

---

# Lezione 2 - I vincoli

## ■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 29 settembre 2012]

Proseguendo nello studio della cinematica del corpo rigido, si vuole fornire in questa lezione una classificazione dei possibili vincoli agenti su un corpo rigido, limitatamente al caso piano, che peraltro comprende la maggioranza degli schemi strutturali. Inoltre, i vincoli considerati saranno olonomi, lisci e bilaterali.

---

## I vincoli piani

Nel piano, il corpo rigido ha tre gradi di liberta', due traslazioni secondo due assi di riferimento, ed una rotazione intorno ad un asse ortogonale al piano, e passante per il polo di riferimento. Se si vuol classificare cinematicamente i vincoli, e' quindi ovvio che potranno definirsi vincoli semplici, doppi o tripli, a seconda che essi sopprimano uno, due o tre gradi di liberta' al corpo rigido.

## ■ I vincoli semplici e la loro rappresentazione meccanica

Si consideri il corpo rigido S, e lo si voglia vincolare nel punto A generico attraverso un vincolo semplice, ossia un vincolo che sopprima un solo grado di liberta'. Le tre possibilita' immediate sono ovviamente espresse dalle tre equazioni:

$$\begin{aligned}u_{1A} &= 0 \\u_{2A} &= 0 \\ \phi_A &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

Nel primo caso il punto A non puo' avere spostamenti in orizzontale, e quindi esso e' costretto a scorrere lungo l'asse verticale, mentre nel secondo caso sono gli spostamenti verticali ad essere proibiti, e quindi il punto dovra' scorrere in orizzontale. Piu' in generale, un'equazione di vincolo impone al punto vincolato l'appartenenza ad una retta inclinata genericamente di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale, sicche' le sue componenti di spostamento dovranno obbedire alla relazione geometrica:

$$u_{2A} = u_{1A} \tan \alpha\tag{2}$$

Il modello meccanico dei vincoli ora esposti e' rappresentato da un pendolo, il cui asse e' orientato ortogonalmente alla retta su cui il punto e' obbligato a scorrere, oppure da un carrello con piano di scorrimento parallelo alla retta di vincolo.

L'ultimo tipo di vincolo permette le traslazioni in qualsiasi direzione, ma proibisce al corpo S di ruotare. Del suo modello meccanico si parlera' alla fine della lezione.

## ■ I vincoli doppi e la loro rappresentazione meccanica

Un vincolo doppio deve, per definizione, eliminare due gradi di liberta', e quindi si hanno due possibilita': un vincolo che proibisce ambedue le traslazioni, lasciando libera la rotazione, oppure un vincolo che proibisce una traslazione e la rotazione, lasciando libero il punto di traslare lungo una direzione. Nel primo caso si parla di *cerniera*, nel secondo di *bipendolo*.

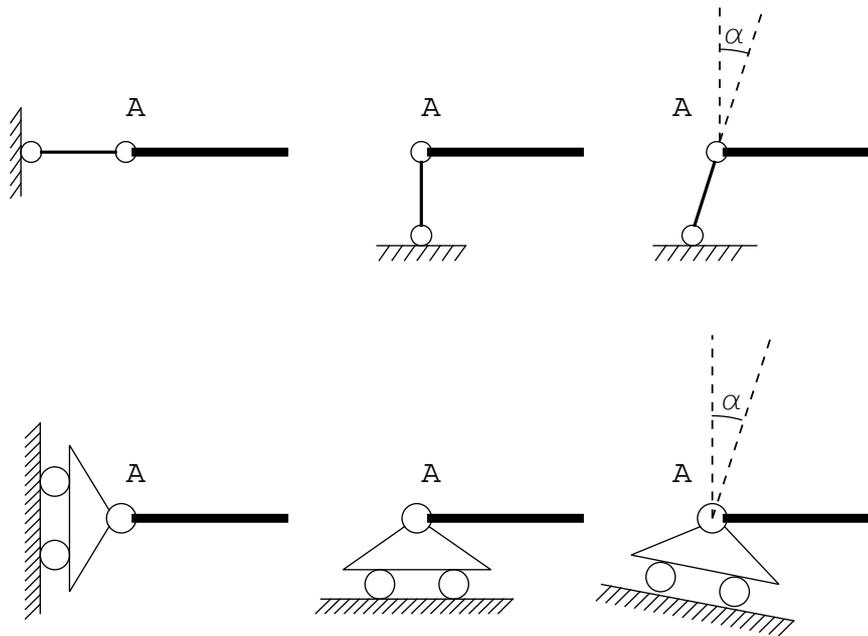


Figura 1 - I vincoli semplici ed i loro modelli meccanici: in prima colonna il vincolo  $u_{1A} = 0$ , in seconda colonna  $u_{2A} = 0$ , in terza  $u_{2A} = u_{1A} \tan[\alpha]$

### ■ La cerniera

Si consideri il corpo S, e si voglia vincolare un suo punto A in modo da impedire qualsiasi traslazione. E' evidente che bastera' imporre che siano nulle le traslazioni secondo due assi ortogonali, che converra' scegliere paralleli agli assi coordinati. Le corrispondenti equazioni di vincolo sono quindi:

$$\begin{aligned} u_{1A} &= 0 \\ u_{2A} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Il modello meccanico della cerniera e' riportata in Figura 2. E' immediato realizzare che lo stesso vincolo puo' rappresentarsi attraverso la presenza contemporanea di due pendoli ad asse verticale ed orizzontale. D'altro canto, quest'ultima rappresentazione offre la possibilita' di realizzare una *cerniera ideale*, come illustrato nella stessa Figura 2: il corpo non puo' traslare, ma puo' solo ruotare intorno al punto ideale C situato all'intersezione tra gli assi dei due pendoli.

### ■ Il bipendolo

Il secondo tipo di vincolo doppio proibisce la traslazione lungo una retta, e la rotazione. Meccanicamente, puo' indicarsi con un bipendolo, come indicato in Figura 2, e puo' realizzarsi attraverso una coppia di pendoli ad asse parallelo tra loro, ed ortogonale alla retta lungo cui puo' traslare il punto vincolato.

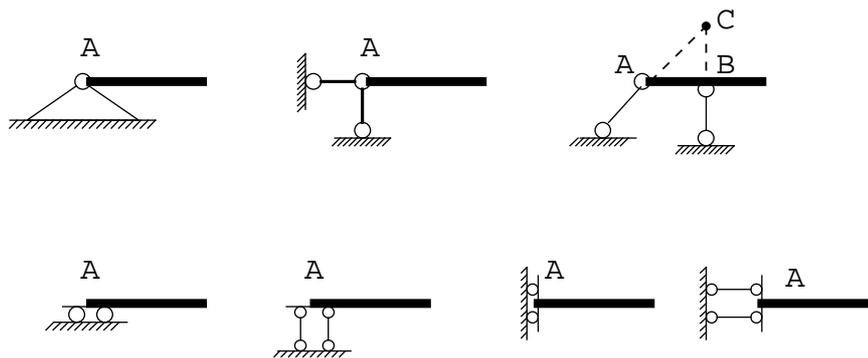


Figura 2 - I vincoli doppi ed i loro modelli meccanici

### ■ I vincoli tripli e la loro rappresentazione meccanica

Un vincolo triplo impedisce al punto A le tre possibilità di movimento, e quindi può tradursi analiticamente nelle tre equazioni:

$$\begin{aligned}
 u_{1A} &= 0 \\
 u_{2A} &= 0 \\
 \phi_A &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Tale tipo di vincolo è meccanicamente rappresentato come un incastro, e può intendersi equivalente alla contemporanea presenza di tre pendoli ad assi non concorrenti in un punto (proprio od improprio).

### ■ Sul doppio bipendolo

Il modello meccanico del vincolo semplice che proibisce la rotazione, permettendo le traslazioni, può essere ora illustrato in Figura 3, giustificando così anche il nome di doppio bipendolo ad esso assegnato.

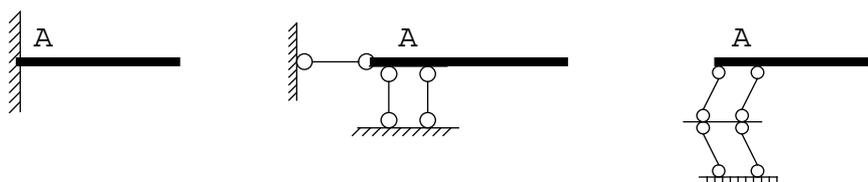


Figura 3 - Il vincolo triplo, ed il doppio bipendolo

### Le reazioni vincolari

Ad ogni vincolo deve corrispondere una forza che sia in grado di far rispettare il vincolo stesso. Ne segue che il vincolo semplice che proibisce le traslazioni orizzontali è equivalente ad una forza di intensità tale da annullare gli spostamenti orizzontali, e poiché essa può essere vista come l'azione del dispositivo di vincolo sulla trave, la si chiamerà *reazione vincolare*.

Del tutto analogamente, un carrello a piano di scorrimento orizzontale può essere sostituito da una reazione verticale, di valore incognito, capace di annullare gli spostamenti verticali, ed il doppio bipendolo può essere considerato equivalente ad una *coppia reattiva*, che annulla le rotazioni.

I vincoli doppi, dal canto loro, impongono due condizioni cinematiche, e sono equivalenti a due forze/coppie reattive. Così, la cerniera equivale a due reattive dirette secondo gli assi, ed il bipendolo ad una reazione - diretta secondo l'asse del bipendolo - e ad una coppia reattiva. Infine, l'incastro deve essere sostituito da due reazioni ed una coppia. Tutto ciò è sintetizzato nelle tre figure seguenti.

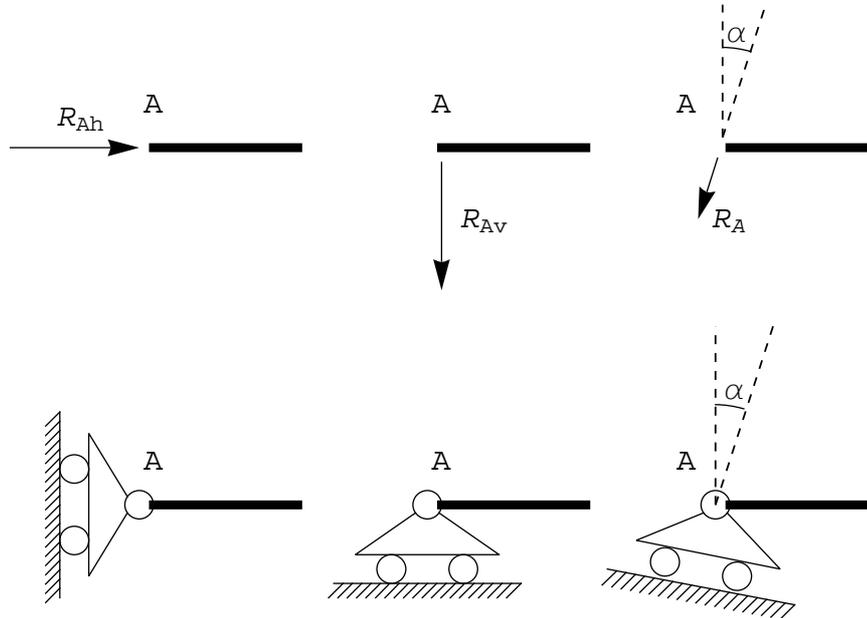


Figura 4 - Carrelli a piano di scorrimento verticale, orizzontale o inclinato, e loro equivalente statico

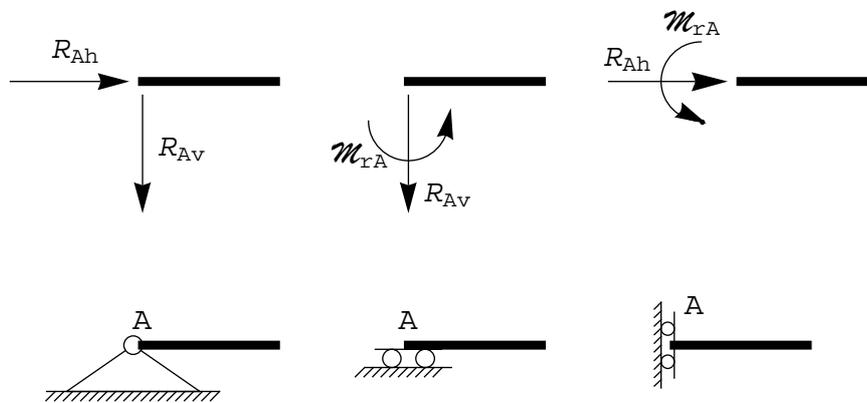


Figura 5 - Cerniera e bipendolo, e loro equivalente statico

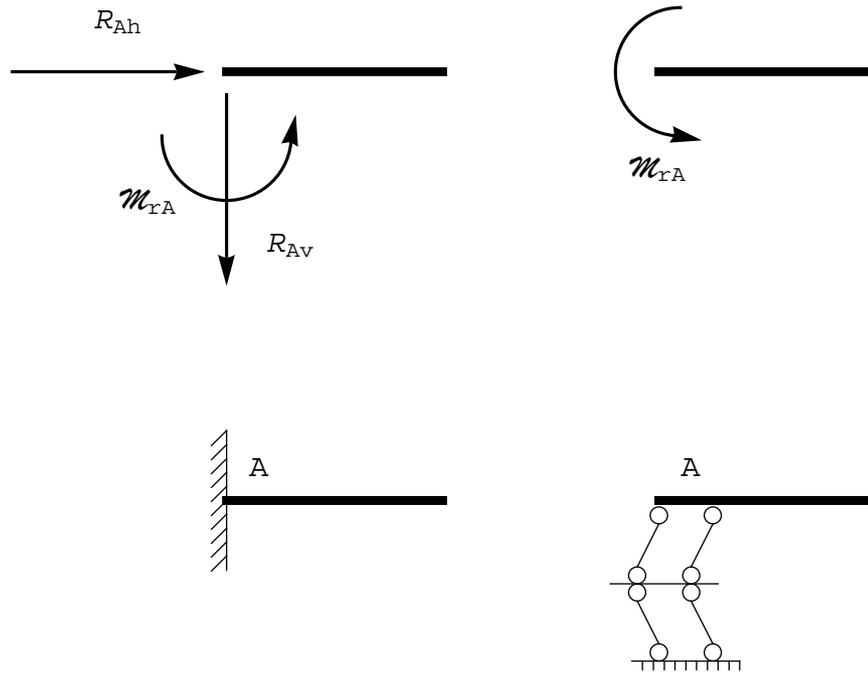


Figura 6 -Incastro e doppio bipendolo, e loro equivalente statico

**Figure**