Lezione 16 - Le relazioni costitutive

- **[A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 23 agosto 2011]**

Da questa lezione si inizia lo studio del comportamento del materiale, collegando tra loro l'analisi della tensione e l'analisi della deformazione.

Ci si limitera', dopo alcuni cenni introduttivi, al legame elastico, che e' contemporaneamente il piu' semplice ed il piu' diffuso legame tra tensioni e deformazioni. Inoltre, per bassi livelli di sollecitazione quasi ogni materiale obbedisce a questo tipo di legge.

Introduzione

Si consideri un punto M di un corpo B, siano $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{33}$ le componenti di tensione in M, e siano $e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{33}$ le componenti di deformazione (lineare) in M. Seguendo una simbologia utilizzata originariamente da S.G. Lekhnitskii [Lekhnitskii], si introducano ora i due vettori di ordine sei:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\} \tag{1}$$

$$\mathbf{e}^T = \{e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2\, e_{12}, 2\, e_{13}, 2\, e_{23}\} \tag{2}$$

Con questa notazione, si intende per legame costitutivo una relazione del tipo:

$$\boldsymbol{\sigma} = f\,(\mathbf{e}) \tag{3}$$

rispettosa almeno dei tre principi fondamentali [Truesdell e Noll]:

1. principio di determinismo, secondo cui la tensione in un corpo e' determinata al piu' dalla storia del moto passato del corpo, ma non dalla sua storia futura

2. principio di azione locale, secondo cui la tensione in un punto non e' influenzata dal moto delle particelle materiali esterne ad un intorno arbitrariamente piccolo della particella in esame.

3. principio di indifferenza del riferimento materiale, secondo cui due "osservatori" devono poter determinare la stessa tensione, indipendentemente dal riferimento in cui si pongono.

Un legame costitutivo che obbedisce a questi tre principi fornisce risultati logici, ma e' ancora troppo generico per poter definire univocamente un materiale. Introducendo ulteriori ipotesi si possono identificare i comportamenti viscosi, plastici, elasto-plastici, elastici, elastici anisotropi, elastici ortotropi, elastici isotropi etc.

La legge di Hooke e la risposta elastica

Data la gran varieta' di materiali esistenti in natura, ed attualmente anche fabbricati industrialmente, una equazione costitutiva che possa riprodurre le differenti risposte fornite dai differenti materiali e' una utopia. In questo campo, per ottenere buoni risultati e' giocoforza far ricorso ad esperimenti, e limitare l'indagine a singoli materiali.
D'altro canto, le sperimentazioni di laboratorio, attraverso prove a trazione ed a taglio, dimostrano che - almeno per bassi valori delle sollecitazioni - tutti i piu' comuni materiali da costruzione esibiscono un iniziale *comportamento elastico*, cui ora ci si dedichera' in dettaglio.

E di origine sperimentale sono le prime ipotesi qualitative sul comportamento dei materiali: Isaac Beeckman, nel 1630, in una lettera a padre Mersenne fa osservare come, appendendo un peso ad una molla, piu' lunga e' la molla, e piu' si abbassa il peso.
Successivamente, William Petty, nel 1674, pubblico' la memoria "The Discourse made before the Royal Society concerning the Use of Duplicate Proportion, together with a New Hypothesis of Springing or Elastic Motion" in cui il comportamento elastico del materiale viene spiegato con un complicato sistema di atomi, cui si attribuisce non solo proprieta' polari, ma anche caratteristiche sessuali, giustificando tale assunto in base al versetto 1:27 della Genesi: "e Dio li creo' maschio e femmina", ed estendendo tale versetto non solo all'umanita', ma anche agli atomi.

A parte queste curiosita' - tratte dal testo di E. Benvenuto "An Introduction to the History of Structural Mechanics" Vol.I, pag 263, la prima pietra della moderna teoria dell'elasticita' fu posta da Robert Hooke, nel suo trattato "Lectures de potentia restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies", pubblicato nel 1678. In esso Hooke dichiara di aver scoperto la sua teoria delle molle ben diciotto anni prima, ma di averla tenuta segreta per motivi di priorita' scientifica: "Circa due anni orsono pubblicai questa Teoria in un anagramma alla fine del mio libro sulla descrizione degli elioscopi, ossia *ceiiinosssttuu*, ossia *ut tensio sic vis.* Ossia, la Potenza in ogni molla sta nella stessa proporzione con la (es)Tensione.

Con Hooke, quindi, si hanno i primi risultati quantitativi, mirabilmente illustrati con una serie di impeccabili esperimenti condotti sull'apparato riprodotto in Figura 1 :

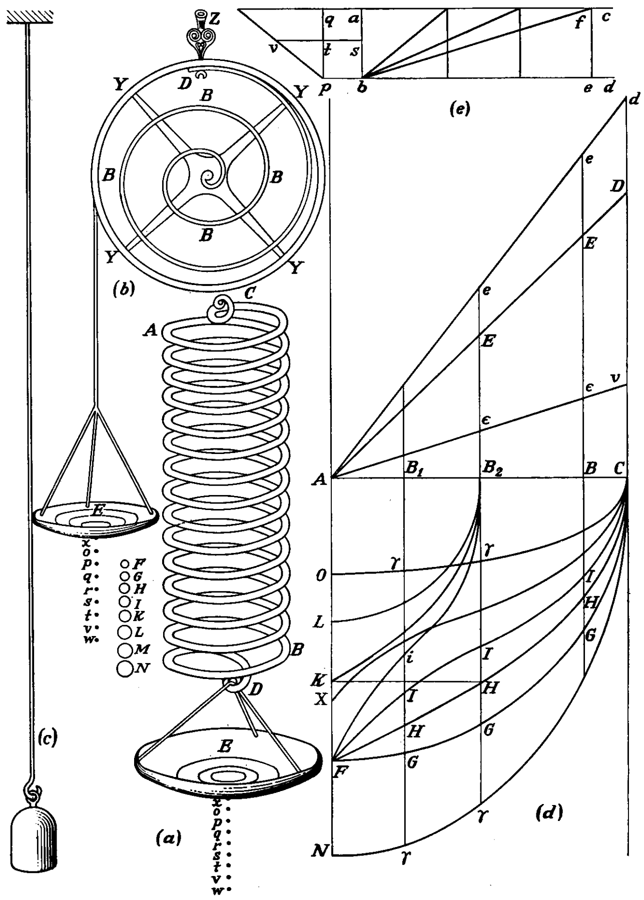

Figura 1 - L'apparato sperimentale di Robert Hooke

Si prenda una molla metallica di 20, 30 o 40 piedi, la si appenda verticalemnte ad un chiodo, ed all'altra estremita' si ponga una scodella per poggiarvi i pesi. Poi con un compasso si misuri la distanza tra il fondo della scodella ed il suolo sottostante, poi si pongano i pesi nella scodella e si misuri l'allungarsi della molla, registrandolo ogni volta. Paragonando i diversi allungamenti della molla, si vedra' che essi saranno sempre proporzionali ai pesi che li hanno causati" [Hooke]

Hooke descrive anche esperimenti con molle elicoidali, molle di orologio a spirale, e pezzi di legno in flessione, traendo le seguenti conclusioni: "E' evidente che la Regola, o Legge di Natura in ogni corpo elastico e', che la forza necessaria a riportarla alla sua posizione naturale e' sempre proporzionale alla distanza che esso ha percorso, sia cio' accaduto per Rarefazione, o mutua separazione delle sue parti, o per Condensazione, ossia per ammassamento delle sue parti. Ne' questo e' osservabile solo in questi corpi, ma in qualsiasi altro corpo elastico, sia esso di metallo, legno, argilla, capelli, corni, seta, vetro, ed altri."

La traduzione moderna degli esperimenti di Hooke presuppone quindi una proporzionalita' lineare tra la forza applicata allla molla, e l'allungamento della molla stessa. Piu' in generale, si consideri una barra di metallo, di lunghezza iniziale l_0 e sezione circolare di diametro iniziale d_0 ed area A_0, e la si sottoponga a due forze di trazione, uguali e contrarie, applicate agli estremi. All'aumentare dell'intensita' della forza F, la barra si allunghera', la sua lunghezza diverra' l, e si potra' riportare in un diagramma l'andamento dell'allungamento percentuale $\epsilon = (l - l_0)/l_0$ in funzione della tensione assiale $\sigma = F/A_0$. Il risultato avra' un aspetto simile a quello riportato in Figura 2, confermando che - in un certo intervallo di valori della forza F - la relazione tra tensione σ e deformazione ϵ e' una relazione di proporzionalita' lineare, mentre al crescere della forza applicata il comportamento del materiale diviene piu' complesso, ed esula dai nostri interessi.

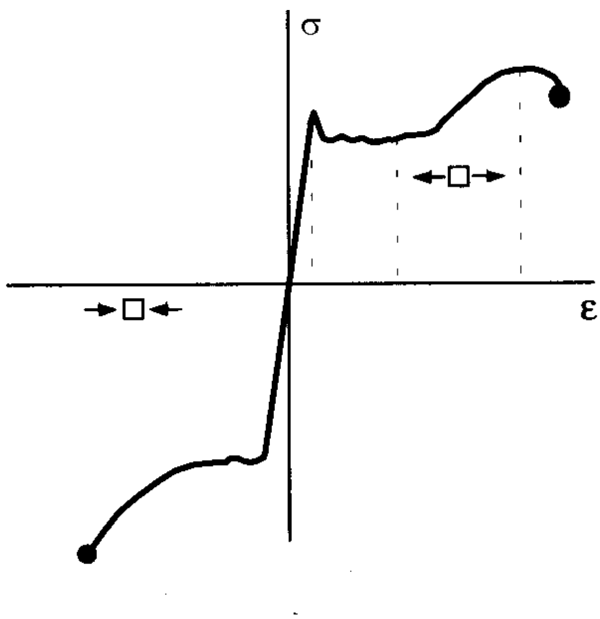

Figura 2 - Il risultato di un tipico esperimento in regime monoassiale di tensione

La generalizzazione degli esperimenti di Hooke, condotti in regime monodimensionale, porta ad ipotizzare una natura lineare della funzione f (cfr. eqn.3), per cui si giunge alla *legge di Hooke generalizzata*:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1123} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2223} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3323} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1223} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1312} & c_{1313} & c_{1323} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312} & c_{2313} & c_{2323} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2\,e_{12} \\ 2\,e_{13} \\ 2\,e_{23} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

o, matricialmente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\,\mathbf{e} \tag{5}$$

avendo introdotto la *matrice **C** di elasticita'*. Indicialmente si ha:

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk}\, e_{hk} \tag{6}$$

Ipotizzando, come usuale, che la matrice **C** sia invertibile, si giunge facilmente alla *legge di Hooke inversa*, in grado di esprimere le deformazioni in termini di tensioni:

$$\mathbf{e} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma} \tag{7}$$

L'ipotesi molecolare

Mentre la deduzione della (5) puo' considerarsi una generalizzazione dei classici esperimenti di Hooke, sorge ora il problema di caratterizzare le 36 costanti elastiche della matrice **C**, in modo tale che le eventuali sperimentazioni possano fornire soddisfacenti conferme sull'effettivo comportamento del materiale.

In particolare, sorgono le seguenti domande:

1. quante costanti possono fissarsi con ragionamenti validi per qualunque corpo, ossia in base a sole considerazioni fisico-matematiche, che non coinvolgano la natura del materiale?

2. esistono in natura, ed ancor piu' in tecnica, una varieta' di materiali con direzioni privilegiate, quali ad esempio le fibre dei tronchi di legname, o le fibre di carbonio. Come si riflette la presenza di queste direzioni privilegiate sulla matrice **C**?

3. esistono in natura alcuni materiali per cui non esiste una direzione privilegiata, ed in questa categoria rientrano alcuni materiali di uso comune in edilizia, come ad esempio l'acciaio. Quante costanti sono necessarie per definire il comportamento di un simile materiale? E qual'e' l'aspetto della matrice **C**, in questa ipotesi?

Come gia' accennato nella prima lezione, l'ipotesi fisica originariamente accettata era una generalizzazione dell'ipotesi di Newton sulle forze di attrazione-repulsione. Secondo questa teoria, Cauchy dimostro' che, in generale, solo 15 costanti sono necessarie per definire un materiale, ed inoltre, che basta una singola costante per definire un materiale senza direzioni privilegiate.

Un seguito di esperimenti ha dimostrato che questa ipotesi uni-costante non permette una buona rispondenza con la realta', e questo ha condotto al graduale abbandono della teoria molecolare, a favore della teoria energetica. [Benvenuto]

L'ipotesi di George Green

La teoria energetica di George Green, ora universalmente accettata ed utilizzata, si basa su di una ipotesi astratta dalle profonde conseguenze matematiche, e conduce a conclusioni teoriche che si sono rivelate essere in buon accordo con i dati sperimentali.

Basandosi sul principio di conservazione dell'energia, l'ipotesi di base e' stata cosi' espressa dallo stesso Green:
"*Qualunque sia il modo in cui le particelle elementari di un corpo agiscono le une sulle altre, se tutte le forze interne sono moltiplicate per gli spostamenti elementari nelle rispettive direzioni, la somma globale per ciascuna porzione del corpo sara' sempre il differenziale esatto di qualche funzione. Ma una volta che*

questa funzione e' nota, possiamo immediatamente applicare i metodi generali forniti dalla Mécanique Analytique, e che sembrano particolarmente ben applicabili a problemi riguardanti il moto di sistemi composti da un numero enorme di particelle mutuamente interagenti. Uno dei vantaggi di questo metodo, di grande importanza, e' che conduce con meri passaggi matematici a tutte le equazioni e condizioni che sono necessarie e sufficienti per la soluzione completa di qualsiasi problema cui possa essere applicato" [Green]

L'ipotesi di Green, tradotta in linguaggio piu' moderno, significa che il lavoro delle tensioni (le *forze interne*), compiuto per unita' di volume, in corrispondenza di una variazione infinitesima di deformazione (*gli spostamenti elementari*), e' il differenziale esatto di una funzione.

Il calcolo di questa funzione e' abbastanza agevole se le forze sono applicate molto lentamente, in modo che il processo di deformazione sia isotermo, oppure molto velocemente, in modo che il processo di deformazione sia adiabatico. Il primo tipo di processo di carico e' fondamentale in regime statico, cui sara' dedicata la prima parte del corso, il secondo in regime dinamico, cui invece saranno dedicate alcune lezioni di complemento.

Figura 1 - Il mulino di famiglia di George Green

In ambedue i casi, infatti, le leggi della termodinamica assicurano che il processo di deformazione vedra' tutto il lavoro delle forze esterne tramutarsi in energia interna.

Si consideri allora un corpo B, soggetto alle forze di massa **X** ed alla forze superficiali **p**, e siano $\boldsymbol{\sigma}$ ed **e** i vettori delle tensioni e delle deformazioni. Per effetto di una variazione di spostamento **du**, le forze esterne compieranno il lavoro:

$$dW = \int_B X_i \, du_i \, dV + \int_{\partial B} p_i \, du_i \, ds \tag{8}$$

Utilizzando il teorema di Cauchy-Poisson si ha:

$$dW = \int_B X_i \, du_i \, dV + \int_{\partial B} \sigma_{ij} \, n_j \, du_i \, ds \tag{9}$$

ed applicando il teorema della divergenza si ha:

$$dW = \int_B X_i\, du_i\, dV + \int_B \frac{\partial \left(\sigma_{ij}\, du_i\right)}{\partial x_j}\, dV \tag{10}$$

Svolgendo la derivata del prodotto si ottiene:

$$dW = \int_B X_i\, du_i\, dV + \int_B \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, du_i\, dV + \int_B \sigma_{ij} \frac{\partial du_i}{\partial x_j}\, dV \tag{11}$$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio garantiscono che il lavoro delle forze esterne si riduce a:

$$dW = \int_B \sigma_{ij} \frac{\partial du_i}{\partial x_j}\, dV = \int_B \sigma_{ij}\, de_{ij}\, dV \tag{12}$$

E' possibile infine scrivere:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial du_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij}\, d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \sigma_{ij} \left(de_{ij} + d\omega_{ij}\right) = \sigma_{ij}\, de_{ij} \tag{13}$$

in quanto $\sigma_{ij}\, d\omega_{ij} = 0$, per il carattere di simmetria delle tensioni e quello di antisimmetria delle ω_{ij}. In definitiva, quindi, un incremento di spostamento **du** causa un incremento di deformazioni **de**, ed il lavoro delle forze esterne e' esprimibile in termini di tensioni come:

$$dW = \int_B \sigma_{ij}\, de_{ij}\, dV \tag{14}$$

L'ipotesi di George Green implica l'esistenza di un *potenziale elastico* ϕ, tale da poter scrivere:

$$dW = \int_B d\phi\, dV = \int_B \sigma_{ij}\, de_{ij}\, dV \tag{15}$$

e $d\phi$ deve essere un differenziale esatto. Dalla (15) si puo' dedurre:

$$\begin{aligned} d\phi = {} & \sigma_{11}\, de_{11} + \sigma_{22}\, de_{22} + \sigma_{33}\, de_{33} + \\ & 2\,\sigma_{12}\, de_{12} + 2\,\sigma_{13}\, de_{13} + 2\,\sigma_{23}\, de_{23} = \boldsymbol{\sigma}^T\, \mathbf{de} \end{aligned} \tag{16}$$

e affinche' $d\phi$ sia un differenziale esatto, dovra' essere:

$$\begin{aligned} d\phi = {} & \frac{\partial \phi}{\partial e_{11}}\, de_{11} + \frac{\partial \phi}{\partial e_{22}}\, de_{22} + \frac{\partial \phi}{\partial e_{33}}\, de_{33} + \\ & 2\,\frac{\partial \phi}{\partial e_{12}}\, de_{12} + 2\,\frac{\partial \phi}{\partial e_{13}}\, de_{13} + 2\,\frac{\partial \phi}{\partial e_{23}}\, de_{23} = \frac{\partial \phi}{\partial e_{ij}}\, de_{ij} \end{aligned} \tag{17}$$

e quindi, dal confronto tra queste due espressioni, si ha:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial e_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{18}$$

Nota - Un materiale per cui venga accettata l'ipotesi di Green si chiama un *materiale iperelastico*.

Il materiale linearmente elastico

L'esistenza di un potenziale elastico non implica necessariamente una relazione lineare tra tensioni e deformazioni. Se pero' si suppone che un corpo dotato di potenziale elastico e' anche linearmente elastico, allora puo' dimostrarsi la:

Prop. La *matrice di elasticita'*:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1123} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2223} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3312} & c_{3313} & c_{3323} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1223} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1312} & c_{1313} & c_{1323} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2312} & c_{2313} & c_{2323} \end{pmatrix} \tag{19}$$

e' simmetrica, e quindi le costanti elastiche divengono 21.

Dim. - Ed infatti, in ipotesi di elasticita' lineare si ha:

$$\sigma_{11} = c_{1111}\, e_{11} + c_{1122}\, e_{22} + c_{1133}\, e_{33} + 2\, c_{1112}\, e_{12} + 2\, c_{1113}\, e_{13} + 2\, c_{1123}\, e_{23} \tag{20}$$

$$\sigma_{22} = c_{2211}\, e_{11} + c_{2222}\, e_{22} + c_{2233}\, e_{33} + 2\, c_{2212}\, e_{12} + 2\, c_{2213}\, e_{13} + 2\, c_{2223}\, e_{23} \tag{21}$$

e quindi:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial e_{22}} = c_{1122} \tag{22}$$

e:

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial e_{11}} = c_{2211} \tag{23}$$

D'altro canto, si e' anche ipotizzata l'esistenza di un potenziale elastico, per cui::

$$\sigma_{11} = \frac{\partial \phi}{\partial e_{11}};\ \sigma_{22} = \frac{\partial \phi}{\partial e_{22}} \tag{24}$$

da cui subito, per il teorema di Schwartz:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial e_{22}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial e_{11}\, \partial e_{22}} = \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial e_{11}} \tag{25}$$

ed infine:

$$c_{1122} = c_{2211} \tag{26}$$

Del tutto analogamente, si ottiene:

$$c_{ijhk} = c_{hkij} \tag{27}$$

Nota - Questa e' la prima discrepanza tra la teoria molecolare, che prevede al piu' 15 diverse costanti elastiche indipendenti, e la teoria energetica, che ne prevede 21. Sembra che, sperimentalmente, sia possibile dimostrare che la cosiddetta "pietra blu" possegga 21 costanti elastiche distinte.

Il potenziale elastico e la linearita' elastica

Si vuol ora dimostrare che si puo' giungere alla legge di Hooke anche esprimendo il potenziale elastico in termini di deformazioni, e poi limitandosi alla parte lineare del risultante sviluppo in serie.

Infatti, utilizzando uno sviluppo in serie di potenze, si puo' scrivere il potenziale come somma di un termine costante, un termine lineare nelle deformazioni, un termine quadratico nelle deformazioni, etc:

$$\phi(\mathbf{e}) = \phi_0 + \phi_1(\mathbf{e}) + \phi_2(\mathbf{e}) + \phi_3(\mathbf{e}) + \ldots \qquad (28)$$

La parte costante ϕ_0 puo' trascurarsi, perche', come usuale, ci si interessa di variazioni di energia, e non di valori assoluti.

La parte lineare ϕ_1, se presente, darebbe luogo, tramite le (18), a termini costanti nelle tensioni, in palese contraddizione con la legge di Hooke, e termini superiori al quadratico non porterebbero piu' ad una relazione lineare tensioni-deformazioni. Ne segue che il potenziale elastico, in ipotesi di validita' della legge di Hooke, dovra' essere una forma quadratica nelle deformazioni:

$$\phi = \frac{1}{2} c_{ijhk}\, e_{ij}\, e_{hk} \qquad (29)$$

o ancora, matricialmente::

$$\phi = \frac{1}{2} \mathbf{e}^{\mathbf{T}} \mathbf{C}\mathbf{e} \qquad (30)$$

Utilizzando la legge di Hooke inversa si hanno due espressioni alternative del potenziale. La prima esprime il potenziale come forma bilineare nelle tensioni e nelle deformazioni:

$$\phi = \frac{1}{2} \mathbf{e}^{\mathbf{T}} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}\, e_{ij} \qquad (31)$$

La seconda invece esprime il potenziale come forma quadratica delle tensioni:

$$\phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{T}} \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} a_{ijhk}\, \sigma_{ij}\, \sigma_{hk} \qquad (32)$$

Nota - Dalla (32) si ottengono le *relazioni di Castigliano*:

$$e_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \qquad (33)$$

duali delle (18), ma in realta' valide in un ambito piu' ristretto, quello dei materiali linearmente elastici.

Note

[Lekhnitskii] In materia di elasticita' e di legge di Hooke e' da leggere il libro di S.G.Lekhnitskii, "Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body", Holden day, San Francisco, 1963. In esso vengono stabilite anche le terminologie correntemente in uso.[Torna al testo]

[Truesdell e Noll] La teoria delle equazioni costitutive e' ardua, e molto al di la' dei limiti del presente corso. Per eventuali approfondimenti, si puo' consultare C. Truesdell e W. Noll, "Non-linear Field Theories of Mechanics", Springer, Terza Edizione (2004) particolarmente la sezione 26, pagg.56-58 [Torna al testo]

[Hooke e gli albori dell'elasticita'] “Take a wire string [Fig. 1] of 20, or 30, or 40 ft long, and fasten the upper part thereof to a nail, and to the other end fasten a Scale to receive the weights: Then with a pair of Compasses take the distance of the bottom of the scale from the ground or floor underneath, and set down the said distance, then put in weights into the said scale and measure the several stretchings of the said string, and set them down. Then compare the several stretchings of the said string, and you will find that they will always bear the same proportions one to the other that the weights do that made them.”

Hooke descrive anche esperimenti con molle elicoidali, molle di orologio a spirale, e pezzi di legno in flessione, traendo le seguenti conclusioni: “It is very evident that the Rule or Law of Nature in every springing body is, that the force or power thereof to restore itself to its natural position is always proportionate to the distance or space it is removed therefrom, whether it be by rarefaction, or the separation of its parts the one from the other, or by a Condensation, or crowding of those parts nearer together. Nor is it observable in these bodies only, but in all other springy bodies whatsoever, whether metal, wood, stones, baked earth, hair, horns, silk, bones, sinews, glass, and the like. Respect being had to the particular figures of the bodies bended, and the advantagious or disadvantagious ways of bending them. From this principle it will be easy to calculate the several strength of Bows . . . as also of the Balistae or Catapultae used by the Ancients . . . .

It will be easy to calculate the proportionate strength of the spring of a watch. . . . From the same also it will be easy to give the reason of the Isochrone motion of a Spring or extended string, and of the uniform sound produced by those whose vibrations are quick enough to produce an audible sound. From this appears the reason why a spring applied to the balance of a watch doth make the vibrations thereof equal, whether they be greater or smaller . . . . From this it will be easy to make a Philosophical Scale to examine the weight of any body without putting in weights . . . . This Scale I contrived in order to examine the gravitation of bodies towards the Center of the Earth, viz, to examine whether bodies at a further distance from the center of the earth did not loose somewhat of their power or tendency towards it . . . .“

Nella sua forma generalizzata, invece, la legge di Hooke fu enunciata da Navier il 14 maggio 1821, in una riunione della Paris Academy, e poi pubblicata nel 1827. Infine, essa fu ripresa ed ampliata da Cauchy in due memorie del 1822 e del 1828, e sistemata da Poisson nel 1829.[Torna al testo]

[Benvenuto] Per chi desideri maggiori dettagli e' consigliata la lettura di "*Sui principi di filosofia naturale che orientarono la ricerca di Saint-Venant*", di E. Benvenuto e A. Becchi, riportata nel sito http:\\www.scienzadellecostruzioni.co.uk, nella sezione Ricerca. [Torna al testo]

[Green] L'ipotesi si trova formulata in "*On the laws of reflexion and refraction of light*", Trans. Cambridge Philosophical Society, 1838, ed e' riportata in "Mathematical papers of the late George Greene", p. 245, London 1871. Una copia puo' essere lette nel sito http:\\www.scienzadellecostruzioni.co.uk, nella sezione Ricerca. [Torna al testo]