
Lezione 27 - Torsione nelle sezioni circolari ed ellittiche

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 27 agosto 2011]

In questa lezione si applicano i risultati della lezione precedente allo studio di alcune sezioni di forma geometrica semplice, a partire dalla sezione circolare. Per essa, come accennato nell'introduzione della lezione precedente, la teoria di Coulom fornisce risultati corretti, poiché gli ingobbimenti sono nulli.

Si studia poi la sezione ellittica, la cui importanza deriva sia da motivi storici che dalla possibilità di ottenere semplici formule approssimate e valide per qualsiasi sezione.

La torsione nelle travi a sezione circolare

Si consideri una trave di lunghezza l , a sezione circolare di raggio R , e si ipotizzi di voler particularizzare ad essa i risultati della lezione precedente. L'origine del sistema di riferimento, che finora è rimasto arbitrario, potrà essere convenientemente spostato nel baricentro della sezione retta, sicché una semplice similitudine geometrica permette di scrivere (cfr. Figura 1):

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad (1)$$

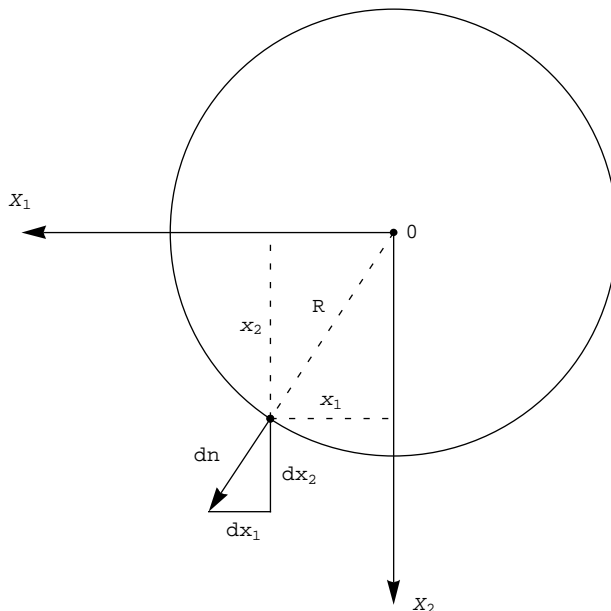


Figura 1 - La sezione circolare

e di conseguenza la derivata normale (cfr eqn(24) della Lezione precedente) della funzione di torsione dovrà essere pari a:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = -x_1 \frac{dx_2}{dn} + x_2 \frac{dx_1}{dn} = 0 \quad (2)$$

La funzione di torsione potrà quindi essere assunta pari ad una qualsiasi costante, e conseguentemente la sezione retta si manterra' piana, l'integrale di Dirichlet si annulla, e quindi il fattore di torsione sarà pari ad 1. Le tensioni saranno fornite dalle (3) della Lezione precedente:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= -\frac{M_t}{I_p} x_2 \\ \sigma_{23} &= \frac{M_t}{I_p} x_1\end{aligned}\quad (3)$$

ed il vettore τ delle tensioni tangenziali avrà intensità pari a:

$$\tau = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \frac{M_t}{I_p} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{M_t}{I_p} r = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r \quad (4)$$

Nota - Ed infatti il momento di inerzia polare di una sezione circolare può calcolarsi come:

$$I_p = \int_{\Sigma} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2} \quad (5)$$

Quindi la tensione tangenziale assume valore costante su ciascuna circonferenza concentrica al contorno, assumendo il suo valore massimo sul contorno esterno, dove si ha:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} R = \frac{2 M_t}{\pi R^3} \quad (6)$$

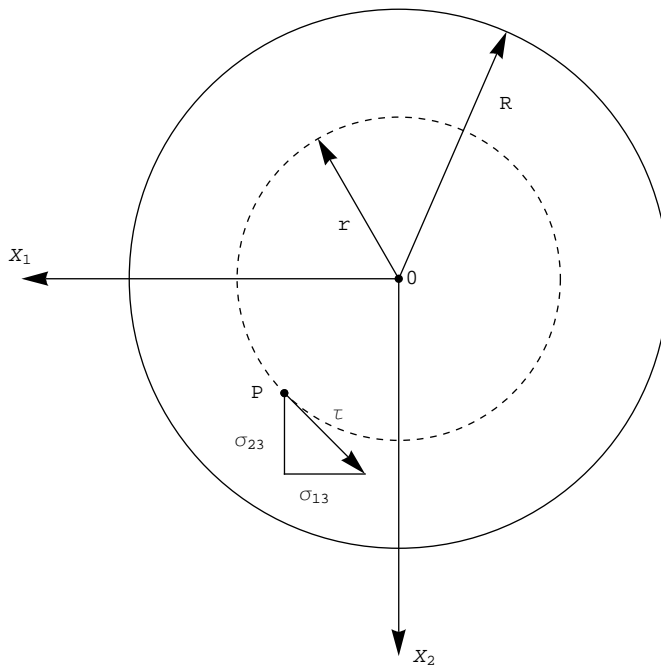


Figura 2 - Lo stato tensionale su una sezione circolare soggetta a torsione

Si consideri il generico punto P, di coordinate (x_1, x_2) , e si calcoli il prodotto scalare tra il vettore $\tau = (\sigma_{13}, \sigma_{23})$ ed il vettore $\overrightarrow{OP} = (x_1, x_2)$:

$$\tau \cdot \overrightarrow{OP} = \sigma_{13} x_1 + \sigma_{23} x_2 = 0 \quad (7)$$

Ne segue che il vettore τ dello stato tensionale è ortogonale al vettore \overrightarrow{OP} , come illustrato in Figura 2.

Infine, l'angolo specifico di torsione, in base alla (41) della Lezione precedente, puo' scriversi:

$$\theta' = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{2 M_t}{G\pi R^4} \quad (8)$$

■ La sezione a corona circolare

Si consideri ora una sezione circolare cava, con raggio esterno R_e e raggio interno R_i , illustrata in Figura 3. Per ambedue i contorni vale ancora la condizione (2), e quindi anche in questo caso puo' scegliersi una funzione Ψ costante. Ne segue che il fattore di torsione resta unitario, e che resta valida l'ipotesi di planeita' delle sezioni rette. Le tensioni sono fornite dalle (3), ed il vettore τ avra' intensita':

$$\tau = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = \frac{M_t}{I_p} \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{M_t}{I_p} r = \frac{2 M_t}{\pi (R_e^4 - R_i^4)} r \quad (9)$$

raggiungendo il suo valore massimo sul contorno esterno, dove vale:

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_t R_e}{\pi (R_e^4 - R_i^4)} \quad (10)$$

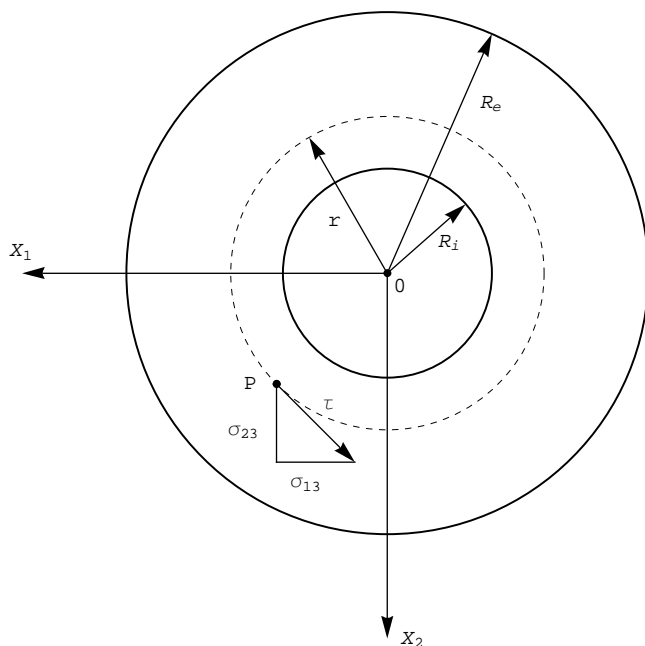


Figura 3. La sezione a corona circolare ed il suo stato tensionale

Infine, l'angolo specifico di torsione vale:

$$\theta' = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{2 M_t}{G\pi (R_e^4 - R_i^4)} \quad (11)$$

La sezione ellittica

Nello spirito del metodo semi-inverso si ipotizzi ora che la funzione di torsione Ψ sia fornito dalla funzione, sicuramente armonica:

$$\Psi(x_1, x_2) = K x_1 x_2 \quad (12)$$

dove K e' una costante da determinare. Con questa assunzione, la condizione al contorno Γ fornita dalla (19) della Lezione precedente potra' essere scritta, utilizzando anche le (23) della stessa Lezione:

$$(K x_2 - x_2) \frac{dx_2}{ds} - (K x_1 + x_1) \frac{dx_1}{ds} = 0 \quad (13)$$

$$\text{ossia :} \quad (14)$$

$$x_1 \frac{dx_1}{ds} + \frac{1-K}{1+K} x_2 \frac{dx_2}{ds} = 0 \quad (15)$$

ed ancora:

$$\frac{d}{ds} \left(x_1^2 + \frac{1-K}{1+K} x_2^2 \right) = 0 \quad (16)$$

ed integrando, infine:

$$x_1^2 + \frac{1-K}{1+K} x_2^2 = \text{cost.} \quad (17)$$

E' questa un'equazione che deve valere in ciascun punto del contorno, e come e' immediato vedere, essa e' l'equazione di una ellisse.

Ed infatti, un'ellisse di semiassi a e b avra' equazione, in un riferimento con origine nel baricentro ed assi coordinati orientati secondo i semiassi, fornita da:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad (18)$$

e dal paragone tra la (18) e la (17) puo' ricavarsi la costante K :

$$K = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \quad (19)$$

Si puo' allora concludere che la funzione di torsione per una trave a sezione ellittica, di semiassi a e b , e' fornita da:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x_1 x_2 + \text{cost.} \quad (20)$$

Si calcoli l'integrale di Dirichlet, cosi' come definito dalla (35) della precedente Lezione:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Psi) &= \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_1 \right) d\Sigma = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \int_{\Sigma} (x_2^2 - x_1^2) dA = \\ &= \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} (I_{x_2} - I_{x_1}) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \frac{\pi}{4} ab (b^2 - a^2) \end{aligned} \quad (21)$$

Ne segue che il fattore di torsione e' pari a:

$$\varphi = \frac{I_p}{I_p - \mathcal{D}(\Psi)} = \frac{\frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2)}{\frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2) - \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \frac{\pi}{4} ab (b^2 - a^2)} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4 a^2 b^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 \quad (22)$$

come puo' controllarsi utilizzando il comando "Simplify" di *Mathematica*:

$$\text{Simplify} \left[\frac{\frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2)}{\frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2) - \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \frac{\pi}{4} a b (b^2 - a^2)} \right]$$

$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{4 a^2 b^2}$$

Nota - Si voglia calcolare il momento di inerzia I_{22} , ossia l'integrale:

$$I_{22} = \int_{\Sigma} x_1^2 dx_1 dx_2 \quad (23)$$

esteso all'area ellittica Σ definita dall'equazione (18). A cio' fare si utilizzano le formule di riduzione, scrivendo:

$$I_{22} = \int_{-b}^b dx_2 \int_{-a \sqrt{1-x_2^2/b^2}}^{a \sqrt{1-x_2^2/b^2}} x_1^2 dx_1 = \frac{2 a^3}{3} \int_{-b}^b \left(1 - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{3/2} dx_2 \quad (24)$$

Per calcolare l'ultimo integrale si adotti il cambio di variabile:

$$\eta = \frac{x_2}{b} \quad (25)$$

da cui $dx_2 = b d\eta$. Inoltre gli estremi di integrazione diventano -1 ed 1, e quindi infine:

$$I_{22} = \frac{2 a^3}{3} \int_{-1}^1 (1 - \eta^2)^{3/2} b d\eta = \frac{2 a^3 b}{3} \frac{3}{8} \pi = \frac{\pi a^3 b}{4} \quad (26)$$

Del tutto analogamente si ha:

$$I_{11} = \frac{\pi b^3 a}{4} \quad (27)$$

ed anche:

$$I_p = I_{11} + I_{22} = \frac{\pi a^3 b}{4} + \frac{\pi b^3 a}{4} = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2) \quad (28)$$

L'angolo specifico di torsione e' fornito, secondo la (50) della Lezione precedente, da:

$$\theta' = \frac{M_t}{G} \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \quad (29)$$

come puo' controllarsi utilizzando *Mathematica*:

$$I_p = \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2); \quad \varphi = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2;$$

$$\theta = \text{Simplify}\left[\alpha \frac{M_t}{G I_p}\right]$$

$$\frac{(a^2 + b^2) M_t}{a^3 b^3 G \pi}$$

■ Lo stato tensionale

Lo stato tensionale e' fornito dalle (43) della Lezione precedente. Si ha:

$$\sigma_{13} = -2 \frac{M_t}{a b^3 \pi} x_2 = -2 \frac{M_t}{\Sigma b^2} x_2 \quad (30)$$

$$\sigma_{23} = 2 \frac{M_t}{a^3 b \pi} x_1 = 2 \frac{M_t}{\Sigma a^2} x_1$$

con $\Sigma = \pi ab$ area dell'ellisse. La tensione tangenziale risultante avra' risultante:

$$\tau = \sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} = 2 \frac{M_t}{\Sigma} \sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4}} \quad (31)$$

E' possibile controllare le semplificazioni attraverso le semplici linee seguenti:

$$\Psi = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x_1 x_2; I_p = \frac{\pi a b}{4} (a^2 + b^2); \alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2;$$

$$\sigma_{13} = \text{Simplify}\left[\alpha \frac{M_t}{I_p} (-x_2 + D[\Psi, x_1])\right]$$

$$- \frac{2 M_t x_2}{a b^3 \pi}$$

$$\sigma_{23} = \text{Simplify}\left[\alpha \frac{M_t}{I_p} (x_1 + D[\Psi, x_2])\right]$$

$$\frac{2 M_t x_1}{a^3 b \pi}$$

Si puo' dimostrare la seguente:

Proposizione - Sia $P = (x_{p1}, x_{p2})$ un punto della sezione ellittica di equazione:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (32)$$

e sia AB il diametro contenente P. Sia $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normale al contorno in A. Il vettore $\boldsymbol{\tau}$ delle tensioni tangenziali in P e' diretto secondo la tangente t al contorno in A, come illustrato in Figura 5.

Dim. Basta dimostrare che il prodotto scalare tra il vettore $\boldsymbol{\tau}$ delle tensioni tangenziali, valutato in P, ed il vettore \mathbf{n} della normale al contorno in A e' nullo. Si ha allora:

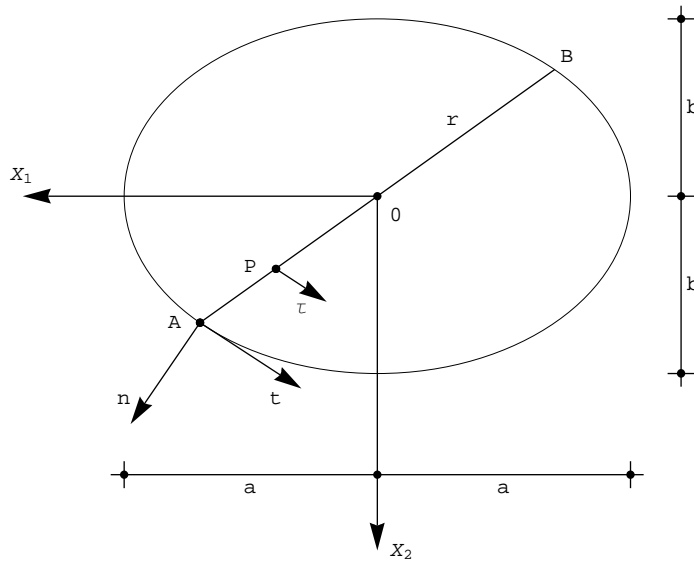


Figura 4. L'andamento della tensione tangenziale

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{13} (x_{P1}, x_{P2}) n_1 + \sigma_{23} (x_{P1}, x_{P2}) n_2 \tag{33}$$

E' d'altro canto noto che i coseni direttori della normale \mathbf{n} al contorno in A sono proporzionali alle derivate della funzione $f(x_1, x_2)$ in A, e quindi:

$$\begin{aligned} n_1 &= k \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_A = 2k \frac{x_{A1}}{a^2} \\ n_2 &= k \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_A = 2k \frac{x_{A2}}{b^2} \end{aligned} \tag{34}$$

e quindi la (33) diviene:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = -2 \frac{M_t}{a b^3 \pi} x_{P2} 2k \frac{x_{A1}}{a^2} + 2 \frac{M_t}{a^3 b \pi} x_{P1} 2k \frac{x_{A2}}{b^2} \tag{35}$$

e poiche' (cfr. Figura 5):

$$\frac{x_{P1}}{x_{P2}} = \frac{x_{A1}}{x_{A2}} \tag{36}$$

si ha l'asserto.

Su tutti i punti del generico diametro AB, quindi, il vettore $\boldsymbol{\tau}$ delle tensioni tangenziali e' diretto secondo la tangente al contorno in A, o in B, ed ha andamento lineare lungo il diametro, annullandosi nel baricentro O, come schematizzato in Figura 6. Il valor massimo - relativamente al generico diametro AB, si attinge agli estremi del diametro stesso, ossia in A ed in B.

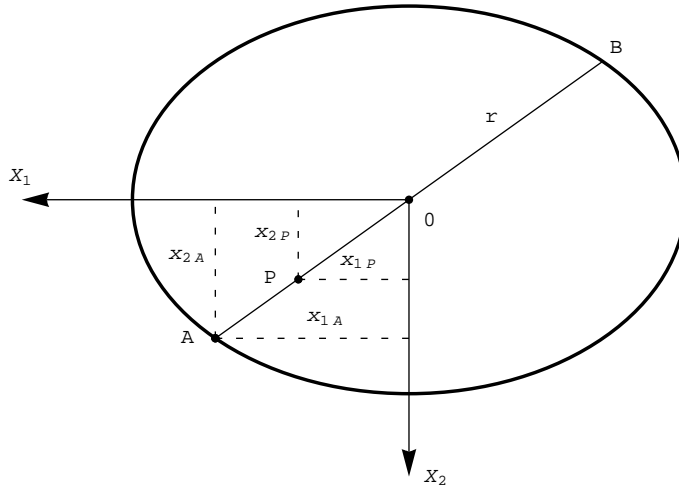


Figura 5. Similitudine geometrica per dimostrare la (36)

Ne segue ancora che la tensione tangenziale massima si ha agli estremi del diametro minore. Assumendo ad esempio che sia $a > b$ si ha, dalla (31):

$$\tau_{\max} = 2 \frac{M_t}{\Sigma} \sqrt{\frac{0}{a^4} + \frac{b^2}{b^4}} = 2 \frac{M_t}{\Sigma b} = 2 \frac{M_t}{\pi a b^2} \quad (37)$$

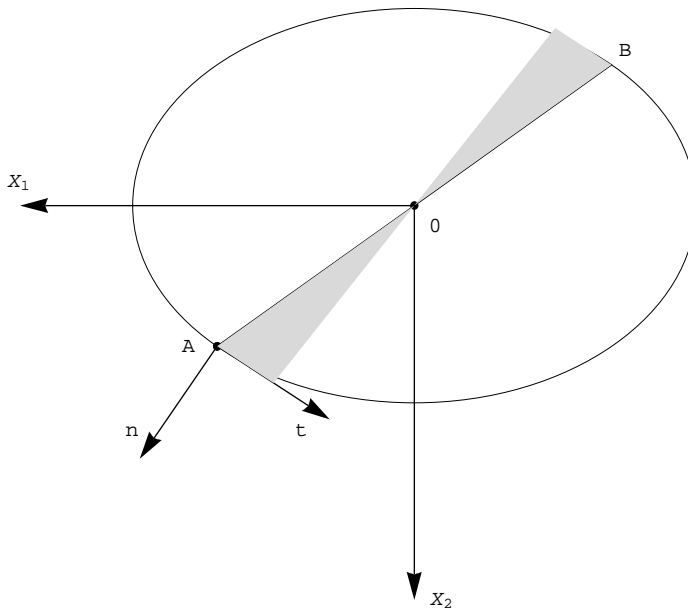


Figura 6 - Lo stato tensionale lungo il generico diametro

■ Gli spostamenti da ingobbimento

La (45) della Lezione precedente porge i seguenti spostamenti da ingobbimento:

$$u_3 = \varphi \frac{M_t}{GI_p} \Psi(x_1, x_2) = \frac{b^2 - a^2}{\pi a^3 b^3 \pi} \frac{M_t}{G} x_1 x_2 \quad (38)$$

e quindi la sezione retta di equazione $x_3 = k$ si tramuta nella superficie di equazione:

$$x_3' = k + \frac{b^2 - a^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M_t}{G} x_1 x_2 \approx k + \frac{b^2 - a^2}{\pi a^3 b^3} \frac{M_t}{G} x_1' x_2' = k - \sigma M_t x_1' x_2'$$

dove σ e' una costante positiva per $a > b$. E' questa la superficie di un paraboloido iperbolico, le cui curve di livello sono riportate in Figura 7. In presenza di un momento torcente positivo, e nell'ipotesi in cui $a > b$, gli spostamenti u_3 sono positivi nei quadranti in cui x_1 ed x_2 sono di segno diverso, negativi altrove.

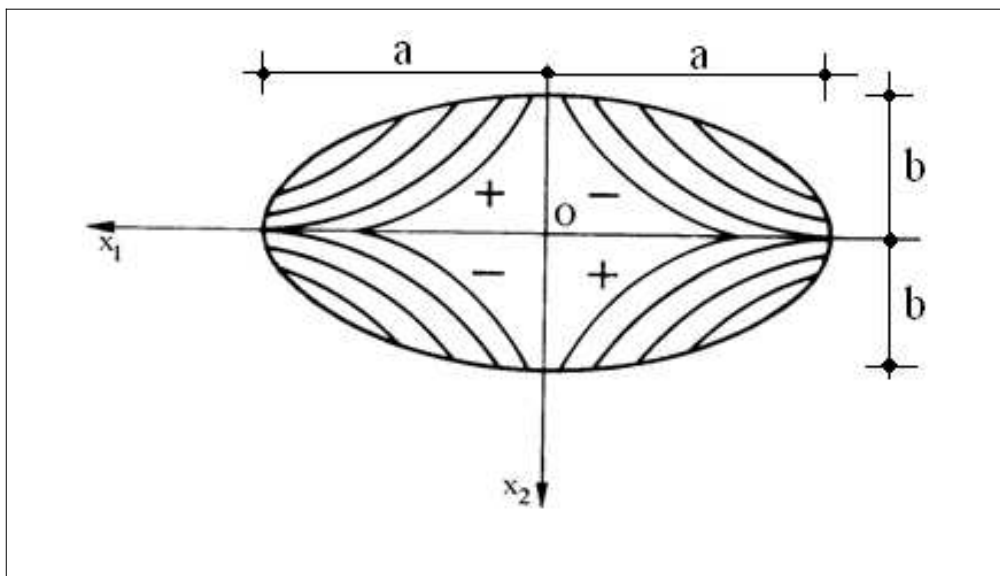


Figura 7 - Gli spostamenti da ingobbimento della sezione ellittica

■ Alcune considerazioni pratiche

Partendo dall'espressione (29) dell'angolo specifico di torsione, che qui si riscrive:

$$\theta' = \frac{M_t}{G} \frac{(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3} \tag{40}$$

e ricordando che l'area dell'ellisse e' pari ad $A = \pi ab$ ed il momento polare $I_p = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2)$, si potra' riscrivere la (40) come:

$$\theta' = 4 \pi^2 \frac{I_p}{A^4} \frac{M_t}{G} \tag{41}$$

da cui subito potra' scriversi l'espressione della rigidita' torsionale della sezione ellittica:

$$C_t = \frac{M_t}{\theta'} = \frac{1}{4 \pi^2} \frac{GA^4}{I_p} \approx 0.0253 \frac{GA^4}{I_p} \tag{42}$$

La formula (42) puo' essere generalizzata ad altre forme di sezione retta, scrivendo:

$$C_t = k \frac{GA^4}{I_p} \tag{43}$$

ed il coefficiente numerico k varia, per le principali sezione compatti, in un intervallo abbastanza limitato. Secondo De Saint-Venant, infatti [*Sur une formule donnant approximativement le moment de torsion*, Comptes Rendus, 88, 142-147 (1879)] si ha:

$$0.0228 \leq k \leq 0.0260 \quad (44)$$

e quindi puo' accettarsi la formula approssimata, valida per tutte le sezioni compatte:

$$C_t = 0.025 \frac{GA^4}{I_p} \quad (45)$$

Analogamente, moltiplicando e dividendo la (41) per il momento di inerzia, si ha:

$$\theta' = 4 \pi^2 \frac{I_p^2}{A^4} \frac{M_t}{GI_p} = \alpha \frac{M_t}{GI_p} \quad (46)$$

da cui subito l'espressione del fattore di torsione per la sezione ellittica:

$$\alpha = 4 \pi^2 \frac{I_p^2}{A^4} \quad (47)$$

Nello stesso ordine di idee che ha condotto alla formula approssimata (45), potra' accettarsi la formula approssimata del fattore di torsione, valida per qualsiasi sezione compatta:

$$\alpha = 40 \frac{I_p^2}{A^4} \quad (48)$$

Grafici