Lezione 17 - Il solido isotropo

- **[A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 23 agosto 2011]**

Si e' visto che le costanti elastiche previste dalla teoria di Green sono, in generale, 21. Non sembra possibile ridurre questo numero, se non introducendo particolari ipotesi sul comportamento del materiale. D'altro canto, un sempre maggior numero di prodotti industriali viene appositamente costruito con particolari fibre e direzioni privilegiate, ed anche parecchi prodotti naturali, come il legno, mostrano spiccate proprieta' di *simmetria*

Per tali materiali si puo' mostrare che il numero di costanti elastiche diminuisce, e piu' stringenti sono le proprieta' di simmetria esibite, piu' piccolo sara' il numero delle costanti. Cosi', un materiale che abbia un solo piano di simmetria (i cosiddetti materiali *monoclini*) puo' definirsi con 13 costanti elastiche, un materiale che abbia due piani di simmetria ortogonali (i materiali *ortotropi*) abbisogna di 9 costanti elastiche, un materiale che abbia una proprieta' di simmetria di rotazione intorno ad un asse (i materiali *trasversalmente isotropi*) puo' essere definito con 5 costanti. In questa sede occorre limitarsi a questi brevissimi cenni, mentre una disamina dettagliata puo' essere consultata, ad esempio, nel quarto notebook dei Complementi, sul sito http:\\www.scienzadellecostruzioni.co.uk.

Un caso, tuttavia, merita attenzione, il caso piu' stringente di tutti, quello in cui si abbia simmetria rotazionale intorno a due assi ortogonali tra loro. In questo caso non esistono direzioni privilegiate, ed il materiale si dice *isotropo*.

Il materiale isotropo

Si puo' dimostrare che nel caso di un materiale linearmente elastico ed isotropo la legge di Hooke si scrive:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2\,e_{12} \\ 2\,e_{13} \\ 2\,e_{23} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

e quindi le costanti elastiche indipendenti sono due, λ e μ, dette *costanti di Lame'*.[Lame']

Per esteso, le leggi di Hooke si scrivono, in questo caso:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\,\mu e_{11} + \lambda\,(e_{11} + e_{22} + e_{33}) \\ \sigma_{22} &= 2\,\mu e_{22} + \lambda\,(e_{11} + e_{22} + e_{33}) \\ \sigma_{33} &= 2\,\mu e_{33} + \lambda\,(e_{11} + e_{22} + e_{33}) \\ \sigma_{12} &= 2\,\mu e_{12} \\ \sigma_{13} &= 2\,\mu e_{13} \\ \sigma_{23} &= 2\,\mu e_{23} \end{aligned} \qquad (2)$$

o, indicialmente:

$$\sigma_{ij} = 2\,\mu\,e_{ij} + \delta_{ij}\,\lambda\,e_{kk} \qquad (3)$$

Le relazioni (2) possono invertirsi, a fornire le deformazioni in funzione delle tensioni. Ed infatti, sommando membro a membro le prime tre equazioni - o, equivalentemente, contraendo gli indici *i* e *j* nella (3) - si giunge ad una relazione tra gli invarianti lineari di tensione e di deformazione:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = (3\lambda + 2\mu)(e_{11} + e_{22} + e_{33}) \tag{4}$$

ossia:

$$e_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu} \tag{5}$$

Utilizzando la (5) e' immediato dedurre, dalla (3), la *legge di Hooke inversa*:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{kk}\right) \tag{6}$$

o, per esteso:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\right)\\
e_{22} &= \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{22} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\right)\\
e_{33} &= \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{33} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\right)\\
e_{12} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{12}\\
e_{13} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{13}\\
e_{23} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{23}
\end{aligned} \tag{7}$$

Nota 1 - Sorge una seconda discrepanza tra la teoria molecolare, che prevede di caratterizzare il corpo isotropo con una singola costante elastica, e la teoria energetica, che abbisogna di due costanti indipendenti [Invarianti]. Anche in questo caso, e con piu' decisione, gli esperimenti indicano che la teoria energetica e' nel giusto.

Nota 2 - Affinche' non si abbiano deformazioni infinite in presenza di tensioni finite, bisognera' che sia μ che $3\lambda+2\mu$ siano diverse da zero, ed in realta' si presupporra' che ambedue queste quantita' siano strettamente positive.

Nota 3 - Il coefficiente μ viene anche detto G, ed in questo caso si chiama *modulo di resistenza a taglio*, per i motivi che si esporranno nel prossimo paragrafo.

Per i solidi isotropi, e' possibile dimostrare la seguente, importante

Prop. 1 - In un solido isotropo, le direzioni principali di deformazione coincidono con le direzioni principali di tensione

Dim. - Ipotizzando infatti di calcolare le deformazioni in un sistema di riferimento in cui gli assi coincidono con le direzioni principali di deformazione, si ha, per definizione, l'annullarsi delle componenti taglianti e_{ij}, i ≠j. Applicando la legge di Hooke per materiali isotropi (3) si calcolano le tensioni e si ottiene $\sigma_{ij}= 0$ per i ≠j. Cio' significa appunto che le tensioni sono calcolate in un sistema di riferimento in cui gli assi coincidono con le direzioni principali di tensione. ∎

Il modulo di Young ed il coefficiente di Poisson

Il secondo coefficiente di Poisson μ puo' essere suscettibile di una semplice interpretazione fisica: esso rappresenta il rapporto tra la tensione tangenziale generica e la corrispondente variazione angolare. Non altrettanto puo' dirsi per la prima costante di Lame' λ.

Sorge cosi' la convenienza di definire in modo opportuno altre due costanti elastiche indipendenti, che siano piu' facili da determinare tramite semplici esperimenti.A tal fine, si consideri una barra di acciaio, vincolata all'estremo di sinistra, e soggetta ad una forza di trazione all'estremo di destra. Si ha uno stato di tensione, all'interno del corpo, in cui solo una tensione normale e' diversa da zero, ad esempio la σ_{11}, mentre le tensioni tangenziali sono tutte nulle. Dalle (7) si ottiene il corrispondente stato deformativo:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{\lambda+\mu}{\mu\,(3\lambda+2\mu)}\,\sigma_{11} \doteq \frac{\sigma_{11}}{E}\\
e_{22} &= -\frac{\lambda}{2\mu\,(3\lambda+2\mu)}\,\sigma_{11} \doteq -\frac{\nu\sigma_{11}}{E}\\
e_{33} &= -\frac{\lambda}{2\mu\,(3\lambda+2\mu)}\,\sigma_{11} \doteq -\frac{\nu\sigma_{11}}{E}\\
e_{12} &= e_{13} = e_{23} = 0
\end{aligned} \qquad (8)$$

La prima costante, E, si chiama *modulo di Young*, o *modulo di elasticita' longitudinale*, e puo' facilmente interpretarsi come il rapporto tra la tensione monoassiale applicata e la conseguente dilatazione specifica lungo la direzione di tensione. Esso ha quindi le stesse dimensioni fisiche di una tensione, ossia forza su unita' di superficie.

Figura 1 - Thomas Young

La seconda costante, ν, si chiama *coefficiente di Poisson*, o *coefficiente di contrazione laterale*, e misura il rapporto tra la contrazione laterale e l'allungamento assiale. Come tale, esso e' un numero puro.

Relazione tra i moduli di Lame' ed i moduli ingegneristici

Dalle (8) si ricava subito:

$$E = \frac{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2\,(\lambda + \mu)} \tag{9}$$

e di conseguenza, se si conoscono i valori dei due moduli di Lame', possono immediatamente conoscersi anche i valori delle costanti ingegneristiche.

Le (9), poi, possono invertirsi, giungendo a:

$$\mu = G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{E\,\nu}{(1+\nu)\,(1-2\nu)} \tag{10}$$

Utilizzando le (9), la legge di Hooke (3) si scrivera':

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu}\, e_{11} + \frac{E\,\nu}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}\,(e_{11} + e_{22} + e_{33})\\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu}\, e_{22} + \frac{E\,\nu}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}\,(e_{11} + e_{22} + e_{33})\\
\sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu}\, e_{33} + \frac{E\,\nu}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}\,(e_{11} + e_{22} + e_{33})\\
\sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu}\, e_{12}\\
\sigma_{13} &= \frac{E}{1+\nu}\, e_{13}\\
\sigma_{23} &= \frac{E}{1+\nu}\, e_{23}
\end{aligned} \tag{11}$$

o anche:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\, e_{ij} + \delta_{ij}\,\frac{E\,\nu}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}\, e_{kk} \tag{12}$$

mentre la legge di Hooke inversa (6) si semplifica in:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{E}\,((1+\nu)\,\sigma_{11} - \nu\,(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}))\\
e_{22} &= \frac{1}{E}\,((1+\nu)\,\sigma_{22} - \nu\,(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}))\\
e_{33} &= \frac{1}{E}\,((1+\nu)\,\sigma_{33} - \nu\,(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}))\\
e_{12} &= \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{12}\\
e_{13} &= \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{13}\\
e_{23} &= \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{23}
\end{aligned} \tag{13}$$

o anche:

$$e_{ij} = \frac{1}{E}\left((1+\nu)\,\sigma_{ij} - \delta_{ij}\,\nu\,\sigma_{kk}\right) \tag{14}$$

con matrice di elasticita' inversa **A** fornita da:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \tag{15}$$

Limitazioni sulle costanti elastiche

Da un punto di vista fisico, le due costanti ingegneristiche hanno un significato tale da far ipotizzare subito che ambedue possano assumere solo valori positivi. Ed infatti ben strano sarebbe un materiale che soggetto ad una trazione si accorciasse, o che compresso si allungasse. Analogamente, sarebbe difficile immaginare un materiale che nel mentre si allunga in direzione dello sforzo, contemporaneamente viene ad allargarsi in direzione ortogonale.

Comunque, da un punto di vista matematico, si puo' ragionevolmente ipotizzare che la matrice di elasticita' **C**, e quindi anche la sua inversa **A,** sia definita positiva. Ne segue che il determinante di **A**, e tutti i suoi minori principali, devono essere positivi, e stante la struttura della matrice **A**, come si evince dalla (15), le condizioni che si ottengono sono le seguenti tre:

$$\frac{1}{E} > 0 \tag{16}$$

e quindi si ritrova che il modulo di Young deve essere positivo,

$$\det\left(\frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1-\nu^2}{E} > 0 \tag{17}$$

e quindi ν dovra' essere compreso tra -1 ed 1, ed infine:

$$\det\left(\frac{1}{E}\begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{(1+\nu)^2\,(1-2\,\nu)}{E} > 0 \tag{18}$$

da cui segue che ν deve essere minore di 1/2. In definitiva, da un punto di vista prettamente matematico, l'ipotesi che la matrice di elasticita' sia definita positiva ha condotto alle seguenti limitazioni:

$$\begin{gathered} E > 0 \\ -1 \le \nu \le \frac{1}{2} \end{gathered} \tag{19}$$

Sperimentalmente, la prima di queste relazioni e' pienamente confermata, mentre la seconda viene ristretta in:

$$0 \le \nu \le \frac{1}{2} \tag{20}$$

Nel seguito sono riportati i valori di E (in kg/cm^2) e di ν per alcuni materiali di uso comune. Come si vede, l'intervallo dei valori e' notevolmente ampio, per ambedue le costanti.

Materiale	E	ν
Conglomerato cementizio	200.000 ÷ 400.000	0.10 ÷ 0.16
Granito	500.000 ÷ 600.000	0.10 ÷ 0.20
Vetro	600.000 ÷ 800.000	0.25
Caucciu'	10 ÷ 80	0.5
Acciai	2.100.000 ÷ 2.200.000	0.25 ÷ 0.33
Alluminio	670.000 ÷ 700.000	0.36

Note

[1] - G. Lame' fu infatti il primo ad utilizzarle nelle sue *Leçons sur la théorie mathématique de l'elasticité des corps solides* (1852) [Torna al testo]

[2] - Che il solido isotropo linearmente elastico possa essere definito tramite due costanti puo' essere provato anche dal seguente, sintetico ragionamento. Nel caso isotropo anche il potenziale elastico dovra' essere insensibile alla rotazione degli assi, e quindi puo' ipotizzarsi che esso sia funzione dei tre invarianti di deformazione:

$$\phi = \phi\left(I_1, I_2, I_3\right) \tag{21}$$

e poiche' il potenziale deve essere una forma quadratica delle deformazioni, dovra' essere necessariamente:

$$\phi = C_0 I_1^2 + C_1 I_2 \tag{22}$$

Piu' laborioso e' il cammino per giungere alla effettiva forma della matrice di elasticita' [Torna al testo]