

---

# Lezione 23 - Il postulato di De Saint-Venant

■ [A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 11 dicembre 2012]

In questa Lezione si illustra la particolarizzazione delle equazioni dell'elasticità fin qui presentate, alla teoria della trave, e si introduce il postulato di De Saint Venant, che permette di dare validità generale alle sei soluzioni del problema debole.

---

## L'ipotesi di De Saint-Venant sullo stato tensionale

Si nota subito, da quanto esposto nella Lezione precedente, che le tensioni  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{12}$  non giocano alcun ruolo nella definizione delle caratteristiche della sollecitazione esterna sulle due basi della trave, o nella definizione delle caratteristiche della sollecitazione interna sulla generica sezione retta. Ciò induce ad ipotizzare che in ciascun punto della trave sia:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0 \quad (1)$$

e che quindi lo stato tensionale sia del tipo:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Questa assunzione verrà giustificata *a posteriori*, nel senso che si mostrerà che utilizzando la (1) si può calcolare una soluzione al problema dell'equilibrio elastico. Poiché il principio di Kirchhoff assicura che essa è anche unica, saremo abilitati a confermare la (1). L'interpretazione fisica dell'ipotesi (1) è evidente: per esse la trave è ridotta ad un insieme di elementi piani longitudinali che si trasmettono tra loro solo tensioni tangenziali in senso parallelo all'asse della trave, ma non tensioni normali, come illustrato in Figura 1.

Ed infatti, un qualsiasi elemento piano parallelo all'asse avrà normale definita dai coseni direttori  $(n_1, n_2, 0)$  e quindi la tensione normale in un qualsiasi suo punto sarà fornita da:

$$\sigma_n = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + 2 \sigma_{12} n_1 n_2 = 0 \quad (3)$$

se si suppone valida la (1). Si vede ora come si venga a semplificare il problema dell'equilibrio elastico per il solido trave soggetto all'ipotesi (1) sullo stato tensionale

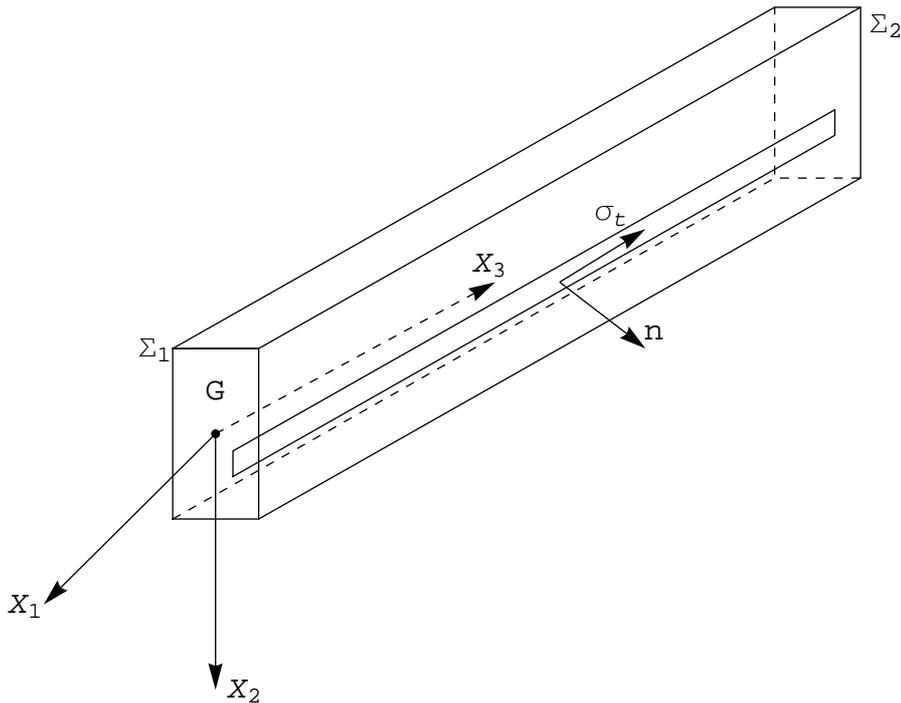


Figura 1- Il comportamento della trave alla luce dell'ipotesi sullo stato tensionale

### ■ Le equazioni indefinite dell'equilibrio

Le equazioni indefinite dell'equilibrio divengono, utilizzando le (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Ne segue, dalle prime due equazioni, che le tensioni tangenziali non dipendono dalla variabile  $x_3$ , e quindi si riproducono identiche su tutte le sezioni rette. Inoltre, derivando la terza rispetto ad  $x_3$  si giunge a scrivere:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{33}}{\partial x_3^2} = 0 \quad (5)$$

e quindi la tensione  $\sigma_{33}$  varia al più con legge lineare rispetto ad  $x_3$ .

### ■ Le condizioni ai limiti

Occorre scrivere le condizioni ai limiti  $\sigma_{ij} n_j = p_i$  in corrispondenza della superficie laterale e di ciascuna delle due basi. La normale alla superficie laterale, per definizione, ha coseni direttori  $(n_1, n_2, 0)$ , e quindi le condizioni ai limiti si riducono, utilizzando anche le (1), alla singola:

$$\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0 \quad (6)$$

ossia:

$$\boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7)$$

avendo definito il vettore  $\boldsymbol{\sigma}_t = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}$  della tensione tangenziale.

Segue dalla (6) che in corrispondenza di un punto qualsiasi del contorno della generica sezione retta, la tensione tangenziale è diretta secondo la tangente al contorno.

Sulla base di sinistra, in  $x_3 = 0$ , i coseni direttori sono  $(0,0,-1)$ , e quindi si hanno le tre condizioni:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= -p_1^{(1)} \\ \sigma_{23} &= -p_2^{(1)} \\ \sigma_{33} &= -p_3^{(1)} \end{aligned} \quad (8)$$

Infine, sulla base di destra, per  $x_3 = L$ , i coseni direttori sono  $(0,0,1)$ , e quindi le tre condizioni ai limiti sono:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= p_1^{(2)} \\ \sigma_{23} &= p_2^{(2)} \\ \sigma_{33} &= p_3^{(2)} \end{aligned} \quad (9)$$

## ■ Le leggi di Hooke

Applicando la legge di Hooke:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (10)$$

dallo stato tensionale (2) si ottiene lo stato deformativo:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{33} \\ e_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{E} \\ e_{12} &= 0 \\ e_{13} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} \\ e_{23} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \end{aligned} \quad (11)$$

Si noti che tra le tre deformazioni normali esiste la relazione:

$$e_{11} = e_{22} = -\nu e_{33} \quad (12)$$

ossia:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\nu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (13)$$

## ■ Le equazioni di Navier-Cauchy

Si ripercorra il cammino già fatto per ottenere le equazioni dell'equilibrio elastico, come descritto nella Lezione 18. Partendo quindi dalle (4), si utilizzino le leggi di Hooke inverse, ottenibili facilmente dalle (10), giungendo a scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{\partial e_{13}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial e_{23}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\partial e_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_2} \right) + E \frac{\partial e_{33}}{\partial x_3} &= 0\end{aligned}\tag{14}$$

Introducendo le relazioni tra deformazioni e derivate degli spostamenti, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{1}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} &= 0\end{aligned}\tag{15}$$

Infine, semplificando la terza in base alla (13) si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} &= 0\end{aligned}\tag{16}$$

Posto in tal modo, il problema dell'equilibrio elastico può essere affrontato utilizzando il cosiddetto metodo semi-inverso di De Saint-Venant. In breve, esso si basa sul fatto che una qualsiasi terna di spostamenti  $(u_1, u_2, u_3)$  che soddisfi sia le equazioni di equilibrio sia le condizioni ai limiti deve essere l'unica possibile soluzione del problema della trave, in base al principio di Kirchhoff. Assegnando quindi uno stato tensionale rispettoso delle prescrizioni suddette (tensioni tangenziali costanti lungo l'asse, tensione normale al più lineare lungo l'asse) si ricava lo stato deformativo, tramite le leggi di Hooke, lo stato di spostamento integrando le relazioni deformazioni-spostamenti, e si deducono a posteriori le caratteristiche della sollecitazione esterna che causano le assegnate tensioni.

Mentre soddisfare le condizioni di equilibrio (16) non è particolarmente complicato, risulta molto più complesso soddisfare le condizioni ai limiti, e non tanto quella sulla superficie laterale quanto quelle sulle due basi, che dipendono dalle forze applicate e - per il problema forte - dalla loro distribuzione puntuale.

Un postulato, ormai universalmente accettato, e largamente provato da ogni tipo di esperimento, permette di ricondurre il problema forte al problema debole, eliminando alla radice la necessità di esaminare l'effettiva distribuzione delle forze sulle basi.

## Il postulato di De Saint-Venant nella sua forma storica

Il postulato di De Saint Venant e' stato da lui enunciato e commentato in piu' occasioni. Ad esempio, nella prefazione alla celebre memoria "De la torsion des prismes" , Parigi 1855, egli cosi' scriveva:

*"Le diverse espressioni fornite nel corso della Memoria per gli spostamenti dei punti dei prismi elastici, per le dilatazioni e le variazioni angolari delle loro parti, le torsioni etc. sono tutte rigorose, allo stesso titolo delle equazioni generali dell'equilibrio elastico, sia in isotropia che in anisotropia, poiche' noi le deduciamo con un'analisi esente da ipotesi od omissioni. Esse devono quindi fornire risultati esatti, a condizione che le forze esterne che producono questi effetti siano applicate e distribuite sulle basi, o sezioni estreme dei prismi, esattamente nella maniera prescritta, con la caratteristica di provocare su tutte le sezioni intermedie una distribuzione analoga di sforzi.*

*Queste espressioni divengono soltanto approssimate nel momento in cui se ne estende l'uso ad altri modi di applicazione e distribuzione delle forze esterne. Il grado di approssimazione non potra' essere precisato - allo stato attuale dell'analisi - ma numerose esperienze, in mancanza di calcoli, fanno ritenere che esso sia notevole. Ad esempio, se si afferra con una tenaglia un estremo di un prisma in caucciù, si vedra' che l'effetto prodotto si estende solo fino ad una piccolissima distanza dal punto di applicazione dell'azione, e che il resto del prisma si comporta come se questa azione non esistesse affatto. Da cio', e da una quantita' di esperienze simili, si puo' concludere che forze applicate su una medesima parte di un prisma elastico e che si fanno equilibrio in media, e quindi con risultante e momento risultante nullo, non causano spostamento che in quella parte e in quelle estremamente vicine, senza influenzare percettibilmente le parti del prisma che si trovano un po' al di qua o al di la'. Ne segue che tutte le volte che si hanno, verso le estremita' di un prisma di una certa lunghezza, forze qualsiasi che stirino il prisma, lo flettano, lo torcano etc., si puo' sempre rimpiazzare queste forze, con tutta l'approssimazione desiderabile nei riguardi dei loro effetti su tutte le altre parti del prisma, con delle forze staticamente equivalenti o che non ne differiscano che per sistemi in equilibrio, o - in altre parole - con delle forze che abbiano la stessa risultante geometrica e lo stesso momento risultante, e che siano applicate e distribuite nel modo particolare che presuppone la nostra soluzione" [Nota 1]*

e svariati anni dopo cosi' precisava, alla pagina 145 del libro di A. Clebsch, "Théorie de l'élasticité des corps solides", tradotto da M.M. Saint Venant e Flamant, con Note estese di M.M. Saint-Venant, Dunod, Parigi, 1883:

*"forze staticamente equivalenti, ossia con la stessa risultante e lo stesso momento risultante, producono gli stessi effetti lungo tutto il solido, qualunque sia il loro modo di applicazione e di distribuzione, eccetto che nel luogo dove esse agiscono, e su porzioni vicine e piccolissime, si' da poterle trascurare" [Nota 2]*

ed ancora, in una nota al paragrafo 28, pagina 174 dello stesso testo:

*"le soluzioni, anche se, per essere rigorosamente esatte, presuppongono un modo particolare, e mai realizzato, di applicazione e distribuzione delle forze alle estremita' della trave che esse stirano, flettono o torcono, si possono nondimeno utilizzare, con tutta l'approssimazione desiderabile, se forze ad esse staticamente equivalenti sono applicate e distribuite in un altro modo su queste estremita': in altri termini, le seconde forze causeranno gli stessi stiramenti, flessioni e torsioni delle prime lungo tutta la trave ch'esse sollecitano, eccetto porzioni piccolissime della sua lunghezza, misurata a partire dai punti dove esse agiscono" [Nota 3]*

Una generalizzazione ai solidi tridimensionali fu poi subito fornita da Boussinesq nel 1885:

"Un sistema equilibrato di forze esterne applicato ad un corpo elastico, i cui punti di applicazione giacciono all'interno di una sfera assegnata, produce deformazioni di grandezza trascurabile a distanze dalla sfera sufficientemente grandi rispetto al suo raggio" (J. Boussinesq "Application des potentiels à l'étude de l'équilibre e des mouvements des solides élastiques" Gauthier-Villars, Paris 1885)

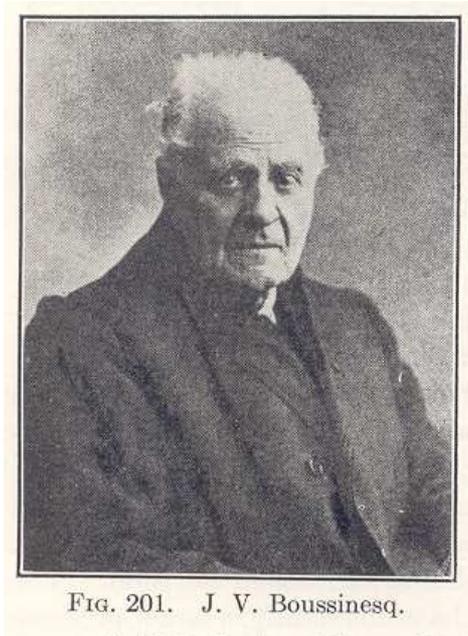


FIG. 201. J. V. Boussinesq.

Figura 2 - J. Boussinesq

## Conseguenze del postulato di De Saint-Venant

La piu' importante conseguenza del postulato di De Saint-Venant risiede nella possibilita' di disinteressarsi dell'effettiva distribuzione delle forze applicate alle basi, ma di ritenere che solo le *caratteristiche* delle forze stesse siano importanti, ai fini della soluzione del problema della trave.

Ed infatti, si consideri un solido trave soggetto alle forze superficiali  $\mathbf{p}^{(1)}$  e  $\mathbf{p}^{(2)}$  sulle due basi, e siano  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$  le tensioni da esse prodotte. Siano poi  $\mathbf{q}^{(1)}$  e  $\mathbf{q}^{(2)}$  altri due insiemi di forze superficiali, e  $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$  le tensioni da esse prodotte. Per il principio di sovrapposizione, l'insieme di forze superficiali  $\mathbf{p}^{(1)} - \mathbf{q}^{(1)}$  e  $\mathbf{p}^{(2)} - \mathbf{q}^{(2)}$  causera' le tensioni  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ . Se ora i due insiemi di forze hanno le stesse caratteristiche, allora la loro differenza sara' un insieme di forze a caratteristiche nulle, e quindi in equilibrio. Ne segue, per il postulato, che ad opportuna distanza  $d_e$  dalle basi dovra' essere  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \approx 0$ .

Se ne deduce che due insiemi di forze diverse, applicate alle basi, ma con le stesse caratteristiche, danno luogo alle stesse tensioni, al di la' di una certa distanza  $d_e$  dalle basi, detta *distanza di estinzione*. In altri termini, la soluzione del problema di De Saint-Venant dipende dalle caratteristiche della sollecitazione, ossia da sei parametri

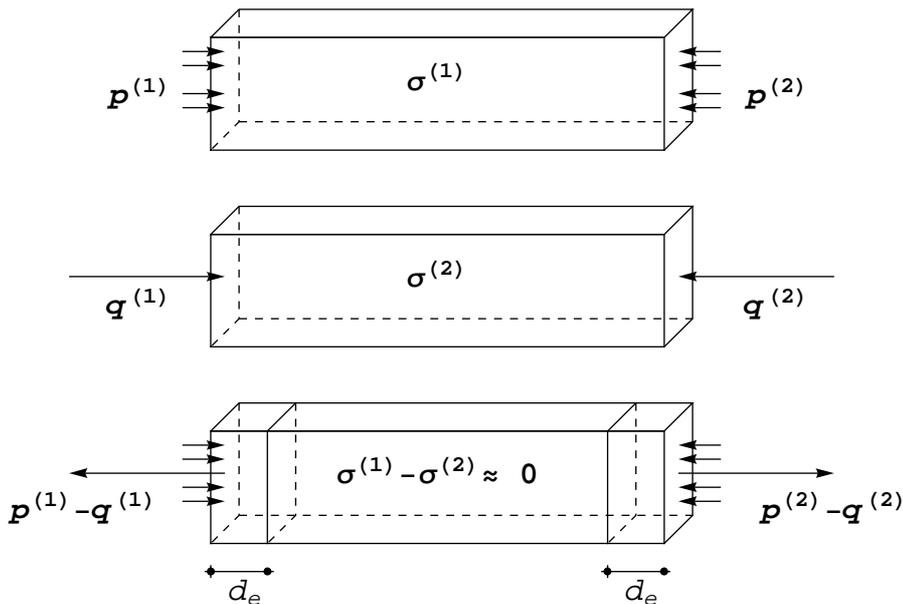


Figura 3 - Al di la' della distanza di estinzione  $d_e$ , le tensioni sono trascurabili

Ne segue che se si conoscono sei soluzioni indipendenti per il problema debole, allora tutte le altre possibili potranno ottenersi tramite sovrapposizione. Nelle prossime Lezioni queste sei soluzioni verranno dedotte utilizzando il metodo semi-inverso, partendo dalle seguenti ipotesi sullo stato tensionale:

Caso 1 -  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$  e  $\sigma_{33}$  costante

Caso 2 -  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$  e  $\sigma_{33}$  variabile linearmente secondo  $x_1$

Caso 3 -  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$  e  $\sigma_{33}$  variabile linearmente secondo  $x_2$

Caso 4 -  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}$

Caso 5 -  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$  e  $\sigma_{33}$  variabile linearmente secondo  $x_1$  ed  $x_3$

Caso 6 -  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$  e  $\sigma_{33}$  variabile linearmente secondo  $x_2$  ed  $x_3$

### Le formulazioni energetiche del postulato di De Saint Venant

Sia la versione originaria del postulato di De Saint Venant che la formulazione di Boussinesq, mentre utilissimi da un punto di vista pratico, non possono essere accettati in un ambito teorico. Ed infatti, come puntualizzato da Fichera:

"Poichè la classica teoria lineare dell'Elasticità, aderente o meno che possa essere alla realtà fisica, è una teoria matematica, cioè rigorosamente ipotetico-deduttiva, è evidente che il principio di Saint-Venant non può essere accettato come postulato, ma deve essere dimostrato matematicamente, come conseguenza di tutta l'assiomatica che sta alla base di quella teoria. Naturalmente, questo presuppone una precisa formulazione matematica del principio stesso, che indichi chiaramente quello che occorre dimostrare." (G. Fichera, "Problemi analitici nuovi nella Fisica Matematica Classica" pag. 50, Quaderni del Consiglio Nazionale delle Ricerche 1985)



Figura 4 - Gaetano Fichera

Inoltre, si è mostrato che travi a sezione retta sottile possono essere caricate agli estremi da forze in equilibrio i cui effetti si risentono lungo tutta la trave, così fornendo un controesempio all'enunciato classico del postulato. E d'altro canto R. von Mises ha puntualizzato che in presenza di forze tangenziali il postulato di Boussinesq cade in difetto. Ne segue la necessità di riformulare il postulato, specificando con attenzione il modo in cui le forze sono applicate, arrivando così alla versione di Sternberg del 1954, rigorosamente enunciata e provata, ma ben al di là dei limiti del corso. Si veda, per una estensiva discussione, il libro di P. Villaggio "Qualitative Methods in Elasticity", Noordhoff 1977.

Un approccio diverso allo stesso problema è stato suggerito da O. Zanaboni in una serie di memorie del 1937, "Dimostrazione generale del principio di De Saint Venant", Atti Accademia Lincei 25 (1937), pagg. 117-121, "Valutazione dell'errore massimo cui dà luogo l'applicazione del principio di De Saint Venant", Atti Accademia Lincei 25 (1937), pagg. 595-601 e "Sull'approssimazione dovuta al principio del De Saint Venant nei solidi prismatici isotropi", Atti Accademia Lincei 26 (1937), pagg. 340-345. Secondo Zanaboni, non ha senso occuparsi dello smorzarsi *puntuale* delle deformazioni, ma occorre calcolare l'andamento globale delle deformazioni, esaminando l'ammontare dell'energia di deformazione posseduta da porzioni di solido via via più lontane dalle basi. L'intuizione era giusta, i tentativi di formalizzazione matematica erano inaccettabili, e si è dovuto attendere la sistemazione definitiva di Richard Toupin nel 1965 per ottenere un teorema matematicamente ineccepibile che può a ben diritto essere considerato la controparte moderna del postulato di De Saint-Venant:

## ■ Il teorema di Toupin

Sia  $(\mathbf{u}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\sigma}')$  la soluzione del problema debole di De Saint-Venant, e sia  $(\mathbf{u}'', \mathbf{e}'', \boldsymbol{\sigma}'')$  la soluzione del corrispondente problema forte. Il campo di spostamenti  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'' - \mathbf{u}'$  conduce allora ad uno stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}'' - \boldsymbol{\sigma}'$  nullo sul mantello laterale, ed a caratteristiche nulle sulle due basi.

Se ora B indica la trave in esame, sia  $B_{x_3}$  la porzione di trave compresa tra la sezione retta all'ascissa  $x_3$  e la sezione retta di mezzeria  $x_3 = L/2$ , e sia  $L_{x_3}$  l'energia di deformazione contenuta in  $B_{x_3}$ :

$$L_{x_3} = \frac{1}{2} \int_{B_{x_3}} c_{ijkl} e_{ij} e_{hk} dV \tag{17}$$

Si noti che si e' supposto il materiale anisotropo. Comunque, poiche' il potenziale elastico e' definito positivo, l'energia elastica  $L_{x_3}$  sara' una funzione non crescente di  $x_3$ , e dovra' essere, per ovvi motivi  $L_{L/2} = 0$ . Il teorema di Toupin fornisce indicazioni su come  $L_{x_3}$  decresce al tendere di  $x_3$  da 0 (meta' trave) a  $x_3 = L/2$  (volume nullo):

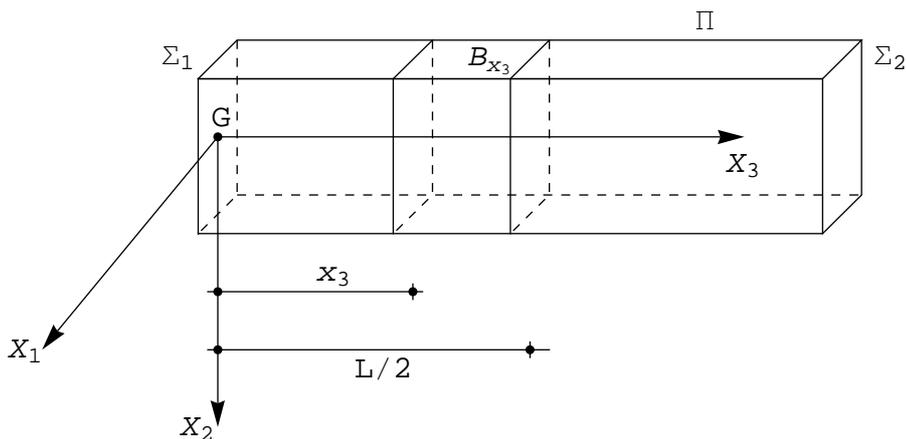


Figura 5 - Il cilindro identificato dalle sezioni rette a distanza z ed L/2 dalla base di sinistra

**Teorema di Toupin** - Nelle ipotesi introdotte, l'energia elastica  $L_{x_3}$  soddisfa la diseguaglianza:

$$L_{x_3} \leq L_0 e^{-\frac{(x_3-s)}{k(s)}} \tag{18}$$

per  $x_3 \geq s$ ,  $s > 0$ , e:

$$k(s) = \sqrt{\frac{\mu_M}{\lambda(s)}} \tag{19}$$

con  $\mu_M$  massimo modulo elastico, e  $\lambda(s)$  puo' identificarsi con la prima frequenza libera di vibrazione di un cilindro di spessore s e base  $\Sigma_1$ , composto dello stesso materiale della trave. [Toupin]

**Note**

[Nota 1] - "Les expressions diverses que nous donnons dans le courant de ce Mémoire pour les déplacements des points des prismes élastiques, pour les dilatations et glissements relatifs de leurs parties, les torsions, etc, sont toutes rigoureuses au même titre que les équations générales de l'équilibre d'élasticité, soit égale, soit inégale dans les trois sens, dont nous les déduisons par une analyse exempte d'hypothèses et suppressions. Elles doivent ainsi fournir des résultats exacts, à la condition que les forces extérieures qui produisent ces effets soient bien appliquées et distribuées sur les bases ou sections extrêmes des prismes de la manière supposée, ayant pour caractère d'entraîner sur toutes les sections intermédiaires une distribution intérieure semblable.

Elles ne deviennent simplement approximatives que dès l'instant où l'on en étend l'usage aux cas d'un autre mode d'application et de distribution des forces extérieures. Le degré de l'approximation ne saurait être précisé dans l'état actuel de l'analyse, mais diverses expériences, à défaut du calcul, font juger qu'il est considérable. Que, par exemple, l'on pince avec une tenaille l'un des bouts d'un prisme en caoutchouc, l'on verra que l'impression produite ne s'étend qu'à une distance fort petite des lignes où l'action s'exerce, et que le reste du prisme se comporte comme si cette action n'existait pas. De ce fait et d'un grand nombre d'autres, on peut conclure que des forces appliquées sur une même partie d'un prisme élastique et qui se font équilibre par son moyen, ou dont la résultante et le moment résultant sont nuls, ne déplacent que les points de cette partie et ceux qui en sont extrêmement voisins, sans agir perceptiblement sur ceux qui se trouvent quelque peu en deçà ou au delà. D'où il suit que toutes les fois qu'il a, vers les extrémités d'un prisme d'une certaine longueur, des forces quelconques qui l'étendent, le fléchissent, le tordent, etc., on peut toujours les remplacer avec toute l'approximation désirable, quant à leurs effets sur toutes les autres parties, par des forces statiquement équivalentes ou n'en différant que par des systèmes en équilibre, autrement dit par des forces ayant même résultante géométrique et même moment résultant, et qui soient appliquées et distribuées de la manière particulière que supposent nos solutions." [Torna al testo]

[Nota 2] - "...des forces, statiquement équivalentes, ou ayant la même résultante et le même moment résultant, produisent les mêmes effets sur toute la longueur de solides, quel que soit leur mode d'application et de distribution, excepté tout auprès des endroits où elles agissent, ou sur des portions à peine sensibles et dont on peut négliger de tenir compte" [Torna al testo]

[Nota 3] - "... les solutions... ,bien qu'elles exigent, pour être rigoureuses, un mode particulier, jamais réalisé, d'application et de distribution des forces aux extrémités des tiges qu'elles étendent, fléchissent ou tordent, conviennent néanmoins, avec toute l'approximation désirable, si des forces qui leur soient statiquement équivalentes sont appliquées, et distribuées d'un autre manière quelconque vers ces extrémités: c'est—à—dire que les dernières forces donneront les mêmes extensions, flexions et torsions que les premières, tout le long de la tige qu'elles sollicitent, en exceptant toutefois des portions très petites de sa longueur, comptées à partir des points où elles agissent..." [Torna al testo]

[Toupin] - Il teorema e' contenuto in R. Toupin "Saint-Venant's principle", Arch. Rat. Mech. & Anal. 18, pagg. 293-304 (1965), e puo' essere letto nella sezione Ricerche del sito <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk>. Una sua dimostrazione dettagliata si puo' consultare nel libro di D.Iesan, "Saint-Venant problem", Springer Lecture Notes in Mathematics, le cui prime pagina possono leggersi nel medesimo sito. [Torna al testo]

## Grafici