Lezione 13 - Il gradiente di deformazione

- **[A.a. 2012 - 2013 : ultima revisione 23 ottobre 2012]**

In questa lezione si comincia ad affrontare l'analisi della deformazione, cui compito principale e' rispondere al seguente problema:
- assegnate le coordinate dei punti di un corpo nella sua configurazione iniziale, e nella sua configurazione finale, ricercare la variazione in lunghezza e direzione di un segmento congiungente due punti arbitrari originariamente vicini tra loro.
Anche questo capitolo deve fare riferimento a Cauchy [Cauchy]

Gradiente di spostamento

Si consideri un corpo B, e si fissi un sistema cartesiano di riferimento. Sia M un punto generico del corpo, e siano (x_1, x_2, x_3) le sue coordinate in condizioni indeformate, ossia prima dell'applicazione delle forze.

Applicando le forze, il corpo B subisce una trasformazione, portandosi in B', ed il punto M, a sua volta, si porta in M', di coordinate (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Si puo' scrivere, per $i = 1,2,3$:

$$\xi_i = x_i + u_i \tag{1}$$

o, matricialmente:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + \mathbf{u} \tag{2}$$

Il vettore $\mathbf{u} = \overrightarrow{MM'}$, di componenti (u_1, u_2, u_3) si chiama lo *spostamento* del punto M, come illustrato in Figura 1.

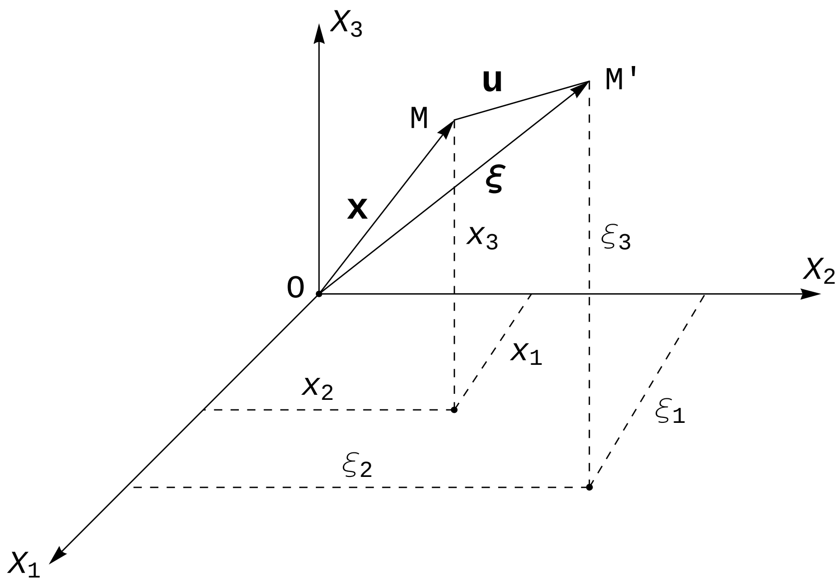

Figura 1 - Le componenti di spostamento del punto generico M

Per ragioni fisiche, le componenti di spostamento si assumono funzioni continue e derivabili delle coordinate x_1, x_2, ed x_3.

Si consideri ora un punto N appartenente ad un intorno di M, di coordinate $(x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2,\ x_3 + dx_3)$, e sia N' il suo trasformato a seguito dell'applicazione dei carichi. N' avra' coordinate $\left(\xi_1 + d\xi_1,\ \xi_2 + d\xi_2,\ \xi_3 + d\xi_3\right)$, e potra' anche scriversi:

$$\overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NN'} \tag{3}$$

o matricialmente:

$$\boldsymbol{\xi} + \mathbf{d}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + \mathbf{dx} + \mathbf{u} + \mathbf{du} \tag{4}$$

avendo introdotto il vettore $\mathbf{d}\boldsymbol{\xi}$, di componenti $\left(d\xi_1,\ d\xi_2,\ d\xi_3\right)$, ed il vettore **du**, di componenti $(du_1,\ du_2,\ du_3)$.

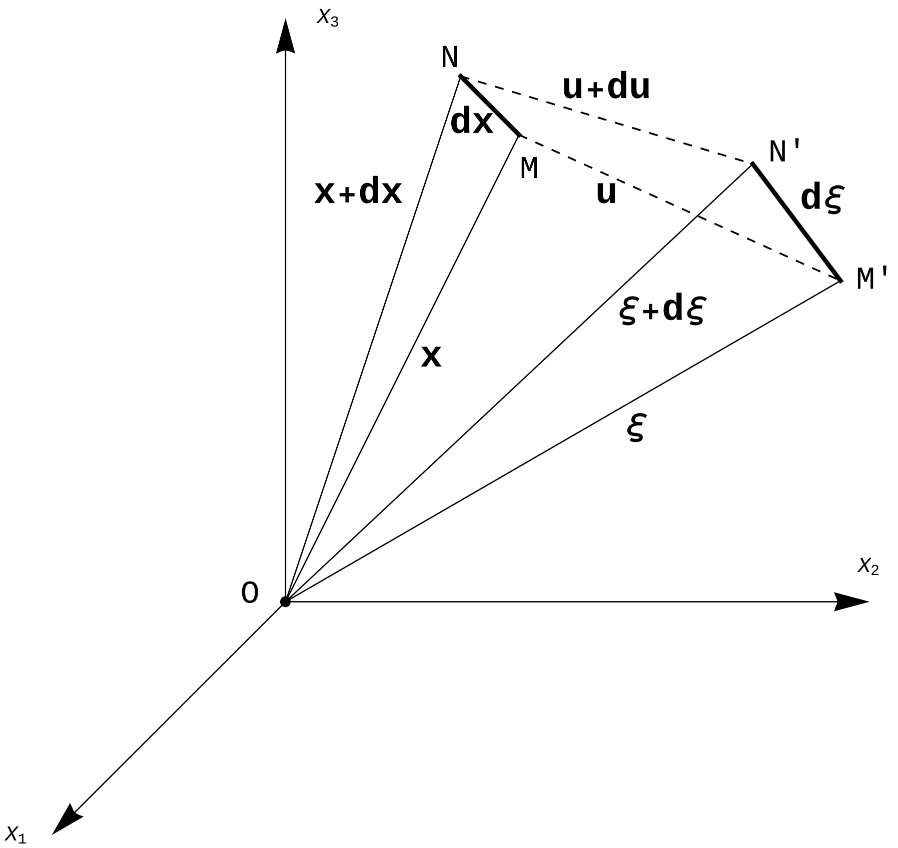

Figura 2 - Il segmento MN ed il suo trasformato M'N'

Poiche', come gia' detto, le componenti di spostamento sono funzioni continue e derivabili, sara' possibile utilizzare uno sviluppo in serie di Taylor intorno al punto M. Si ipotizza anche di poter arrestare lo sviluppo dopo il primo termine, supponendo quindi che il segmento MN si trasformi in un altro segmento M'N', e non in un arco di curva, come illustrato in Figura 2. Si ha:

$$u_i + du_i = u_{Mi} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_M dx_j \tag{5}$$

ossia, per esteso:

$$u_1 + du_1 = u_{M1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_M dx_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)_M dx_2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)_M dx_3 \tag{6}$$

$$u_2 + du_2 = u_{M2} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)_M dx_1 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)_M dx_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)_M dx_3 \qquad (7)$$

$$u_3 + du_3 = u_{M3} + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)_M dx_1 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)_M dx_2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)_M dx_3 \qquad (8)$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

ossia anche, piu' sinteticamente:

$$\mathbf{du} = \mathbf{H}\,\mathbf{dx} \qquad (10)$$

La matrice **H** viene definita *matrice delle componenti del gradiente di spostamento:*

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \qquad (11)$$

ed e' di fondamentale importanza nell'analisi delle deformazioni.

La matrice **H**, come si vede, non gode di proprieta' di simmetria. Tuttavia, qualsiasi matrice quadrata puo' essere scomposta nella somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica, secondo la formula generale:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{H} + \mathbf{H}^T}{2} + \frac{\mathbf{H} - \mathbf{H}^T}{2} \doteq \mathbf{E} + \Omega \qquad (12)$$

Esplicitamente si ha:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (13)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (14)$$

Nota - E' possibile dimostrare [Nota 2] che la parte antisimmetrica **Ω** del gradiente degli spostamenti **H** e' responsabile delle rotazioni rigide del segmento MN e di una dilatazione cilindrica, mentre la parte simmetrica **E** tien conto delle variazioni di lunghezza, ossia delle deformazioni del segmento MN.

Gradiente di deformazione

Inserendo la (10) nella (4) si ha:

$$\boldsymbol{\xi} + \mathbf{d}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + \mathbf{dx} + \mathbf{u} + \mathbf{H}\,\mathbf{dx} \qquad (15)$$

e semplificando in base alla (2):

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{dx} + \mathbf{H}\,\mathbf{dx} = (\mathbf{I} + \mathbf{H})\,\mathbf{dx} \doteq \mathbf{F}\,\mathbf{dx} \qquad (16)$$

La matrice **F = I + H** e' la cosiddetta *matrice delle componenti del gradiente di deformazione.*

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \qquad (17)$$

Per esteso, la (16) si scrive:

$$d\xi_1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \qquad (18)$$

$$d\xi_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \qquad (19)$$

$$d\xi_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_3 \qquad (20)$$

ossia, utilizzando la convenzione degli indici ripetuti ed il δ di Kronecker:

$$d\xi_i = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dx_j\,,\quad i = 1, 2, 3 \qquad (21)$$

Allungamenti percentuali

Si consideri ancora il segmento $\overrightarrow{MN}$, ed il suo trasformato $\overrightarrow{M'N'}$. Si ha la:

Definizione - Si definisce *allungamento percentuale* del segmento $\overrightarrow{MN}$ il rapporto:

$$E_{MN} = \frac{|M'N'| - |MN|}{|MN|} \qquad (22)$$

dove, ovviamente, il simbolo |.| indica la lunghezza del segmento.

Data questa definizione, si scelga un segmento $\overrightarrow{MN}$ parallelo all'asse x_1, e quindi di componenti $(dx_1, 0, 0)$ e lunghezza dx_1. Applicando la (16), si hanno le componenti $(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$ del segmento trasformato:

$$\begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \\ d\xi_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} dx_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (23)$$

ossia:

$$d\xi_1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1$$

$$d\xi_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1$$

$$d\xi_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1$$

Il segmento $\overrightarrow{M'N'}$ ha quindi lunghezza:

$$|M'N'| = \sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2} = |MN| \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2} \tag{25}$$

L'allungamento percentuale del segmento $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$, originariamente steso lungo l'asse x_1, ed indicato con E_{x1}, e' fornito da:

$$E_{x1} = \frac{|M'N'| - |MN|}{|MN|} = \frac{|MN| \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2} - |MN|}{|MN|} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2} - 1 \tag{26}$$

Del tutto analogamente, si possono ricavare gli *allungamenti percentuali* di segmenti stesi originariamente lungo gli assi x_2 ed x_3. Si ha:

$$E_{x2} = \sqrt{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2} - 1 \tag{27}$$

$$E_{x3} = \sqrt{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2} - 1 \tag{28}$$

Variazione di angolo

Si vuole ora completare lo studio della trasformazione subita dai tre segmenti paralleli agli assi coordinati, calcolando la rotazione che essi subiscono a causa dell'applicazione delle forze. A cio' fare, si possono calcolare i coseni direttori degli elementi trasformati. Ad esempio, nel caso dell'elemento originariamente parallelo all'asse x_1 si avranno i tre coseni direttori:

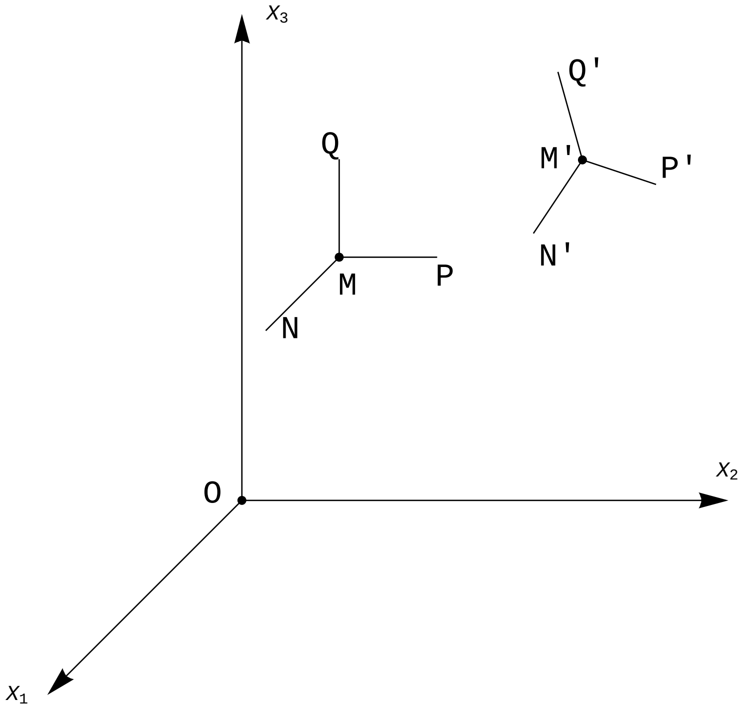

Figura 3. - La trasformazione subita da una terna di segmenti paralleli agli assi coordinati

$$\lambda_{11} = \frac{d\xi_1}{|M'N'|} = \frac{1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{1+E_{x1}}$$
$$\lambda_{21} = \frac{d\xi_2}{|M'N'|} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1+E_{x1}} \qquad (29)$$
$$\lambda_{31} = \frac{d\xi_3}{|M'N'|} = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}{1+E_{x1}}$$

mentre nel caso di un segmento originariamente diretto secondo x_2 si ha:

$$\lambda_{12} = \frac{d\xi_1}{|M'P'|} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1+E_{x2}}$$
$$\lambda_{22} = \frac{d\xi_2}{|M'P'|} = \frac{1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}}{1+E_{x2}} \qquad (30)$$
$$\lambda_{32} = \frac{d\xi_3}{|M'P'|} = \frac{\frac{\partial u_3}{\partial x_2}}{1+E_{x2}}$$

ed infine, nel caso di un segmento originariamente diretto secondo x_3 si ha:

$$\lambda_{13} = \frac{d\xi_1}{|M'Q'|} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_3}}{1 + E_{x3}}$$
$$\lambda_{23} = \frac{d\xi_2}{|M'Q'|} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_3}}{1 + E_{x3}} \qquad (31)$$
$$\lambda_{33} = \frac{d\xi_3}{|M'Q'|} = \frac{1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}}{1 + E_{x3}}$$

Indicialmente, le nove relazioni precedenti si possono compattamente scrivere come:

$$\lambda_{ij} = \frac{\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}{1 + E_{xj}} \qquad (32)$$

Note

[1] Il problema affrontato da Cauchy si ritrova in "*Sur la condensation et la dilatation des corps solides*" Exercises de Mathématiques, 2, pp. 82-93, in Opere Complete, II serie, Tomo 7 (1827). Gauthier-Villars, Parigi 1889. Una copia della memoria e' reperibile nella sezione Ricerca del sito http:\\www.scienzadellecostruzioni.co.uk.[Torna al testo]

[2] Qualsiasi testo di teoria dell'elasticita' o di Scienza delle Costruzioni puo' servire da riferimento. Tra i piu' dettagliati si puo' citare il terzo capitolo di Adel S. Saada, "*Elasticity*", Pergamon Press, 1974, oppure si puo' consultare il secondo Complemento nella sezione degli Approfondimenti del sito http:\\www.scienzadellecostruzioni.co.uk. [Torna al testo]

Grafici