

---

# Lezione 12 - I cerchi di Mohr

■ [A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 3 novembre 2013]

In questa lezione si descrive un classico metodo di visualizzazione dello stato tensionale nell'intorno di un punto generico  $P$  del corpo in esame. Tale metodo è stato originariamente proposto da Otto Mohr nella seconda metà dell'Ottocento [Mohr], in stretta connessione con l'analisi della tensione; tuttavia esso è facilmente estendibile a casi diversi, quali l'analisi della deformazione ed i problemi di geometria delle masse, ed in ambiti più generali può essere applicato ad un qualsiasi tensore del secondo ordine.

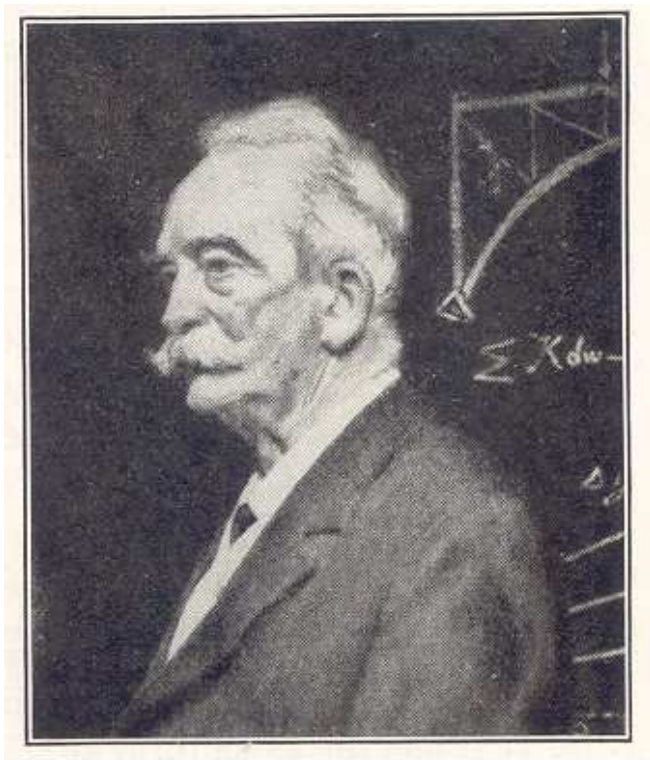


Figura 1 - Otto Mohr

---

## La convenzione sui segni di Otto Mohr

Si consideri un punto  $P$  generico, e si fissi una terna cartesiana di riferimento  $(P, x_1, x_2, x_3)$ . Si vuole ora esaminare come varia il vettore tensione  $\mathbf{t}_n$  in  $P$  sui piani che si appoggiano all'asse  $x_3$ , al variare dell'angolo  $\phi$  che definisce il piano generico (cfr. Figura 2).

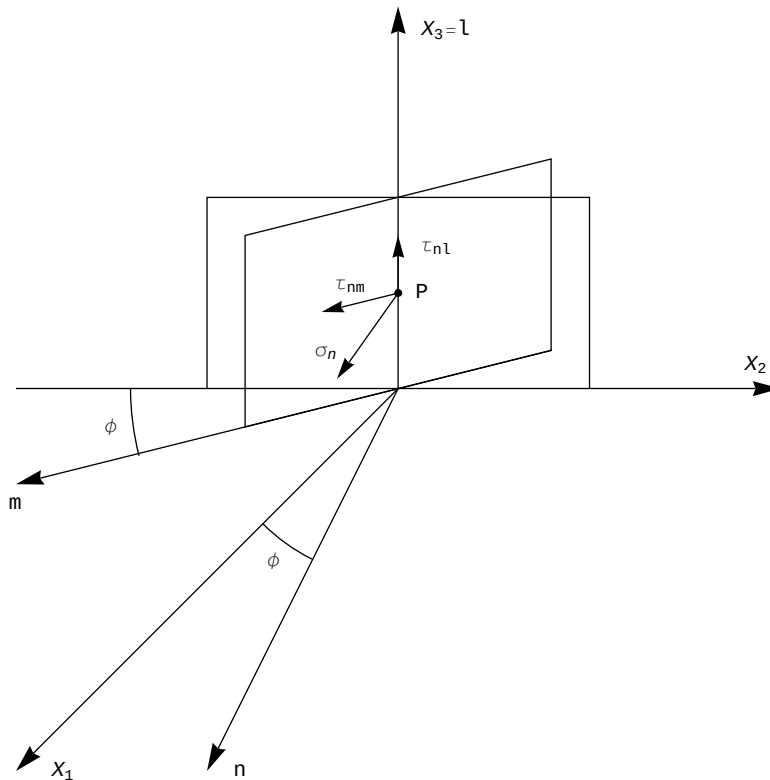


Figura 2 - I piani per P che si appoggiano all'asse  $z = l$ , definiti dall'angolo  $\phi$  e soggetti alla tensione normale  $\sigma_n$  ed alle tensioni tangenziali  $\tau_{nm}$  e  $\tau_{nl} = \tau_{nz}$

Su ciascun elemento piano così determinato agiscono una tensione normale  $\sigma_n$  ed una tensione tangenziale di componenti  $\tau_{nm}$  e  $\tau_{nl} = \tau_{nz}$ . Nel piano  $(x_1, x_2)$ , quindi, agiscono le tensioni  $\sigma_n$  e  $\tau_{nm}$ , come riportato in Figura 3. Si noti che in Figura 3 è stata riportata la tensione tangenziale positiva secondo la convenzione di Mohr, diretta in modo da far ruotare il cubetto elementare in senso orario intorno al suo baricentro. È questa una convenzione sui segni molto usata nell'ambito della teoria dei cerchi di Mohr, che si andrà a sviluppare nel paragrafo seguente, convenzione in contrasto con la convenzione usuale sui segni delle componenti cartesiane di tensione  $\sigma_{12}$ . Ed infatti, dalla Figura 3 si evince con facilità che quando  $\phi = \pi/2$ , e quindi  $\mathbf{n}$  viene a coincidere con l'asse  $x_2$ , la  $\tau_{nm}$  è pari, in valore e segno, alla tensione  $\sigma_{21}$ , ma che quando  $\phi = 0$ , e quindi  $\mathbf{n}$  coincide con l'asse  $x_1$ , si ha che la  $\tau_{nm}$  è uguale e contraria alla  $\sigma_{12}$ .

## Il teorema di Mohr

Per ciascun elemento piano appoggiato all'asse  $x_3$ , e definito dall'angolo  $\phi$ , si riporti in un piano  $\sigma\tau$  (piano di Mohr) il vettore di componenti  $\sigma_n$  e  $\tau_{nm}$ .

Si dimostrerà il seguente:

**Teorema** (O. Mohr 1882) - Il vettore di componenti  $(\sigma_n, \tau_{nm})$  descrive nel piano  $\sigma\tau$  un cerchio, al ruotare dell'elemento piano intorno all'asse  $l = x_3$ .

**Dimostrazione** - Siano  $(m_1, m_2, 0)$  ed  $(n_1, n_2, 0)$  i coseni direttori degli assi  $\mathbf{m}$  ed  $\mathbf{n}$ , rispettivamente, sicché si ha, dalla Lezione 5:

$$\sigma_n = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + 2 \sigma_{12} n_1 n_2 \quad (1)$$

$$\tau_{nm} = \sigma_{11} m_1 n_1 + \sigma_{22} m_2 n_2 + \sigma_{12} (m_1 n_2 + m_2 n_1) \quad (2)$$

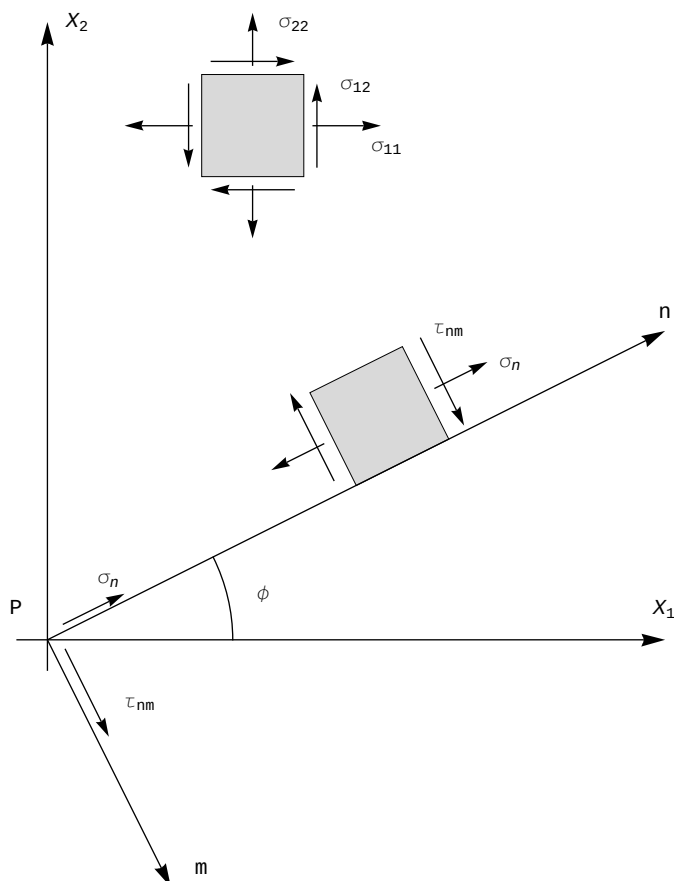


Figura 3 - Le componenti cartesiane di tensione nel piano  $x_1 x_2$ , e le componenti secondo gli assi locali  $m$  ed  $n$

Esprimendo ora i coseni direttori in funzione dell'angolo  $\phi$ , si ottiene facilmente, dalla Figura 3:

$$n_1 = \cos(n x_1) = \cos(-\phi) = \cos \phi \quad (3)$$

$$n_2 = \cos(n x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin \phi \quad (4)$$

$$m_1 = \cos(m x_1) = \cos\left(2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right) = \sin \phi \quad (5)$$

$$m_2 = \cos(m x_2) = \cos(\pi + \phi) = -\cos \phi \quad (6)$$

e quindi le (1-2) divengono:

$$\sigma_n = \sigma_{11} \cos^2 \phi + \sigma_{22} \sin^2 \phi + 2 \sigma_{12} \sin \phi \cos \phi \quad (7)$$

$$\tau_{nm} = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \phi \cos \phi + \sigma_{12} (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \quad (8)$$

Un ultimo passaggio consiste nell'esprimere le (7-8) in funzione di  $2\phi$ , tramite le relazioni trigonometriche:

$$\sin \phi \cos \phi = \frac{1}{2} \sin 2\phi \quad (9)$$

$$\cos^2 \phi - \sin^2 \phi = \cos 2\phi \quad (10)$$

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\phi) \quad (11)$$

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \phi) \quad (12)$$

Si ha quindi:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2 \phi + \sigma_{12} \sin 2 \phi \quad (13)$$

$$\tau_{nm} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2 \phi - \sigma_{12} \cos 2 \phi \quad (14)$$

Infine, si ottiene, quadrando e sommando:

$$\left( \sigma_n - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \tau_{nm}^2 = \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \quad (15)$$

E' questa, come si voleva dimostrare, l'equazione di un cerchio di centro  $\left( \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, 0 \right)$  e raggio:

$$R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (16)$$

■

La costruzione del cerchio si effettua come illustrato in Figura 4: riportando con il loro segno i segmenti OB ed OD, rappresentativi di  $\sigma_{11}$  e di  $\sigma_{22}$ , rispettivamente, si ottiene il centro C del cerchio nel punto medio del segmento BD. A partire da D, si riporta in DP il segmento rappresentativo di  $\sigma_{12}$ , verso l'alto se positivo, ottenendo il raggio CP, ed il cosiddetto *polo* P del cerchio.

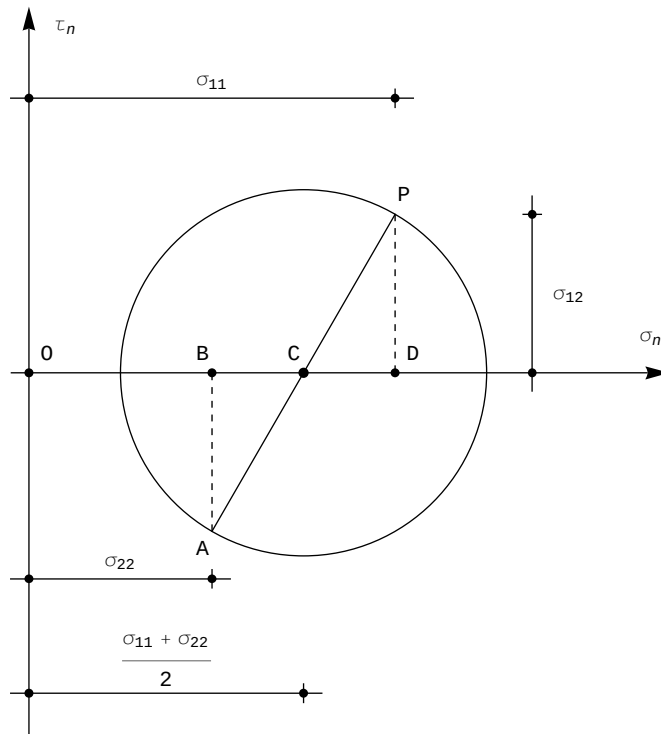


Figura 4 - La costruzione del cerchio di Mohr

## L'utilizzo del cerchio di Mohr

Assegnare il piano su cui si vuol calcolare la tensione nel punto in esame equivale, per quanto detto nei paragrafi precedenti, ad assegnare l'angolo  $\phi$ , e quindi ad ogni valore di  $\phi$  corrisponde un preciso valore del segmento di componenti  $(\sigma_n, \tau_{nm})$ , ossia un preciso punto  $T_n$  di coordinate  $\sigma_n$  e  $\tau_{nm}$ . Si vuole dedurre in questo paragrafo un metodo grafico per conoscere  $T_n$ , una volta assegnato l'angolo  $\phi$ .

Si utilizzi allo scopo la seguente osservazione: costruito il cerchio di Mohr, si disegni la retta  $t$  che unisce il polo P con il punto  $T_n$ , supposto per il momento noto. Si dimostrerà che l'angolo tra la verticale e la suddetta retta  $t$  è uguale a  $\phi$ .

Ed infatti, detta  $v$  la verticale e  $t$  la retta che congiunge il polo col punto  $T_n$ , si avrà (cfr. Figura 5):

$$\tan(vt) = \frac{\sigma_n - \sigma_{11}}{\sigma_{12} - \tau_{nm}} = - \frac{\sigma_n - \sigma_{11}}{\tau_{nm} - \sigma_{12}} \quad (17)$$

e sostituendo i valori (7-8) si ha:

$$\begin{aligned} \tan(vt) &= \frac{-\sigma_{11}(1 - \cos^2 \phi) + \sigma_{22} \sin^2 \phi + 2\sigma_{12} \sin \phi \cos \phi}{\sigma_{12} - (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \phi \cos \phi - \sigma_{12}(\sin^2 \phi - \cos^2 \phi)} = \\ &= \frac{(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin^2 \phi + 2\sigma_{12} \sin \phi \cos \phi}{(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \phi \cos \phi + 2\sigma_{12} \cos^2 \phi} = \\ &= \frac{\sin \phi [(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \phi + 2\sigma_{12} \cos \phi]}{\cos \phi [(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \phi + 2\sigma_{12} \cos \phi]} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi \blacksquare \end{aligned} \quad (18)$$

Ne segue che, assegnato  $\phi$ , per conoscere  $T_n$  basta condurre per il polo P una retta  $t$  inclinata sulla verticale dello stesso angolo  $\phi$  di cui  $n$  è inclinata rispetto all'asse  $x_1$ . Se gli assi  $\sigma, \tau$  sono paralleli ed equiversi agli assi  $x_1, x_2$ , l'operazione è equivalente a condurre per il polo P la parallela alla traccia dell'elemento piano in esame.

In Figura 5, oltre al caso generico, si sono riprodotti anche i due casi particolari in cui la normale al piano coincide con l'asse  $x_1$  ( $\phi = 0$ ) e con l'asse  $x_2$  ( $\phi = \pi/2$ ). Nel primo caso dal polo P si deve condurre la verticale, giungendo al punto  $T_x$  di coordinate  $\sigma_n = \sigma_{11}$  e  $\tau_{nm} = -\sigma_{12}$ . Nel secondo caso, invece, occorre portare l'orizzontale per P, giungendo nel punto  $T_y$  di coordinate  $\sigma_n = \sigma_{22}$  e  $\tau_{nm} = \sigma_{12}$ . Si ha così conferma di quanto detto, nel primo paragrafo, sulla convenzione dei segni.

Tracciato il cerchio di Mohr, è immediato rispondere ad alcune importanti domande, che consentono in realtà lo studio completo dello stato tensionale per tutti i piani che si appoggiano all'asse  $l = x_3$ :

- 1) quali sono le giaciture cui corrispondono minime e massime tensioni normali?
- 2) quali sono le corrispondenti tensioni normali minime e massime?
- 3) quali sono le giaciture cui corrispondono tensioni tangenziali massime?
- 4) quanto valgono tali tensioni tangenziali massime, e a quali tensioni normali sono associate?
- 5) esistono giaciture per cui la tensione è esclusivamente tangenziale, ed in caso affermativo, quanto valgono le tensioni tangenziali in oggetto?

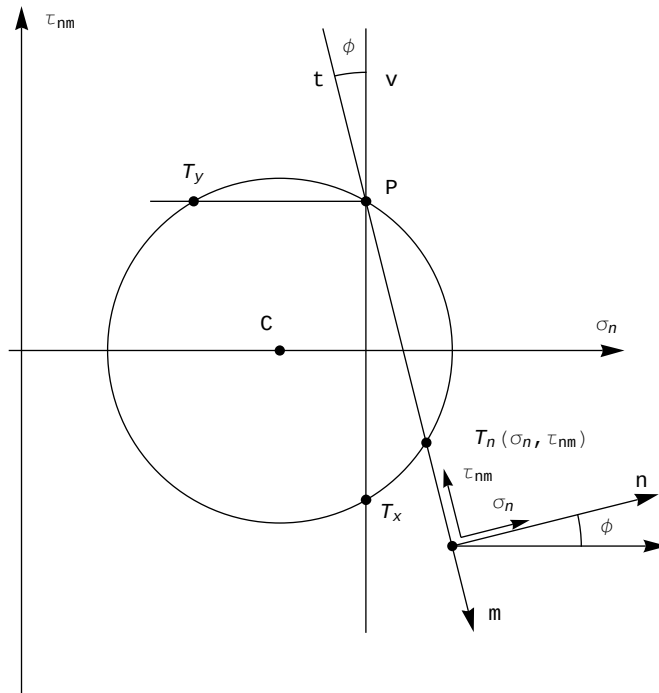


Figura 5 - L'utilizzo del cerchio di Mohr per il calcolo dello stato tensionale sul generico elemento piano di normale  $n$

## ■ Esempi

Si considera, come primo esempio, uno stato tensionale caratterizzato da  $\sigma_{11} > 0$  e  $\sigma_{22} > 0$ , e da  $\sigma_{12} < 0$ . Il cerchio di Mohr relativo agli elementi che si appoggiano all'asse  $x_3$  si caratterizza quindi come in Figura 6.

In esso è evidenziato il polo P, da cui sono state condotte le due rette PH e PK, che identificano le due direzioni  $n_1 = PH$  ed  $n_2 = PK$ . Sul piano di normale  $n_1$  agisce la tensione  $\bar{\sigma}_1$ , massima tra quelle agenti sui piani del fascio in esame; sul piano di normale  $n_2$  agisce la tensione  $\bar{\sigma}_2$ , minima tra quelle agenti sui piani del fascio in esame. Ad esse non si accompagna tensione tangenziale.

Come secondo esempio, invece, si può ipotizzare che  $\sigma_{11}$  sia positivo, mentre  $\sigma_{22}$  è nullo, e  $\sigma_{12}$  è negativo. In questa ipotesi, il cerchio deve necessariamente intersecare l'asse verticale, come indicato in Figura 7, e quindi una delle due tensioni estreme è negativa, come evidenziato anche dal cubetto. Inoltre, in questo caso si osserva che sui piani di normale PS e PT agiscono solo tensioni tangenziali. Nel primo caso, sul cubetto di normale PS agisce una tensione tangenziale positiva, tendente quindi a far ruotare il cubetto in senso orario, nel secondo caso, invece, la tensione è negativa, e quindi il cubetto tenderà a ruotare in senso antiorario.

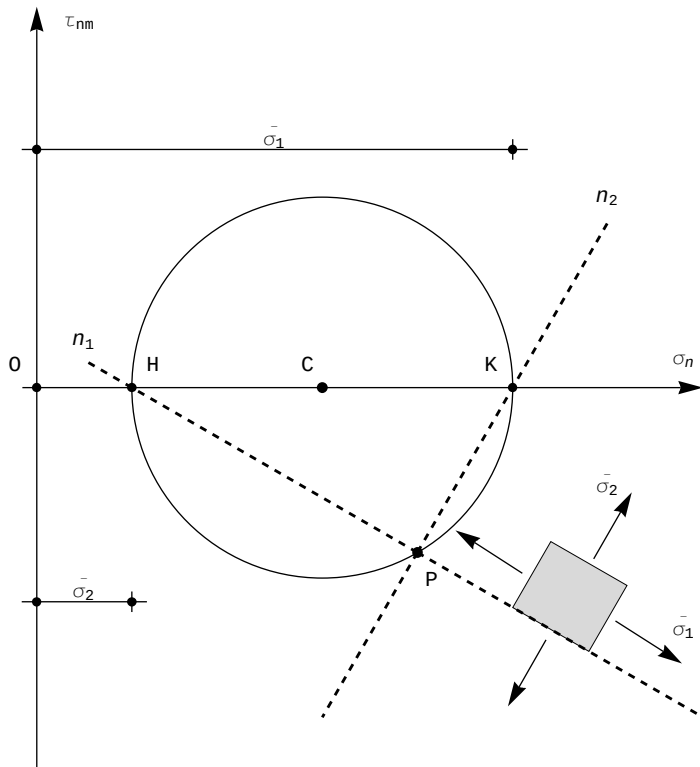


Figura 6 - Il cerchio di Mohr in un caso per cui  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$  sono positive, mentre  $\sigma_{12}$  e' negativo.

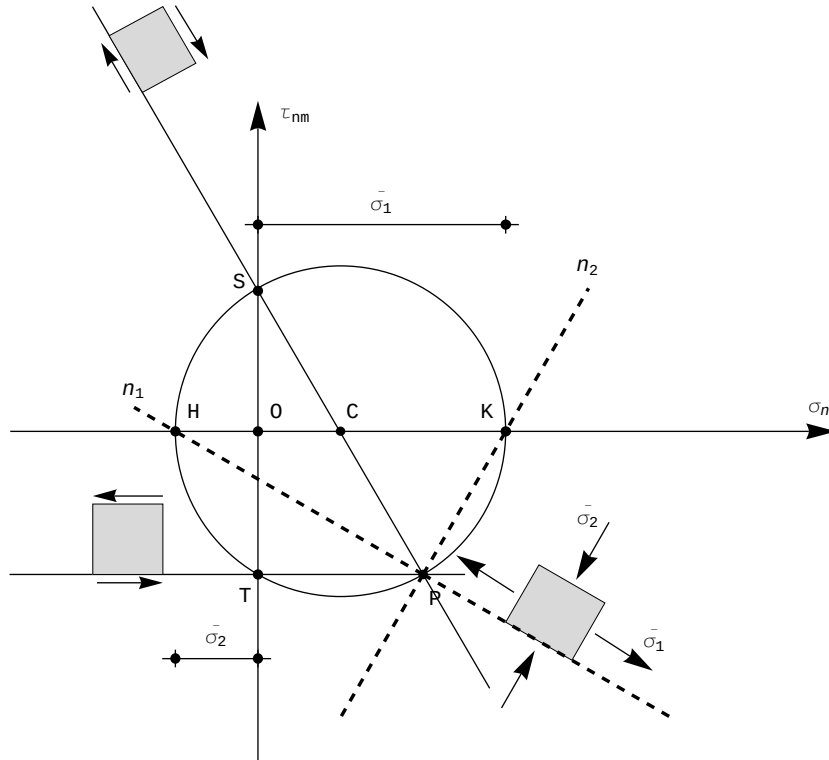


Figura 7 - Il cerchio di Mohr in un caso per cui  $\sigma_{11}$  e' positivo, mentre  $\sigma_{22}=0$ , e  $\sigma_{12}$  e' negativo.

## La ricerca delle tensioni e direzioni principali tramite l'utilizzo dei cerchi di Mohr principali

Scrivendo il teorema di Cauchy-Poisson in termini di tensioni principali si ha, come noto:

$$\mathbf{t}_{n1} = \sigma_1 \mathbf{n}_1; \mathbf{t}_{n2} = \sigma_2 \mathbf{n}_2; \mathbf{t}_{n3} = \sigma_3 \mathbf{n}_3 \quad (19)$$

Ipotizzando che uno degli assi cartesiani sia principale, ad esempio l'asse  $x_3$ , e studiando i piani che si appoggiano all'asse  $x_3 \equiv 3$ , si deduce subito dalla terza delle (19) che si studiano i piani per cui  $t_{n3}$  e' nulla. In altri termini, sui piani di tale fascio la tensione normale  $\sigma_n$  e la tensione tangenziale  $\tau_{nm}$  esauriscono lo stato tensionale, e quindi le tensioni estreme, che nel paragrafo precedente si erano battezzate  $\bar{\sigma}_1$  e  $\bar{\sigma}_2$ , assumono ora il significato di tensioni principali  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

Dall'esame di un cerchio di Mohr principale si puo' anche dedurre graficamente l'espressione analitica delle tensioni principali, assieme all'espressione dell'angolo  $\phi^*$  che definisce le due direzioni principali.

Si ha infatti, dalla Figura 8:

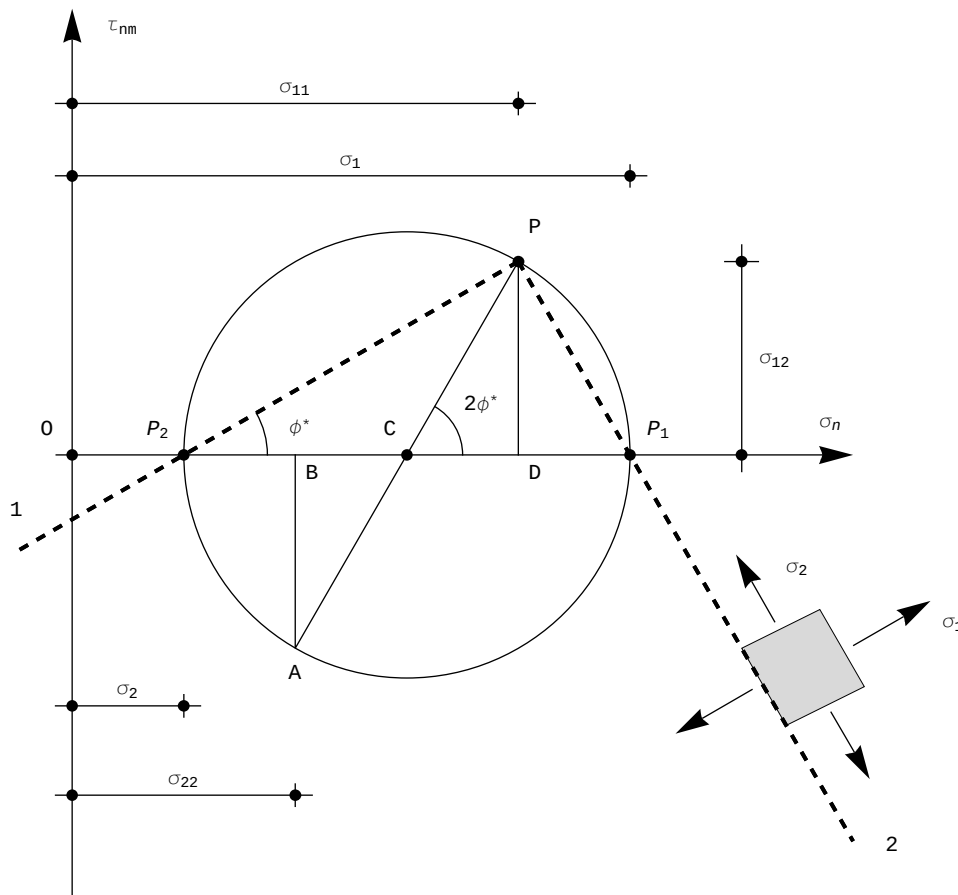


Figura 8 - Il cerchio principale di Mohr per i fasci che si appoggiano all'asse  $x_3 \equiv 3$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (20)$$



$$\tan 2\phi^* = 2 \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad (21)$$

Assegnato allora uno stato tensionale:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (22)$$

si ricavano le tre direzioni principali, ordinandole come segue:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (23)$$

I tre cerchi di Mohr relativi ai tre fasci di piani che si appoggiano alle tre direzioni principali sono immediatamente disegnabili, riportando semplicemente sull'asse orizzontale  $\sigma_n$  i tre segmenti:

$$\sigma_3 = OP_1; \quad \sigma_2 = OP_2; \quad \sigma_1 = OP_3 \quad (24)$$

e tracciando i cerchi di centri:

$$C_1 = \frac{OP_2 + OP_3}{2}; \quad C_2 = \frac{OP_1 + OP_3}{2}; \quad C_3 = \frac{OP_1 + OP_2}{2} \quad (25)$$

e diametri  $(\sigma_2 - \sigma_1)$ ,  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  e  $(\sigma_1 - \sigma_2)$ , rispettivamente, come illustrato in Figura 9.

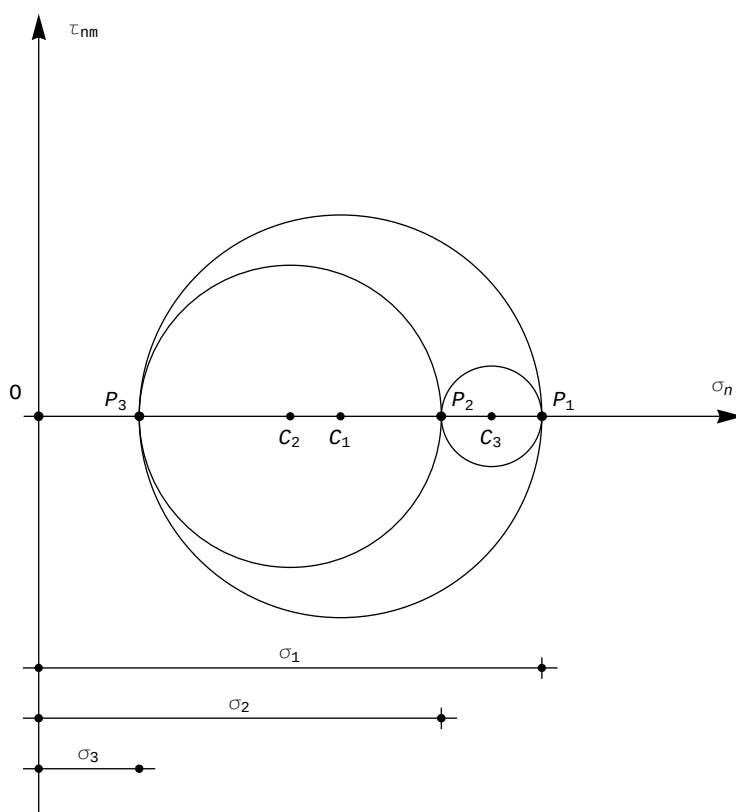


Figura 9. - I tre cerchi principali di Mohr per i fasci che si appoggiano alle tre direzioni principali

In Figura 10 e' riportato il caso in cui le tre tensioni principali sono positive, e distinte tra loro. Dal suo esame si possono dedurre parecchie caratteristiche dello stato tensionale nel punto del corpo in esame. Ad esempio, e' banale calcolare la tensione tangenziale massima, pari a  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ , e capire che essa agisce su di un piano del fascio che si appoggia all'asse 2, e precisamente sul piano con traccia che biseca l'angolo 1-3.

Ad essa si accompagna la tensione normale  $(\sigma_3 + \sigma_1)/2$ . Si ritrovano così in via grafica i risultati della Lezione 11. Si studino con cura i segni delle tensioni tangenziali sulle facce del cubetto elementare.

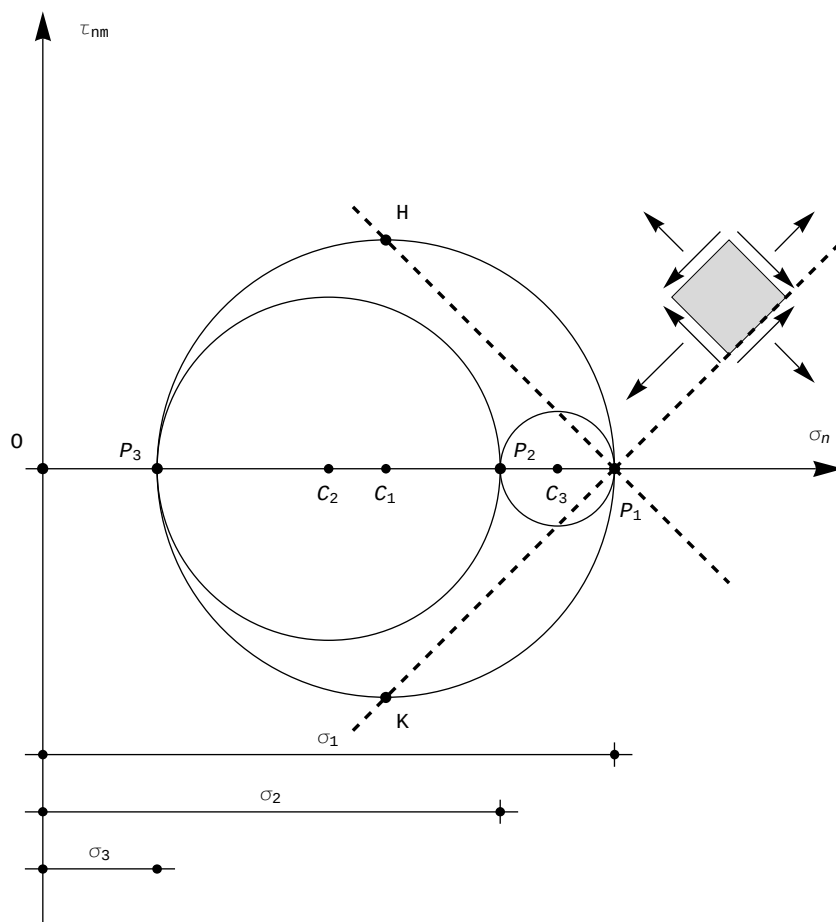


Figura 10 - Lo stato tensionale corrispondente alla massima tensione tangenziale

## Note

[Mohr] - Si veda O. Mohr, Zivilingenieur, pag. 113 (1882) [Torna al testo]

## Figure