
Lezione 24 - Sforzo assiale e flessione

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 17 gennaio 2011]

Si studiano in questa lezione i casi di sollecitazione caratterizzati dall'assenza di tensioni tangenziali, e quindi dalla presenza della sola tensione normale σ_{33} . Più in particolare, si studieranno i casi in cui σ_{33} è costante, e quelli in cui varia linearmente con x_1 o con x_2 .

Lo sforzo assiale

Si esamini un solido del tipo trave, e si ponga l'origine del riferimento nel baricentro della sezione di sinistra.

Si ipotizzi che le tensioni all'interno della trave, a distanza superiore a quella di estinzione, siano date da:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

e che $\sigma_{33} = \sigma_0$ sia costante.

Nello spirito del metodo semi-inverso, da questa ipotizzata distribuzione di tensioni si vuol dedurre la corrispondente distribuzione di deformazione e di spostamenti, e si vuol sapere a quale caratteristiche della sollecitazione esterna sulle basi essa corrisponda.

In altri termini, invece di assegnare le forze applicate alle basi, e ricavare le tensioni, si segue la via inversa, partendo dalle tensioni, e ricavando a posteriori quell'insieme di caratteristiche che producono le assegnate tensioni.

Dalla (1) si può trarre lo stato deformativo, applicando le (10) della lezione 23:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_0 \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_0 \\ e_{33} &= \frac{\sigma_0}{E} \\ e_{12} &= e_{13} = e_{23} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

e quindi esistono solo deformazioni normali. Per ricavare gli spostamenti, si parta dalle prime tre delle (2), ottenendo:

$$\begin{aligned} e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 &\implies u_1 = -\frac{\nu}{E} \sigma_0 x_1 + \phi_1(x_2, x_3) \\ e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 &\implies u_2 = -\frac{\nu}{E} \sigma_0 x_2 + \phi_2(x_1, x_3) \\ e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 &\implies u_3 = \frac{\sigma_0}{E} x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3)$$

Sostituendo nelle altre tre equazioni (2) si ha:

$$\begin{aligned} e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ e_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Le (4), unite alle ovvie relazioni:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} = 0; \quad (5)$$

portano a concludere che il campo di spostamenti $\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$ genera deformazioni nulle, e quindi e' un moto

rigido. Supponendo, come usuale, che i vincoli siano tali da impedire moti rigidi, la terna definitiva di spostamenti connessi con le (2) sara' allora:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{E} \sigma_0 x_1 \\ u_2 &= -\frac{\nu}{E} \sigma_0 x_2 \\ u_3 &= \frac{\sigma_0}{E} x_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Poiche' le (6) sono lineari, le equazioni di Cauchy-Navier (15) della lezione 23 sono identicamente soddisfatte. Inoltre, poiche' le tensioni tangenziali sono nulle, soddisfatta e' anche la condizione ai limiti (4) della lezione 23, sulla superficie laterale. Ne segue che la distribuzione di tensioni (1) da' luogo ad una possibile soluzione del problema della trave. Vediamo quali caratteristiche della sollecitazione esterna applicate alle basi producono la distribuzione (1) delle tensioni.

Applicando le definizioni della lezione 22 si hanno le caratteristiche della sollecitazione esterna sulla faccia di destra:

$$F_1^{(2)} = \int_A \sigma_{13} dA = 0; \quad F_2^{(2)} = \int_A \sigma_{23} dA = 0; \quad F_3^{(2)} = \int_A \sigma_{33} dA = \sigma_0 A; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{33} x_2 dA = \sigma_0 \int_A x_2 dA = 0; \\ \mathcal{M}_2^{(2)} &= -\int_A \sigma_{33} x_1 dA = -\sigma_0 \int_A x_1 dA = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathcal{M}_3^{(2)} = \int_A (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) dA = 0;$$

dove si e' fatto uso dell'annullarsi del momento statico rispetto ad assi baricentrici.

Analogamente, si ha, sulla faccia di sinistra:

$$F_1^{(1)} = F_2^{(1)} = 0; \quad F_3^{(1)} = -\int_A \sigma_{33} dA = -\sigma_0 A; \quad (9)$$

$$\mathcal{M}_1^{(1)} = \mathcal{M}_2^{(1)} = \mathcal{M}_3^{(1)} = 0; \quad (10)$$

Quindi, le caratteristiche della sollecitazione esterna sulle due basi si riducono a due forze uguali e contrarie:

$$F_3^{(2)} = F_3 = \sigma_0 A; \quad F_3^{(1)} = -F_3 \quad (11)$$

e la sollecitazione si chiama *sollecitazione semplice di sforzo assiale di trazione* (se $F_3 > 0$) o di *compressione* (se $F_3 < 0$).

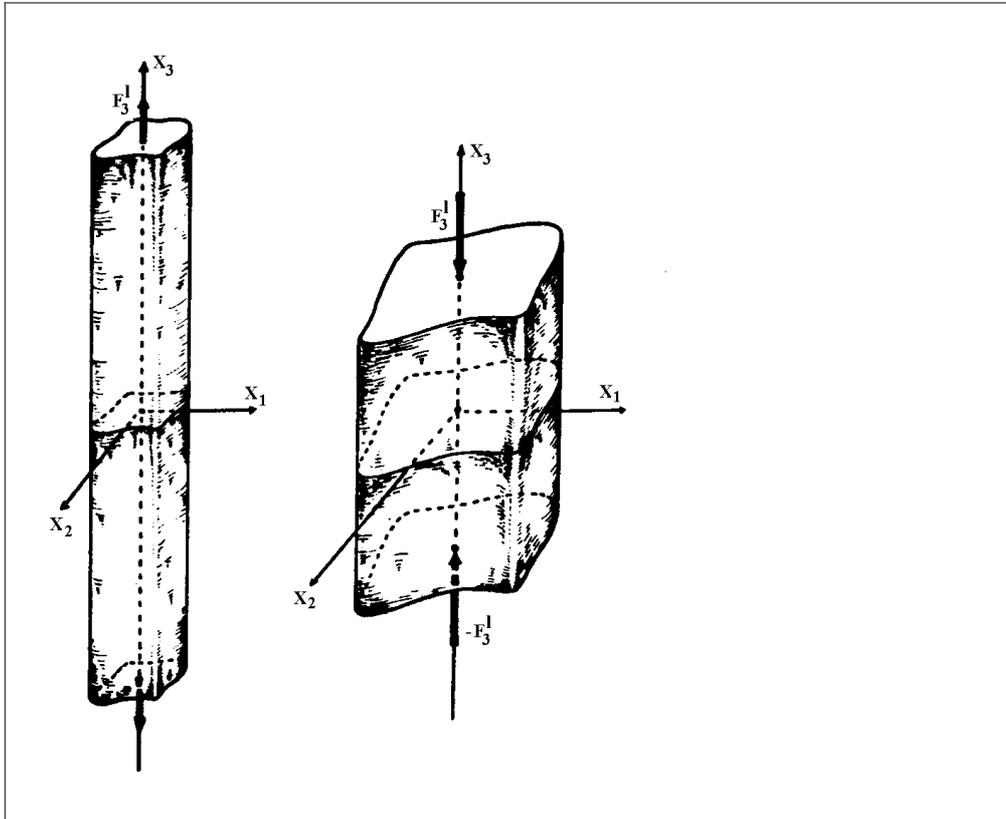


Figura 1 - La sollecitazione di trazione e compressione (adattato da G. Fichera "Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica classica")

L'unica caratteristica di sollecitazione interna è lo sforzo normale N , positivo se F_3 è positiva, negativo se F_3 è negativa. Esso è costante lungo la trave, e vale, secondo la (21) della lezione 22:

$$N = \int_A \sigma_{33} \, dA = \sigma_0 A \quad (12)$$

da cui:

$$\sigma_0 = \sigma_{33} = \frac{N}{A} \quad (13)$$

Sostituendo nella terna di spostamenti si ha infine:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\nu \frac{N}{EA} x_1 \\ u_2 &= -\nu \frac{N}{EA} x_2 \\ u_3 &= \frac{N}{EA} x_3 \end{aligned} \quad (14)$$

L'energia di deformazione

L'energia di deformazione L di un tronco di trave lungo l , soggetta a sforzo normale puo' agevolmente calcolarsi in base alla definizione:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} \, dV = \frac{1}{2 E} \int_V \sigma_{33}^2 \, dV = \frac{N^2}{2 EA^2} \int_V dV = \frac{N^2 l}{2 EA} \quad (15)$$

Un'utile espressione alternativa si ottiene esprimendo l'energia elastica in funzione degli spostamenti:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} \, dV = \frac{E}{2} \int_V e_{33}^2 \, dV = \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{du_3}{dx_3} \right)^2 dx_3 \quad (16)$$

Flessione retta nel piano

Si esamini un solido del tipo trave, si ponga l'origine del riferimento nel baricentro della sezione di sinistra, e si orientino gli assi x_1 ed x_2 secondo gli assi principali di inerzia della sezione, portandoli quindi a coincidere con gli assi centrali di inerzia.

Si ipotizzi che le tensioni all'interno della trave, a distanza superiore a quella di estinzione, siano date da:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (17)$$

e che stavolta $\sigma_{33} = c x_2$, ossia che la tensione vari linearmente secondo l'asse x_2 .

■ La deduzione degli spostamenti

Dalla (17) si puo' trarre lo stato deformativo, applicando le (10) della lezione 23:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{\nu}{E} c x_2 \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E} c x_2 \\ e_{33} &= \frac{c}{E} x_2 \\ e_{12} &= e_{13} = e_{23} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

e quindi anche in questo caso esistono solo deformazioni normali. Gli spostamenti sono allora ricavabili con un procedimento simile a quello gia' illustrato per il caso dello sforzo normale. Partendo dalle espressioni delle deformazioni normali si ha:

$$\begin{aligned} e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 &\implies u_1 = -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 + \phi_1(x_2, x_3) \\ e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 &\implies u_2 = -\frac{\nu}{2E} c x_2^2 + \phi_2(x_1, x_3) \\ e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 &\implies u_3 = \frac{c}{E} x_2 x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (19)$$

e sostituendo nelle altre tre equazioni (18) si ha:

$$\begin{aligned}
e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} - \frac{\nu}{E} c x_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\
e_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\
e_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} + \frac{c}{E} x_3 \right) = 0
\end{aligned}$$

Dalla prima e dalla terza si ricavano le derivate della ϕ_2 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} &= \frac{\nu}{E} c x_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} &= -\frac{c}{E} x_3 - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{21}$$

Dalla prima delle (21) si ottiene, integrando:

$$\phi_2 = \frac{\nu}{2E} c x_1^2 + \psi_2(x_1, x_3) \tag{22}$$

ed infine, dalla seconda delle (21):

$$\psi_2 = -\frac{c}{2E} x_3^2 + \chi_2(x_1, x_3) \tag{23}$$

In definitiva, quindi, si ha una terna di spostamenti pari a:

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 + \phi_1(x_2, x_3) \\
u_2 &= -\frac{\nu}{2E} c x_2^2 + \frac{\nu}{2E} c x_1^2 - \frac{c}{2E} x_3^2 + \chi_2(x_1, x_3) \\
u_3 &= \frac{c}{E} x_2 x_3 + \phi_3(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{24}$$

Sara' ora possibile verificare che l'annullarsi delle tre deformazioni taglianti implica:

$$\begin{aligned}
e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \chi_2}{\partial x_1} \right) = 0 \\
e_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\
e_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0 \implies \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{25}$$

portando a concludere che il campo di spostamenti $\phi^* = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \chi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$ genera deformazioni nulle, e quindi e' un

moto rigido. Supponendo, come usuale, che i vincoli siano tali da impedire moti rigidi, la terna definitiva di spostamenti connessi con le (18) sara' allora:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 \\
 u_2 &= -\frac{c\nu}{2E} \left(x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_1^2 \right) \\
 u_3 &= \frac{c}{E} x_2 x_3
 \end{aligned} \tag{26}$$

■ La deduzione delle caratteristiche

Applicando le definizioni della lezione 22 si ha:

$$\begin{aligned}
 F_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{13} dA = 0; \quad F_2^{(2)} = \int_A \sigma_{23} dA = 0; \\
 F_3^{(2)} &= \int_A \sigma_{33} dA = c \int_A x_2 dA = 0;
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1^{(2)} &= \int_A \sigma_{33} x_2 dA = c \int_A x_2^2 dA = c I_{11}; \\
 \mathcal{M}_2^{(2)} &= -\int_A \sigma_{33} x_1 dA = -c \int_A x_1 x_2 dA = 0; \\
 \mathcal{M}_3^{(2)} &= \int_A (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) dA = 0;
 \end{aligned} \tag{28}$$

dove si è fatto uso dell'annullarsi del momento statico rispetto ad assi baricentrici e del momento centrifugo rispetto a due assi principali di inerzia. Inoltre l'integrale:

$$I_{11} = \int_A x_2^2 dA \tag{29}$$

è il momento di inerzia della sezione retta rispetto all'asse x_1 .

Analogamente, si ha, sulla faccia di sinistra:

$$F_1^{(1)} = F_2^{(1)} = 0; \quad F_3^{(1)} = \mathcal{M}_2^{(1)} = \mathcal{M}_3^{(1)} = 0; \tag{30}$$

$$\mathcal{M}_1^{(1)} = -\mathcal{M}_1^{(2)} = -c I_{11} \tag{31}$$

Quindi, le caratteristiche della sollecitazione esterna sulle due basi si riducono a due coppie uguali e contrarie:

$$\mathcal{M}_1^{(2)} = \mathcal{M}_1 = c I_{11}; \quad \mathcal{M}_1^{(1)} = -\mathcal{M}_1 \tag{32}$$

e la sollecitazione si chiama *sollecitazione semplice di flessione*, o anche *flessione retta*, relativa all'asse x_1

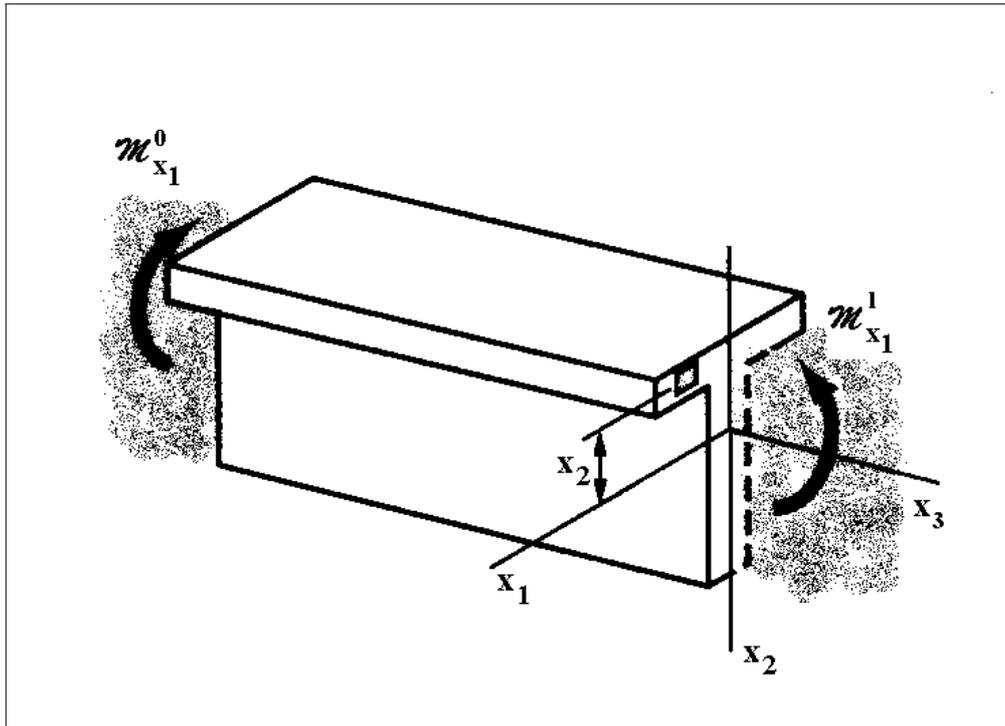


Figura 2 - Flessione nel piano

L'unica caratteristica di sollecitazione interna è il *momento flettente* M_1 , costante lungo l'asse della trave, e pari a:

$$M_1 = \int_A \sigma_{33} x_2 \, dA = c I_{11} \quad (33)$$

da cui:

$$c = \frac{M_1}{I_{11}} \quad (34)$$

ed infine:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_{11}} x_2 \quad (35)$$

Nota - E' questa la fondamentale formula di Navier: essa assicura che le tensioni si annullano sull'asse x_1 , sono costanti in corrispondenza di ogni corda parallela all'asse x_1 , proporzionali alla distanza da questo. Per $M_1 > 0$ le tensioni sono positive, ossia di trazione, per $x_2 > 0$, negative, ossia di compressione, per $x_2 < 0$, come illustrato in Figura 3.

"Osservando la trave disposta con l'asse x_3 orizzontale e l'asse x_2 verticale ed orientato verso il basso, il momento flettente è positivo se le due coppie applicate \mathcal{M}_1 sono dirette in senso orario sulla estremità di sinistra ed in senso antiorario su quella di destra, e le tensioni che ne derivano sono positive al di sotto dell'asse neutro x_1 , e negative al di sopra. Si spiega così la dizione comune, secondo cui in una trave ad asse orizzontale il momento flettente positivo tende le fibre inferiori e comprime quelle superiori". [Franciosi V.]

Di basilare importanza è la seguente:

Definizione. - Il piano su cui si annullano gli spostamenti si dice *piano neutro*, e la traccia di tale piano sulla sezione retta si dice *asse neutro*. Ne segue, in questo caso, che il piano neutro coincide con il piano $X_1 - X_3$, e l'asse neutro coincide con l'asse X_1

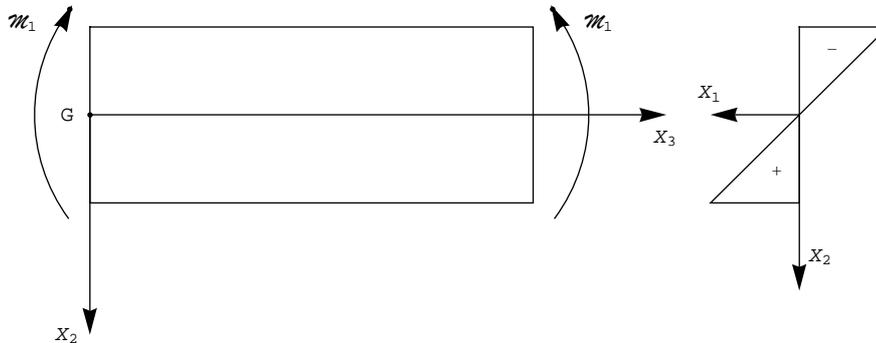


Figura 3. - Momenti flettenti positivi e diagramma di tensioni alla Navier

■ Analisi degli spostamenti

Utilizzando la (34), gli spostamenti da flessione si scrivono:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2) = -\frac{M_1 \nu}{E I_{11}} x_1 x_2 \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2, x_3) = -\frac{M_1 \nu}{2 E I_{11}} \left(x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_1^2 \right) \\ u_3 &= u_3(x_2, x_3) = \frac{M_1}{E I_{11}} x_2 x_3 \end{aligned} \quad (36)$$

■ Le sezioni rette

Si consideri ora un punto A, di coordinate (x_1, x_2, x_3) , e si deducano le coordinate (ξ_1, ξ_2, ξ_3) del suo trasformato A':

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + u_1 = x_1 - \frac{M_1 \nu}{E I_{11}} x_1 x_2 \\ \xi_2 &= x_2 + u_2 = x_2 - \frac{M_1 \nu}{2 E I_{11}} \left(x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_1^2 \right) \\ \xi_3 &= x_3 + u_3 = x_3 + \frac{M_1}{E I_{11}} x_2 x_3 \end{aligned} \quad (37)$$

Quindi, i punti della sezione retta, di equazione $x_3 = k$, si troveranno, a deformazione avvenuta, sulla superficie di equazione:

$$\xi_3 = k \left(1 + \frac{M_1}{E I_{11}} x_2 \right) = k \left[1 + \frac{M_1}{E I_{11}} (\xi_2 - u_2) \right] \quad (38)$$

In prima approssimazione si puo' trascurare u_2 rispetto ad x_2 , e quindi confondere x_2 con ξ_2 , e quindi la (38) diviene:

$$\xi_3 = k \left(1 + \frac{M_1}{E I_{11}} \xi_2 \right) \tag{39}$$

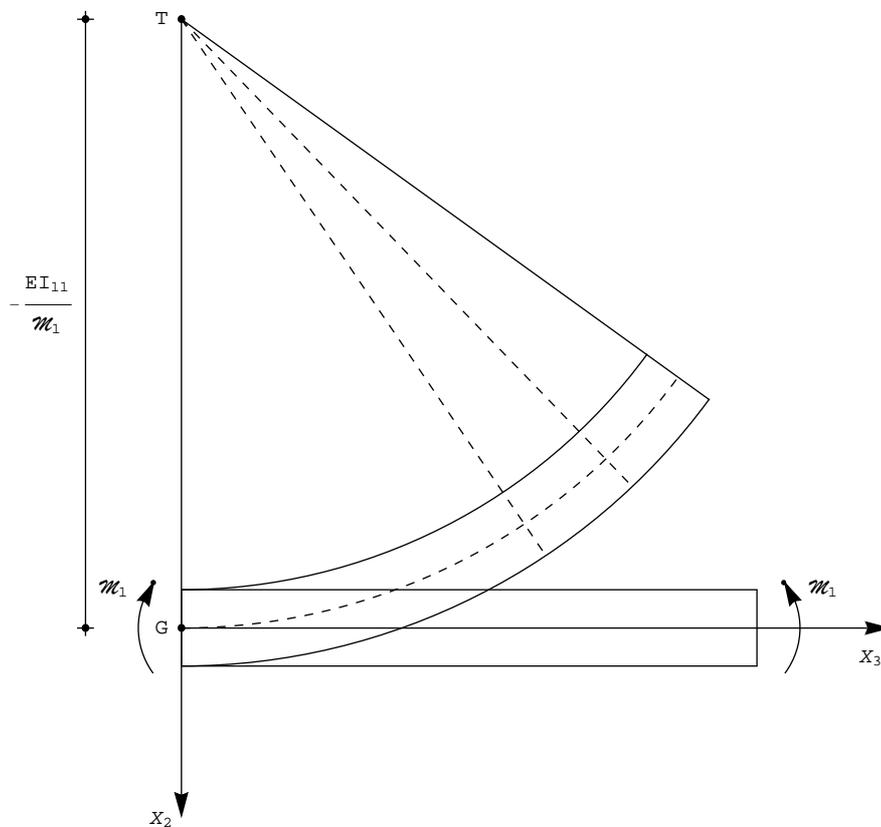


Figura 4. - La planeita' delle sezioni rette

E' questa l'equazione di un piano, e quindi si giustifica l'affermazione che *nella sollecitazione di flessione le sezioni rette si conservano piane*. Inoltre, la traccia del piano di equazione (39) sul piano $(X_2 - X_3)$ interseca l'asse X_2 nel punto T di coordinate $(0, -EI_{11}/M_1)$ come, illustrato in Figura 4 ed in Figura 5. Poiche' quanto detto non dipende da k , e quindi e' valido per qualsiasi sezione retta, si puo' concludere che a seguito della deformazione i punti della generica sezione apparterranno al fascio di piano con sostegno la retta passante per T ed ortogonale al piano $(X_2 - X_3)$. La quantita' $r = \frac{-EI_{11}}{M_1}$ si dice *raggio di curvatura*, ed il suo inverso

$$\rho = \frac{1}{r} = -\frac{M_1}{EI_{11}} \tag{40}$$

e' detta *curvatura*. Si puo' quindi concludere che le rette del piano $X_1 - X_3$, e quindi anche l'asse X_3 , si trasformano in archi di cerchio.

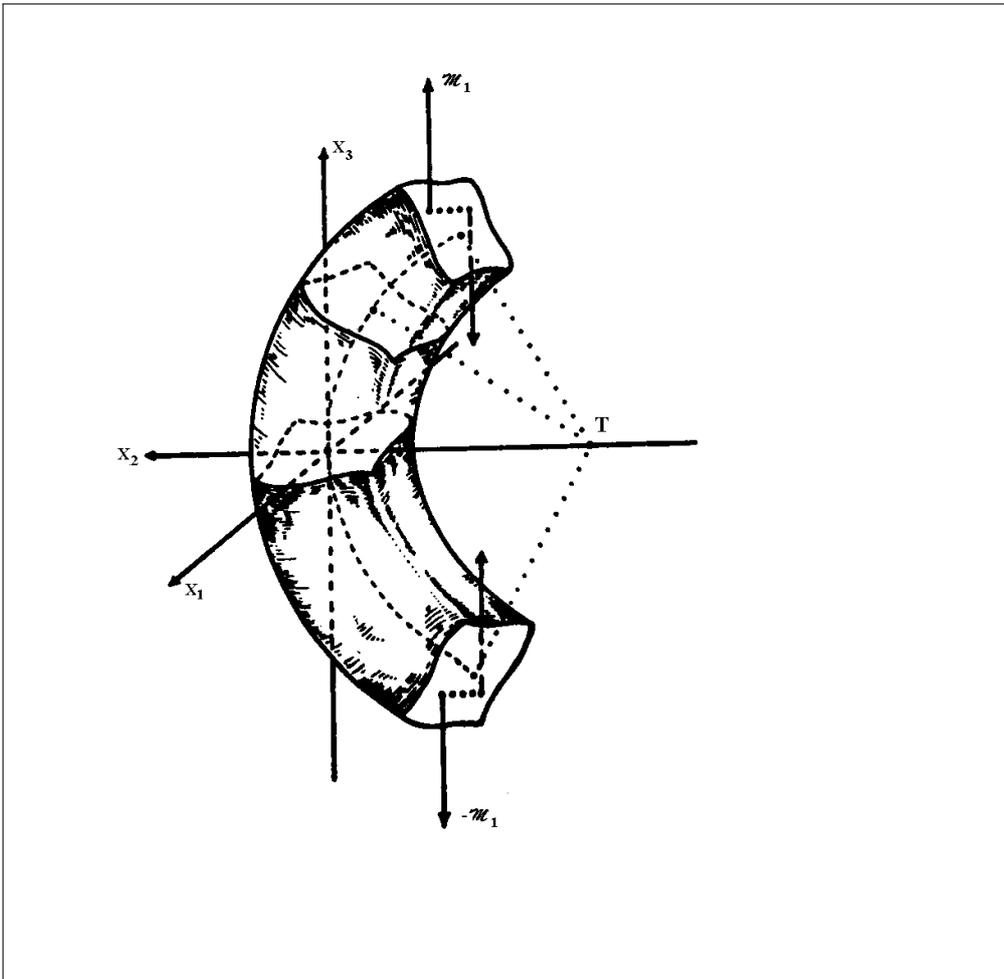


Figura 5. - La planeità delle sezioni rette (adattato da G. Fichera "Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica classica")

■ Le deformazioni nel piano

Le sezioni rette di equazione $x_3 = k$ restano piane, come si è appena visto, ma ciò non significa che non esistano deformazioni nel piano delle sezioni rette stesse. Ed infatti, si consideri il piano di equazione $x_1 = h$, i cui punti si portano, a deformazione avvenuta, sulla superficie di equazione:

$$\xi_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{u}_1 = h \left(1 - \nu \frac{M_1}{EI_{11}} x_2 \right) \approx h \left(1 - \nu \frac{M_1}{EI_{11}} \xi_2 \right) \quad (41)$$

Nell'ordine di approssimazione che ha condotto a confondere x_2 con ξ_2 la (41) è ancora un piano, parallelo all'asse X_3 , la cui traccia sulla generica sezione retta interseca l'asse X_2 in un punto T' di coordinate $(0, \frac{EI_{11}}{\nu M_1})$.

La quantità $r' = \frac{EI_{11}}{\nu M_1}$ è ancora un *raggio di curvatura*, ed il suo inverso $\rho' = \nu \rho$ è detto *curvatura anticlastica*.

Completivamente, un tronco di trave soggetto a flessione si deforma come illustrato in Figura 6

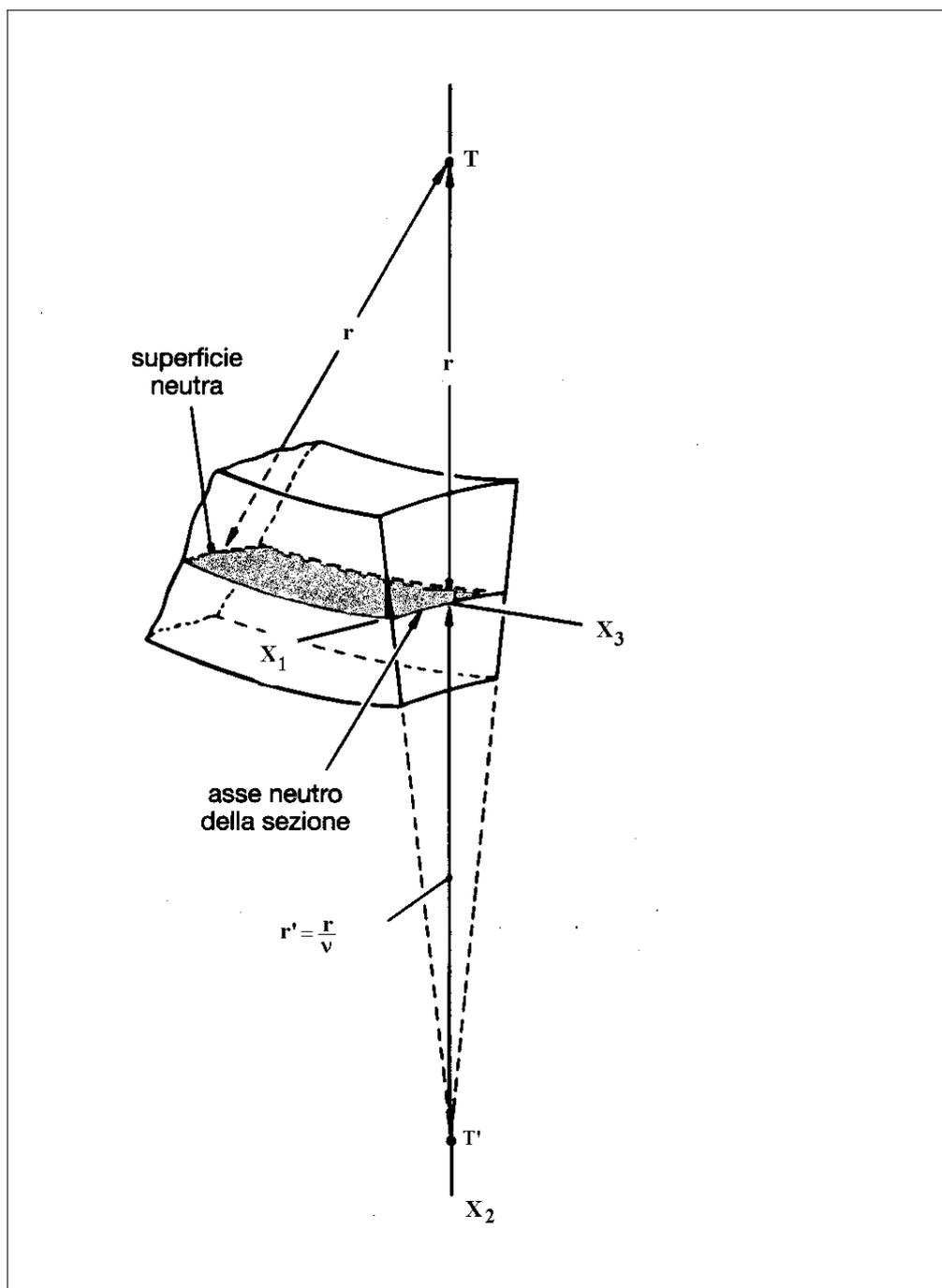


Figura 6 - La deformazione di un tronco di trave soggetto a flessione

■ L'asse

Si consideri l'asse della trave, di equazione $x_1 = x_2 = 0$. A seguito della deformazione, i suoi punti subiranno gli spostamenti:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0 \\
 u_2 &= -\frac{M_1}{2 E I_{11}} x_3^2 \\
 u_3 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Pertanto l'asse si trasforma in una parabola, di curvatura:

$$\chi = \frac{\frac{d^2 u_2}{dx_3^2}}{\left(1 + \left(\frac{du_2}{dx_3}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (43)$$

D'altro canto, nella solita ipotesi di piccoli gradienti di spostamento e' lecito approssimare ad 1 il denominatore, ritrovando la (40):

$$\chi \approx \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = -\frac{M_1}{E I_{11}} = \rho \quad (44)$$

Sono utili le due seguenti:

Def - Il piano che contiene la deformata dell'asse si chiama *piano di flessione*, ed in questo caso coincide con il piano $X_2 - X_3$. La traccia del piano di flessione sulla sezione retta, si chiama *asse di flessione*, ed in questo caso coincide con l'asse X_2 .

Def. - Il piano ortogonale all'asse momento della coppia applicata si chiama *piano di sollecitazione*, ed in questo caso coincide con il piano $X_2 - X_3$. La traccia del piano di sollecitazione sulla sezione retta si chiama *asse di sollecitazione*, ed in questo caso coincide con l'asse X_2 .

■ L'energia di deformazione

L'energia di deformazione L di un tronco di trave lungo l , soggetta a sforzo normale puo' agevolmente calcolarsi in base alla definizione:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} \epsilon_{33} dV = \frac{1}{2 E} \int_V \sigma_{33}^2 dV = \frac{M_1^2}{2 E I_{11}^2} \int_0^l \int_{\Sigma} x_2^2 dA dx_3 = \frac{M_1^2 l}{2 E I_{11}} \quad (45)$$

Un'utile espressione alternativa si ottiene anche in questo caso esprimendo l'energia elastica in funzione degli spostamenti, utilizzando la (44):

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} \epsilon_{33} dV = \frac{1}{2 E} \int_V \sigma_{33}^2 dV = \frac{E I_{11}}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 u_2}{dx_3^2} \right)^2 dx_3 \quad (46)$$

Flessione retta fuori del piano

Analogamente al caso precedente puo' trattarsi il caso in cui la tensione normale σ_{33} sia l'unica componente di tensione presente, e che sia distribuita con legge lineare lungo l'asse X_1 . E' questa la terza sollecitazione semplice di De Saint-Venant, per cui quindi:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (47)$$

con $\sigma_{33} = c x_1$.

■ La deduzione degli spostamenti

Ripetendo i passaggi analitici già illustrati per la sollecitazione semplice di flessione nel piano si ottengono le deformazioni:

$$e_{11} = -\frac{\nu}{E} c x_1; e_{22} = -\frac{\nu}{E} c x_1; e_{33} = \frac{c}{E} x_1; e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0 \quad (48)$$

che in termini di derivate di spostamenti si scrivono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= -\frac{\nu}{E} c x_1; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\nu}{E} c x_1; \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{c}{E} x_1; \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0; \end{aligned} \quad (49)$$

Le prime tre condizioni (49) forniscono:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{2E} c x_1^2 + \phi_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 + \phi_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= \frac{c}{E} x_1 x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (50)$$

che utilizzate nella quarta condizione fornisce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} - \frac{\nu c}{E} x_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} &= \\ 0 \implies \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} = \frac{\nu c}{E} x_2 - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \implies \phi_1 &= \frac{\nu c}{2E} x_2^2 + \psi_1(x_2, x_3) \end{aligned} \quad (51)$$

Ne segue che ora la prima componente di spostamento si scriverà:

$$u_1 = -\frac{\nu}{2E} c x_1^2 + \frac{\nu}{2E} x_2^2 + \psi_1(x_2, x_3) \quad (52)$$

Introducendo anche questa espressione nella quinta condizione si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \frac{c}{E} x_3 + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} &= \\ 0 \implies \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} = -\frac{c}{E} x_3 - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \implies \psi_1 &= -\frac{c}{2E} x_3^2 + \chi_1(x_2, x_3) \end{aligned} \quad (53)$$

e quindi la terna di spostamenti diviene:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu}{2E} c x_1^2 + \frac{\nu c}{2E} x_2^2 - \frac{c}{2E} x_3^2 + \chi_1(x_2, x_3) \\ u_2 &= -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2 + \phi_2(x_1, x_3) \\ u_3 &= \frac{c}{E} x_1 x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (54)$$

E' possibile ora verificare che il campo di spostamenti (χ_1, ϕ_2, ϕ_3) non causa deformazioni, e quindi si potrà assumere la terna di spostamenti:

$$u_1 = -\frac{c\nu}{2E} \left(x_1^2 + \frac{x_3^2}{\nu} - x_2^2 \right)$$

$$u_2 = -\frac{\nu}{E} c x_1 x_2$$

$$u_3 = \frac{c}{E} x_1 x_3$$

■ La deduzione delle caratteristiche

Applicando le definizioni di caratteristiche di sollecitazione esterna si ottiene, ponendo l'origine nel baricentro ed orientando gli assi secondo le direzioni centrali di inerzia

$$F_1^{(2)} = \int_A \sigma_{13} dA = 0; \quad F_2^{(2)} = \int_A \sigma_{23} dA = 0;$$

$$F_3^{(2)} = \int_A \sigma_{33} dA = c \int_A x_1 dA = 0;$$
(56)

$$\mathcal{M}_1^{(2)} = \int_A \sigma_{33} x_2 dA = c \int_A x_1 x_2 dA = 0;$$

$$\mathcal{M}_3^{(2)} = \int_A (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) dA = 0;$$
(57)

$$\mathcal{M}_2^{(2)} = -\int_A \sigma_{33} x_1 dA = -c \int_A x_1^2 dA = -c I_{22};$$

dove l'integrale:

$$I_{22} = \int_A x_1^2 dA$$
(58)

è il momento di inerzia della sezione retta rispetto all'asse verticale x_2 .

Analogamente, sulla faccia di sinistra si annullano tutte le c.s.e. a parte la coppia risultante $\mathcal{M}_2^{(1)}$:

$$F_1^{(1)} = F_2^{(1)} = 0; \quad F_3^{(1)} = \mathcal{M}_1^{(1)} = \mathcal{M}_3^{(1)} = 0;$$
(59)

$$\mathcal{M}_2^{(1)} = -\mathcal{M}_2^{(2)} = c I_{22}$$
(60)

Quindi, le caratteristiche della sollecitazione esterna sulle due basi si riducono a due coppie uguali e contrarie:

$$\mathcal{M}_2^{(2)} = \mathcal{M}_2 = -c I_{22}; \quad \mathcal{M}_2^{(1)} = -\mathcal{M}_2$$
(61)

e la sollecitazione si chiama *sollecitazione semplice di flessione*, o anche *flessione retta*, relativa all'asse x_2 .

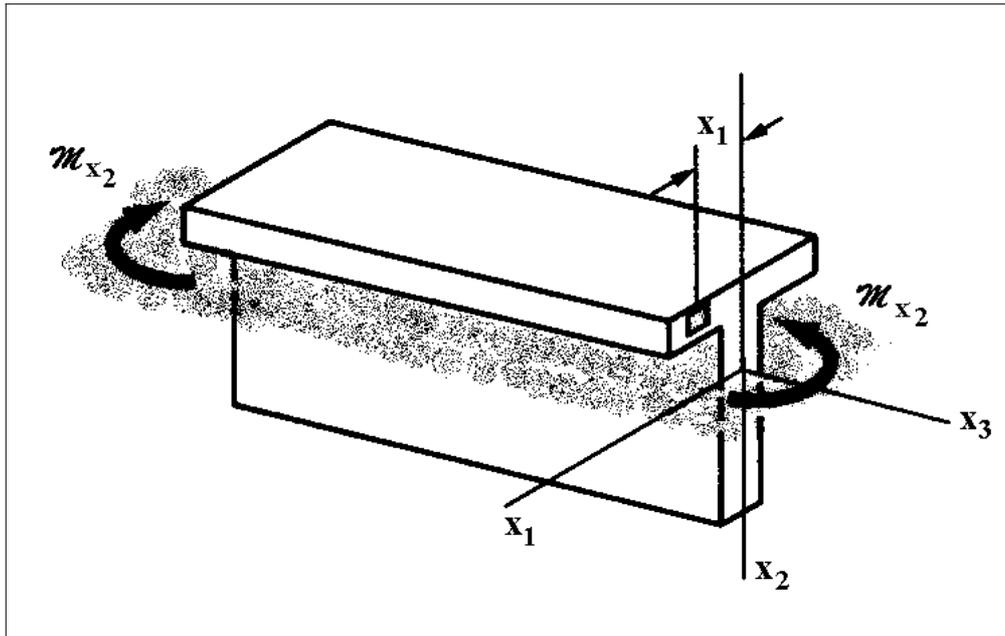


Figura 7- La flessione fuori del piano

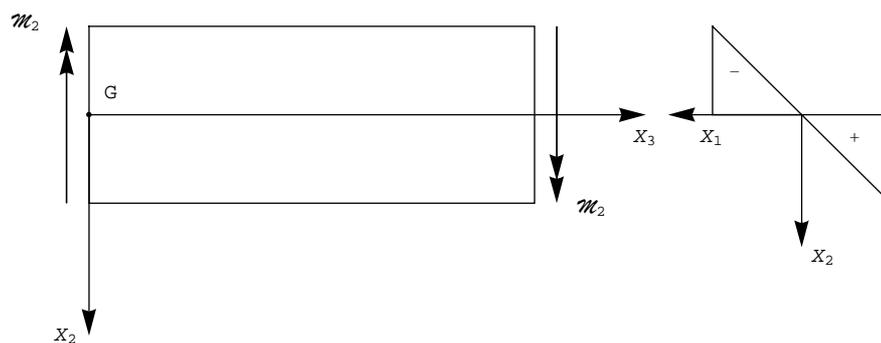


Figura 8 - Momenti flettenti positivi per la flessione fuori dal piano

L'unica caratteristica di sollecitazione interna e' il *momento flettente* M_2 :

$$M_2 = - \int_A \sigma_{33} x_1 dA = -c I_{22} \tag{62}$$

da cui:

$$c = - \frac{M_2}{I_{22}} \tag{63}$$

ed infine:

$$\sigma_{33} = - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 \tag{64}$$

Nota - Si e' giunti quindi ad una formula analoga alla *formula di Navier*: Essa assicura che le tensioni si annullano sull'asse X_2 , sono costanti in corrispondenza di ogni corda parallela all'asse X_2 , proporzionali alla distanza da questo. Per $M_2 > 0$ le tensioni sono positive, ossia di trazione, per $x_1 < 0$, negative, ossia di compressione, per $x_1 > 0$. In questo caso, quindi, il piano medio e' il piano $X_2 - X_3$, mentre l'asse neutro coincide con l'asse X_2 .

Analisi degli spostamenti

E' possibile dimostrare che anche in questo caso le sezioni rette si trasformano in piani, e quindi e' preservata la planeta' delle sezioni rette. Inoltre, l'asse della trave si tramuta in una curva contenuta nel piano $X_1 - X_3$, che quindi e' in questo caso il piano di flessione, mentre l'asse di flessione sara' la traccia del piano di flessione sulla sezione retta, e quindi sara' l'asse X_1 . Cio' giustifica il nome corrente di *flessione fuori del piano*.

Infine, la relazione tra la caratteristica della sollecitazione interna M_2 e la curvatura dell'asse della trave si scrivera' in questo caso:

$$\chi = \frac{d^2 u_1}{dx_3^2} = \frac{M_2}{E I_{22}} \quad (65)$$

Il piano ortogonale all'asse momento della coppia applicata si chiama *piano di sollecitazione*, ed in questo caso coincide con il piano $X_1 - X_3$. La traccia del piano di sollecitazione sulla sezione retta si chiama *asse di sollecitazione*, ed in questo caso coincide con l'asse X_1 .

■ L'energia di deformazione

L'energia di deformazione L di un tronco di trave lungo l , soggetta a sforzo normale puo' agevolmente calcolarsi in base alla definizione:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dV = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 dV = \frac{M_2^2}{2EI_{22}} \int_0^l \int_{\Sigma} x_1^2 dA dx_3 = \frac{M_2^2 l}{2EI_{22}} \quad (66)$$

ed ancora:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dV = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 dV = \frac{EI_{22}}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 u_1}{dx_3^2} \right)^2 dx_3 \quad (67)$$

L'ortogonalita' energetica

Si immagini ora che il tronco di trave sia soggetto contemporaneamente ad una forza assiale $F_3^{(2)}$ e a due coppie flettenti $M_1^{(2)}$ e $M_2^{(2)}$. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, la tensione normale σ_{33} sara' fornita da:

$$\sigma_{33} = \frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 \quad (68)$$

Ne segue che l'energia di deformazione sara' fornita da:

$$L = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{33} e_{33} dV = \frac{1}{2E} \int_V \sigma_{33}^2 dV = \frac{1}{2E} \int_V \left(\frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 \right)^2 dV \quad (69)$$

L'integrando non dipende dalla variabile x_3 , e quindi potra' scriversi, indicando con l la lunghezza della trave:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{l}{2 E} \int_{\Sigma} \left(\frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_{11}} x_2 - \frac{M_2}{I_{22}} x_1 \right)^2 dA = \\
&\frac{N^2 l}{2 EA} + \frac{M_1^2 l}{2 EI_{11}} + \frac{M_2^2 l}{2 EI_{22}} + \frac{l}{2 E} \frac{N}{A} \frac{M_1}{I_{11}} \int_{\Sigma} x_2 dA - \\
&\frac{l}{2 E} \frac{N}{A} \frac{M_2}{I_{22}} \int_{\Sigma} x_1 dA - \frac{l}{2 E} \frac{M_1}{I_{11}} \frac{M_2}{I_{22}} \int_{\Sigma} x_1 x_2 dA
\end{aligned}$$

Se gli assi X_1 ed X_2 sono coincidenti con gli assi centrali di inerzia, allora gli ultimi tre integrali si annullano, e quindi:

$$L = \frac{N^2 l}{2 EA} + \frac{M_1^2 l}{2 EI_{11}} + \frac{M_2^2 l}{2 EI_{22}} \quad (71)$$

L'energia di deformazione di un tronco di trave soggetto contemporaneamente a sforzo normale, flessione retta nel piano e flessione retta fuori del piano e' pari alla somma delle energie elastiche dovute alla presenza di solo sforzo normale, di solo momento flettente nel piano, e di solo momento flettente fuori del piano. In altri termini, le energie mutue di deformazione si annullano, e le tre sollecitazioni sono *ortogonali in senso energetico*.

Note

[Franciosi V.] - Fondamenti di Scienza delle Costruzioni Vol. II, pag. 137, Liguori, Napoli, 1987 [Torna al testo]

Grafici

- **Figura 3**
- **Figura 4**
- **Figura 8**