

---

# Lezione 19 - Stati piani di tensione e spostamento

■ [A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 25 Novembre 2012]

Si e' visto, nella lezione precedente, che la soluzione del problema ai limiti dell'elasticita' non sempre e' perseguibile analiticamente; esistono tuttavia alcuni casi particolari in cui possono effettuarsi interessanti sviluppi analitici. A questi casi e' dedicata la presente lezione, in cui viene introdotta la piu' semplice funzione di tensione, la funzione di Airy, che permette la soluzione di alcuni importanti esempi strutturali.

---

## Stati monoassiali di tensione

Un corpo B, per definizione, e' in *stato monoassiale di tensione*, se in ciascun punto del corpo le tensioni assumono la forma:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ed inoltre l'unica componente non nulla di tensione e' funzione della sola coordinata  $x_3$ :

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}(x_3) \quad (2)$$

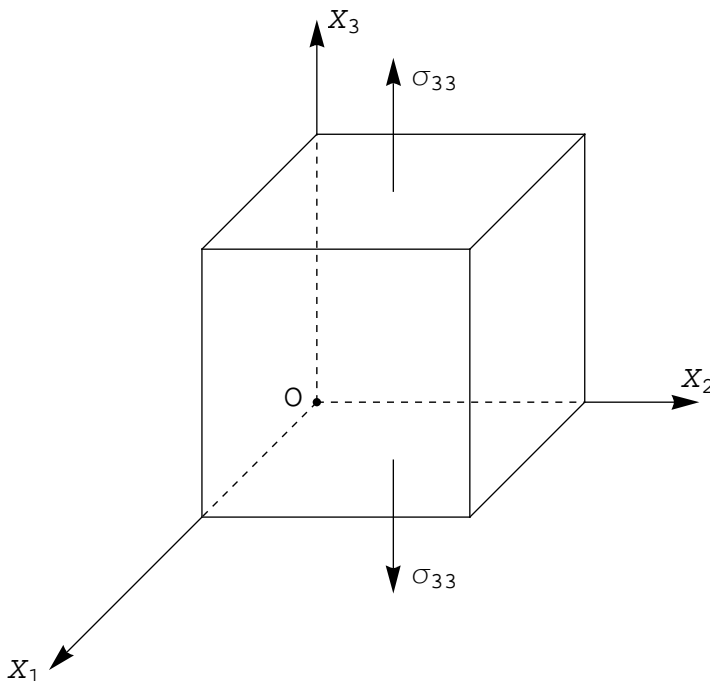


Figura 1. - Stato monoassiale di tensione

Le direzioni principali di tensione sono l'asse  $x_3$  e qualsiasi coppia di rette nel piano  $(x_1, x_2)$ .

Siano per ipotesi nulle le forze di massa, sicche' le prime due equazioni indefinite dell'equilibrio sono

identicamente nulle, mentre la terza si riduce a:

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (3)$$

da cui subito:

$$\sigma_{33} = \sigma_0 = \text{costante} \quad (4)$$

Dalle tensioni puo' ricavarsi lo stato deformativo, utilizzando la legge di Hooke per materiali omogenei ed isotropi. Sara':

$$e_{11} = e_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_0 \quad (5)$$

$$e_{33} = \frac{\sigma_0}{E} \quad (6)$$

$$e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0 \quad (7)$$

Infine, gli spostamenti si ottengono integrando il sistema:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\nu}{E} \sigma_0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\nu}{E} \sigma_0; \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\sigma_0}{E} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0$$

Dalle prime tre relazioni:

$$u_1 = -\frac{\nu}{E} \sigma_0 x_1 + \phi_1(x_2, x_3) \quad (9)$$

$$u_2 = -\frac{\nu}{E} \sigma_0 x_2 + \phi_2(x_1, x_3) \quad (10)$$

$$u_3 = \frac{\sigma_0}{E} x_3 + \phi_3(x_1, x_2) \quad (11)$$

e dalle seconde tre:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} = 0$$

Poiche' sara' anche, ovviamente:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} = 0 \quad (13)$$

ne segue che il campo di spostamenti  $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  rappresenta un moto rigido. Se i vincoli sono tali da eliminare gli spostamenti rigidi, infine, si ha:

$$u_1 = u_1(x_1) = -\frac{\nu}{E} \sigma_0 x_1 \quad (14)$$

$$u_2 = u_2(x_2) = -\frac{\nu}{E} \sigma_0 x_2 \quad (15)$$

$$u_3 = u_3(x_3) = \frac{\sigma_0}{E} x_3 \quad (16)$$

**Nota** - E' questo lo stato tensionale che si e' utilizzato per definire le due costanti ingegneristiche E e  $\nu$ .

## Stati monoassiali di deformazione

Analogamente a quanto detto per gli stati monoassiali di tensione, uno stato monoassiale di deformazione e' caratterizzato da una matrice di deformazioni pari a:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix} \quad (17)$$

ed inoltre l'unica componente non nulla di deformazione e' funzione della sola coordinata  $x_3$ .

Le tensioni corrispondenti si ottengono dalla legge di Hooke:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e_{33} = \sigma_{11}(x_3) \\ \sigma_{22} &= \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e_{33} = \sigma_{22}(x_3) \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} e_{33} + \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e_{33} = \sigma_{33}(x_3) \\ \sigma_{12} &= \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

In assenza di forze di massa, le prime due equazioni indefinite dell'equilibrio sono identicamente nulle, mentre la terza assicura che:

$$\sigma_{33} = \sigma_0 = \text{costante} \quad (19)$$

da cui anche:

$$e_{33} = e_0 = \text{costante} \quad (20)$$

Ne segue infine che gli spostamenti sono forniti, a meno di traslazioni rigide, da:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \equiv 0 \\ u_3 &= e_0 x_3 \end{aligned} \quad (21)$$

## Stato piano di spostamento

E' questo il caso in cui esistono solo due componenti di spostamento, funzioni di due sole coordinate. Ad esempio, uno stato piano di spostamento relativo al piano  $(x_1, x_2)$  e' definito dalle ipotesi:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2) \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2) \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Le corrispondenti deformazioni sono pari a:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

con:

$$e_{11} = e_{11}(x_1, x_2); e_{22} = e_{22}(x_1, x_2); e_{12} = e_{12}(x_1, x_2); \quad (24)$$

Le tensioni si ottengono applicando la legge di Hooke, giungendo a:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (25)$$

L'espressione esplicita delle tensioni puo' aversi in termini di costanti di Lamé, utilizzando le (3) della lezione 17:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu e_{11} + \lambda(e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{22} &= 2\mu e_{22} + \lambda(e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{33} &= \lambda(e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{12} &= 2\mu e_{12} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

oppure in termini di costanti ingegneristiche, utilizzando le (12) della stessa lezione:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} e_{11} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu} e_{22} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{33} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (e_{11} + e_{22}) \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu} e_{12} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Si ha quindi l'importante relazione:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (28)$$

Poiche' le tensioni sono funzioni delle sole coordinate  $x_1$  ed  $x_2$ , le equazioni indefinite dell'equilibrio divengono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 &= 0 \\ X_3 &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

**Nota** - Ne segue che uno stato piano di spostamento avra' possibilita' di realizzarsi solo se le due componenti  $X_1$  ed  $X_2$  delle forze di massa sono funzioni delle sole coordinate  $x_1$  ed  $x_2$ , e se la componente  $X_3$  e' identicamente nulla.

Le equazioni di Navier-Cauchy (cfr. 10 della lezione precedente) si semplificano in:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + X_1 = 0 \tag{30}$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + X_2 = 0 \tag{31}$$

Infine, l'unica equazione di compatibilita' che non sia soddisfatta identicamente e':

$$2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \tag{32}$$

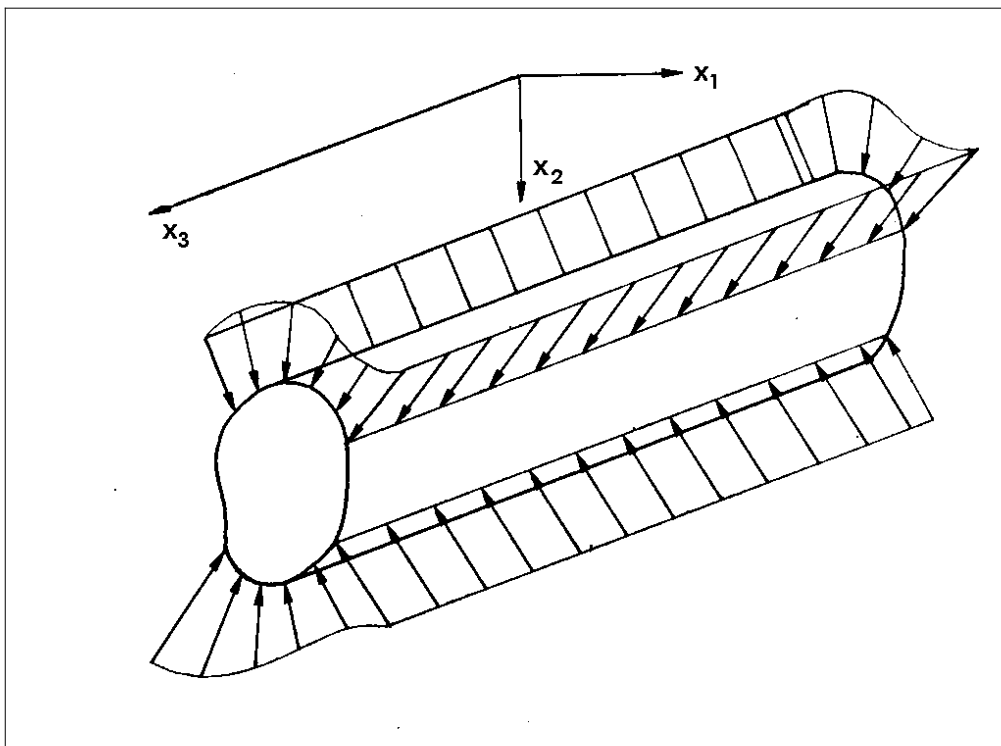


Figura 2 - Un cilindro infinitamente lungo in stato piano di spostamento

Alcuni esempi classici di schemi strutturali che rispettano le ipotesi a base di questa sezione sono riportate nelle Figure 2 e 3. In Figura 2 e' illustrato un cilindro di sezione retta generica, soggetto ad una distribuzione uniforme di forze sulle generatrici: se esso e' considerato infinitamente lungo, oppure se si trascurano gli effetti di bordo locali, per ragioni di simmetria si potra' affermare che lo stato di spostamento rispetta le condizioni (22). Del tutto analogamente, in Figura 3 e' illustrato un terrapieno ed una sezione di galleria: se essi sono sufficientemente lunghi da poter trascurare gli effetti di bordo, e se sono caricati opportunamente, essi rientrano nei casi di stati piani di spostamento.

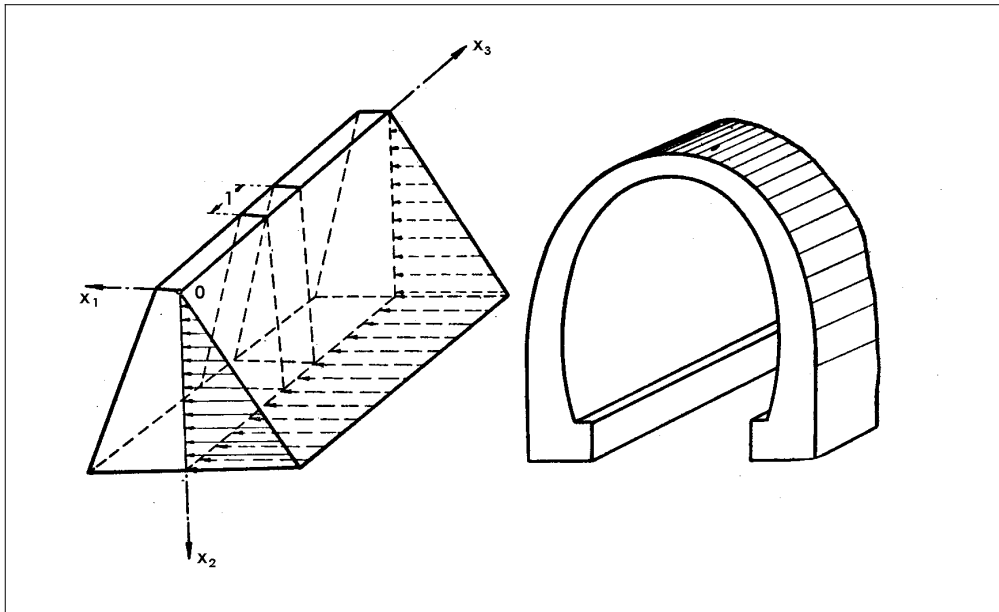


Figura 3 - Altri due esempi di stati piani di spostamento: un terrapieno ed una galleria

## Stato piano di tensione

Uno *stato piano di tensione* e' caratterizzato da uno stato tensionale del tipo:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

con le componenti di tensione funzioni delle coordinate  $x_1$  ed  $x_2$ . Si ha, dalle leggi di Hooke, una matrice delle deformazioni del tipo:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix} \quad (34)$$

con (cfr. 14 della lezione 17):

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) \\ e_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) \\ e_{33} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ e_{12} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12} \\ e_{13} &= e_{23} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

e quindi anche le deformazioni sono funzioni delle sole coordinate  $x_1$  ed  $x_2$ .

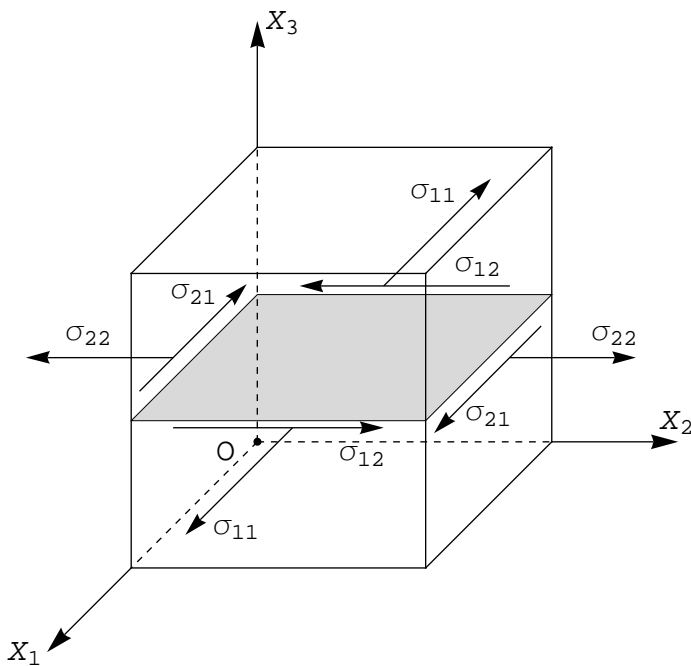


Figura 4 - Uno stato piano di tensione

Le equazioni indefinite dell'equilibrio restano le (29), con quel che ne segue per le forze di massa, mentre le equazioni di compatibilita' (37-42) della lezione 15 si semplificano notevolmente. Le prime due sono identicamente soddisfatte, mentre le altre quattro divengono:

$$\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \tag{36}$$

$$2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} = 0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} = 0 \tag{39}$$

Dalle (36), (38) e (39) si trae che dovra' essere:

$$e_{33} = c_1 + c_2 x_1 + c_3 x_2 \tag{40}$$

Si vedra' tuttavia che spesso la  $e_{33}$  puo' essere trascurata, e quindi l'unica condizione di compatibilita' da tenere in conto resta la (37).

L'esempio classico di stato piano di tensione e' illustrato in Figura 5, dove e' illustrata una lastra sottile piana, con piano medio contenuto nel piano  $x_1 - x_2$ , soggetta a forze agenti secondo lo stesso piano. Piu' in dettaglio, le forze sul contorno si suppongono applicate solo lungo lo spessore della lastra, e sono simmetricamente distribuite rispetto al piano medio.

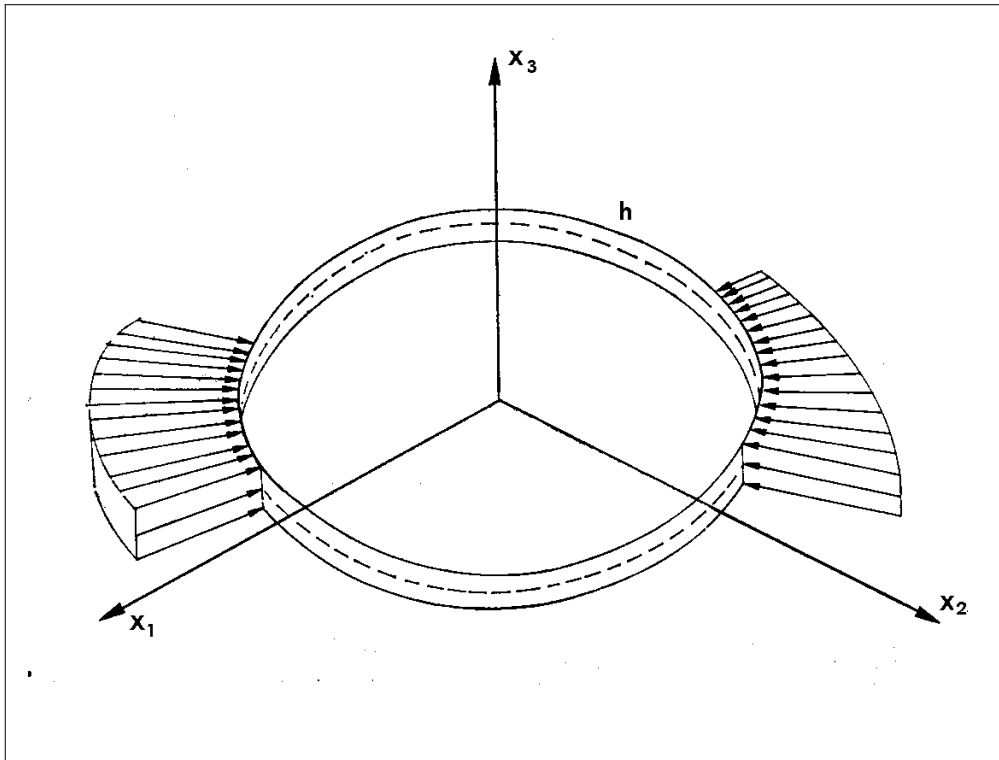


Figura 5 - Lastra sottile in stato piano di tensione

Poiche' le due facce della lastra sono scariche, per ipotesi, ne segue che su tali facce dovra' aversi:

$$\sigma_{31} \left( x_1, x_2, x_3 = \pm \frac{h}{2} \right) = 0 \quad (41)$$

$$\sigma_{32} \left( x_1, x_2, x_3 = \pm \frac{h}{2} \right) = 0 \quad (42)$$

$$\sigma_{33} \left( x_1, x_2, x_3 = \pm \frac{h}{2} \right) = 0 \quad (43)$$

Inoltre, le tensioni tangenziali  $\sigma_{31}$  e  $\sigma_{32}$  sono funzioni dispari di  $x_3$ , mentre la tensione normale  $\sigma_{33}$  e' una funzione pari della stessa coordinata  $x_3$ , e se lo spessore  $h$  e' sufficientemente piccolo potra' assumersi ovunque  $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$ , rientrando nelle ipotesi di questa sezione.

## Gli stati piani e la funzione di tensione

Se si ignorano le tre equazioni di compatibilita' in  $e_{33}$ , fornite dalla (36), (38) e (39), allora gli stati piani di tensione e di spostamento possono essere trattati in modo unificato e semplificato, ed alcune interessanti soluzioni del problema di elasticita' possono essere illustrate anche con metodi elementari di calcolo. Si consideri infatti che in ambedue i casi si possono assumere come incognite primarie le tre componenti di tensione  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{12}$ , ed utilizzare le due equazioni indefinite dell' equilibrio e l'unica condizione di compatibilita':

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 = 0$$



$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = 0$$

$$2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2}$$

Le tre equazioni precedenti devono valere all'interno di un dominio piano B, sulla cui frontiera dovranno valere le due equazioni:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 &= p_1 \\ \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 &= p_2 \end{aligned} \quad (45)$$

Occorre ora utilizzare le leggi di Hooke per trasformare l'ultima delle (44) in una equazione nelle incognite primarie, e poichè le leggi di Hooke si specializzano diversamente per gli stati piani di spostamento e di tensione, è opportuno trattare separatamente i due casi.

### ■ Gli stati piani di tensione

Le equazioni da utilizzare sono le (35), che sostituite nella terza delle (44) conducono a scrivere:

$$2(1+\nu) \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} \right) \quad (46)$$

ossia:

$$2(1+\nu) \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) \quad (47)$$

Dalle prime delle (44) si ha poi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} &= - \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= - \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (48)$$

e sostituendo nella (47):

$$\begin{aligned} (1+\nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) + \\ \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

e semplificando:

$$(1+\nu) \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} = 0 \quad (50)$$

ed infine:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = - (1+\nu) \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) \quad (51)$$

## ■ Gli stati piani di spostamento

Le leggi di Hooke forniscono, in questo caso:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ e_{22} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ e_{12} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \end{aligned} \quad (52)$$

con la relazione aggiuntiva (28), che porta a scrivere:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (1+\nu) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (53)$$

Le prime due delle (52) divengono quindi:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (1+\nu) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ e_{22} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} (1+\nu) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{aligned} \quad (54)$$

Sostituendo nella terza delle (44) si ha:

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} \right) - \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) \quad (55)$$

ed utilizzando le (48):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \\ (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} \right) - \nu \left( \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

ossia ancora:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = - \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) \quad (57)$$

Si noti infine che nel caso di forze di massa nulle o costanti sia la (51) - valida per gli stati piani di tensione - che la (57) - valida per gli stati piani di spostamento - si semplificano in:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \quad (58)$$

## ■ La funzione di Airy nel caso di forze di massa nulle

Nel caso di forze di massa nulle le tre equazioni che reggono il problema ai limiti dell'elasticità:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

si possono drasticamente semplificare introducendo una funzione  $\Phi(x_1, x_2)$  tale che:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \tag{60}$$

$$\sigma_{12} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Ed infatti, introducendo le tre relazioni (60) nelle (59) si nota che le prime due sono identicamente soddisfatte, mentre la terza si riduce a richiedere che sia:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} = 0 \tag{61}$$

**Nota** - La funzione  $\Phi(x_1, x_2)$  e' la prima e piu' semplice tra le numerose funzioni di tensione che si sono utilizzate in teoria dell'elasticita'. Essa fu introdotta nell'Ottocento dal matematico ed astronomo G.B. Airy, di cui quindi porta il nome.[Airy].



Figura 6 - G.B. Airy

## ■ Il caso della lastra rettangolare

Si consideri ora un dominio bidimensionale di forma rettangolare, di base  $2b$  ed altezza  $2h$ . Posto l'origine degli assi nel baricentro del triangolo, le condizioni ai limiti si specializzano nel richiedere, sui quattro lati (cfr. Figura 7)

- sul lato AB, di normale uscente  $\mathbf{n} = (0,-1)$  si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= -p_1 \\ \sigma_{22} &= -p_2\end{aligned}\quad (62)$$

- sul lato BC, di normale uscente  $\mathbf{n} = (1,0)$  si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= p_1 \\ \sigma_{12} &= p_2\end{aligned}\quad (63)$$

- sul lato CD, di normale uscente  $\mathbf{n} = (0,1)$  si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= p_1 \\ \sigma_{22} &= p_2\end{aligned}\quad (64)$$

- sul lato AD, di normale uscente  $\mathbf{n} = (-1,0)$  si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p_1 \\ \sigma_{12} &= -p_2\end{aligned}\quad (65)$$

Cio' premesso, si utilizza ora il *metodo inverso*, che consiste nell'assumere una soluzione  $\Phi(x_1, x_2)$  per l'equazione (61), da essa dedurre il campo tensionale, e tramite le (62-64) risalire alle forze superficiali  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  agenti sul dominio.

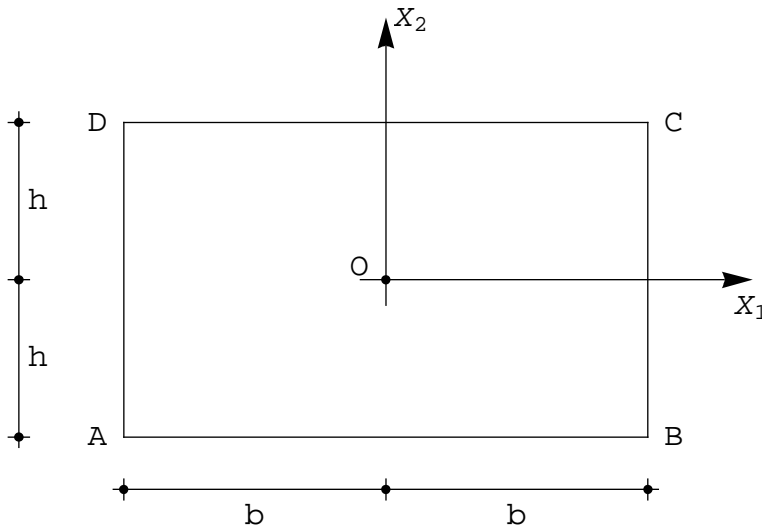


Figura 7 - Un dominio rettangolare in stato piano

### ■ Esempio n.1 - La soluzione polinomiale quadratica

Una soluzione della (61) sarà sicuramente ottenibile ipotizzando che  $\Phi(x_1, x_2)$  sia esprimibile come un polinomio di secondo grado:

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{c_0}{2} x_1^2 + c_1 x_1 x_2 + \frac{c_2}{2} x_2^2 \quad (66)$$

Il corrispondente campo tensionale sara' costante, e pari a:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = c_2 \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = c_0 \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -c_1 \end{aligned} \tag{67}$$

Utilizzando ora le (62-64) si potra' concludere che le forze esterne che causano le tensioni (67) saranno fornite da:

- sul lato AB, di normale uscente  $\mathbf{n} = (0,-1)$  si avra' una componente  $p_1 = c_1$ , diretta in senso equiverso all'asse  $X_1$ , e quindi verso destra, ed una componente  $p_2 = -c_0$ , diretta in senso contrario all'asse  $X_2$ , ossia verso il basso,
- sul lato BC, di normale uscente  $\mathbf{n} = (1,0)$  si avra' una componente  $p_1 = c_2$ , diretta in senso equiverso all'asse  $X_1$ , e quindi verso destra, ed una componente  $p_2 = -c_1$ , diretta in senso contrario all'asse  $X_2$ , ossia verso il basso,
- sul lato CD, di normale uscente  $\mathbf{n} = (0,1)$  si avra' una componente  $p_1 = -c_1$ , diretta in senso contrario all'asse  $X_1$ , e quindi verso sinistra, ed una componente  $p_2 = c_0$ , diretta in senso equiverso all'asse  $X_2$ , ossia verso l'alto,
- sul lato AD, di normale uscente  $\mathbf{n} = (-1,0)$  si avra' una componente  $p_1 = -c_2$ , diretta in senso contrario all'asse  $X_1$ , e quindi verso sinistra, ed una componente  $p_2 = c_1$ , diretta in senso equiverso all'asse  $X_2$ , ossia verso l'alto,

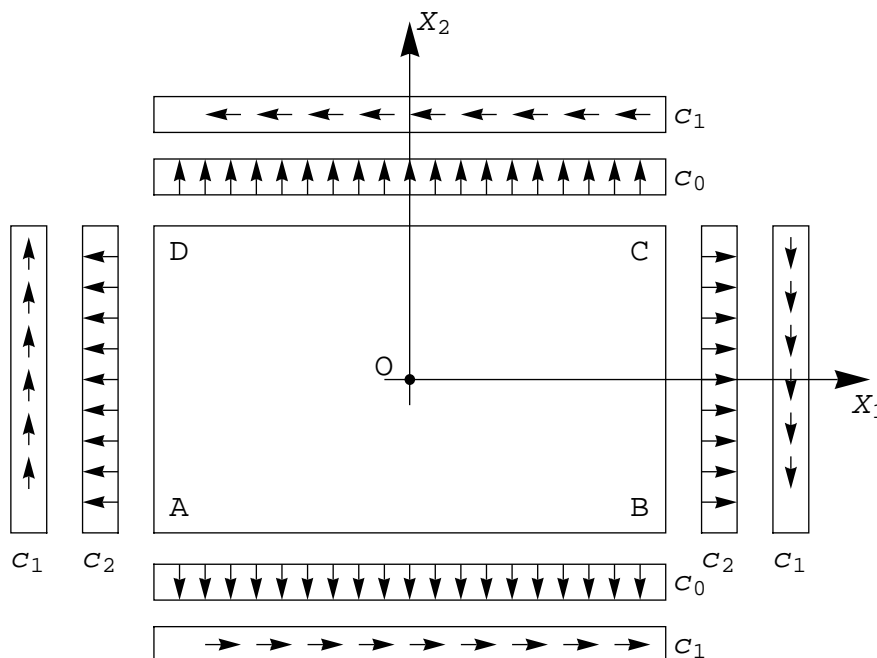


Figura 8 - Le forze esterne corrispondenti ad una funzione di Airy polinomiale di secondo grado

Possono distinguersi i seguenti casi particolari:

$c_0 = c_1 = 0$ , trazione semplice secondo l'asse orizzontale

$c_1 = c_2 = 0$ , trazione semplice secondo l'asse verticale

$c_0 = c_2 = 0$ , taglio semplice

### ■ Esempio n.2 - La soluzione polinomiale cubica

Una soluzione della (61) sarà sicuramente ottenibile anche ipotizzando che  $\Phi(x_1, x_2)$  sia esprimibile come un polinomio di terzo grado:

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{c_0}{6} x_1^3 + \frac{c_1}{2} x_1^2 x_2 + \frac{c_2}{2} x_1 x_2^2 + \frac{c_3}{6} x_2^3 \quad (68)$$

Il corrispondente campo tensionale sarà pari a:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = c_2 x_1 + c_3 x_2 \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = c_0 x_1 + c_1 x_2 \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -c_1 x_1 - c_2 x_2 \end{aligned} \quad (69)$$

Utilizzando ora le (62-64) si potrà concludere che le forze esterne che causano le tensioni (69) saranno fornite da:

- sul lato AB, di normale uscente  $\mathbf{n} = (0, -1)$  si avranno le forze:

$$\begin{aligned} p_1 &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ p_2 &= -c_0 x_1 - c_1 x_2 \end{aligned} \quad (70)$$

- sul lato BC, di normale uscente  $\mathbf{n} = (1, 0)$  si avranno le forze:

$$\begin{aligned} p_1 &= c_2 x_1 + c_3 x_2 \\ p_2 &= -c_1 x_1 - c_2 x_2 \end{aligned} \quad (71)$$

- sul lato CD, di normale uscente  $\mathbf{n} = (0, 1)$  si avranno le forze:

$$\begin{aligned} p_1 &= -c_1 x_1 - c_2 x_2 \\ p_2 &= c_0 x_1 + c_1 x_2 \end{aligned} \quad (72)$$

- sul lato AD, di normale uscente  $\mathbf{n} = (-1, 0)$  si avranno le forze:

$$\begin{aligned} p_1 &= -c_2 x_1 - c_3 x_2 \\ p_2 &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \end{aligned} \quad (73)$$

Alcune sollecitazioni di interesse sono ricavabili come casi particolari:

**Caso 1** -  $c_0 = c_1 = c_2 = 0$

I lati orizzontali sono scarichi, i due lati verticali sono sollecitati da un carico orizzontale  $p_1$ , variabile linearmente lungo l'altezza del dominio piano in esame. In particolare,  $p_1 = c_3 x_2$  sul lato destro, e  $p_1 = -c_3 x_2$  sul lato sinistro.

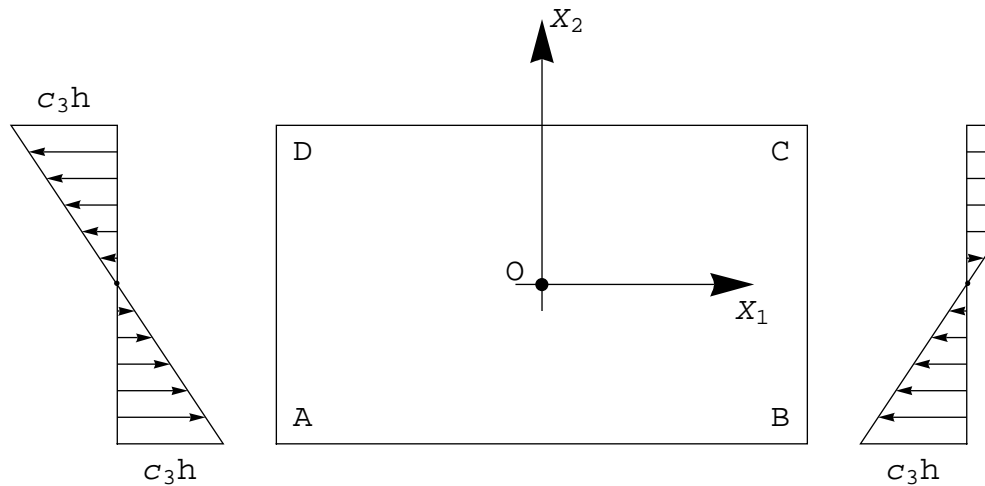


Figura 9 - Le forze esterne corrispondenti ad una funzione di Airy polinomiale di terzo grado

$$\bar{\Phi}(x_1, x_2) = \frac{c_3}{6} x_2^3$$

Come puo' evincersi dalla Figura 9, la distribuzione di forze superficiali lungo il bordo destro e' equivalente ad una coppia oraria, mentre a sinistra e' equivalente ad una coppia antioraria della stessa intensita'. E' questo il caso della *flessione*.

**Caso 2** -  $c_0 = c_2 = c_3 = 0$

- sul lato AB, di normale uscente  $\mathbf{n} = (0, -1)$  si avranno le forze  $p_1 = c_1 x_1$  linearmente variabili, e le forze  $p_2 = c_1 h$ , costanti,
- sul lato BC, di normale uscente  $\mathbf{n} = (1, 0)$  si avranno le forze  $p_2 = -c_1 b$ , costanti,
- sul lato CD, di normale uscente  $\mathbf{n} = (0, 1)$  si avranno le forze  $p_1 = -c_1 x_1$  linearmente variabili, e le forze  $p_2 = c_1 h$ , costanti,
- sul lato AD, di normale uscente  $\mathbf{n} = (-1, 0)$  si avranno le forze  $p_2 = -c_1 b$ , costanti,

Ne segue la condizione di carico in Figura 10. Gli altri due casi particolari sono simili a quelli descritti.

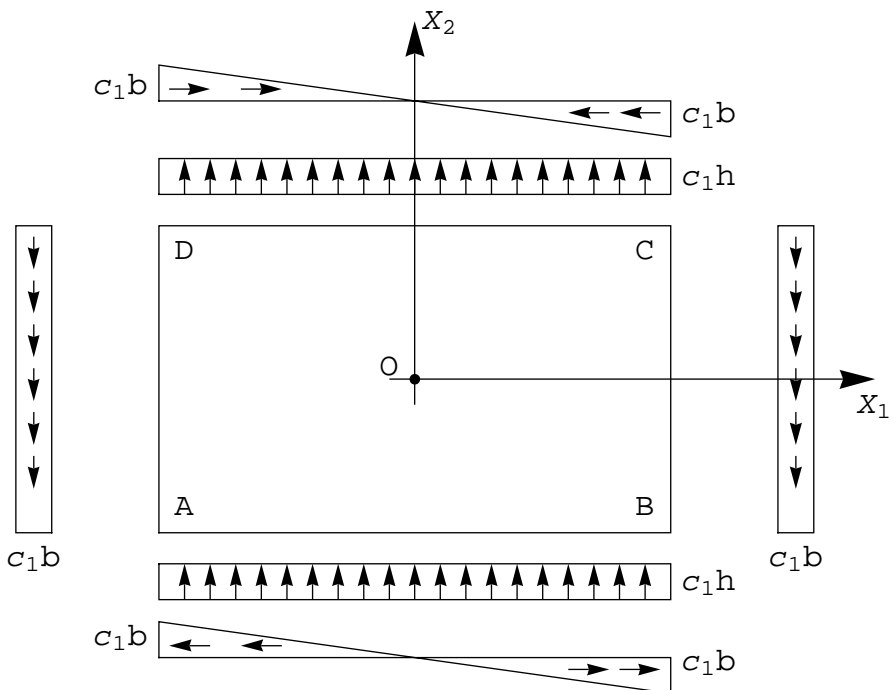


Figura 10 - Le forze esterne corrispondenti ad una funzione di Airy polinomiale di terzo grado

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{c_1}{3} x_1^2 x_2$$

## Note

[Airy] - G.B. Airy "On the strains in the interior of beams", Phil.Trans. Roy. Soc. London, 153, 49-80 (1863). E' questo il primo e piu' semplice esempio di funzione di tensione, limitato agli stati bidimensionali. Esiste tuttavia una estesa teoria generale, riportata sinteticamente in Complementi 7 - Le funzioni di tensione. [Torna al testo]

## Grafici