
Lezione 25 - Flessione deviata e sforzo normale eccentrico

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 21 gennaio 2012]

Con lo studio della flessione fuori del piano si è esaurito l'esame delle sollecitazioni semplici di De Saint Venant caratterizzate dalla presenza di sola tensione normale σ_{33} . In questa Lezione si vogliono esaminare le travi soggette a coppie flettenti con asse non coincidente con gli assi centrali di inerzia della sezione, e le travi soggette ad una forza assiale non applicata nel baricentro della sezione retta. In ambedue i casi lo studio potrà condursi sovrapponendo i casi di sollecitazione semplice già esaminati

Flessione deviata

Si consideri una trave di De Saint-Venant, sollecitata sulla base di destra da una coppia \mathcal{M} il cui asse s non coincide con gli assi centrali di inerzia della sezione, e per l'equilibrio, sulla base di sinistra da una coppia uguale e contraria $-\mathcal{M}$ con lo stesso asse. In questo caso, quindi, a differenza di quanto accadeva nel caso delle sollecitazioni semplici, il piano di sollecitazione non coincide con alcun piano coordinato, come illustrato in Figura 1.

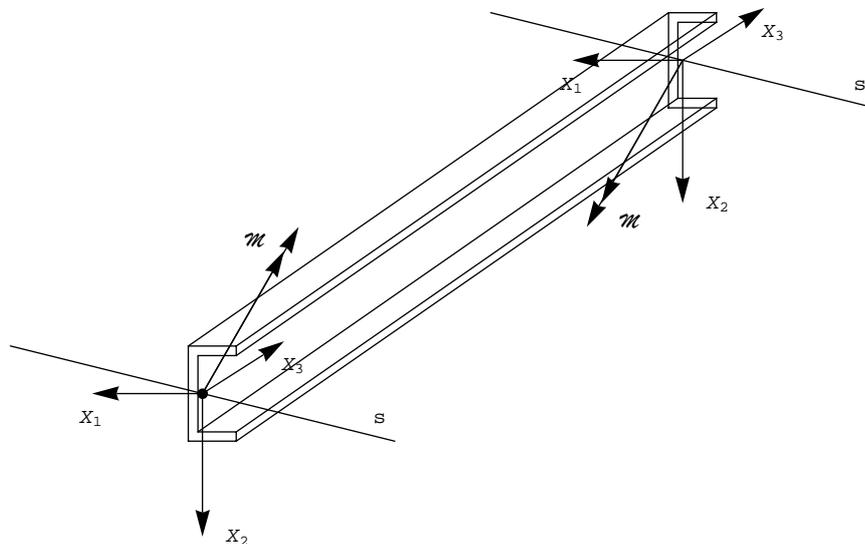


Figura 1 - Il regime di flessione deviata

La coppia \mathcal{M} può scomporsi nelle due componenti secondo gli assi, \mathcal{M}_1 ed \mathcal{M}_2 , da cui possiamo immediatamente dedurre che le caratteristiche della sollecitazione interna agenti sulla trave saranno i due momenti flettenti M_1 ed M_2 . Inoltre, l'asse di sollecitazione è individuato dall'angolo che esso forma con l'asse x_2 , e sarà, come ovvio dalla Figura 2:

$$\tan(\alpha_{x_2}) = -\frac{\mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_1} \quad (1)$$

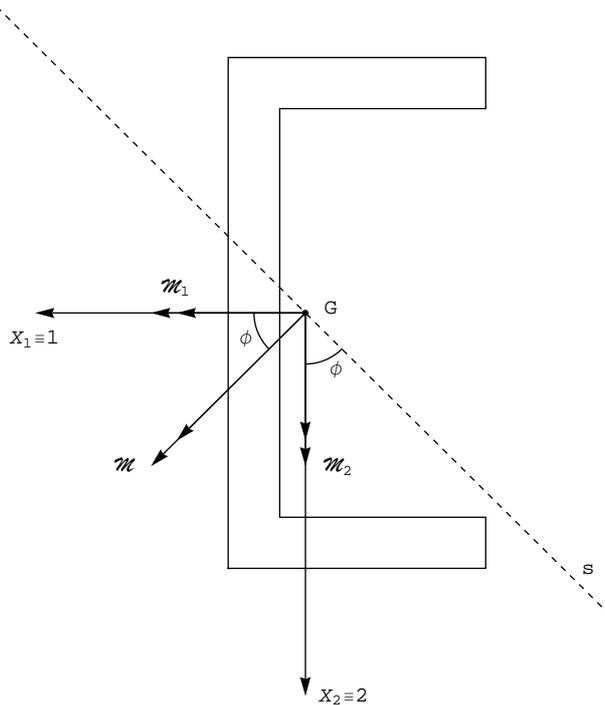


Figura 2 - La flessione deviata come somma di due flessioni rette

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, possiamo considerare questa sollecitazione come la somma delle due flessioni rette appena studiate, e quindi calcolare spostamenti, deformazioni e tensioni sommando gli spostamenti, le deformazioni e le tensioni ottenute nello studio delle due flessioni rette.

Ne segue che la terna di spostamenti si potrà esprimere come:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -\frac{M_1 \nu}{EI_{11}} x_1 x_2 + \frac{M_2 \nu}{2EI_{22}} \left(x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_2^2 \right) \\
 u_2 &= -\frac{M_1 \nu}{2EI_{11}} \left(x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_1^2 \right) + \frac{M_2 \nu}{EI_{22}} x_1 x_2 \\
 u_3 &= \frac{M_1}{EI_{11}} x_2 x_3 - \frac{M_2}{EI_{22}} x_1 x_3
 \end{aligned} \tag{2}$$

mentre le tensioni saranno fornite dalla *formula binomia*:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 \tag{3}$$

Come sempre, il luogo di tensioni nulle si chiama *asse neutro*, ed in questo caso sarà definito dall'equazione:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 = 0 \tag{4}$$

Per individuare l'asse neutro, è necessario individuare l'angolo che esso forma con gli assi coordinati. A tal fine, si ricorda che una retta generica n passante per l'origine ha equazione:

$$ax_1 + bx_2 = 0 \tag{5}$$

e forma con gli assi coordinati X_1 ed X_2 gli angoli $nX_1 = \phi$ ed $nX_2 = nX_1 + \pi/2 = \phi + \pi/2$, le cui tangenti trigonometriche si leggono dalla figura 3:

$$\tan (nX_1) = \tan \phi = -\frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{b} \quad (6)$$

$$\tan (nX_2) = \tan (\phi + \pi / 2) = -\cot \phi = \frac{x_1}{x_2} = -\frac{b}{a} \quad (7)$$

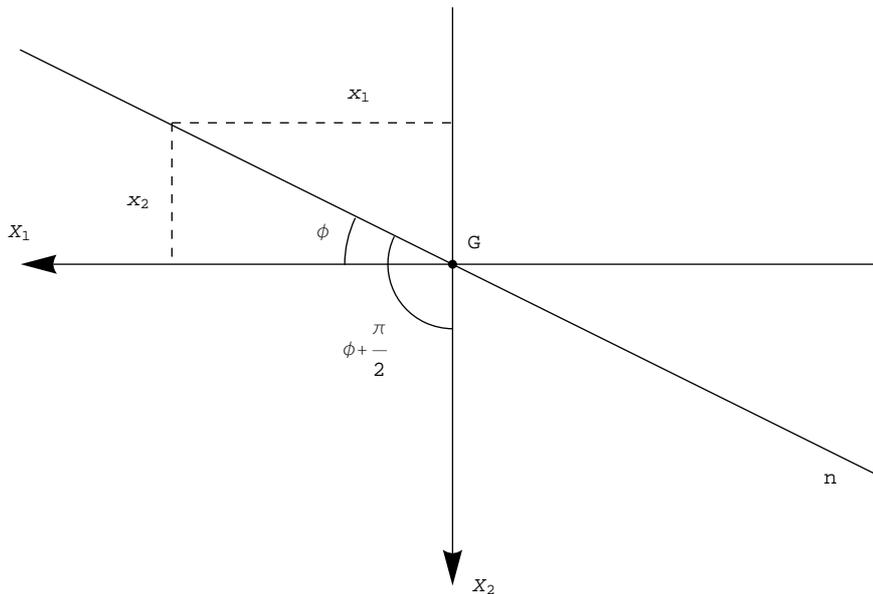


Figura 3 - Calcolo dell'angolo tra l'asse neutro e l'asse X_1

A partire dalla (4), si puo' quindi giungere a scrivere, con $a = -\frac{M_2}{I_{22}}$ e $b = \frac{M_1}{I_{11}}$:

$$\tan (nX_2) = \frac{M_1}{M_2} \frac{I_{22}}{I_{11}} \quad (8)$$

Si osservi anche, che dalla (8) e dalla (1) si trae la relazione, dipendente solo dalle proprieta' geometriche della sezione:

$$\tan (nX_2) \tan (sX_2) = \left(\frac{M_1}{M_2} \frac{I_{22}}{I_{11}} \right) \left(-\frac{M_2}{M_1} \right) = -\frac{I_{22}}{I_{11}} \quad (9)$$

Il piano di flessione si puo' ottenere immediatamente, scrivendo gli spostamenti dei punti dell'asse, come:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{M_2}{2 EI_{22}} x_3^2 \\ u_2 &= -\frac{M_1}{2 EI_{11}} x_3^2 \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

sicche' il piano di flessione ha equazione:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + u_1 = \frac{M_2}{2 EI_{x_2}} \xi_3^2 \\ \xi_2 &= x_2 + u_2 = -\frac{M_1}{2 EI_{x_1}} \xi_3^2 \end{aligned} \quad (11)$$

La traccia di tale piano sul piano della sezione retta e' detta *asse di flessione*. Si ha:

Proposizione - Asse neutro ed asse di flessione sono tra loro ortogonali

DIM. Ed infatti, eliminando ξ_3 dalle (11) si ottiene subito l'equazione dell'asse:

$$\frac{M_1}{I_{11}} \xi_1 + \frac{M_2}{I_{22}} \xi_2 = 0 \quad (12)$$

e quindi la relazione di ortogonalita' tra la (12) e la (4) e' soddisfatta. Basta, a dimostrare cio', ricordare che due rette di equazione:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= 0 \\ cx_1 + dx_2 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

sono tra loro ortogonali se:

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = -1 \quad (14)$$

Nel caso in esame si ha:

$$a = -\frac{M_2}{I_{22}}; \quad b = \frac{M_1}{I_{11}}; \quad c = \frac{M_1}{I_{11}}; \quad d = \frac{M_2}{I_{22}} \quad (15)$$

e quindi:

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = -\frac{M_2}{I_{22}} \frac{I_{11}}{M_1} \frac{M_1}{I_{11}} \frac{I_{22}}{M_2} = -1 \quad \blacksquare \quad (16)$$

Sforzo normale eccentrico, o flessione composta

Un altro caso notevole di sollecitazione composta e' costituita dalla sovrapposizione dello sforzo normale e delle due flessioni rette, o, equivalentemente, dalla sovrapposizione di uno sforzo assiale e da una flessione deviata.

Sulla base di destra, quindi, agiscono sollecitazioni le cui caratteristiche si riducono ad una forza $F_3^{(2)}$ e due coppie flettenti $\mathcal{M}_1^{(2)}$ e $\mathcal{M}_2^{(2)}$. Le coppie possono comporsi in un'unica coppia \mathcal{M} agente in un piano ortogonale a quello della base (piano di sollecitazione), come riportato in Figura 4.

A loro volta, la coppia \mathcal{M} e la forza $F_3^{(2)}$ possono comporsi in un'unica forza $F_3^{(2)}$ diretta secondo l'asse X_3 , ed agente nel piano di sollecitazione ad una distanza:

$$e = \frac{\mathcal{M}}{F_3^{(2)}} \quad (17)$$

dall'asse X_3 . Il punto C in cui questa forza incontra il piano della base si chiama *centro di sollecitazione*; esso si trova sull'asse di sollecitazione s , a distanza e dal baricentro G, e la distanza e si dice eccentricita' della forza. (cfr. Figura 5).

Per l'equilibrio, sulla base di sinistra agiscono solo sollecitazioni con caratteristiche pari ad $F_3^{(1)} = -F_3^{(2)}$, $\mathcal{M}_1^{(1)} = -\mathcal{M}_1^{(2)}$, e $\mathcal{M}_2^{(1)} = -\mathcal{M}_2^{(2)}$, ed anch'esse possono comporsi in un'unica forza eccentrica pari a $-F_3^{(2)}$.

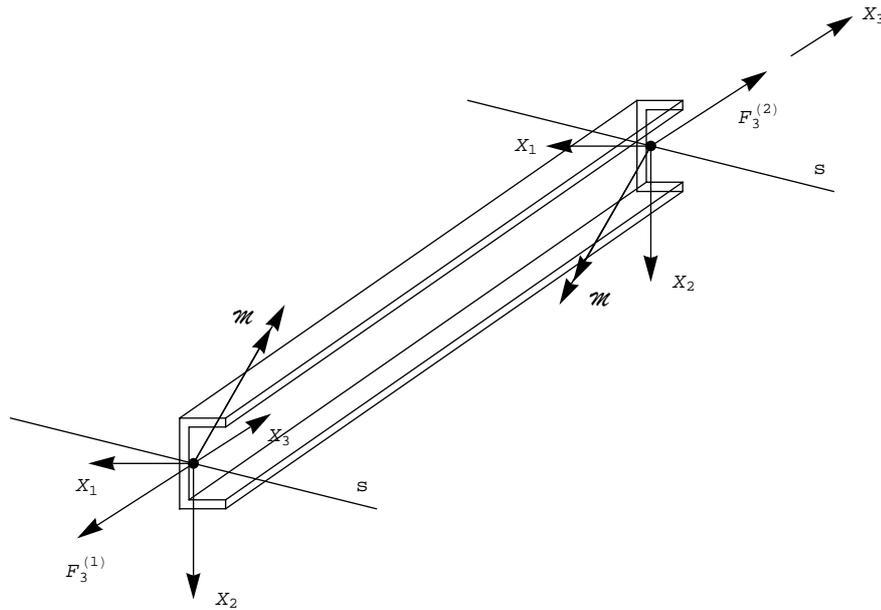


Figura 4 - La composizione delle due coppie

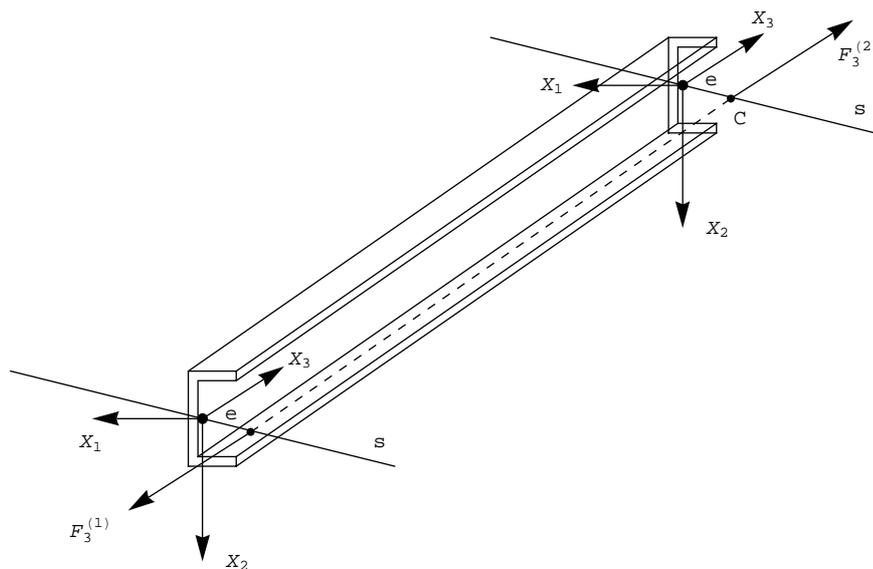


Figura 5 - La composizione in un unico sforzo normale con eccentricita' e

Le caratteristiche della sollecitazione interna in corrispondenza di ciascuna sezione retta si riducono ad uno sforzo normale N e due momenti flettenti M_1 e M_2 . Per il principio di sovrapposizione degli effetti si potra' scrivere subito la formula trinomia:

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 \tag{18}$$

Si noti subito che l'asse neutro, fornito dall'equazione:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 = 0 \tag{19}$$

non e' piu' baricentrico.

Il profilato ad L

Si consideri una trave con sezione retta fornita dal profilato a L, con lati uguali, di Figura 6, soggetta ad una coppia flettente con asse di sollecitazione verticale. La base e l'altezza del profilato sia pari a 100 mm, lo spessore sia pari ad 8 mm, l'intensità della coppia sia pari a 8000 kgmm.

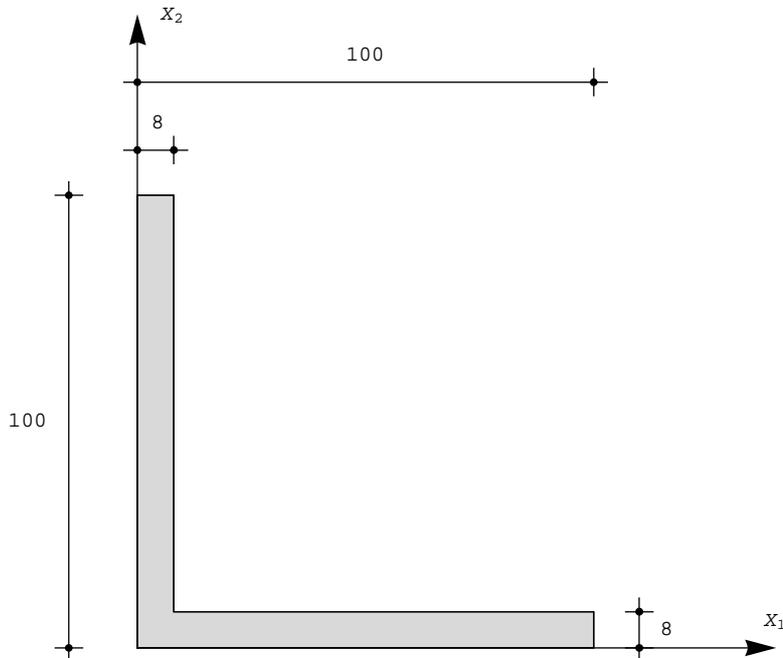


Figura 6 - Il profilato ad L a lati uguali

■ Il calcolo delle caratteristiche di inerzia

Si studia preventivamente il profilato al fine di:

- calcolare il baricentro della sezione
- calcolare la matrice dei momenti di inerzia baricentrali
- calcolare i momenti di inerzia centrali, insieme alle direzioni centrali di inerzia

■ Il calcolo del baricentro

Si divida la sezione nei due rettangoli di figura, e si definiscano - per speditezza di calcolo - quattro vettori:

$b = \{8,92\}$ contenente le basi dei rettangoli

$h = \{100,8\}$ contenente le altezze dei rettangoli

$d_{x_1} = \{50,4\}$ contenente le distanze dei baricentri dei rettangoli dall'asse orizzontale x_1

$d_{x_2} = \{4,54\}$ contenente le distanze dei baricentri dei rettangoli dall'asse verticale x_2

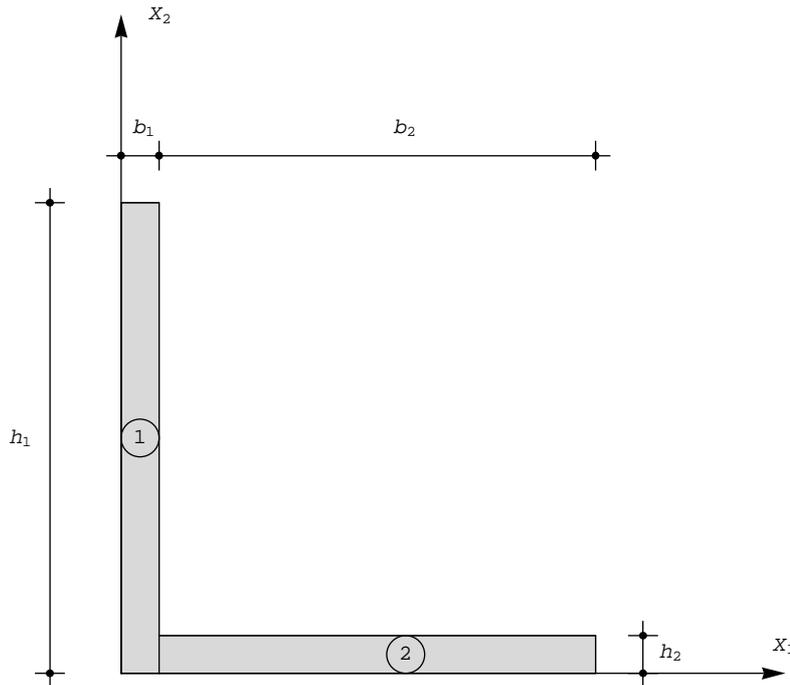


Figura 7 - I due rettangoli in cui e' scomposta la sezione, e gli assi di primo riferimento

Con queste definizioni, si possono calcolare immediatamente l'area della sezione retta ed i due momenti statici rispetto agli assi x_1 e x_2 :

$$A = \sum_{i=1}^2 b_i h_i = 1536 \text{ mm}^2 \quad (20)$$

$$S_{x_1} = \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_1 i} = 42944 \text{ mm}^3 \quad (21)$$

$$S_{x_2} = \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_2 i} = 42944 \text{ mm}^3 \quad (22)$$

Ne segue che le coordinate del baricentro saranno fornite dalle formule:

$$\begin{aligned} x_{G1} &= \frac{S_{x_2}}{A} = 27.9583 \text{ mm} \\ x_{G2} &= \frac{S_{x_1}}{A} = 27.9583 \text{ mm} \end{aligned} \quad (23)$$

■ Il calcolo della matrice dei momenti di inerzia baricentrali

Si inizi a calcolare i momenti di inerzia rispetto agli assi di primo riferimento x_1 ed x_2 . A cio' fare, si calcolano - rettangolo per rettangolo - i momenti di inerzia rispetto ai propri assi baricentrali, aggiungendo poi il momento di trasporto.

$$I_{22} = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i h_i^3}{12} + \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_1 i}^2 = 2.68 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad (24)$$

$$I_{11} = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i^3 h_i}{12} + \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_2 i}^2 = 2.68 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad (25)$$

$$I_{12} = \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_1 i} d_{x_2 i} = 318\,976 \text{ mm}^4 \quad (26)$$

Infine, si usa il teorema di Huyghens per calcolare i richiesti momenti di inerzia baricentrici:

$$\begin{aligned} I_{22}^G &= I_{22} - A x_{G2}^2 = 1.48173 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ I_{11}^G &= I_{11} - A x_{G1}^2 = 1.48173 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ I_{12}^G &= I_{12} - A x_{G1} x_{G2} = -881\,667 \text{ mm}^4 \end{aligned} \quad (27)$$

■ Il calcolo dei momenti di inerzia centrali e delle rispettive direzioni

Assegnata la matrice dei momenti di inerzia baricentrici:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{22} & I_{12} \\ I_{12} & I_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.48173 \times 10^6 & -881\,667 \\ -881\,667 & 1.48173 \times 10^6 \end{pmatrix} \quad (28)$$

l'equazione secolare si scriverà:

$$\lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{I}) \lambda + \text{Det}(\mathbf{I}) = 0 \quad (29)$$

ossia:

$$\lambda^2 - 2.96345 \times 10^6 \lambda + 1.41817 \times 10^{12} = 0 \quad (30)$$

con radici:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\equiv I_1 = 2.36339 \times 10^6 \\ \lambda_2 &\equiv I_2 = 600\,057 \end{aligned} \quad (31)$$

La matrice dei momenti di inerzia è allora divenuta:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600\,057 & 0 \\ 0 & 2.36339 \times 10^6 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Le rispettive direzioni centrali si ottengono risolvendo i due sistemi:

$$\begin{aligned} (I_{22} - I_1) n_{11} + I_{12} n_{21} &= 0 \\ I_{21} n_{11} + (I_{11} - I_1) n_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

e:

$$\begin{aligned} (I_{22} - I_2) n_{12} + I_{12} n_{22} &= 0 \\ I_{21} n_{12} + (I_{11} - I_2) n_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Il primo si traduce numericamente in:

$$\begin{aligned} -881\,667 n_{11} - 881\,667 n_{21} &= 0 \\ -881\,667 n_{11} - 881\,667 n_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

con soluzione normalizzata $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Il secondo sistema diviene invece:

$$\begin{aligned} 881\,667 n_{12} - 881\,667 n_{22} &= 0 \\ -881\,667 n_{12} + 881\,667 n_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

con soluzione normalizzata $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Ne segue che la prima direzione principale sarà inclinata, rispetto ad ambedue gli assi, di un angolo pari a 45 gradi, mentre l'altra direzione, ad essa ortogonale, sarà inclinata di 45 gradi rispetto ad X_1 e di -45 gradi rispetto ad X_2 . Ciò esaurisce lo studio geometrico della sezione retta.

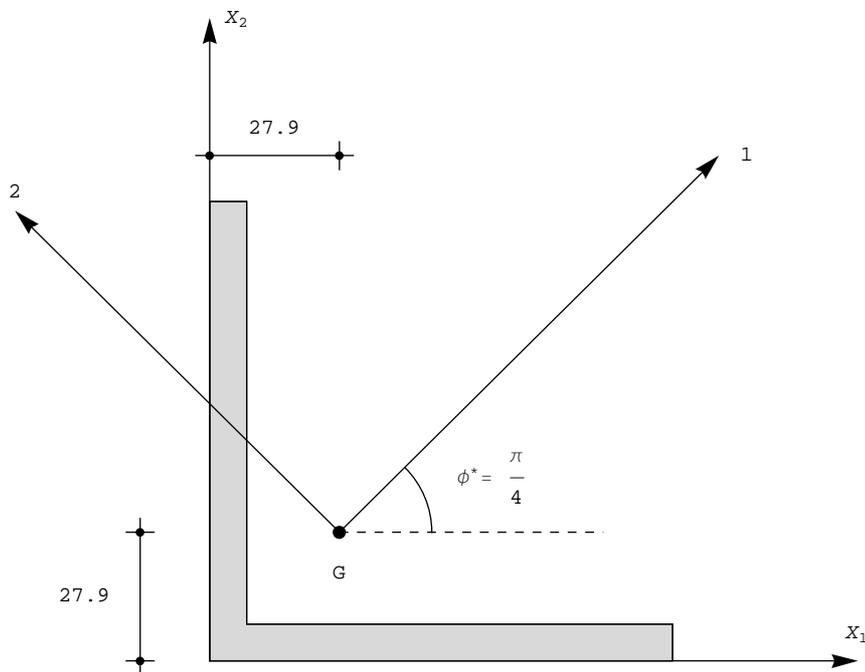


Figura 8 - Gli assi centrali di inerzia

■ Il diagramma delle tensioni

Scomponendo la coppia M lungo i due assi centrali di inerzia si avranno le due coppie:

$$M_1 = M \cos(135^\circ) = -5656.85 \text{ kgmm} \quad (37)$$

$$M_2 = M \cos(45^\circ) = 5656.85 \text{ kgmm} \quad (38)$$

e potranno studiarsi separatamente le due flessioni rette secondo gli assi centrali 1 e 2

Nel primo caso si ottiene il diagramma di Figura 9. Un punto significativo in cui la tensione può calcolarsi con relativa facilità è il punto 6, col suo simmetrico 2. Ed infatti le coordinate di 6 nel riferimento originario erano $(0,100)$, sicché nel riferimento traslato nel baricentro si hanno le coordinate $(-x_{G1}, 100 - x_{G2}) = (-27.9583, 72.0417)$, e nel riferimento ruotato di 45 gradi si avranno le coordinate:

$$\begin{pmatrix} \xi_{51} \\ \xi_{52} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -27.9583 \\ 72.0417 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31.1717 \\ 70.7107 \end{pmatrix} \quad (39)$$

La formula di Navier:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_1} \xi_2 \quad (40)$$

fornisce allora nel punto 6 la tensione normale:

$$\sigma_{33}^{(6)} = \frac{-5656.85}{2.36339 \times 10^6} 70.7107 = -0.169248 \text{ kg mm}^{-2} \quad (41)$$

Nel punto simmetrico 2 si avra' ovviamente $\sigma_{33}^{(2)} = 0.169248 \text{ kg mm}^{-2}$. Nel punto 5 si avra' la tensione -0.15571 , ottenibile sfruttando la linearita' del diagramma.

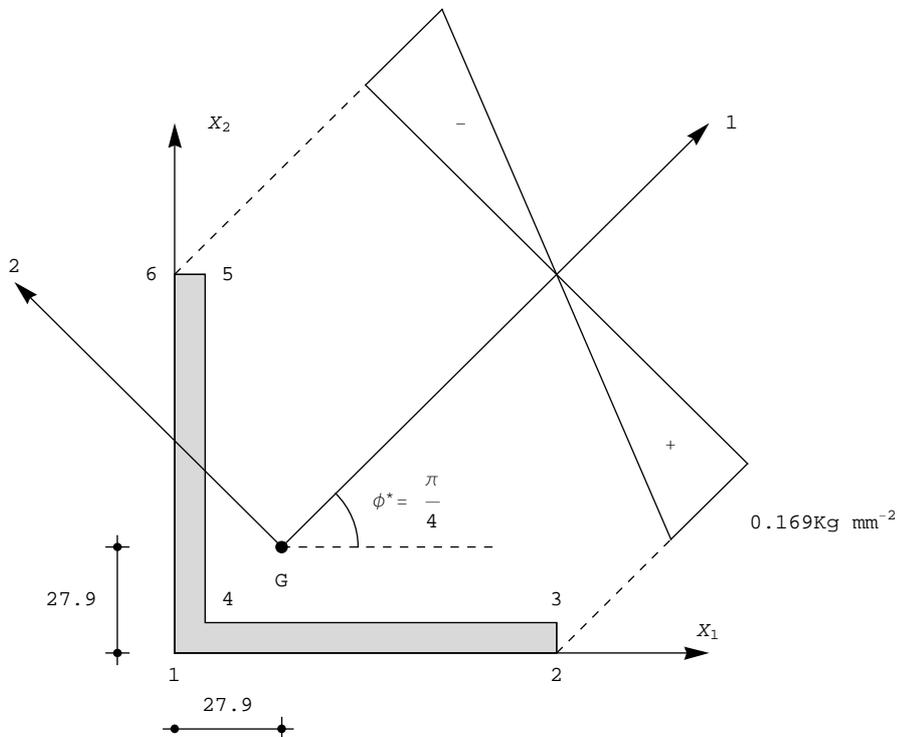


Figura 9 - Il diagramma delle tensioni dovute alla coppia M_1

Nel secondo caso si ha il diagramma della Figura 10. Servono ora le coordinate del punto 5, e del punto 1. Con lo stesso procedimento illustrato in precedenza si hanno le coordinate baricentriche del punto 1 come $(0 - x_{G1}, 0 - x_{G2}) = (-27.9583, -27.9583)$, e quindi le coordinate, nel sistema di riferimento centrale:

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -27.9583 \\ -27.9583 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39.539 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

mentre le coordinate baricentriche di 5 sono fornite da $(8 - x_{G1}, 100 - x_{G2}) = (-19.9583, 72.0417)$, e quindi nel sistema di riferimento centrale:

$$\begin{pmatrix} \xi_{51} \\ \xi_{52} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -19.9583 \\ 72.0417 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.8285 \\ 65.0538 \end{pmatrix} \quad (43)$$

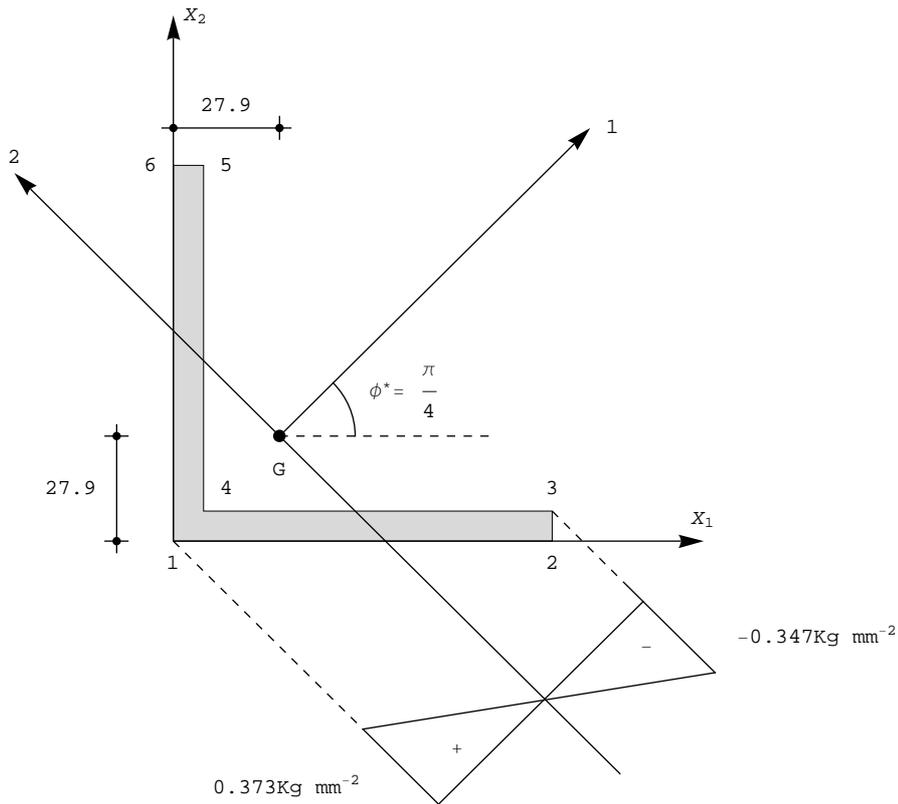


Figura 10 - Il diagramma delle tensioni dovute alla coppia M_2

Seguono le tensioni fornite dalla formula di Navier:

$$\sigma_{33} = - \frac{M_2}{I_2} \xi_1 \tag{44}$$

e quindi:

$$\sigma_{33}^5 = - \frac{5656.85}{600\,057} 36.8285 = -0.347189 \text{ kg mm}^{-2} \tag{45}$$

e:

$$\sigma_{33}^1 = - \frac{5656.85}{600\,057} (-39.539) = 0.372742 \text{ kg mm}^{-2} \tag{46}$$

■ **L'equazione dell'asse neutro**

Si ha, secondo la formula binomia:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_1} \xi_2 - \frac{M_2}{I_2} \xi_1 = 0 \tag{47}$$

e quindi:

$$\frac{-5656.85}{2.36339 \times 10^6} \xi_2 - \frac{5656.85}{600\,057} \xi_1 = 0 \tag{48}$$

ossia:

$$\xi_2 = - \frac{2.36339 \times 10^6}{600\,057} \xi_1 = -3.93861 \xi_1 \quad (49)$$

e quindi l'asse neutro forma con l'asse 2 l'angolo pari a:

$$\tan (nx_2) = \frac{\xi_1}{\xi_2} = - \frac{600\,057}{2.36339 \times 10^6} = -0.253897 \quad (50)$$

e quindi l'angolo $\phi = nx_2 = \text{Arctan}(-0.253897) = -0.248643$, pari a -14.246° .

■ Il diagramma finale delle tensioni

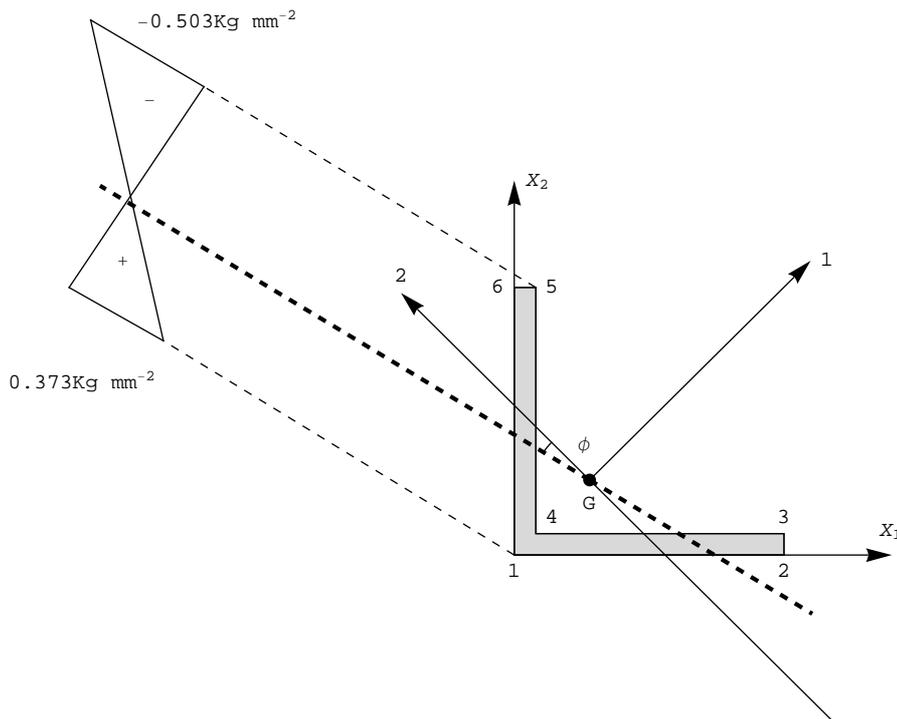


Figura 11 - Il diagramma finale delle tensioni

Disegnato l'asse neutro, si nota che i valori estremi delle tensioni si raggiungono nel punto 1 e nel punto 5.

Per sovrapposizione degli effetti si avrà allora:

$$\sigma_{33}^5 = -0.15571 - 0.347189 = -0.5029 \text{ kg mm}^{-2} \quad (51)$$

$$\sigma_{33}^1 = 0 + 0.372742 = 0.372742 \text{ kg mm}^{-2} \quad (52)$$

Ulteriori esempi possono ritrovarsi in Esercitazioni 4 - Flessione deviata e sforzo normale eccentrico.

Grafici