad (50)$$

ossia in una condizione sulla derivata normale al contorno della funzione Φ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nu x_1 x_2 \frac{dx_1}{dn} + \nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \frac{dx_2}{dn} \quad (51)$$

La deduzione delle caratteristiche

Sulla base di destra Σ_2 la tensione normale si annulla, e quindi si ha:

$$F_3^{(2)} = \mathcal{M}_1^{(2)} = \mathcal{M}_2^{(2)} = 0 \quad (52)$$

e poi ancora, secondo le definizioni:

$$F_1^{(2)} = \int_{\Sigma_2} \sigma_{13} dA = \frac{Gc}{El} \int_{\Sigma_2} \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) dA \quad (53)$$

$$F_2^{(2)} = \int_{\Sigma_2} \sigma_{23} dA = \frac{Gc}{El} \int_{\Sigma_2} \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) dA \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3^{(2)} &= \int_{\Sigma_2} (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) dA = \\ &= \frac{Gc}{El} \int_{\Sigma_2} \left[\left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) x_1 - \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) x_2 \right] dA \end{aligned} \quad (55)$$

ossia, semplificando:

$$\mathcal{M}_3^{(2)} = \frac{Gc}{El} \int_{\Sigma_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} x_1 \right) dA - \frac{Gc\nu}{2El} \int_{\Sigma_2} (x_1^3 + x_1 x_2^2) dA \quad (56)$$

Sulla base di sinistra, invece, la tensione normale assume il valore $\sigma_{33} = cx_2$ e di conseguenza sorgono le caratteristiche:

$$F_3^{(1)} = - \int_{\Sigma_1} \sigma_{33} dA = -c \int_{\Sigma_1} x_2 dA = 0 \quad (57)$$

se l'origine degli assi si assume coincidente con il baricentro della sezione,

$$\mathcal{M}_1^{(1)} = - \int_{\Sigma_1} \sigma_{33} x_2 dA = -c \int_{\Sigma_1} x_2^2 dA = -cI_{11} \quad (58)$$

$$\mathcal{M}_2^{(1)} = \int_{\Sigma_1} \sigma_{33} x_1 dA = c \int_{\Sigma_1} x_1 x_2 dA = cI_{12} \quad (59)$$

Per l'equilibrio dell'intera trave, poi, dovrà essere:

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} &= -F_1^{(2)} \\ F_2^{(1)} &= -F_2^{(2)} \\ \mathcal{M}_3^{(1)} &= -\mathcal{M}_3^{(2)} \end{aligned} \quad (60)$$

ed anche:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{(1)} &= F_2^{(2)} l \\ \mathcal{M}_2^{(1)} &= -F_1^{(2)} l \end{aligned} \quad (61)$$

Le caratteristiche della sollecitazione esterna sono quindi quelle di Figura 1: sulla base di destra agiscono due forze secondo gli assi x_1 ed x_2 ed una coppia torcente, mentre sulla base di sinistra agiscono due forze secondo gli assi x_1 ed x_2 , uguali e contrarie a quelle agenti sulla sezione di sinistra, una coppia torcente uguale e contraria a quella agente su Σ_2 , e due coppie flettenti secondo gli assi x_1 ed x_2 .

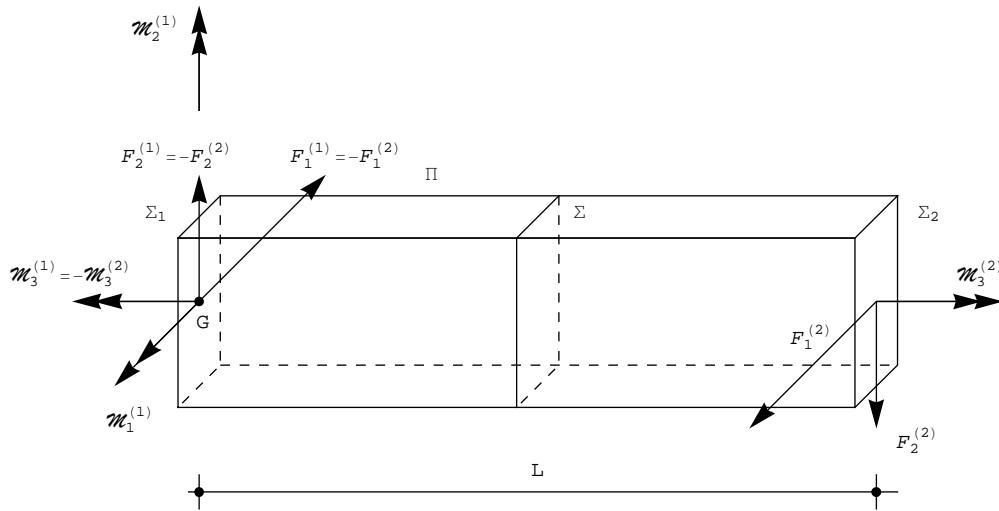


Figura 1 - Le caratteristiche della sollecitazione esterna per il quinto caso di De Saint-Venant

Le corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna, sulla generica sezione retta Σ , sono fornite da

- uno sforzo di taglio $T_1 = F_1^{(2)}$, costante lungo la trave
- uno sforzo di taglio $T_2 = F_2^{(2)}$, costante lungo la trave
- un momento torcente $M_t = \mathcal{M}_3^{(2)}$, costante lungo la trave
- un momento flettente $M_1 = -T_2(l - x_3)$ linearmente variabile lungo l'asse
- un momento flettente $M_2 = T_1(l - x_3)$ linearmente variabile lungo l'asse

Le due forze di taglio possono comporsi in una singola forza di intensità $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$ agente secondo una retta π e le due coppie flettenti possono ridursi ad una singola coppia M flettente di modulo $T(l - x_3)$ il cui asse è normale al piano passante per π e parallelo all'asse della trave. Si giunge così alla situazione di Figura 2b). Un'ulteriore riduzione può operarsi facendo agire la forza T a distanza d_t dal baricentro, con d_t tale che risulti $M_t = T d_t$, giungendo alla situazione di Figura 2c). Si noti che l'asse di sollecitazione flessionale s , per quanto detto, è parallelo alla retta d'azione dello sforzo di taglio.

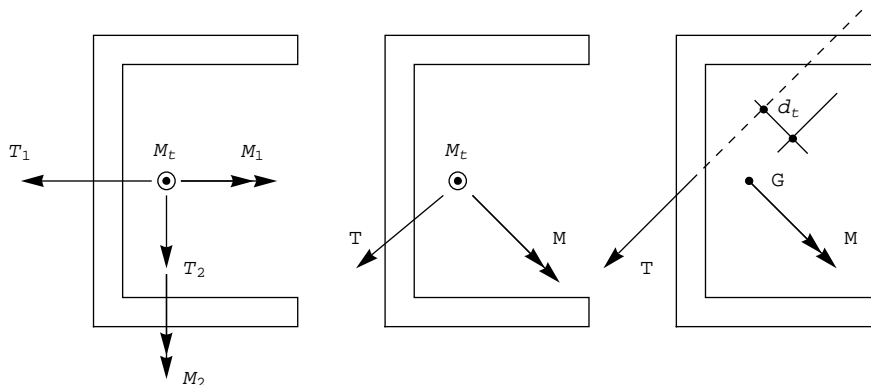


Figura 2 - Le caratteristiche della sollecitazione interna su una generica sezione retta

Talvolta questa sollecitazione prende il nome, per ovvi motivi, di *sollecitazione di flessione, taglio e torsione*, e talvolta anche di *sollecitazione di flessione non uniforme*.

La forma finale di spostamenti e tensioni

Dalla (58) si trae un'espressione della costante c:

$$c = - \frac{\mathcal{M}_1^{(1)}}{I_{11}} \tag{62}$$

e poiche', come noto, $\mathcal{M}_1^{(1)} = - M_1(x_3 = 0)$, si ottiene anche:

$$c = \frac{M_1(x_3 = 0)}{I_{11}} = - \frac{T_2 l}{I_{11}} \tag{63}$$

Sostituendo la (63) nell'espressione degli spostamenti, ed operando qualche semplificazione si ottiene la forma finale degli spostamenti:

$$u_1 = \nu \frac{T_2}{EI_{11}} x_1 x_2 (1 - x_3) \tag{64}$$

$$u_2 = \nu \frac{T_2}{2 EI_{11}} \left(x_2^2 - x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu} \right) (1 - x_3) + \frac{T_2}{EI_{11}} \frac{x_3^3}{3} \tag{65}$$

$$u_3 = - \frac{T_2}{EI_{11}} x_2 x_3 \left(1 - \frac{x_3}{2} \right) + \frac{T_2}{EI_{11}} \Phi(x_1, x_2) \tag{66}$$

Le tensioni, infine, saranno fornite da:

$$\sigma_{13} = - \frac{G}{E} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) = - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \tag{67}$$

$$\sigma_{23} = - \frac{G}{E} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) = - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \tag{68}$$

$$\sigma_{33} = - \frac{T_2}{I_{11}} x_2 (1 - x_3) \tag{69}$$

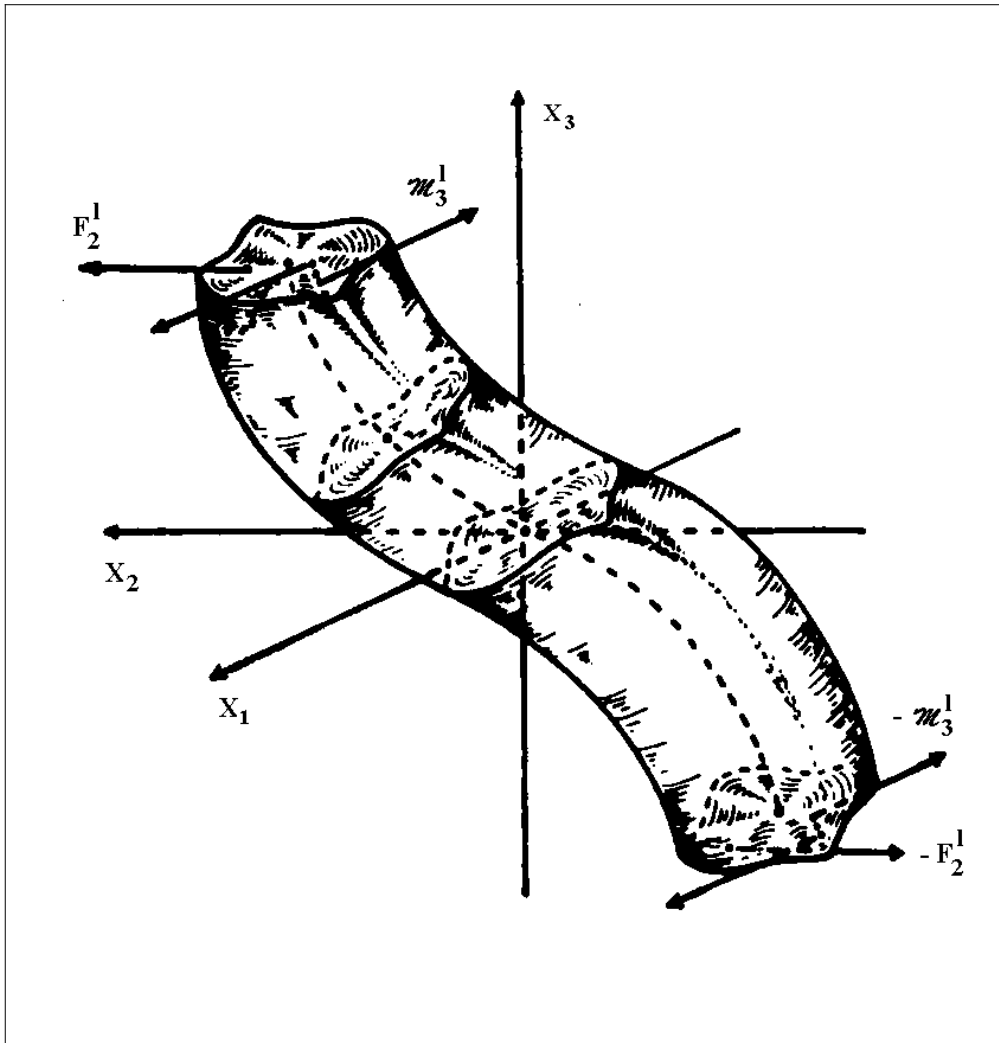


Figura 3. La sollecitazione da taglio, adattata da G.Fichera "Metodi matematici nuovi nella Fisica Matematica classica"

L'energia di deformazione

In base alla definizione, puo' calcolarsi l'energia di deformazione connessa alla sollecitazione da taglio:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e} \, dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{33} e_{33} + 2 \sigma_{13} e_{13} + 2 \sigma_{23} e_{23}) \, dV = L_f + L_t \quad (70)$$

Si e' suddivisa l'energia di deformazione in una aliquota flessione, in termini di tensioni normali, ed in una aliquota tagliante, in termini di tensioni tangenziali. Per la prima si ha agevolmente:

$$L_f = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} \, dV = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 \, dV = \frac{T_2^2}{2EI_{11}^2} \int_0^1 (1-x_3)^2 \int_{\Sigma} x_2^2 \, dA \, dx_3 = \frac{T_2^2}{6EI_{11}} l^3 \quad (71)$$

mentre la seconda puo' esprimersi come:

$$L_t = \frac{1}{2} \int_V (2 \sigma_{13} e_{13} + 2 \sigma_{23} e_{23}) dV = \frac{1}{2G} \int_V (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) dV =$$

$$\frac{G}{2E^2} \frac{T_2^2 l}{I_{11}^2} \int_{\Sigma} \left(\left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right) dA$$

ed utilizzando la nota relazione $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ si potrà infine scrivere:

$$L_t =$$

$$\frac{1}{2E} \frac{T_2^2 l}{I_{11}^2} \frac{1}{2(1+\nu)} \int_{\Sigma} \left(\left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right) dA \quad (73)$$

Volendo scrivere l'energia di deformazione tagliante nella forma:

$$L_t = \frac{\kappa}{2} \frac{T_2^2 l}{GA} \quad (74)$$

occorrerà introdurre un *fattore di taglio*, fornito da:

$$\kappa = \frac{GA}{2E} \frac{I_{11}^2}{I_{11}^2 (1+\nu)} \int_{\Sigma} \left(\left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right) dA \quad (75)$$

Si noti che l'energia di deformazione flessionale è proporzionale alla luce della trave elevata al cubo, mentre l'energia di deformazione da taglio è proporzionale alla luce della trave. Ne segue che per travi snelle l'energia flessionale predomina nettamente, mentre per travi tozze l'energia tagliante diviene non trascurabile.

Lo studio delle tensioni tangenziali

A somiglianza di quanto indicato per la sollecitazione di torsione, è utile calcolare la divergenza ed il rotore del campo vettoriale delle tensioni tangenziali $\tau = (\sigma_{13}, \sigma_{23})$. Si ha, a partire dalle definizioni delle tensioni tangenziali:

$$\operatorname{div} \tau = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \right) -$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) \right) = - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} x_2 + \quad (76)$$

$$\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} x_2 + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}$$

ed infine, tenendo conto della condizione (48):

$$\operatorname{div} \tau = - \frac{T_2}{I_{11}} x_2 \quad (77)$$

Allo stesso risultato si può giungere attraverso la terza equazione indefinita dell'equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (78)$$

che fornisce:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = - \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(- \frac{T_2}{I_{11}} x_2 (1 - x_3) \right) = - \frac{T_2}{I_{11}} x_2 \quad (79)$$

Le tre componenti del rotore di $\boldsymbol{\tau}$ si possono calcolare in base alla definizione:

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau})_1 = - \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \quad (80)$$

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau})_2 = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad (81)$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau})_3 &= \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2} = \\ &= - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu x_1 x_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \right) = \\ &= - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{T_2}{I_{11}} \left(-\nu x_1 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} - \nu x_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \\ &= \frac{\nu}{1+\nu} \frac{T_2}{I_{11}} x_1 \end{aligned} \quad (82)$$

Alternativamente, la (82) puo' ottenersi attraverso l'utilizzo delle equazioni di congruenza interna, e piu' precisamente dal secondo gruppo di esse. Ed infatti, dalle tre equazioni:

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(- \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (83)$$

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(- \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} \right) \quad (84)$$

$$\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(- \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} \right) \quad (85)$$

si osserva subito che l'ultima e' identicamente soddisfatta, mentre le altre due si semplificano in:

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(- \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} \right) \quad (86)$$

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(- \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} \right) \quad (87)$$

e poiche' :

$$e_{11} = e_{22} = - \frac{\nu}{E} \sigma_{33} = \nu \frac{T_2}{EI_{11}} x_2 (1 - x_3) \quad (88)$$

le (86-87) divengono:

$$\frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(- \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} \right) = -\nu \frac{T_2}{EI_{11}} \quad (89)$$

$$\frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(- \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (90)$$

ed anche, ovviamente:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (91)$$

Ne segue che la terza componente del rotore di τ non dipende da x_2 e da x_3 , mentre dipende linearmente da x_1 . Si potrà scrivere:

$$(\text{rot } \tau)_3 = 2 G \nu \frac{T_2}{EI_{11}} x_1 + k = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{T_2}{I_{11}} x_1 + k \quad (92)$$

Alla costante di integrazione k può darsi un significato fisico osservando che la (92) è stata tratta - a partire dalle equazioni di congruenza interna - senza specificare la posizione dello sforzo di taglio T , ma solo la sua direzione. Se quindi la distanza tra la retta d'azione di T ed il baricentro è pari proprio a d_t , allora sono valide le (13), e $k = 0$, mentre se la retta di azione di T viene spostata, sorge una sollecitazione aggiuntiva di torsione, caratterizzata da una coppia torcente:

$$\mathcal{M}_3^{(2)} = T (d - d_t) \quad (93)$$

Tale sollecitazione *aggiuntiva* corrisponde ad uno stato tensionale tangenziale a rotore costante, e pari proprio a $k = 2G\theta'$. Ricordando poi che $\theta' = M_t/C_t$, si potrà scrivere:

$$k = 2 \frac{G}{C_t} T (d - d_t) \quad (94)$$

e quindi la (23) diviene:

$$(\text{rot } \tau)_3 = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{T_2}{I_{11}} x_1 + 2 \frac{G}{C_t} T (d - d_t) \quad (95)$$

Grafici