Lezione 20 - I principi variazionali

- **[A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 9 aprile 2013]**

Nelle lezioni precedenti si e' adottata la cosiddetta via differenziale, o *metodo diretto*, nel senso che si sono scritte le condizioni di equilibrio elastico in termini di equazioni differenziali, ottenendo il sistema di tre equazioni lineari del secondo ordine, note come equazioni di Navier-Cauchy.

Da questa lezione si inizia a percorrere la cosiddetta via integrale, o *metodo variazionale*, in cui le condizioni di equilibrio verranno espresse tramite identita' integrali, introducendo alcuni funzionali di fondamentale importanza e definendo alcuni principi di minimo di uso corrente in teoria delle strutture.

Ambedue gli approcci sono antichissimi, come puo' dedursi dalla seguente citazione di Eulero:
"*Poiche' la fabbrica dell'Universo e' perfetta, ed e' il lavoro del piu' saggio Creatore, nulla accade nell'universo per cui non si manifesti qualche relazione di massimo o minimo.*
Non c'e' quindi alcun dubbio che qualunque cosa nell'universo possa spiegarsi in modo soddisfacente a partire dalle cause finali, con l'ausilio del metodo dei massimi e minimi, cosi' come con l'ausilio delle stesse cause effettive.
Percio', si aprono due vie per studiare i fenomeni naturali, uno tramite l'analisi delle cause effettive, comunemente chiamato metodo diretto, e l'altro per mezzo delle cause finali"

Il principio dei lavori virtuali

Si consideri un corpo B, soggetto alle forze di massa **X**, alle forze superficiali **p** sulla parte di frontiera ∂B_1 ed agli spostamenti **f** sulla restante parte ∂B_2. Si forniscono le seguenti:

Def - Una distribuzione simmetrica di tensioni:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

si dice *staticamente ammissibile* se soddisfa le condizioni indefinite di equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + X_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + X_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

all'interno del corpo, e le condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 &= p_1 \\ \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 &= p_2 \\ \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 &= p_3 \end{aligned} \tag{3}$$

sulla frontiera ∂B_1.

Def. - Una terna di spostamenti $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ si dice *geometricamente ammissibile* se e' rispettosa dei vincoli, ossia se soddisfa le condizioni:

$$u_1 = f_1$$
$$u_2 = f_2$$
$$u_3 = f_3$$

sulla frontiera ∂B_2.

Vale la seguente *identita' fondamentale*, che lega le due quantita' appena definite:

Principio dei lavori virtuali - Siano:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

un campo di tensioni staticamente ammissibili, ed $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un campo di spostamenti geometricamente ammissibili. Vale la seguente identita':

$$\int_B \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = \int_B X_i u_i dV + \int_{\partial B_1} p_i u_i ds + \int_{\partial B_2} \sigma_{ij} n_j f_i ds \qquad (6)$$

ossia, in esteso:

$$\begin{aligned} &\int_B \left(\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \sigma_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \right. \\ &\qquad \left. \sigma_{13} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + \sigma_{23} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \right) dV = \\ &\int_B (X_1 u_1 + X_2 u_2 + X_3 u_3) dV + \int_{\partial B_1} (p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3) ds + \\ &\int_{\partial B_2} ((\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) f_1 + \\ &\qquad (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3) f_2 + (\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3) f_3) ds \end{aligned} \qquad (7)$$

Dim - Applicando il teorema di Gauss agli integrali al primo membro si ha:

$$\int_B \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = -\int_B \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i dV + \int_{\partial B} \sigma_{ij} n_j u_i ds \qquad (8)$$

e quindi la (6) diviene:

$$\int_{\partial B} \sigma_{ij} n_j u_i ds = \int_B \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) u_i dV + \int_{\partial B_1} p_i u_i ds + \int_{\partial B_2} \sigma_{ij} n_j f_i ds \qquad (9)$$

Se il campo di tensioni e' staticamente ammissibile, allora gli integrali di volume saranno nulli, in base alle (2). Spezzando gli integrali al primo membro in due integrali, il primo esteso a ∂B_1 ed il secondo a ∂B_2 si ha:

$$\int_{\partial B} \left(\sigma_{ij} n_j - p_i \right) u_i ds = \int_{\partial B_2} \left(\sigma_{ij} n_j \right) (f_i - u_i) ds \qquad (10)$$

Il primo membro sara' nullo, se le tensioni sono staticamente ammissibili, in base alla (3), mentre il secondo membro sara' nullo, se gli spostamenti sono geometricamente ammissibili, in base alle (4). L'uguaglianza e' cosi' dimostrata. ∎

Interpretazione meccanica - Si consideri il primo integrale di volume a secondo membro della (6):

$$L_B = \int_B X_i u_i dV \qquad (11)$$

Esso e' interpretabile come il lavoro compiuto dalle forze di massa per effetto del campo di spostamenti geometricamente ammissibili **u**. Poiche' questo lavoro non e' reale, in quanto gli spostamenti non devono necessariamente essere quelli effettivi, si parla di lavoro *virtuale* delle forze di massa.

Analogamente, l'integrale:

$$L_s = \int_{\partial B_1} p_i\, u_i\, ds \tag{12}$$

e' il lavoro virtuale delle forze superficiali applicate, mentre l'integrale:

$$L_f = \int_{\partial B_2} \sigma_{ij}\, n_j\, f_i\, ds \tag{13}$$

e' il lavoro virtuale che le tensioni staticamente ammissibili compiono per effetto degli eventuali cedimenti imposti **f**. Nel caso di vincoli perfetti, questa aliquota sara' nulla.

Infine, l'integrale a primo membro:

$$L_\sigma = \int_B \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dV \tag{14}$$

potra' riscriversi, ricordando la decomposizione della matrice del gradiente di spostamento nella somma di una parte simmetrica ed una antisimmetrica:

$$L_\sigma = \int_B \sigma_{ij} \left(e_{ij} + \omega_{ij} \right) dV \tag{15}$$

e poiche' risulta $\sigma_{ij}\, \omega_{ij} = 0$, come puo' facilmente controllarsi, si ha:

$$L_\sigma = \int_B \sigma_{ij}\, e_{ij}\, dV \tag{16}$$

e quindi l'integrale a primo membro potra' interpretarsi come il lavoro virtuale che le tensioni staticamente ammissibili compiono per effetto delle "deformazioni" derivate dal campo di spostamenti geometricamente ammissibili.

Ed infatti, si consideri la faccia di area $dx_1\, dx_3$ del parallelepipedo elementare, riportato in pianta in Figura 1. Su di essa agisce la tensione normale σ_{11}e la tensione tangenziale σ_{12}, e corrispondentemente e' presente una dilatazione in senso assiale di intensita' e_{11} ed una variazione angolare $\gamma_{12}= 2\, e_{12}$. Il lavoro della forza elementare $\sigma_{11}\, dx_1\, dx_3$ e' calcolabile considerando che il coefficiente di dilatazione assiale e_{11} implica un allungamento del segento dx_1pari a $e_{11}\, dx_1$, mentre il lavoro della forza elementare $\sigma_{12}\, dx_2\, dx_3$ e' calcolabile considerando che una variazione angolare γ_{12} implica che la faccia si sposta in verticale di $\gamma_{12}\, dx_1$. Segue che il lavoro complessivo e':

$$L = \sigma_{11}\, e_{11}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + 2\, \sigma_{12}\, e_{12}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \tag{17}$$

E' evidente che non esiste alcun legame (elastico o altri) tra le σ_{ij} e le e_{ij}, e questo giustifica l'aggettivo "virtuale" ad un lavoro che non e' effettivamente svolto. L'identita' (6), pertanto, puo' anche essere enunciata affermando che il lavoro virtuale interno di un campo di tensioni staticamente ammissibile per effetto di un campo di spostamenti geometricamente ammissibile, e' pari al lavoro virtuale esterno delle forze di massa, delle forze superficiali e degli eventuali cedimenti presenti.

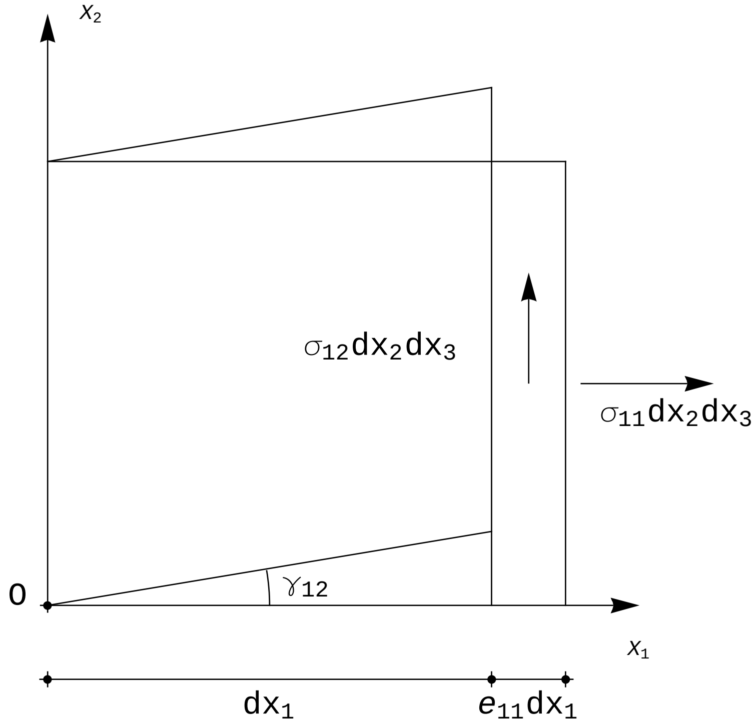

Figura 1 - Le forze elementari agenti su una faccia del parallelepipedo, e le corrispondenti deformazioni

Nota - Per esprimere il principio dei lavori virtuali in forma compatta, particolarmente conveniente risulta la notazione matriciale. Ricordando di aver definito il vettore colonna delle tensioni:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \sigma_{33},\ \sigma_{12},\ \sigma_{13},\ \sigma_{23}\} \tag{18}$$

ed il vettore colonna delle deformazioni:

$$\mathbf{e}^T = \{e_{11},\ e_{22},\ e_{33},\ 2\,e_{12},\ 2\,e_{13},\ 2\,e_{23}\} \tag{19}$$

e' facile realizzare che il p.l.v. si scrive:

$$\int_B \boldsymbol{\sigma}^T\,\mathbf{e}\,dV = \int_B \mathbf{X}^T\,\mathbf{u}\,dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T\,\mathbf{u}\,ds + \int_{\partial B_2} (\mathbf{Sn})^T\,\mathbf{f}\,ds \tag{20}$$

Nota - Il principio dei lavori virtuali e' forse la pietra miliare della meccanica, e su di esso e' possibile edificare tutto l'edificio concettuale della meccanica stessa. Ad esso sono dedicati innumerevoli articoli e libri, sia di carattere storico che scientifico. [Principio lavori virtuali]

Il principio degli spostamenti virtuali

Si ipotizzi ora di aver risolto il problema dell'equilibrio elastico, e di aver quindi ricavato gli spostamenti effettivi $\bar{\boldsymbol{u}} = \{\bar{u},\ \bar{v},\ \bar{w}\}$ e le tensioni effettive:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{12} & \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{12} & \bar{\sigma}_{22} & \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{13} & \bar{\sigma}_{23} & \bar{\sigma}_{33} \end{pmatrix} \tag{21}$$

E' ovvio che gli spostamenti $\bar{\boldsymbol{u}}$ sono geometricamente ammissibili, e che le tensioni $\bar{\boldsymbol{S}}$ sono staticamente ammissibili

Si definisca poi un ulteriore campo di spostamenti arbitrario:

$$\bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} = \left\{\bar{u}_1 + \delta u_1,\ \bar{u}_2 + \delta u_2,\ \bar{u}_3 + \delta u_3\right\} \tag{22}$$

anch'esso geometricamente ammissibile, ed ottenuto aggiungendo alla soluzione classica lo *spostamento virtuale* (o la *variazione*) $\delta\mathbf{u}$. Poiche' sia $\bar{\boldsymbol{u}}$ che $\bar{\boldsymbol{u}} + \delta\mathbf{u}$ sono geometricamente ammissibili, ne segue che dovra' essere:

$$\delta u_i = 0 \tag{23}$$

sulla parte di frontiera δB_2.

Si scriva il principio dei lavori virtuali utilizzando $\bar{\boldsymbol{S}}$ come tensioni, e $\bar{\boldsymbol{u}}$ come spostamenti

$$\int_B \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \bar{\mathbf{e}}\, dV = \int_B \mathbf{X}^T \bar{\mathbf{u}}\, dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{u}}\, ds + \int_{\partial B_2} \left(\bar{\mathbf{S}}\,\mathbf{n}\right)^T \mathbf{f}\, ds \tag{24}$$

Si scriva poi il principio dei lavori virtuali utilizzando ancora $\bar{\boldsymbol{S}}$ come tensioni, e $\bar{\boldsymbol{u}} + \delta\mathbf{u}$ come spostamenti:

$$\begin{aligned} &\int_B \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \left(\bar{\mathbf{e}} + \delta\mathbf{e}\right) dV = \\ &\int_B \mathbf{X}^T \left(\bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}\right) dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \left(\bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}\right) ds + \int_{\partial B_2} \left(\bar{\mathbf{S}}\,\mathbf{n}\right)^T \mathbf{f}\, ds \end{aligned} \tag{25}$$

dove $\delta\mathbf{e}$ sono le deformazioni virtuali dovute agli spostamenti virtuali $\delta\mathbf{u}$.

Sottraendo la (24) dalla (25) si giunge al:

Principio degli spostamenti virtuali - Sia $\bar{\boldsymbol{S}}$ un campo di tensioni staticamente ammissibile, e sia $\delta\mathbf{u}$ un campo di spostamenti arbitrario, che soddisfi le condizioni omogenee:

$$\delta u_i = 0 \tag{26}$$

su ∂B_2. Vale la seguente uguaglianza:

$$\int_B \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \delta\mathbf{e}\, dV = \int_B \mathbf{X}^T \delta\mathbf{u}\, dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \delta\mathbf{u}\, ds \tag{27}$$

o, in forma indiciale:

$$\int_B \sigma_{ij}\, \delta e_{ij}\, dV = \int_B X_i\, \delta u_i\, dV + \int_{\partial B_1} p_i\, \delta u_i\, ds \tag{28}$$

Il principio delle forze virtuali

Analogamente a quanto detto per il paragrafo precedente, si ipotizzi di aver risolto il problema dell'equilibrio elastico, e di aver quindi ricavato gli spostamenti effettivi $\bar{\boldsymbol{u}} = \left\{\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3\right\}$ e le tensioni effettive:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{12} & \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{12} & \bar{\sigma}_{22} & \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{13} & \bar{\sigma}_{23} & \bar{\sigma}_{33} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Si definisca pero' ora un campo di tensioni arbitrario:

$$\bar{\mathbf{S}} + \delta\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11} + \delta\sigma_{11} & \bar{\sigma}_{12} + \delta\sigma_{12} & \bar{\sigma}_{13} + \delta\sigma_{13} \\ \bar{\sigma}_{12} + \delta\sigma_{12} & \bar{\sigma}_{22} + \delta\sigma_{22} & \bar{\sigma}_{23} + \delta\sigma_{23} \\ \bar{\sigma}_{13} + \delta\sigma_{13} & \bar{\sigma}_{23} + \delta\sigma_{23} & \bar{\sigma}_{33} + \delta\sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{30}$$

anch'esso staticamente ammissibile, ed ottenuto aggiungendo alla soluzione classica le *tensioni virtuali* (o le *variazioni*) $\delta\mathbf{S}$. Poiche' sia $\bar{S}$ che $\bar{S} + \delta\mathbf{S}$ sono staticamente ammissibili, ne segue che dovra' essere:

$$\frac{\partial \delta\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \tag{31}$$

nell'interno del corpo, e:

$$\delta\sigma_{ij}\, n_j = 0 \tag{32}$$

sulla parte di frontiera δB_1.In altri termini le tensioni virtuali $\delta\mathbf{S}$ sono *autoequilibrate*.

Si scriva il principio dei lavori virtuali utilizzando $\bar{S}$ come tensioni, e $\bar{u}$ come spostamenti

$$\int_B \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \bar{\mathbf{e}}\, dV = \int_B \mathbf{X}^T \bar{\mathbf{u}}\, dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{u}}\, ds + \int_{\partial B_2} \left(\bar{\mathbf{S}}\,\mathbf{n}\right)^T \mathbf{f}\, ds \tag{33}$$

Si scriva poi il principio dei lavori virtuali utilizzando ancora $\bar{u}$ come spostamenti, e $\bar{S} + \delta\mathbf{S}$ come tensioni:

$$\int_B \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \delta\boldsymbol{\sigma}\right)^T \bar{\mathbf{e}}\, dV = \int_B \mathbf{X}^T \bar{\mathbf{u}}\, dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{u}}\, ds + \int_{\partial B_2} \left[\left(\bar{\mathbf{S}} + \delta\mathbf{S}\right) n\right]^T \mathbf{f}\, ds \tag{34}$$

Sottraendo la (33) dalla (34) si giunge al:

Principio delle forze virtuali - Sia $\bar{u}$ un campo di spostamenti geometricamente ammissibile, e sia $\delta\mathbf{S}$ un campo di tensioni arbitrario autoequilibrato.

Vale la seguente uguaglianza:

$$\int_B \delta\boldsymbol{\sigma}^T \bar{\mathbf{e}}\, dV = \int_{\partial B_2} (\delta\mathbf{S}\, n)^T \mathbf{f}\, ds \tag{35}$$

o, in forma indiciale:

$$\int_B \delta\sigma_{ij}\, e_{ij}\, dV = \int_{\partial B_2} \delta\sigma_{ij}\, n_j\, f_i\, ds \tag{36}$$

L'energia elastica

Si consideri un corpo B, e si supponga che per esso valgano le leggi dell'iperelasticita', garantendo l'esistenza di un potenziale elastico definito in ciascun punto del corpo. Si definisce *energia elastica L* di un corpo B l'integrale, esteso al volume di B, del potenziale elastico, espresso in funzione degli spostamenti.

In ipotesi di validita' della legge di Hooke, quindi, si ha, dalla (30) della Lezione 16:

$$L(\mathbf{e}) = \int_B \phi(\mathbf{e})\, dV = \frac{1}{2}\int_B \mathbf{e}^T \mathbf{C}\mathbf{e}\, dV \tag{37}$$

Si definisce poi *energia potenziale* P dei carichi applicati l'inverso del lavoro da essi compiuto:

$$P(\mathbf{u}) = -\int_B \mathbf{X}^T \mathbf{u}\, dV - \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \mathbf{u}\, ds \tag{38}$$

La *variazione* δL dell'energia elastica si ottiene nel modo piu' semplice calcolando la differenza tra la quantita' incrementata e la quantita' originaria:

$$\begin{aligned}
&\delta L = \\
&L(\mathbf{e} + \delta\mathbf{e}) - L(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}\int_B (\mathbf{e} + \delta\mathbf{e})^T\, \mathbf{C}\, (\mathbf{e} + \delta\mathbf{e})\, dV - \frac{1}{2}\int_B \mathbf{e}^T\, \mathbf{C}\mathbf{e}\, dV = \\
&\frac{1}{2}\int_B \left(\mathbf{e}^T\, \mathbf{C}\mathbf{e} + \delta\mathbf{e}^T\, \mathbf{C}\mathbf{e} + \mathbf{e}^T\, \mathbf{C}\delta\mathbf{e} + \delta\mathbf{e}^T\, \mathbf{C}\, \delta\mathbf{e} - \mathbf{e}^T\, \mathbf{C}\mathbf{e}\right) dV = \\
&\int_B \mathbf{e}^T\, \mathbf{C}\delta\mathbf{e}\, dV + \frac{1}{2}\int_B \delta\mathbf{e}^T\, \mathbf{C}\, \delta\mathbf{e}\, dV
\end{aligned} \tag{39}$$

dove si e' utilizzata la simmetria della matrice **C** al fine di dimostrare che $\delta\mathbf{e}^T\, \mathbf{C}\mathbf{e} = \mathbf{e}^T\, \mathbf{C}\delta\mathbf{e}$.

Come si vede dalla formula precedente, la variazione δL e' somma di una quantita' lineare in $\delta\mathbf{e}$ e di una quantita' quadratica in $\delta\mathbf{e}$. La parte lineare si chiama spesso *variazione prima* della energia elastica:

$$\delta_1 L = \int_B \mathbf{e}^T\, \mathbf{C}\delta\mathbf{e}\, dV \tag{40}$$

mentre la parte quadratica, detta *variazione seconda*, e' fornita da:

$$\delta_2 L = \frac{1}{2}\int_B \delta\mathbf{e}^T\, \mathbf{C}\delta\mathbf{e}\, dV \tag{41}$$

La variazione δP dell'energia potenziale si ottiene analogamente:

$$\begin{aligned}
&\delta P = P(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) - P(\mathbf{u}) = \\
&-\int_B \mathbf{X}^T\, (\mathbf{u} + \delta\mathbf{u})\, dV - \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T\, (\mathbf{u} + \delta\mathbf{u})\, ds + \int_B \mathbf{X}^T\, \mathbf{u}\, dV + \\
&\int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T\, \mathbf{u}\, ds = -\int_B \mathbf{X}^T\, \delta\mathbf{u}\, dV - \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T\, \delta\mathbf{u}\, ds
\end{aligned} \tag{42}$$

Si puo' notare quindi che la variazione dell'energia potenziale e' limitata ad una sola parte lineare in $\delta\mathbf{u}$, e quindi puo' scriversi:

$$\delta_1 P = -\int_B \mathbf{X}^T\, \delta\mathbf{u}\, dV - \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T\, \delta\mathbf{u}\, ds \tag{43}$$

Il principio di stazionarieta' dell'energia potenziale totale

Si consideri l'espressione del principio degli spostamenti virtuali, come fornita dalla (20), e si introduca la legge di Hooke nel primo integrale:

$$\int_B \mathbf{e}^T\, \mathbf{C}\delta\mathbf{e}\, dV - \int_B \mathbf{X}^T\, \delta\mathbf{u}\, dV - \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T\, \delta\mathbf{u}\, ds = 0 \tag{44}$$

Si noti che ora le tensioni e le deformazioni non sono piu' quantita' tra loro indipendenti, ma sono collegate dal legame elastico ipotizzato. Di conseguenza, si e' eliminato la barra sulla prima **e**.

Utilizzando la (40) e la (43) si ha poi:

$$\delta_1 (L + P) = 0 \tag{45}$$

La quantita' tra parentesi si dice l'*energia potenziale totale* E_t del corpo B:

$$E_t = L + P = \frac{1}{2}\int_B \mathbf{e}^T \mathbf{C}\mathbf{e}\, dV - \int_B \mathbf{X}^T \mathbf{u}\, dV - \int_{\partial B_1} \mathbf{p}^T \mathbf{u}\, ds \qquad (46)$$

ed e' pari alla somma dell'energia elastica e dell'energia potenziale dei carichi.

La (45) dimostra il:

Principio di stazionarieta' dell'energia potenziale totale - Il funzionale dell'energia potenziale totale raggiunge un punto di stazionarieta' in corrispondenza della soluzione del problema elastico.

Nota - Come si e' visto, la via variazionale e' antichissima, ed e' molto difficile attribuire la paternita' del principio di stazionarieta' dell'energia potenziale totale. [Energia potenziale totale]

L'energia complementare

Si consideri un corpo B, e si supponga che per esso valgano le leggi dell'iperelasticita', garantendo l'esistenza di un potenziale elastico definito in ciascun punto del corpo. Si definisce *energia complementare* L_c di un corpo B l'integrale, esteso al volume di B, del potenziale elastico, espresso in funzione delle tensioni.

In ipotesi di validita' della legge di Hooke, quindi, si ha, dalla (32) della Lezione 16:

$$L_c(\boldsymbol{\sigma}) = \int_B \phi(\boldsymbol{\sigma})\, dV = \frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\, dV \qquad (47)$$

La *variazione* δL_c dell'energia complementare si ottiene analogamente a quanto gia' fatto per l'energia elastica:

$$\delta L_c = \int_B \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}\delta\boldsymbol{\sigma}\, dV + \frac{1}{2}\int_B \delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}\,\delta\boldsymbol{\sigma}\, dV \qquad (48)$$

e la *variazione prima* della energia complementare e':

$$\delta_1 L_c = \int_B \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}\delta\boldsymbol{\sigma}\, dV \qquad (49)$$

Il principio di stazionarieta' dell'energia complementare totale

Si consideri l'espressione del principio delle forze virtuali, come fornita dalla (35) , e si introduca la legge di Hooke nel primo integrale:

$$\int_B \delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\, dV - \int_{\partial B_2} (\delta\mathbf{S}\, n)^T \mathbf{f}\, ds = 0 \qquad (50)$$

Utilizzando la (49) si ha poi:

$$\delta_1 \left\{ L_c - \int_{\partial B_2} (\mathbf{S}\, n)^T \mathbf{f}\, ds \right\} = 0 \qquad (51)$$

La quantita' tra parentesi si dice l'*energia complementare totale* E_{tc} del corpo B:

$$E_{tc} = \frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\, dV - \int_{\partial B_2} (\mathbf{S}\, n)^T \mathbf{f}\, ds \qquad (52)$$

La (51) dimostra il:

Principio di stazionarieta' dell'energia complementare totale - Il funzionale dell'energia complementare totale raggiunge un punto di stazionarieta' in corrispondenza della soluzione del problema elastico.

Nota - Secondo Gurtin, la paternita' del principio di stazionarieta' dell'energia complementare totale puo' essere attribuita a Gustavo Colonnetti. [Energia complementare totale]

Figura 2 - Gustavo Colonnetti

Conclusioni

Nelle lezioni seguenti si applicheranno in modo estensivo i risultati, fondamentali, di questa lezione, studiando il comportamento elasto-statico di travi, lastre e piastre.

Note

[Principio lavori virtuali] Ad esempio, si puo' consultare il libro di G.A.O. Davies, "Virtual Work in Structural Analysis", J. Wiley 1982, per applicazioni svolte sia utilizzando il principio degli spostamenti virtuali (Capitolo 2) che il principio delle forze virtuali (Capitolo 3).

Una interessante storia del principio dei lavori virtuali puo' leggersi nel libro "I Fondamenti della Statica" di Gustavo Colonnetti, UTET 1927, il cui capitolo III della prima parte puo' essere ritrovato nel sito dedicato alle letture, mentre una storia piu' moderna e' quella di Sergio Cavallone, pubblicato in "Impiantistica Italiana", marzo 1995, pp.148-158, ancora da poter leggere nel sito.

Infine, Danilo Capecchi ha dedicato alla storia del principio dei lavori virtuali i libri "Il Principio dei Lavori Virtuali da Aristotele a Bernoulli", Luda, Napoli (2000) e "Storia del principio dei lavori virtuali. La Meccanica alternativa" Hevelius, Benevento (2002) [Torna al testo]

[Energia potenziale totale] - Secondo Gurtin, le idee di base sono dovute a George Green, "On the laws of reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media", Trans. Cambridge Phil. Soc. 7, 1-24 (1839), anche se la sistemazione definitiva e' dovuta ad A.E.H.Love "A Treatise on the

Mathematical Theory of Elasticity", 2nd ed. Dover Publ. (1906) e Gustavo Colonnetti, "L'equilibrio elastico dal punto di vista energetico", Mem. Accad. Sci. Torino, (2), 62, 479-495 (1912) [Torna al testo]

[Energia complementare totale] - Si veda ancora Gustavo Colonnetti, "L'equilibrio elastico dal punto di vista energetico", Mem. Accad. Sci. Torino, (2), 62, 479-495 (1912) [Torna al testo]

Grafici