Lezione 18 - L'equilibrio elastico

- **[A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 25 novembre 2012]**

Le prime lezioni sono state dedicate all'analisi della tensione, giungendo ad enunciare le equazioni indefinite dell'equilibrio in termini di tensioni. Nelle successive lezioni, invece, si sono studiate le deformazioni, giungendo a definire le equazioni di compatibilita'. Infine, nelle ulteriori lezioni si sono illustrati alcuni legami tra tensioni e deformazioni.

E' giunto il momento, in questa lezione, di conglobare quanto si e' dedotto in una sola, grande sintesi.

I problemi ai limiti dell'elasticita'

Il *problema misto della teoria dell'elasticita'* puo' enunciarsi come segue:

- Si abbia un corpo isotropo B, costituito da materiale linearmente elastico, e sia ∂B la sua frontiera. Su una porzione di frontiera, sia essa ∂B_1, siano assegnate le forze superficiali $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, mentre sulla restante parte di frontiera ∂B_2 siano assegnati gli spostamenti $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$. Inoltre, siano $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ le forze di massa agenti in B.

Occorre ricercare gli spostamenti $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, le deformazioni e_{ij} e le tensioni σ_{ij} che in ciascun punto del corpo B soddisfano:

le *tre* condizioni di equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \qquad (1)$$

le *sei* condizioni di congruenza, che legano le deformazioni alle derivate degli spostamenti:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (2)$$

le *sei* equazioni costitutive, che legano le deformazioni alle tensioni in ipotesi di solido isotropo e linearmente elastico:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}\lambda e_{kk} \qquad (3)$$

Inoltre, sulla frontiera ∂B_1 devono essere soddisfatte le condizioni di equilibrio ai limiti:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \qquad (4)$$

mentre sulla parte di frontiera ∂B_2 gli spostamenti devono rispettare i vincoli:

$$u_i = f_i \qquad (5)$$

Nota - Come si vede, esistono quindici equazioni in quindici incognite; si ha la possibilita' di far scomparire deformazioni e tensioni, giungendo a definire tre equazioni nelle tre componenti di spostamento, oppure si puo' far scomparire spostamenti e deformazioni, giungendo a definire sei equazioni nelle sei componenti di tensioni. Solo la prima via sara' illustrata in qualche dettaglio, mentre per la seconda via si rimanda al notebook Complementi 6 - L'equilibrio elastico, riportato sul sito http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk

Le equazioni di Navier-Cauchy

Si parta dalle (3), e si utilizzino le (2), scrivendo:

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\,\lambda\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{6}$$

e derivando rispetto ad x_j, supponendo il corpo omogeneo:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\,\partial x_j}+\frac{\partial u_j^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)+\delta_{ij}\,\lambda\,\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k\,\partial x_j} \tag{7}$$

La (1) diviene allora, tenendo conto delle proprieta' del δ di Kronecker:

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\,\partial x_j}+\frac{\partial u_j^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)+\lambda\,\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k\,\partial x_i}+X_i=0 \tag{8}$$

e rinominando da *k* a *j* l'indice dell'ultimo termine

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\,\partial x_j}+\frac{\partial u_j^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)+\lambda\,\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j\,\partial x_i}+X_i=0 \tag{9}$$

ossia:

$$\mu\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\,\partial x_j}+(\lambda+\mu)\,\frac{\partial u_j^2}{\partial x_i\,\partial x_j}+X_i=0 \tag{10}$$

Per esteso le (10) si scrivono:

$$\begin{aligned}&\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right)+\\&\quad(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\,\partial x_3}\right)+X_1=0\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right)+\\&\quad(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\,\partial x_3}\right)+X_2=0\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\mu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right)+\\&\quad(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\,\partial x_3}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2\,\partial x_3}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right)+X_3=0\end{aligned} \tag{13}$$

Siamo quindi giunti ad un sistema di tre equazioni differenziali alle derivate parziali [Navier-Cauchy], nelle tre incognite u_i, cui va associata su ∂B_1 la condizione ai limiti (4), in cui ovviamente le tensioni siano espresse in termini di spostamento. Utilizzando a tal fine le (3) e poi le (2) si ha subito:

$$p_i = \left(2\,\mu\,e_{ij}+\delta_{ij}\,\lambda\,e_{kk}\right)n_j \tag{14}$$

$$p_i = \left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\,\lambda\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) n_j \qquad (15)$$

Sulla restante parte di frontiera ∂B_2, invece, le condizioni ai limiti restano le (5).

Nota - E' quasi sempre impossibile, e sempre difficoltoso, risolvere questo problema ai limiti analiticamente, mentre piu' agevole risulta la sua soluzione numerica.

Nota - E' possibile dimostrare le equazioni di Cauchy-Navier in modo molto piu' sintetico, utilizzando le notazioni matriciali. Si veda la nota [Nota]

Figura 1 - Louis Navier

Il principio di sovrapposizione

Sfruttando la linearita' delle equazioni di Navier-Cauchy, e' possibile dimostrare il seguente:

Principio di sovrapposizione -Si consideri un corpo B, soggetto alle forze superficiali **p** ed alle forze di massa **X.** Siano $\boldsymbol{\sigma}$ le tensioni provocate da questo insieme di forze. Sia poi **p'** e **X'** un secondo insieme di forze, che provoca le tensioni $\boldsymbol{\sigma}$**'**. Se sul corpo agiscono contemporaneamente ambedue gli insiemi di forze esterne, allora le tensioni nel corpo saranno pari a $\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}'$.

Il principio di unicita'

Formalizzato il problema ai limiti misto dell'elasticita', occorre chiedersi: esiste una soluzione a questo problema? e se esiste, e' unica?
Citando da G. Fichera, "*Problemi analitici nuovi nella fisica matematica classica"*, CNR (1985), p.16: "La dimostrazione dei teoremi di esistenza per i problemi della Statica elastica ha severamente impegnato. a partire dalla fine del secolo scorso, gli analisti". Non ci addentreremo, pertanto, in ragionamenti e teoremi di tipo puramente matematico, rimandando il lettore all'esposizione dettagliata contenuta nel lungo lavoro di G. Fichera "*Existence Theorems in Elasticity*", Handbuch der Physik, Vol. VIa/2. Springer, pp. 347-389, (1972).

Relativamente piu' facili sono i problemi di unicita', potendosi dimostrare il fondamentale:

Principio di Kirchhoff - Le soluzioni diverse del problema misto dell'elasticita' differiscono tra loro al piu' per un moto rigido. Se inoltre la parte di frontiera su cui sono assegnati gli spostamenti e' non vuota, allora il problema misto ha al piu' una soluzione

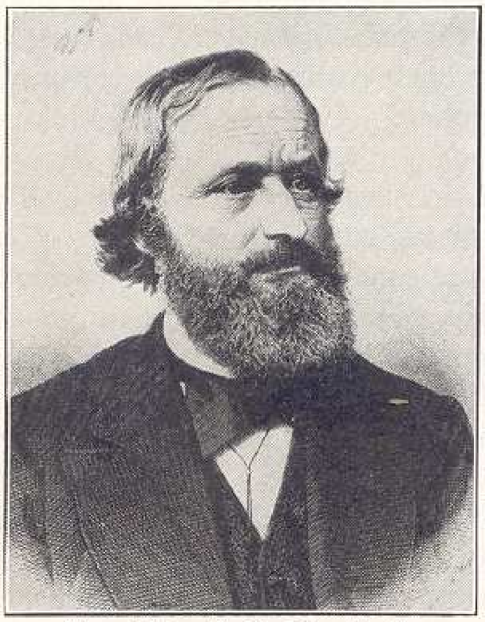

Fig. 156. G. R. Kirchhoff.

Figura 2 - Gustav R. Kirchhoff

Dim - Siano infatti (σ,ϵ,**u**) e (σ',ϵ',**u'**) due diverse soluzioni del problema misto ai limiti. Per il primo insieme di tensioni, dovra essere:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \qquad (16)$$

con le condizioni ai limiti su ∂B_1:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \qquad (17)$$

e su ∂B_2 :

$$u_i = f_i \qquad (18)$$

Analogamente, per la seconda soluzione si ha:

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \tag{19}$$

$$p_i = \sigma'_{ij} n_j \tag{20}$$

$$u'_i = f_i \tag{21}$$

Sottraendo membro a membro le (16) dalle (19) si ha:

$$\frac{\partial \left(\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}\right)}{\partial x_i} = 0 \tag{22}$$

ed analogamente, per le condizioni ai limiti:

$$0 = \left(\sigma'_{ij} - \sigma_{ij}\right) n_i \tag{23}$$

$$u'_i - u_i = 0 \tag{24}$$

Le (22-24) definiscono un problema ai limiti per un corpo in equilibrio sotto forze di massa nulle e forze superficiali nulle su ∂B_1, e con spostamenti nulli sulla frontiera ∂B_2. In tale situazione il potenziale elastico non potra' che essere nullo, e poiche' il potenziale elastico e' una forma quadratica definita positiva, nulle dovranno essere tutte le sue componenti di tensioni e di deformazione:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} \tag{25}$$

$$e'_{ij} = e_{ij} \tag{26}$$

mentre gli spostamenti, proporzionali alle derivate prime delle deformazioni, potranno differire tra loro al piu' di un moto rigido.∎

Note

[Navier-Cauchy] - Queste equazioni furono dedotte originariamente da Navier nel 1821, e poi da lui stesso pubblicate nel 1823, sotto forma di abstract, ed infine 1827, "*Memoire sur les lois de l'equilibre et du mouvement des corps solides elastiques*", Mem. Acad. Sci.Inst.France, 7, 375-393. Tuttavia, Navier accettava la teoria molecolare, secondo cui $\lambda = \mu$. Nella loro forma attuale, le equazioni rimontano a Cauchy, *Sur les equations qui expriment les conditions d'equilibre ou les lois du mouvement interieur d'un corps solide, elastique ou non elastique*, Ex. de Math, 3, 160-187 (1828), Poisson, *Memoire sur l'equilibre et le muovement des corps elastiques,* Mem. Acad. Sci. Inst. France (2), 8, 357-570 (1829) e Lame'-Clapeyron, *Memoire sur l'equilibre des corps solides homogenes*, Mem. Divers Savants Acad. Sci. Paris (2), 4, 465-562 (1833), e sono pertanto note come equazioni di Cauchy, o anche equazioni di Lame', o di Lame'-Cauchy, ed infine anche di Navier-Cauchy. [Torna al testo]

[Nota] - Le equazioni indefinite dell'equilibrio (1) possono scriversi sinteticamente:

$$\boldsymbol{\delta}_1 \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{27}$$

avendo introdotto la matrice degli operatori differenziali:

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{28}$$

Le equazioni (2) possono sintetizzarsi, come puo' facilmente verificarsi, in:

$$\mathbf{e} = \delta_1^T \mathbf{u} \tag{29}$$

Infine, le equazioni costitutive (3) si scrivono:

$$\sigma = \mathbf{Ce} \tag{30}$$

con **C** matrice di elasticita' fornita da:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{31}$$

Inserendo la (29) nella (30) si ottiene:

$$\sigma = \mathbf{C}\, \delta_1^T \mathbf{u} \tag{32}$$

e dalla (27) si giunge subito alle richieste equazioni di Cauchy-Navier in forma matriciale:

$$\delta_1 \mathbf{C} \delta_1^T \mathbf{u} + \mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{33}$$

Svolgendo il triplo prodotto matriciale si giunge alle (10). [Torna al testo]