Lezione 14 - Il tensore di Green-Lagrange

- **[A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 23 ottobre 2012]**

In questa lezione si generalizza quanto detto nella lezione precedente, considerando la trasformazione subita da un segmento arbitrariamente orientato nello spazio.

Il tensore di Green-Lagrange

Si consideri un segmento $\overrightarrow{MN}$ = **dx**, di componenti (dx_1, dx_2, dx_3), e di lunghezza:

$$|MN| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = \sqrt{\mathbf{dx}^T\,\mathbf{dx}} \tag{1}$$

A seguito della applicazione delle forze, il segmento $\overrightarrow{MN}$ si trasforma nel segmento $\overrightarrow{M'N'} = \mathbf{d\xi}$, di componenti $(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$ e lunghezza:

$$|M'N'| = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\varsigma^2} = \sqrt{\mathbf{d\xi}^T\,\mathbf{d\xi}} \tag{2}$$

Usando la (16) della lezione precedente:

$$\mathbf{d\xi} = \mathbf{F}\,\mathbf{dx} \tag{3}$$

si ha:

$$|M'N'| = \sqrt{\mathbf{d\xi}^T \cdot \mathbf{d\xi}} = \sqrt{\mathbf{dx}^T\,\mathbf{F}^T\,\mathbf{F}\,\mathbf{dx}} \tag{4}$$

e quindi:

$$|M'N'|^2 - |MN|^2 = \mathbf{dx}^T\,\mathbf{F}^T\,\mathbf{F}\,\mathbf{dx} - \mathbf{dx}^T\,\mathbf{dx} = \mathbf{dx}^T\left(\mathbf{F}^T\,\mathbf{F} - \mathbf{I}\right)\mathbf{dx} \tag{5}$$

Si introduca ora la seguente quantita', nota come *tensore di Green-Lagrange* [Green]:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\,\mathbf{F} - \mathbf{I}\right) \tag{6}$$

in modo da poter scrivere:

$$|M'N'|^2 - |MN|^2 = 2\,\mathbf{dx}^T\,\mathbf{D}\,\mathbf{dx} \tag{7}$$

Si noti che il tensore **D** puo' scriversi anche:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\,\mathbf{F} - \mathbf{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T\,\mathbf{H}\right) \tag{8}$$

da cui, tra l'altro, appare subito evidente la natura simmetrica di **D**.

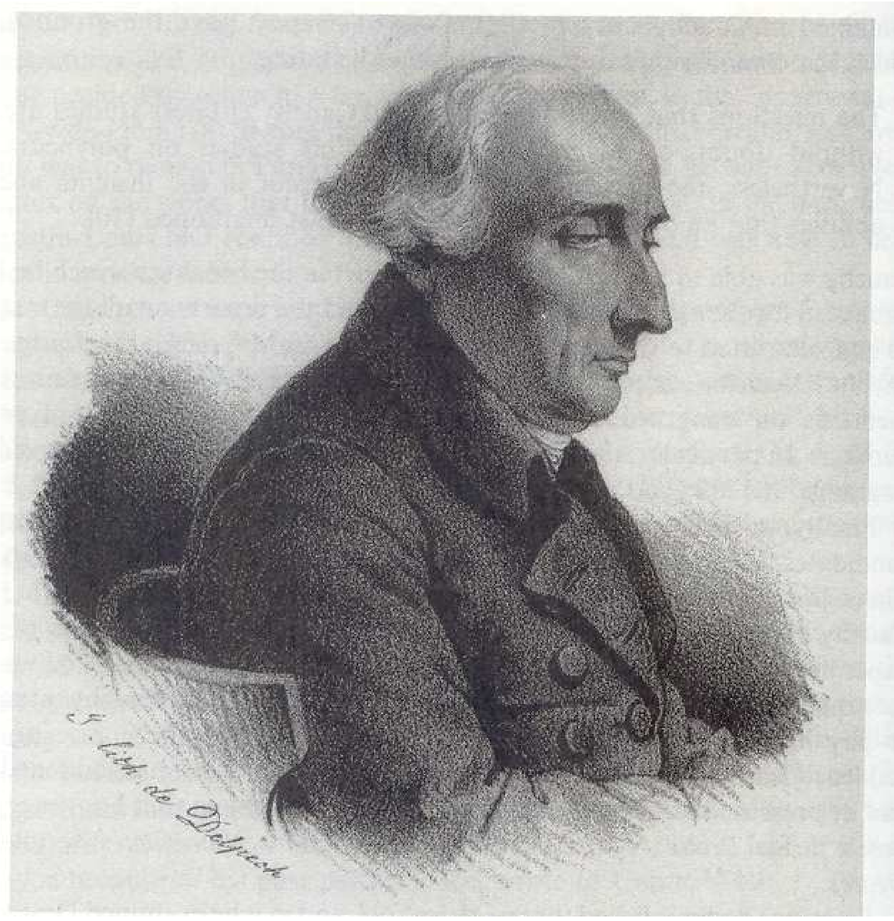

Figura 1 - Joseph-Louis Lagrange

Svolgendo i prodotti matriciali si hanno esplicitamente le sei componenti di **D**:

$$d_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \tag{9}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \tag{10}$$

$$d_{13} = d_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \tag{11}$$

$$d_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \tag{12}$$

$$d_{23} = d_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \tag{13}$$

$$d_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \tag{14}$$

oppure, utilizzando la convenzione degli indici ripetuti:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \qquad (15)$$

Gli allungamenti percentuali

L'allungamento percentuale del segmento MN e' stato definito come:

$$E_{MN} = \frac{|M'N'| - |MN|}{|MN|} = \frac{|M'N'|}{|MN|} - 1 \qquad (16)$$

da cui:

$$|M'N'| = (1 + E_{MN})\,|MN| \qquad (17)$$

Sara' pertanto:

$$\begin{aligned} &|M'N'|^2 - |MN|^2 = \\ &(1+E_{MN})^2\,|MN|^2 - |MN|^2 = E_{MN}\,(2+E_{MN})\,|MN|^2 \end{aligned} \qquad (18)$$

e paragonando con la (7) si ha:

$$E_{MN}\,(2+E_{MN})\,|MN|^2 = 2\,\mathbf{dx}^T\,\mathbf{D}\,\mathbf{dx} \qquad (19)$$

Dividendo ora per 2 $|MN|^2$ si ha:

$$E_{MN}\left(1 + \frac{E_{MN}}{2}\right) = \frac{\mathbf{dx}^T}{|MN|}\,\mathbf{D}\,\frac{\mathbf{dx}}{|MN|} \qquad (20)$$

ossia, infine:

$$E_{MN}\left(1 + \frac{E_{MN}}{2}\right) = \mathbf{l}^T\,\mathbf{D}\,\mathbf{l} \qquad (21)$$

avendo introdotto il vettore **l** dei coseni direttori dell'elemento $\overrightarrow{MN}$:

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{|MN|} \\ \frac{dx_2}{|MN|} \\ \frac{dx_3}{|MN|} \end{pmatrix} \qquad (22)$$

Si e' quindi dato un significato fisico al tensore di Green-Lagrange: basta conoscere le sue sei componenti ed e' possibile calcolare l'allungamento percentuale di un segmento $\overrightarrow{MN}$ orientato in modo arbitrario, e definito attraverso i suoi tre coseni direttori.

Definizione di deformazione

La formula (21) fornisce lo spunto per una definizione di tipo operativo:

Definizione - Dato un punto M del corpo B, la quantita':

$$\epsilon_{MN} = E_{MN}\left(1+\frac{E_{MN}}{2}\right) = \mathbf{l}^T\,\mathbf{D}\mathbf{l} = d_{ij}\,l_i\,l_j = \\ d_{11}\,l_1^2 + d_{22}\,l_2^2 + d_{33}\,l_3^2 + 2\,(d_{12}\,l_1\,l_2 + d_{13}\,l_1\,l_3 + d_{23}\,l_2\,l_3) \qquad (23)$$

si definisce la *deformazione* in M del segmento $\overrightarrow{MN}$.

Nota - Nella pratica ingegneristica si definisce deformazione la quantita' E_{MN}, che viene a coincidere con la (34) solo in certe ipotesi che verranno specificate in seguito.

Le componenti normali di deformazione

Si consideri un segmento $\overrightarrow{MN}$ = **dx**, parallelo all'asse x_1, e quindi di componenti (dx_1, 0, 0). I coseni direttori di $\overrightarrow{MN}$ sono dati da (1,0,0). Di conseguenza, la (23) potra' scriversi:

$$\epsilon_{11} = E_{x1}\left(1+\frac{E_{x1}}{2}\right) = \mathbf{l}^T\,\mathbf{D}\,\mathbf{l} \qquad (24)$$

e svolgendo il triplo prodotto matriciale si giunge ad identificare le componenti del tensore di Green-Lagrange lungo la diagonale principale con le deformazioni dei segmenti originariamente stesi lungo gli assi:

$$\epsilon_{11} = d_{11} \qquad (25)$$

In termini di allungamenti percentuali, e' facile dedurre che sara':

$$E_{x1}\left(1+\frac{E_{x1}}{2}\right) = d_{11} \qquad (26)$$

da cui:

$$E_{x1} = \sqrt{1+2\,d_{11}} - 1 \qquad (27)$$

Del tutto analogamente:

$$E_{x2} = \sqrt{1+2\,d_{22}} - 1 \qquad (28)$$

$$E_{x3} = \sqrt{1+2\,d_{33}} - 1 \qquad (29)$$

Si puo' dunque concludere che *gli elementi diagonali del tensore di Green-Lagrange forniscono una misura degli allungamenti percentuali di segmenti passanti per un punto M e paralleli agli assi.*

I tre elementi d_{11}, d_{22} e d_{33} si chiamano *componenti normali della deformazione.*

Gli angoli taglianti

Occorre ora dare un significato geometrico anche ai restanti tre termini del tensore di Green-Lagrange, ossia a d_{12}, d_{13} e d_{23}. A cio' fare, si considerino due elementi paralleli a due assi coordinati, ad esempio, paralleli ad x_1 ed x_2. Siano essi $\mathbf{dx}_1$ e $\mathbf{dx}_2$, rispettivamente, con coseni direttori (1,0,0) e (0,1,0).

I coseni direttori del segmento trasformato $\mathbf{d\xi}_1$ saranno forniti da (cfr. (32) della Lezione precedente):

$$\lambda_{11} = \frac{1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{1+E_{x1}}; \quad \lambda_{21} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1+E_{x1}}; \quad \lambda_{31} = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}{1+E_{x1}}; \qquad (30)$$

mentre i coseni direttori del segmento trasformato $\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}_2$ saranno forniti da:

$$\lambda_{12} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1 + E_{x2}}; \quad \lambda_{22} = \frac{1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}}{1 + E_{x2}}; \quad \lambda_{32} = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{1 + E_{x2}}; \tag{31}$$

Ne segue, per una nota formula di geometria, che il coseno dell'angolo formato dai due segmenti trasformati sara' fornito da:

$$\cos(\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{d}\boldsymbol{\xi}_2) = \lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22} + \lambda_{31}\lambda_{32} = \\ \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{(1 + E_{x1})(1 + E_{x2})} = \frac{2\, d_{12}}{(1 + E_{x1})(1 + E_{x2})} \tag{32}$$

Se si indica con γ_{12} la variazione angolare tra $\mathbf{dx}_1$ e $\mathbf{dx}_2$, (cfr. Figura 2) si ha anche:

$$\cos(\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{d}\boldsymbol{\xi}_2) = \frac{2\, d_{12}}{(1 + E_{x1})(1 + E_{x2})} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin\gamma_{12} \tag{33}$$

Analogamente, si ha

$$\cos(\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{d}\boldsymbol{\xi}_3) = \frac{2\, d_{13}}{(1 + E_{x1})(1 + E_{x3})} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{13}\right) = \sin\gamma_{13} \tag{34}$$

$$\cos(\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{d}\boldsymbol{\xi}_3) = \frac{2\, d_{23}}{(1 + E_{x2})(1 + E_{x3})} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{23}\right) = \sin\gamma_{23} \tag{35}$$

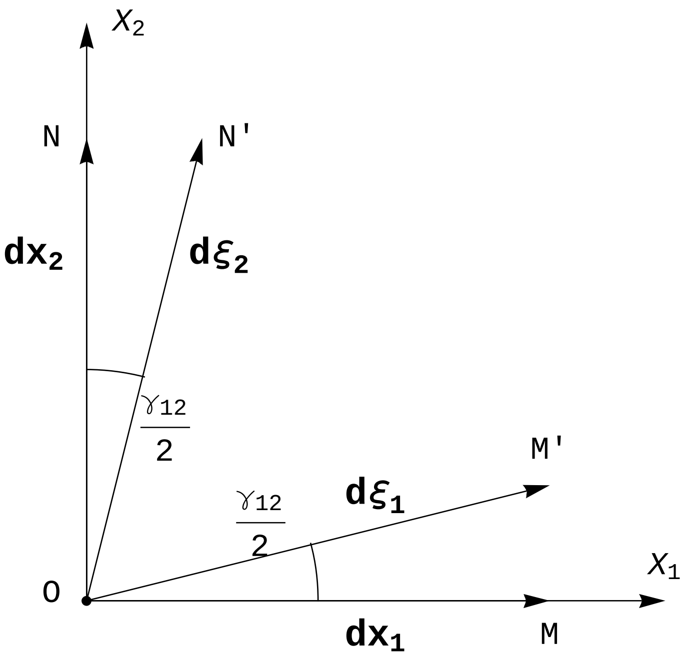

Figura 2 - L'angolo tagliante γ_{12}

Gli angoli γ_{12}, γ_{13}, γ_{23} si chiamano *angoli taglianti*, mentre le tre componenti d_{12}, d_{13}, d_{23} si chiamano le *componenti tangenziali della deformazione*. Esse descrivono la variazione angolare dell'angolo retto tra elementi passanti per M ed originariamente distesi lungo gli assi.

Le deformazioni principali

Come si e' visto, le componenti tangenziali della deformazione, d_{12}, d_{13} e d_{23} descrivono la variazione angolare tra coppie di segmenti distesi lungo gli assi. Se quindi queste tre quantita' fossero nulle, allora gli assi coordinati sarebbero orientati in modo tale che tre segmenti ad essi paralleli subirebbero solo variazioni di lunghezza, ruoterebbero in modo solidale, ma non avrebbero mutue rotazioni. In altri termini la terna (x_1, x_2, x_3) sarebbe una *terna di direzioni principali di deformazione*.

In questo caso, gli assi si battezzano (1, 2, 3) e gli allungamenti percentuali si denotano con E_1, E_2, E_3. Inoltre il tensore di Green-Lagrange assume la forma diagonale:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \qquad (36)$$

e quindi sara':

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{1 + 2 d_1} - 1 \\ E_2 &= \sqrt{1 + 2 d_2} - 1 \\ E_3 &= \sqrt{1 + 2 d_3} - 1 \end{aligned} \qquad (37)$$

ed anche:

$$\epsilon_{MN} = d_1 l_1^2 + d_2 l_2^2 + d_3 l_3^2 \qquad (38)$$

dove, come sempre, l_1, l_2 ed l_3 sono i coseni direttori del segmento $\overrightarrow{MN}$.

La ricerca delle direzioni principali

In perfetta analogia con quanto svolto nell'analisi della tensione, occorre ricercare quella direzione, o quelle direzioni per cui:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \qquad (39)$$

ossia, matricialmente:

$$(\mathbf{D} - \varepsilon \mathbf{I})\, \mathbf{l} = \mathbf{0} \qquad (40)$$

Il sistema, omogeneo, ammette sempre la soluzione banale $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, senza significato fisico. Occorre invece ricercare le soluzioni, definite a meno di una o piu' costanti, in corrispondenza dei valori nulli del determinante dei coefficienti, imponendo:

$$\mathrm{Det}[(\mathbf{D} - \varepsilon \mathbf{I})] = 0 \qquad (41)$$

Svolgendo il determinante si giunge ad una equazione cubica in ϵ, con tre radici reali, che puo' scriversi come:

$$\varepsilon^3 - I_1 \varepsilon^2 + I_2 \varepsilon - I_3 = 0 \qquad (42)$$

dove I_1, I_2 ed I_3 sono i tre *invarianti di deformazione*:

$$I_1 = d_{11} + d_{22} + d_{33} = \mathrm{Tr}[\mathbf{D}] \tag{43}$$

$$I_2 = d_{11}\, d_{22} + d_{11}\, d_{33} + d_{22}\, d_{33} - d_{12}^2 - d_{13}^2 - d_{23}^2 \tag{44}$$

$$I_3 = \mathrm{Det}[\mathbf{D}] \tag{45}$$

Siano d_1, d_2 e d_3 le tre radici dell'equazione secolare (41) in ε. In corrispondenza di ciascuna di queste tre radici, dette *deformazioni principali*, si puo' calcolare una direzione principale, definita a meno di una costante, ed identificata dalle sue tre componenti.

Sia $\boldsymbol{l}_1 = (l_{11}, l_{21}, l_{31})$ la soluzione che si ottiene in corrispondenza di $\varepsilon = d_1$, $\boldsymbol{l}_2 = (l_{12}, l_{22}, l_{32})$ la soluzione che si ottiene in corrispondenza di $\varepsilon = d_2$, ed infine $\boldsymbol{l}_3 = (l_{13}, l_{23}, l_{33})$ la soluzione che si ottiene in corrispondenza di $\varepsilon = d_3$.

Si puo' dimostrare anche in questo caso che queste tre direzioni $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ e $\boldsymbol{l}_3$, sono tra loro ortogonali.

Note

[Green] - La deduzione del tensore e' contenuta in "*On the propagation of light in crystallized media*" G. Green, Math. Papers 297-311 (1839). Una versione digitale di tale lavoro puo' essere letta nella sezione Ricerca del sito http:\\www.scienzadellecostruzioni.co.uk [Torna al testo]

Grafici