
Lezione 22 - Il problema della trave

■ [A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 11 dicembre 2012]

In questa lezione si inizia lo studio dettagliato del comportamento strutturale di un solido dalla particolare geometria: la trave.

La descrizione del solido

Si consideri un solido omogeneo B , a forma di cilindro retto, formato da materiale linearmente elastico ed isotropo. La *sezione retta* si ottiene tagliando il solido con un piano parallelo alle due basi, mentre l'*asse* del solido e' la retta cui appartengono i baricentri delle sezioni rette. I segmenti paralleli all'asse si chiamano *fibre*.

E' usuale assumere come riferimento una terna ortogonale con origine in G , baricentro di una delle due basi, ed assi X_1, X_2 contenuti nel piano di una delle due basi, mentre l'asse X_3 e' orientato verso l'interno del corpo.

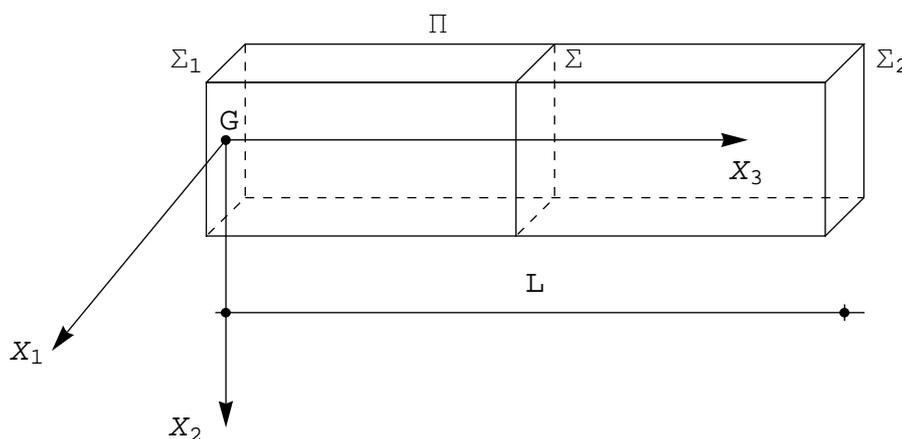


Figura 1. - Il solido del tipo trave

La posizione del problema

Un' ipotesi fondamentale riguarda i carichi applicati alla trave. Si assume infatti che le forze di massa siano assenti, e che la superficie laterale sia scarica, sicche' le uniche forze ammesse sono le forze superficiali sulle due basi. Σ_1 e Σ_2 . E' evidente che almeno l'ipotesi sulle forze di massa e' una approssimazione, attesa la presenza quanto meno delle forze di gravita'. Tuttavia, spesso l'influenza di tali forze e' trascurabile.

Il **problema (forte) di De Saint-Venant** consiste nel ricercare gli spostamenti dei punti della trave omogenea B , in ipotesi di materiale isotropo e linearmente elastico, in assenza di forze di massa e di forze superficiali sul mantello laterale Π , soggetta ai carichi $\mathbf{p}^{(1)}$ sulla base di sinistra Σ_1 e $\mathbf{p}^{(2)}$ sulla base di destra Σ_2 .

Una condizione necessaria per la risoluzione del problema appena posto e' che il solido trave - considerato come un corpo rigido - sia in equilibrio nei riguardi delle tre traslazioni e delle tre rotazioni, ossia che si abbia:

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{p}^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} \mathbf{p}^{(2)} dA = 0 \quad (1)$$

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{r} \times \mathbf{p}^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} \mathbf{r} \times \mathbf{p}^{(2)} dA = 0 \quad (2)$$

dove \mathbf{r} e' il vettore posizione di un punto rispetto all'origine G. In questa ipotesi sulle forze, e con opportune condizioni di regolarita' per il mantello Π e per le forze stesse, puo' dimostrarsi che il problema di De Saint-Venant ammette soluzione. In forma scalare, le (1-2) si scrivono:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} p_1^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} p_1^{(2)} dA &= 0 \\ \int_{\Sigma_1} p_2^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} p_2^{(2)} dA &= 0 \\ \int_{\Sigma_1} p_3^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} p_3^{(2)} dA &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} x_2 p_3^{(1)} dA + \int_{\Sigma_2} x_2 p_3^{(2)} dA - L \int_{\Sigma_2} p_2^{(2)} dA &= 0 \\ - \int_{\Sigma_1} x_1 p_3^{(1)} dA - \int_{\Sigma_2} x_1 p_3^{(2)} dA + L \int_{\Sigma_2} p_1^{(2)} dA &= 0 \\ \int_{\Sigma_1} (x_1 p_2^{(1)} - x_2 p_1^{(1)}) dA + \int_{\Sigma_2} (x_1 p_2^{(2)} - x_2 p_1^{(2)}) dA &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Le caratteristiche della sollecitazione esterna

Sulle due basi Σ_1 e Σ_2 si definiscono le *caratteristiche della sollecitazione esterna*, come i vettori risultanti ed i vettori momenti risultanti delle forze elementari, nell'ipotesi che l'origine del sistema di riferimento venga traslato fino a coincidere con il baricentro della sezione in esame. Sulla base Σ_1 si ha allora:

$$\mathbf{F}^{(1)} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{p}^{(1)} dA \quad (5)$$

$$\mathcal{M}^{(1)} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{r} \times \mathbf{p}^{(1)} dA = \int_{\Sigma_1} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & p_3^{(1)} \end{pmatrix} dA \quad (6)$$

o, scalarmente:

$$F_1^{(1)} = \int_{\Sigma_1} p_1^{(1)} dA ; F_2^{(1)} = \int_{\Sigma_1} p_2^{(1)} dA ; F_3^{(1)} = \int_{\Sigma_1} p_3^{(1)} dA ; \quad (7)$$

$$\mathcal{M}_1^{(1)} = \int_{\Sigma_1} x_2 p_3^{(1)} dA ; \mathcal{M}_2^{(1)} = - \int_{\Sigma_1} x_1 p_3^{(1)} dA ; \quad (8)$$

$$\mathcal{M}_3^{(1)} = \int_{\Sigma_1} (x_1 p_2^{(1)} - x_2 p_1^{(1)}) dA ;$$

Sulla base Σ_2 si hanno invece le caratteristiche della sollecitazione esterna:

$$\mathbf{F}^{(2)} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{p}^{(2)} dA \quad (9)$$

$$\mathcal{M}^{(2)} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{r} \times \mathbf{p}^{(2)} dA = \int_{\Sigma_1} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ p_1^{(2)} & p_2^{(2)} & p_3^{(2)} \end{pmatrix} dA \quad (10)$$

o, scalarmente:

$$F_1^{(2)} = \int_{\Sigma_2} p_1^{(2)} dA ; F_2^{(2)} = \int_{\Sigma_2} p_2^{(2)} dA ; F_3^{(2)} = \int_{\Sigma_2} p_3^{(2)} dA ; \quad (11)$$

$$\mathcal{M}_1^{(2)} = \int_{\Sigma_2} x_2 p_3^{(2)} dA ; \mathcal{M}_2^{(2)} = - \int_{\Sigma_2} x_1 p_3^{(2)} dA ; \quad (12)$$

$$\mathcal{M}_3^{(2)} = \int_{\Sigma_2} (x_1 p_2^{(2)} - x_2 p_1^{(2)}) dA ;$$

Definite queste quantita', le equazioni di equilibrio (3-4) forniscono sei relazioni tra le dodici caratteristiche della sollecitazione esterna:

$$F_1^{(1)} = - F_1^{(2)} ; F_2^{(1)} = - F_2^{(2)} ; F_3^{(1)} = - F_3^{(2)} ; \quad (13)$$

$$\mathcal{M}_1^{(1)} = - \mathcal{M}_1^{(2)} + F_2^{(2)} L ; \mathcal{M}_2^{(1)} = - \mathcal{M}_2^{(2)} - F_1^{(2)} L ; \mathcal{M}_3^{(1)} = \mathcal{M}_3^{(2)} \quad (14)$$

Le caratteristiche della sollecitazione interna

Si introduce ora un concetto di fondamentale importanza per l'analisi delle travi e delle piastre, ossia il concetto di *caratteristiche della sollecitazione interna*.

Si consideri all'uopo un solido del tipo trave, e si operi un taglio secondo la sezione retta Σ , situata alla generica ascissa x_3 , rimuovendo la parte del solido che non contiene l'origine. Si scelga come riferimento una terna ottenuta traslando la terna originaria fino a portare l'origine in Σ , sicche' l'asse X_3 resta inalterato, mentre i due nuovi assi $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ sono paralleli ad X_1 ed X_2 , rispettivamente. Sia \mathbf{t}_{x_3} il vettore tensione agente sulla sezione Σ , di normale equiversa ad X_3 .

Si definiscono *caratteristiche della sollecitazione interna in Σ* , le risultanti delle forze elementari $\mathbf{t}_{x_3} dA$ secondo i tre assi $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ ed X_3 , ed i momenti risultanti delle stesse forze rispetto agli stessi assi.

Sara' quindi, per definizione:

$$T_1(\mathbf{x}_3) = \int_{\Sigma} \sigma_{13} dA ; T_2(\mathbf{x}_3) = \int_{\Sigma} \sigma_{23} dA ; N(\mathbf{x}_3) = \int_{\Sigma} \sigma_{33} dA ; \quad (15)$$

$$M_1(\mathbf{x}_3) = \int_{\Sigma} \sigma_{33} x_2 dA ; M_2(\mathbf{x}_3) = - \int_{\Sigma} \sigma_{33} x_1 dA ; \quad (16)$$

$$M_t(\mathbf{x}_3) = \int_{\Sigma} (\sigma_{23} x_1 - \sigma_{13} x_2) dA ;$$

e, sempre per definizione, T_1 e T_2 si chiamano *sfuerzo di taglio* secondo X_1 ed X_2 , rispettivamente, N si chiama *sfuerzo normale*, M_1 ed M_2 si chiamano *momenti flettenti* relativi ad X_1 ed X_2 , rispettivamente, ed M_t si chiama *momento torcente*.

In genere, queste sei caratteristiche coesistono. Tuttavia, per particolari sollecitazioni esterne, si possono ottenere dei casi piu' semplici, in cui una sola, o al massimo due, caratteristiche sono diverse da zero, mentre le altre si annullano. A questi casi semplici sono dedicate le prossime lezioni.

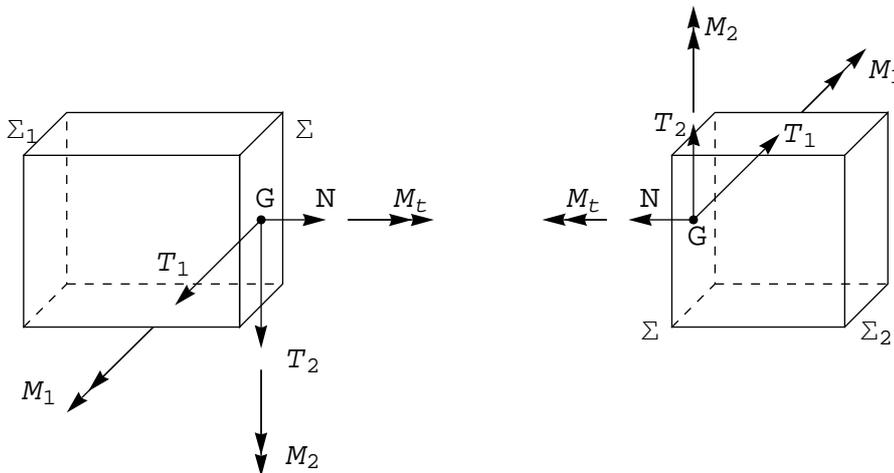


Figura 2 - Le caratteristiche della sollecitazione interna

L'espressione delle c.s.e. in termini di tensioni

Si noti che e' anche possibile esprimere le caratteristiche della sollecitazione esterna in termini di tensioni, anziche' di forze superficiali. Basta all'uopo utilizzare il teorema di Cauchy-Poisson, tenendo conto che la normale alla sezione Σ_1 ha coseni direttori $(0,0,-1)$, mentre la normale alla sezione Σ_2 avra' coseni direttori $(0,0,1)$. Sara' quindi:

$$\mathbf{p}_1^{(1)} = -\sigma_{13}; \mathbf{p}_2^{(1)} = -\sigma_{23}; \mathbf{p}_3^{(1)} = -\sigma_{33}; \quad (17)$$

$$\mathbf{p}_1^{(2)} = \sigma_{13}; \mathbf{p}_2^{(2)} = \sigma_{23}; \mathbf{p}_3^{(2)} = \sigma_{33}; \quad (18)$$

e quindi le c.s.e. sono esprimibili come:

$$\mathbf{F}_1^{(1)} = -\int_{\Sigma_1} \sigma_{13} dA; \mathbf{F}_2^{(1)} = -\int_{\Sigma_1} \sigma_{23} dA; \mathbf{F}_3^{(1)} = -\int_{\Sigma_1} \sigma_{33} dA; \quad (19)$$

$$\mathcal{M}_1^{(1)} = -\int_{\Sigma_1} \mathbf{x}_2 \sigma_{33} dA; \mathcal{M}_2^{(1)} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{x}_1 \sigma_{33} dA; \quad (20)$$

$$\mathcal{M}_3^{(1)} = -\int_{\Sigma_1} (\mathbf{x}_1 \sigma_{23} - \mathbf{x}_2 \sigma_{13}) dA;$$

sulla base di sinistra, e:

$$\mathbf{F}_1^{(2)} = \int_{\Sigma_2} \sigma_{13} dA; \mathbf{F}_2^{(2)} = \int_{\Sigma_2} \sigma_{23} dA; \mathbf{F}_3^{(2)} = \int_{\Sigma_2} \sigma_{33} dA; \quad (21)$$

$$\mathcal{M}_1^{(2)} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{x}_2 \sigma_{33} dA; \mathcal{M}_2^{(2)} = -\int_{\Sigma_2} \mathbf{x}_1 \sigma_{33} dA; \quad (22)$$

$$\mathcal{M}_3^{(2)} = \int_{\Sigma_2} (\mathbf{x}_1 \sigma_{23} - \mathbf{x}_2 \sigma_{13}) dA;$$

sulla base di destra. Le dodici caratteristiche sono riportate in Figura 3

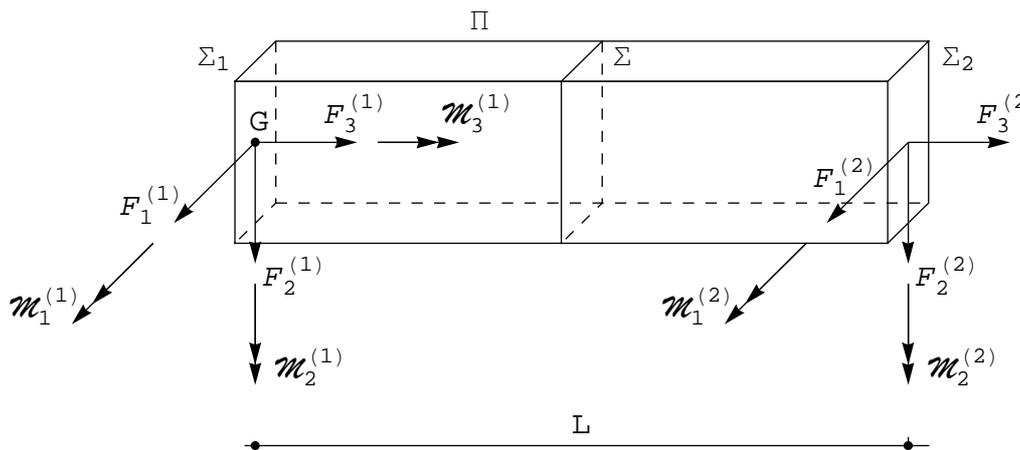


Figura 3 - Le caratteristiche della sollecitazione esterna sulla trave

■ **La relazione tra c.s.e. e c.s.i.**

Quando la sezione retta Σ viene scelta all'ascissa $x_3 = L$, essa viene a coincidere con la sezione di destra Σ_2 , e le normali uscenti sono equiverse. Ne segue che le c.s.i. calcolate sulla sezione di destra coincidono, anche in segno, con le caratteristiche della sollecitazione esterna:

$$T_1 (x_3 = L) = F_1^{(2)} ; T_2 (x_3 = L) = F_2^{(2)} ; N (x_3 = L) = F_3^{(2)} ; \tag{23}$$

$$M_1 (x_3 = L) = \mathcal{M}_1^{(2)} ; M_2 (x_3 = L) = \mathcal{M}_2^{(2)} ; M_t (x_3 = L) = \mathcal{M}_3^{(2)} ; \tag{24}$$

Se invece la sezione retta Σ viene scelta all'ascissa $x_3 = 0$, essa viene a coincidere con la sezione di sinistra Σ_1 , ma le normali uscenti sono controverse, e quindi le c.s.i. sulla sezione di sinistra sono uguali e contrarie alle caratteristiche della sollecitazione esterna:

$$T_1 (x_3 = 0) = - F_1^{(1)} ; T_2 (x_3 = 0) = - F_2^{(1)} ; N (x_3 = 0) = - F_3^{(1)} ; \tag{25}$$

$$M_1 (x_3 = 0) = - \mathcal{M}_1^{(1)} ; M_2 (x_3 = 0) = - \mathcal{M}_2^{(1)} ; M_t (x_3 = 0) = - \mathcal{M}_3^{(1)} ; \tag{26}$$

Il problema "debole" di De Saint-Venant

Nelle stesse ipotesi geometriche del problema di De Saint-Venant, si consideri ora il seguente

Problema debole di De Saint-Venant: ricercare gli spostamenti dei punti della trave omogenea B, in ipotesi di materiale isotropo e linearmente elastico, in assenza di forze di massa e di forze superficiali sul mantello laterale Π , soggetta alle tre forze risultanti $F^{(1)}$ ed ai tre momenti risultanti $\mathcal{M}^{(1)}$ sulla base di sinistra Σ_1 ed alle tre forze risultanti $F^{(2)}$ ed ai tre momenti risultanti $\mathcal{M}^{(2)}$ sulla base di destra Σ_2 .

Come già detto, di queste dodici quantità solo sei sono effettivamente indipendenti, poiché per l'equilibrio della trave dovranno valere le relazioni (13-14). Si vedrà, nella prossima lezione, che sotto certe ipotesi il problema forte può ricondursi al problema debole, se si accetta il postulato di De Saint-Venant.

Grafici