Lezione 15 - La teoria lineare

- **[A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 23 ottobre 2012]**

In questa lezione si esaminano le conseguenze di una ragionevole ipotesi sulla grandezza di alcune quantita' di interesse fisico.

L'ipotesi di piccole deformazioni

E' spesso evidente, nella pratica tecnica, che le variazioni percentuali di lunghezza E_{x1}, E_{x2} ed E_{x3}, assieme con le variazioni angolari γ_{12}, γ_{13} e γ_{23} possano considerarsi quantita' piccole rispetto all'unita'. Quando cio' sia accettabile, si dira' che si e' nell'ambito delle *piccole deformazioni:*

$$E_{x1} \ll 1;\ E_{x2} \ll 1;\ E_{x3} \ll 1;\ \gamma_{12} \ll 1;\ \gamma_{13} \ll 1;\ \gamma_{23} \ll 1; \tag{1}$$

In tale ipotesi si hanno alcune interessanti semplificazioni di svariate formule. Le (27-29) della Lezione precedente, che qui si riportano per comodita':

$$E_{x1} = \sqrt{1 + 2\, d_{11}} - 1 \tag{2}$$

$$E_{x2} = \sqrt{1 + 2\, d_{22}} - 1 \tag{3}$$

$$E_{x3} = \sqrt{1 + 2\, d_{33}} - 1 \tag{4}$$

si semplificano utilizzando lo sviluppo in serie della radice quadrata, ed arrestandosi al primo termine:

$$\sqrt{1 + 2\, d_{11}} = 1 + d_{11} - \frac{d_{11}^2}{2} + \frac{d_{11}^3}{2} + O[d_{11}]^4 \tag{5}$$

da cui si ha:

$$E_{x1} = d_{11} \tag{6}$$

$$E_{x2} = d_{22} \tag{7}$$

$$E_{x3} = d_{33} \tag{8}$$

Ne segue che in queste ipotesi *gli elementi diagonali del tensore di Green-Lagrange forniscono direttamente gli allungamenti percentuali di segmenti passanti per un punto M e paralleli agli assi.*

Inoltre, per qualsiasi segmento $\overrightarrow{MN}$ la deformazione ε_{MN}, data dalla (23) della Lezione precedente:

$$\epsilon_{MN} = E_{MN}\left(1 + \frac{E_{MN}}{2}\right) \tag{9}$$

si semplifica in:

$$\epsilon_{MN} = E_{MN} \tag{10}$$

da cui, come gia' suggerito, si vede che la definizione matematica e quella ingegneristica vengono a coincidere.

Infine, occorre semplificare le (33-35) della Lezione precedente:

$$\sin\gamma_{12} = \frac{2\,d_{12}}{(1+E_{x1})\,(1+E_{x2})} \tag{11}$$

$$\sin\gamma_{13} = \frac{2\,d_{13}}{(1+E_{x1})\,(1+E_{x3})} \tag{12}$$

$$\sin\gamma_{23} = \frac{2\,d_{23}}{(1+E_{x2})\,(1+E_{x3})} \tag{13}$$

I seni degli angoli, come noto, possono confondersi con gli angoli stessi, se gli angoli sono piccoli:

$$\sin\gamma_{12} = \gamma_{12} - \frac{\gamma_{12}^3}{6} + O[\gamma_{12}]^4 \tag{14}$$

ed il denominatore a secondo membro puo' confondersi con l'unita'. Si ha quindi:

$$d_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2} \tag{15}$$

$$d_{13} = \frac{\gamma_{13}}{2} \tag{16}$$

$$d_{23} = \frac{\gamma_{23}}{2} \tag{17}$$

Quindi, nelle ipotesi semplificative di questa lezione, le tre componenti d_{12}, d_{13}, d_{23} coincidono con la meta' della variazione angolare dell'angolo retto tra elementi passanti per M ed originariamente distesi lungo gli assi.

L'ipotesi di piccoli gradienti di spostamento

Una ulteriore ipotesi semplificativa riguarda l'ampiezza delle derivate degli spostamenti. Se si assume che tutte le derivate del tipo $\partial u_1/\partial x_1$, ... $\partial u_3/\partial x_3$ siano tanto piccole da poter trascurare i loro quadrati rispetto ad esse, allora la definizione del tensore di Green-Lagrange viene a semplificarsi drasticamente, in quanto l'ultimo termine della (8) della Lezione precedente:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T\,\mathbf{H}\right) \tag{18}$$

viene a trascurarsi, e quindi si ha:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\right) \tag{19}$$

In altri termini, *il tensore di Green-Lagrange viene a coincidere con la parte simmetrica del gradiente di spostamento.*

La decomposizione dello spostamento

Nell'ipotesi di piccoli gradienti di spostamento, gli elementi della matrice **H** dei gradienti di spostamento sono tutti dello stesso ordine di grandezza, cosi' come gli elementi della parte simmetrica **E** di **H**, e della parte antisimmetrica **Ω**. Cio' permette una utile decomposizione del processo deformativo in esame.

La rotazione rigida

Si consideri la (10) della Lezione 13, che si riporta per comodita':

$$\begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \tag{20}$$

ossia:

$$\mathbf{du} = \mathbf{H}\,\mathbf{dx} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\Omega})\,\mathbf{dx} \tag{21}$$

con:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Si definisca ora il vettore ω di componenti:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \tag{24}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \tag{25}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \tag{26}$$

in modo da scrivere:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Ora, e' noto che il generico atto di moto di un *corpo rigido*, si puo' scomporre in tre traslazioni u_{01}, u_{02}, u_{03}, rispetto a tre assi cartesiani di riferimento, e in tre rotazioni di ampiezza Ω_1, Ω_2, Ω_3 intorno agli assi passanti per un punto P_0 (detto polo) e paralleli agli assi di riferimento.

A seguito di questo atto di moto, lo spostamento di un generico punto P del corpo, puo' scriversi:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \\ x_3 - x_{03} \end{pmatrix} \tag{28}$$

Ne segue che l'aliquota di spostamento della (21):

$$\mathbf{du}_r = \mathbf{\Omega}\,\mathbf{dx} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{dx} \tag{29}$$

e' interpretabile come una rotazione rigida con vettore rotazione di componenti:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \tag{30}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \tag{31}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \tag{32}$$

■ La deformazione pura

La restante aliquota della (21):

$$\mathbf{du}_e = \mathbf{E}\mathbf{dx} \tag{33}$$

e' quindi responsabile dell'effettiva deformazione del segmento $\overrightarrow{MN}$, e la matrice **E** si dice anche *matrice della deformazione pura*. I corrispondenti spostamenti si dicono *spostamenti da deformazione pura*.

Nota - Il concetto di decomposizione della deformazione, come illustrato in questa sezione, risale a G.Stokes, 1845.

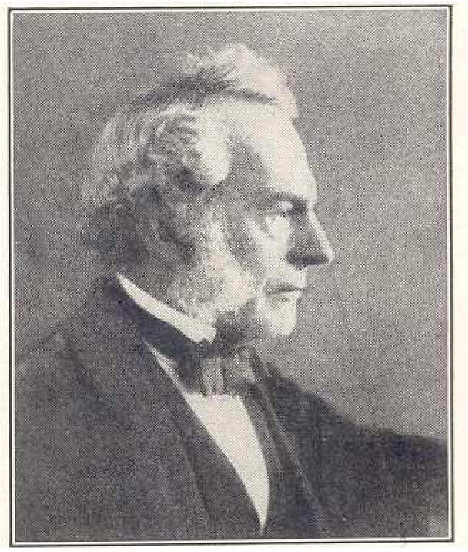

Figura 1 - G. Stokes

L'interpretazione fisica delle direzioni principali di deformazione

La (33), combinata con la (19), permette una semplice interpretazione fisica della ricerca delle deformazioni principali con le corrispondenti direzioni principali di deformazione, operata nella Lezione precedente sul tensore di Green-Lagrange.

Si consideri infatti un punto M, e sia *p* una direzione principale passante per M. Sia poi N un punto appartenente alla retta *p*, ed a distanza **dx** da M.

Il punto N, per effetto della deformazione pura, si porta in N', con spostamenti forniti dalla (33):

$$\begin{aligned} du_1 &= e_{11}\, dx_1 + e_{12}\, dx_2 + e_{13}\, dx_3 \\ du_2 &= e_{12}\, dx_1 + e_{22}\, dx_2 + e_{23}\, dx_3 \\ du_3 &= e_{13}\, dx_1 + e_{23}\, dx_2 + e_{33}\, dx_3 \end{aligned} \tag{34}$$

D'altro canto, poiche' N appartiene ad una direzione principale, anche N' dovra' appartenere alla stessa direzione, e quindi MN' deve essere proporzionale ad MN (cfr. Figura 2):

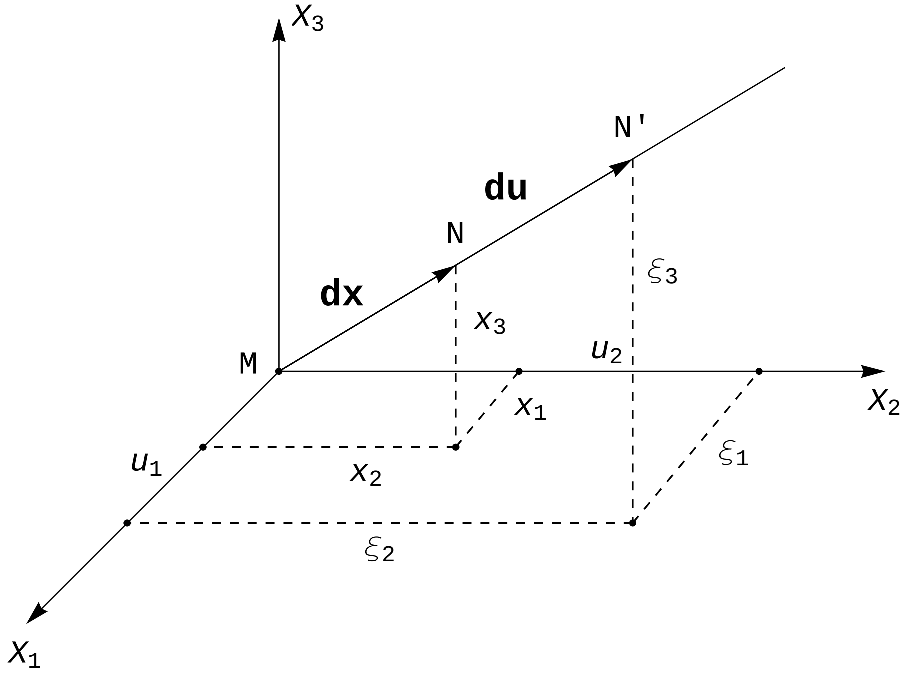

Figura 2 - Gli spostamenti da deformazione pura e le direzioni principali di deformazione

$$\begin{aligned} du_1 &= \epsilon\, dx_1 \\ du_2 &= \epsilon\, dx_2 \\ du_3 &= \epsilon\, dx_3 \end{aligned} \tag{35}$$

Paragonando le (35) e (34) si giunge al sistema:

$$\begin{aligned} (e_{11} - \epsilon)\, dx_1 + e_{12}\, dx_2 + e_{13}\, dx_3 &= 0 \\ e_{12}\, dx_1 + (e_{22} - \epsilon)\, dx_2 + e_{23}\, dx_3 &= 0 \\ e_{13}\, dx_1 + e_{23}\, dx_2 + (e_{33} - \epsilon)\, dx_3 &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

identico alla (38) della Lezione precedente.

Le condizioni di compatibilita'

In quest'ultima sezione si affronta il seguente problema:

- date le *tre* funzioni spostamento $u_1(x_1, x_2, x_3)$, $u_2(x_1, x_2, x_3)$ e $u_3(x_1, x_2, x_3)$, e' da esse possibile ricavare, tramite derivazione, le *sei* componenti del tensore di deformazione.

- assegnate le *sei* funzioni $e_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, i,j = 1,2,3, e' sempre possibile ricavare le *tre* funzioni spostamento da cui esse sarebbero generate? In altri termini, assegnate sei funzioni del tipo descritto, sono sempre esse interpretabili come componenti di deformazione, relative ad un campo di spostamenti?

La risposta alla domanda precedente e': non sempre, ma solo quando le sei funzioni siano legate tra loro da tre condizioni, dette *condizioni di compatibilita'*.

Si puo' dimostrare il seguente:

Teorema - Condizione necessaria e sufficiente affinche' le sei funzioni continue ed uniformi $e_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, i,j = 1,2,3 siano componenti di deformazione lineare e' che siano verificate le relazioni:

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3}\right) \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1}\right) \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2}\right) \tag{39}$$

$$2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \tag{40}$$

$$2\frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} \tag{41}$$

$$2\frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2} \tag{42}$$

Nota - Prima di iniziare la dimostrazione, si osservi che il gruppo delle prime tre condizioni si puo' ottenere a partire da una qualsiasi equazione, tramite permutazione circolare degli indici $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_1$, cosi' come possono ottenersi le altre tre condizioni.

Dim. La condizione e' necessaria. Ed infatti il secondo gruppo di condizioni puo' essere facilmente dimostrato in base alla seguente relazione:

$$2\,e_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \longrightarrow 2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_1} + \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \tag{43}$$

ed alla permutazione circolare degli indici.

Per dimostrare il primo gruppo di condizioni, si consideri che si ha:

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \longrightarrow \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3}\right) \tag{44}$$

$$e_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \longrightarrow \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2}\right) \tag{45}$$

$$e_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) \longrightarrow \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\right) \tag{46}$$

e sommando si ha:

$$\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1\,\partial x_3}+\frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_1\,\partial x_2}-\frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_1\,\partial x_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}+\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_3}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}\right)-$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_3}+\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1\,\partial x_1\,\partial x_2}\right)=$$
$$\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}=\frac{\frac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial x_3}\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2\,\partial x_3}$$

La condizione e' sufficiente. Si consulti Muskhelishvili.[Muskhelishvili] ∎

Nota - La necessarieta' delle condizioni di compatibilita' e' stata dimostrata da B. De Saint Venant in una brevissima nota di due pagine, pubblicata nel 1861, mentre la dimostrazione della loro sufficienza e' dovuta ad Eugenio Beltrami ("*Sull'interpretazione meccanica delle formule di Maxwell*", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 3, 1886). Tale nota puo' anche essere letta sul sito http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk, nella sezione Ricerca.

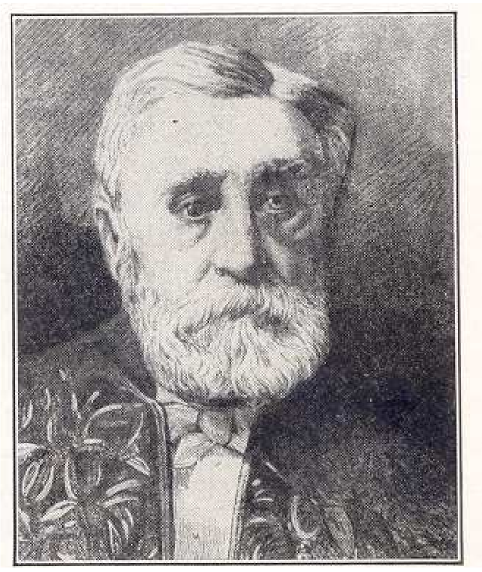

Figura 3 - Adhemar Jean Claude Barre' de Saint-Venant

Nota - Le equazioni di congruenza possono sintetizzarsi nell'unica formula:

$$\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\mathbf{E}=0 \qquad (48)$$

dove il rotore di un tensore e' definito, ad esempio, nel Complemento 6, sul sito http://www.scienzadelle-costruzioni.co.uk.

Le identita' di Bianchi

E' facilmente ipotizzabile che non tutte le condizioni di congruenza appena scritte siano indipendenti tra di loro. Ed infatti, si riscrivano le sei condizioni sotto forma di identita' a zero:

$$\mathcal{G}_{33} = 2\,\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = 0 \qquad (49)$$

$$\mathcal{G}_{11} = 2\,\frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} = 0 \qquad (50)$$

$$\mathcal{G}_{22} = 2\,\frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_3\,\partial x_1} - \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2} = 0 \qquad (51)$$

$$\mathcal{G}_{23} = \mathcal{G}_{32} = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_1^2} = 0 \qquad (52)$$

$$\mathcal{G}_{31} = \mathcal{G}_{13} = \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3\,\partial x_1} - \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2\,\partial x_1} - \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_2\,\partial x_3} + \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_2^2} = 0 \qquad (53)$$

$$\mathcal{G}_{12} = \mathcal{G}_{21} = \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{31}}{\partial x_3\,\partial x_2} - \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_3\,\partial x_1} + \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_3^2} = 0 \qquad (54)$$

Figura 4 - Luigi Bianchi

Si puo' verificare, per sostituzione diretta, che sussistono le cosiddette *identita' di Bianchi:*

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{G}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_{13}}{\partial x_3} = 0 \qquad (55)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{G}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_{23}}{\partial x_3} = 0 \qquad (56)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathcal{G}_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathcal{G}_{33}}{\partial x_3} = 0 \qquad (57)$$

che legano tra loro le sei condizioni di congruenza, e facendo si' che solo tre di esse siano indipendenti. Si noti che utilizzando la convenzione degli indici ripetuti, le identita' di Bianchi si scrivono:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \; i = 1, 2, 3 \qquad (58)$$

Note

[1] N. Muskhelishvili, "Some basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", Noordhoff 1963, pp. 50-51. [Torna al testo]

Grafici