Lezione 10 - Tensioni principali e direzioni principali

- **[A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 23 agosto 2011]**

In questa lezione si studiera' cio' che avviene alla componente normale di tensione σ_n, al variare del piano Π su cui essa e' calcolata. Dopo aver espresso la tensione normale in funzione dei coseni direttori alla normale n al piano Π, la procedura standard per la ricerca dei punti di estremo di una funzione conduce ad un semplice risultato analitico, secondo cui il vettore t_n della tensione risulta diretto secondo la normale n. Cio' implica che sui piani dove la tensione normale assume un valore estremo, non agisce tensione tangenziale.
Si deduce infine in questa lezione l'equazione secolare per la ricerca delle tensioni principali, assieme alle corrispondenti direzioni principali.

Tensioni normali e tangenziali, rivisitate

Si riscriva ora il teorema di Cauchy-Poisson, alla nuova luce della simmetria della matrice delle tensioni, ottenendo cosi' le componenti del vettore tensione $\boldsymbol{t}_n$ in forma definitiva:

$$t_{n1} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 \tag{1}$$

$$t_{n2} = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \tag{2}$$

$$t_{n3} = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 \tag{3}$$

La proiezione t_{nl} di $\boldsymbol{t}_n$secondo una generica retta l si ottiene moltiplicando scalarmente il vettore $\boldsymbol{t}_n$ per il vettore contenente i coseni direttori della retta l. Indicando con $l = (l_1, l_2, l_3)$ i coseni direttori suddetti, si ha:

$$t_{nl} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{l} = t_{ni} l_i = \sigma_{ij} l_i n_j \tag{4}$$

Di particolare importanza e' il caso in cui $l = n$, ossia il caso in cui si vuol conoscere la componente di $\boldsymbol{t}_n$ secondo la normale n. Si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_n = t_{nn} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = t_{ni} n_i = \sigma_{ij} n_i n_j = \\ \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2 \sigma_{12} n_1 n_2 + 2 \sigma_{13} n_1 n_3 + 2 \sigma_{23} n_2 n_3 \end{aligned} \tag{5}$$

oppure, essendo:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \longrightarrow n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2 \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n = (\sigma_{11} - \sigma_{33}) n_1^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33}) n_2^2 + \\ \sigma_{33} + 2 \sigma_{12} n_1 n_2 + 2 (\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2) \left(1 - n_1^2 - n_2^2\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{7}$$

Dovendo poi essere, (cfr. eqn(10) della Lezione 7):

$$t_n^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 \tag{8}$$

si puo' calcolare l'intensita' della tensione tangenziale:

$$\tau^2 = t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 - \sigma_n^2 \tag{9}$$

La ricerca della massima e minima tensione normale

La tensione in un punto, come si e' visto, e' un insieme $\{t_n\}$ di infiniti valori, funzione della normale **n** al piano passante per P. Ha quindi senso chiedere qual'e' il piano per cui la tensione normale σ_n assume il suo valore estremo, massimo o minimo.

Per rispondere a questa domanda occorre imporre le condizioni di stazionarieta':

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_1} = 0; \ \frac{\partial \sigma_n}{\partial n_2} = 0; \ \frac{\partial \sigma_n}{\partial n_3} = 0 \qquad (10)$$

Utilizzando la (7), si potra' scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_n}{\partial n_1} = {} & 2\,(\sigma_{11} - \sigma_{33})\, n_1 + 2\,\sigma_{12}\, n_2 + 2\,\sigma_{13}\left(1 - n_1^2 - n_2^2\right)^{1/2} + \\ & 2\,(\sigma_{13}\, n_1 + \sigma_{23}\, n_2)\,\frac{1}{2}\left(1 - n_1^2 - n_2^2\right)^{-1/2}(-2\, n_1) = \\ & 2\,(\sigma_{11} - \sigma_{33})\, n_1 + 2\,\sigma_{12}\, n_2 + 2\,\sigma_{13}\, n_3 - 2\,\frac{n_1}{n_3}(\sigma_{13}\, n_1 + \sigma_{23}\, n_2) = \\ & 2\,(\sigma_{11}\, n_1 + \sigma_{12}\, n_2 + \sigma_{13}\, n_3) - 2\,\frac{n_1}{n_3}(\sigma_{13}\, n_1 + \sigma_{23\,z}\, n_2 + \sigma_{33}\, n_3) = 0\end{aligned} \qquad (11)$$

e quindi, in base al teorema di Cauchy-Poisson:

$$\frac{t_{n1}}{n_1} = \frac{t_{n3}}{n_3} \qquad (12)$$

Del tutto analogamente dovra' anche essere:

$$\frac{t_{n1}}{n_1} = \frac{t_{n2}}{n_2}; \ \frac{t_{n2}}{n_2} = \frac{t_{n3}}{n_3} \qquad (13)$$

e quindi, in definitiva, potra' porsi:

$$\frac{t_{n1}}{n_1} = \frac{t_{n2}}{n_2} = \frac{t_{n3}}{n_3} = \sigma \qquad (14)$$

Dalla (4) sara' poi:

$$\sigma_n = t_{n1}\, n_1 + t_{n2}\, n_2 + t_{n3}\, n_3 = \sigma\, n_1^2 + \sigma\, n_2^2 + \sigma\, n_3^2 = \sigma \qquad (15)$$

e dalla (8) risulta immediato dedurre:

$$\tau = 0 \qquad (16)$$

In altri termini:

- *un piano su cui la tensione normale e' massima, o minima, e' anche un piano su cui non agiscono tensioni tangenziali.*

Le tensioni principali

Si vogliono ora individuare i piani su cui la tensione normale raggiunge il suo valore massimo o minimo, o meglio, si vogliono calcolare i coseni direttori della normale a tali piani.

In base alla (16), cio' equivale ad individuare i piani per cui le tensioni tangenziali si annullano. In altri termini, quali sono i piani passanti per il punto P, per cui la tensione $\boldsymbol{t}_n$ e' diretta proprio lungo la normale, come illustrato in Figura 1?

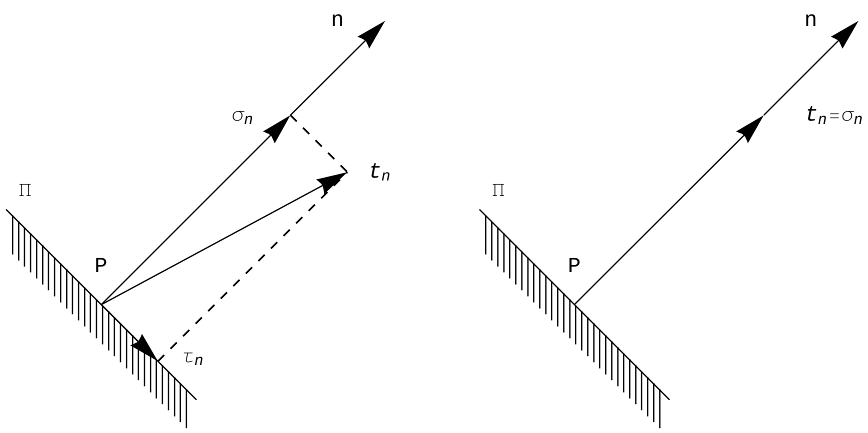

Figura 1 - a) Il caso usuale, con la tensione t_n e le sue componenti normale e tangenziale. b) Il caso in cui la componente tangenziale si annulla, ed **n** e' direzione principale.

Se $\boldsymbol{t}_n$ e' orientata secondo la normale **n**, allora si avra', come si osserva dalla Figura 2, e come confermato dalla (14):

$$t_{n1} = \sigma n_1;\ t_{n2} = \sigma n_2;\ t_{n3} = \sigma n_3 \tag{17}$$

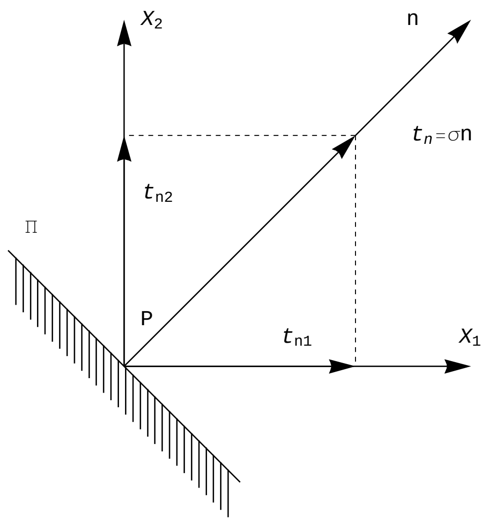

Figura 2 - Le componenti della tensione principale t_n.

D'altro canto, secondo il teorema di Cauchy-Poisson:

$$\begin{aligned} t_{n1} &= \sigma_{11}\, n_1 + \sigma_{12}\, n_2 + \sigma_{13}\, n_3 \\ t_{n2} &= \sigma_{12}\, n_1 + \sigma_{22}\, n_2 + \sigma_{23}\, n_3 \\ t_{n3} &= \sigma_{13}\, n_1 + \sigma_{23}\, n_2 + \sigma_{33}\, n_3 \end{aligned} \tag{18}$$

e quindi dovra' essere:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma)\, n_1 + \sigma_{12}\, n_2 + \sigma_{13}\, n_3 &= 0 \\ \sigma_{12}\, n_1 + (\sigma_{22} - \sigma)\, n_2 + \sigma_{23}\, n_3 &= 0 \\ \sigma_{13}\, n_1 + \sigma_{23}\, n_2 + (\sigma_{33} - \sigma)\, n_3 &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

E' questo un sistema di tre equazioni omogenee nelle tre incognite n_1, n_2, n_3 la cui soluzione banale $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ non ha significato fisico. Ed infatti le n_1, n_2 ed n_3 sono i coseni direttori della normale al piano Π.

Occorre allora calcolare le soluzioni non banali, e definite a meno di costanti, imponendo che sia nullo il determinante dei coefficienti del sistema (19):

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{pmatrix} = 0 \tag{20}$$

e svolgendo i calcoli si ha l'equazione cubica in σ:

$$-\sigma^3 + I_1\, \sigma^2 - I_2\, \sigma + I_3 = 0 \tag{21}$$

con:

$$I_1 = \text{Traccia}\, \mathbf{S} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \tag{22}$$

$$I_2 = \sigma_{11}\, \sigma_{22} + \sigma_{11}\, \sigma_{33} + \sigma_{22}\, \sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 \tag{23}$$

$$I_3 = \text{Det}\, \mathbf{S} = \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Nota - L'equazione (21) si chiama *equazione secolare*, mentre le tre quantita' I_1, I_2 ed I_3 prendono il nome di *invariante lineare*, *quadratico* e *cubico* di tensione, ad indicare che il loro valore non cambia al ruotare del sistema di riferimento adottato.

Le direzioni principali di tensione

Si puo' dimostrare che l'equazione cubica in σ ammette tre radici reali $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, dette *tensioni principali*. In corrispondenza di ciascuno di questi valori il sistema (19) diviene indeterminato, ed ammette una infinita' di soluzioni non nulle. Tuttavia questa indeterminazione si puo' eliminare considerando che dovra' comunque essere:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \tag{25}$$

Sia $\boldsymbol{n}_1 = (n_{11}, n_{21}, n_{31})$ la soluzione che si ottiene in corrispondenza di $\sigma = \sigma_1$, $\boldsymbol{n}_2 = (n_{12}, n_{22}, n_{32})$ la soluzione che si ottiene in corrispondenza di $\sigma = \sigma_2$, ed infine $\boldsymbol{n}_3 = (n_{13}, n_{23}, n_{33})$ la soluzione che si ottiene in corrispondenza di $\sigma = \sigma_3$.

Si puo' dimostrare anche che queste tre direzioni $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ e $\boldsymbol{n}_3$, dette *direzioni principali di tensione*, sono tra loro ortogonali, sicche', ad esempio:

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = n_{11}\, n_{12} + n_{21}\, n_{22} + n_{31}\, n_{32} = 0 \tag{26}$$

I piani identificati dalle direzioni principali, detti *piani principali*, sono anch'essi mutuamente ortogonali, ed un elemento rettangolare, contenente il punto P in studio, le cui facce vengano a coincidere coi piani principali, sara' sollecitato da sole tensioni normali, pari alle tensioni principali.

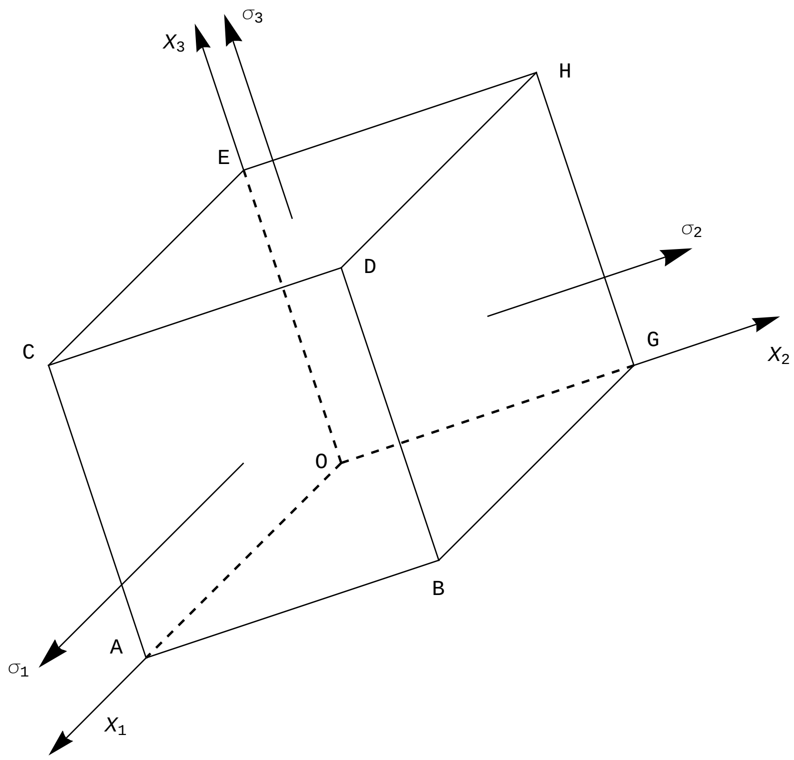

Figura 3 - L'elemento rettangolare orientato secondo gli assi principali, e quindi soggetto alle sole tensioni normali

Ne segue che se il sistema di riferimento (0, X_1, X_2, X_3) viene ruotato fino a portarlo a coincidere col sistema principale (0,1,2,3), la matrice delle tensioni assumera' l'aspetto diagonale:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{27}$$

ed i tre invarianti saranno forniti da:

$$I_1 = \text{Traccia}\,\mathbf{S} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{28}$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \tag{29}$$

$$I_3 = \text{Det}\,\mathbf{S} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \tag{30}$$

Figure

■ Figura 1 - Vincoli singoli

■ Figura 1 - Vincoli singoli

■ Figura 1 - Vincoli singoli