Lezione 1 - La cinematica del corpo rigido

- **[A.a. 2011 - 2012 : ultima revisione 29 settembre 2012]**

In questa lezione si ricapitolano alcune nozioni di cinematica dei sistemi di punti materiali, al fine di fornire un collegamento con quanto gia' noto, uniformando allo stesso tempo le notazioni con quanto seguira'.

Configurazioni e vincoli

Si consideri un sistema di N punti materiali $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, ... $P^{(N)}$. In un sistema di riferimento (0, X_1, X_2, X_3) ciascun punto $P^{(j)}$ e' identificato dalle sue coordinate x_1, x_2, x_3, e l'insieme delle 3N coordinate si dice una *configurazione* del sistema di punti materiale. In generale, le 3N coordinate possono variare arbitrariamente in una certa regione dello spazio, sicche' il sistema possiede 3N *gradi di liberta'*, e puo' assumere ∞^{3N} possibile configurazioni.

Si consideri ora il caso, piu' frequente, di un sistema *vincolato*, in cui le coordinate dei punti sono costrette ad obbedire ad alcune relazioni analitiche, dette condizioni di vincolo. Piu' in particolare, considereremo nel seguito solo vincoli *olonomi* e *bilaterali*, esprimibili attraverso equazioni del tipo:

$$f\left(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)},\ \ldots x_1^{(N)},\ x_2^{(N)},\ x_3^{(N)}\right) = 0 \qquad (1)$$

Non verrano mai considerati i vincoli *anolonomi*, esplicitamente dipendenti dal tempo, o vincoli *unilaterali*, traducibili in disequazioni.

Si assuma, in generale, che il sistema considerato sia soggetto ad *s* condizioni di vincolo, esprimibili attraverso *s* equazioni nelle 3N coordinate del sistema:

$$f_i\left(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)},\ \ldots x_1^{(N)},\ x_2^{(N)},\ x_3^{(N)}\right) = 0 \qquad i = 1,\ \ldots s \qquad (2)$$

ed inoltre, si assuma che queste *s* equazioni siano indipendenti, intendendo con cio' che tra le funzioni f_i non esista alcuna dipendenza funzionale del tipo:

$$\mathcal{F}\left(f_1,\ f_2,\ \ldots f_s\right) = 0 \qquad (3)$$

Se le s condizioni di vincolo sono indipendenti, allora si dira' che il sistema ha 3N-*s* gradi di liberta', e solo 3N-*s* coordinate potranno essere fissate ad arbitrio: le restanti coordinate dovranno invece soddisfare le condizioni di vincolo. Se invece esistono *p* condizioni del tipo (3), allora il sistema avra' 3N- (*s*-*p*) gradi di liberta'.

Nota - Per riconoscere se le s condizioni di vincolo (2) sono indipendenti, si puo' costruire la matrice Jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1^{(1)}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2^{(1)}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3^{(1)}} & . \; . \; . & \frac{\partial f_1}{\partial x_3^{(N)}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1^{(1)}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2^{(1)}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3^{(1)}} & . \; . \; . & \frac{\partial f_2}{\partial x_3^{(N)}} \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1^{(1)}} & \frac{\partial f_s}{\partial x_2^{(1)}} & \frac{\partial f_s}{\partial x_3^{(1)}} & . \; . \; . & \frac{\partial f_s}{\partial x_3^{(N)}} \end{pmatrix} \tag{4}$$

con s righe e 3N colonne, ed $s \leq 3N$.
Se J ha rango massimo, ossia rango pari ad s, allora le equazioni di vincolo sono indipendenti. Se invece il rango di J non e' massimo, ma e' pari ad s-p, allora esisteranno s-p relazioni funzionali tra le s equazioni di vincolo.

Le coordinate Lagrangiane

In un sistema con 3N-s gradi di liberta', occorrono 3N-s variabili per poter descrivere le configurazioni del sistema stesso. Tuttavia, non e' necessario che queste variabili coincidano con gli spostamenti degli N punti del sistema, basta che esse siano in grado di determinare univocamente le configurazioni. Nasce cosi' il concetto di coordinate generalizzate, o *coordinate lagrangiane* q_i, i = 1,...3N-s, legate alle coordinate fisiche attraverso equazioni del tipo:

$$x_1^{(i)} = x_1^{(i)} (q_1, \; q_2, \; ... \; q_{3N-s}) \tag{5}$$

Un esempio classico e' quello di un punto M appartenente ad un piano, e costretto a mantenersi a distanza r dall'origine. Si ha quindi un sistema ad un solo grado di liberta', ad esempio la coordinata orizzontale $x_1$del punto. La componente verticale va calcolata di conseguenza tenendo conto dell'equazione di vincolo:

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \tag{6}$$

Tuttavia, e' piu' opportuno introdurre la coordinata lagrangiana rappresentata dall'angolo θ che la congiungente l'origine col punto forma con l'asse X_1. Ad ogni valore di θ corrisponde la configurazione definita da:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta \\ x_2 &= r\sin\theta \end{aligned} \tag{7}$$

L'ipotesi di piccoli spostamenti

Si consideri ora un punto materiale M, di coordinate x_i, e si ipotizzi che a seguito di una qualsiasi causa, esso si porti in M', di coordinate ξ_i. Si definisce *spostamento* di M il vettore $\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathrm{MM'}}$, di componenti $u_i = \xi_i - x_i$. Spesso, inoltre, si ipotizzera' che lo spostamento del punto M possa considerarsi "piccolo", nel senso che le coordinate di M' potranno convenientemente esprimersi come:

$$\xi_i = x_i + du_i \tag{8}$$

ossia $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + \mathbf{du}$, e lo spostamento **du** andra' considerato infinitesimo.

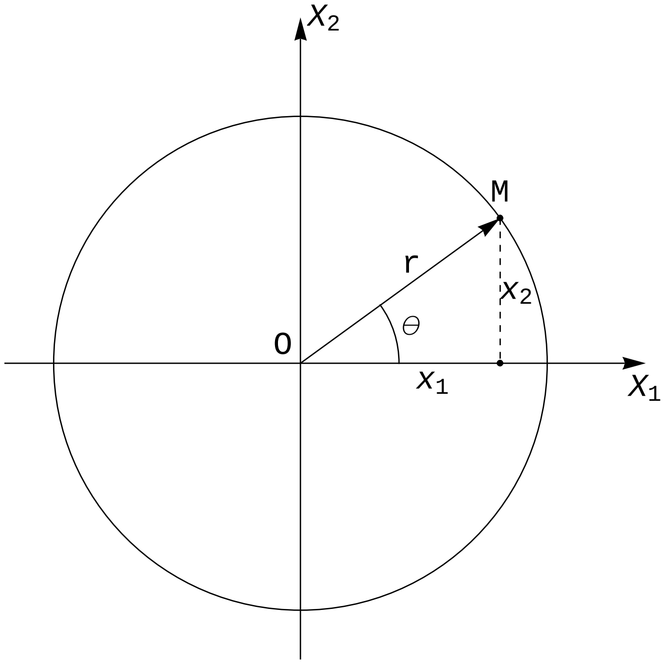

Figura 1 - Il punto M giace nel piano, ed e' vincolato ad appartenere alla circonferenza di raggio R. Esso ha percio' un solo grado di liberta'

Nell'ambito dei piccoli spostamenti, le condizioni di vincolo andranno poi adeguatamente semplificate, linearizzando le relative equazioni. Ad esempio, si consideri ancora una volta l'esempio precedente, con l'equazione di vincolo (6). Essa deve valere sia per il punto M sia per il suo corrispondente punto spostato M', per cui dovra' anche aversi:

$$(x_1 + du_1)^2 + (x_2 + du_2)^2 = r^2 \tag{9}$$

Svolgendo i quadrati si ha:

$$x_1^2 + du_1^2 + 2\, x_1\, du_1 + x_2^2 + du_2^2 + 2\, x_2\, du_2 = r^2 \tag{10}$$

Semplificando, le parti finite si cancellano, in base alla (6), ed i termini quadratici in du_1e du_2 possono trascurarsi rispetto alle parti lineari. Si ha infine:

$$x_1\, du_1 + x_2\, du_2 = 0 \tag{11}$$

Tale relazione puo' anche scriversi:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \tag{12}$$

ed esprime l'ortogonalita' tra il raggio vettore $\overrightarrow{OM}$ ed il vettore spostamento del punto M. Cio' significa che il punto M, in una approssimazione lineare, si muove lungo la tangente al cerchio.

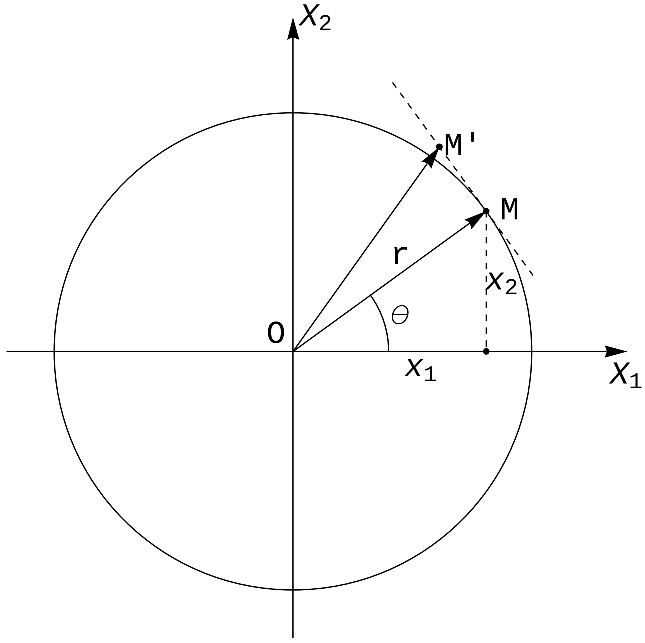

Figura 2 - Se gli spostamenti sono piccoli, il raggio vettore $\overrightarrow{OM}$ ed il vettore spostamento $\overrightarrow{MM'}$ devono ritenersi ortogonali

L'ipotesi di rigidita'

Un vincolo di particolare importanza e' il cosiddetto vincolo di rigidita', che impone che i punti del sistema in esame conservino la distanza che inizialmente li separa.
Siano allora M ed N due punti di coordinate (m_1, m_2, m_3) ed (n_1, n_2, n_3), e sia d_{MN} la distanza tra di loro, per cui:

$$(n_1 - m_1)^2 + (n_2 - m_2)^2 + (n_3 - m_3)^2 = d_{MN}^2 \tag{13}$$

Se ora M si sposta in M' ed N in N', e se ipotizziamo che tali spostamenti siano piccoli, le coordinate di M' saranno $(m_1 + dm_1, m_2 + dm_2, m_3 + dm_3)$ e le coordinate di N' saranno $(n_1 + dn_1, n_2 + dn_2, n_3 + dn_3)$. La distanza tra M' ed N', per l'ipotesi di rigidita' restera' pari a d_{MN}, e quindi:

$$(n_1 + dn_1 - m_1 - dm_1)^2 + (n_2 + dn_2 - m_2 - dm_2)^2 + (n_3 + dn_3 - m_3 - dm_3)^2 = d_{MN}^2 \tag{14}$$

Svolgendo i quadrati, si ha:

$$\begin{aligned}&\left(n_1^2 + dn_1^2 + m_1^2 + dm_1^2 + 2\, n_1\, dn_1 - 2\, n_1\, m_1 - 2\, n_1\, dm_1 - 2\, m_1\, dn_1 - 2\, dn_1\, dm_1 + 2\, m_1\, dm_1\right) + \\ &\left(n_2^2 + dn_2^2 + m_2^2 + dm_2^2 + 2\, n_2\, dn_2 - 2\, n_2\, m_2 - 2\, n_2\, dm_2 - 2\, m_2\, dn_2 - 2\, dn_2\, dm_2 + 2\, m_2\, dm_2\right) + \\ &\left(n_3^2 + dn_3^2 + m_3^2 + dm_3^2 + 2\, n_3\, dn_3 - 2\, n_3\, m_3 - 2\, n_3\, dm_3 - 2\, m_3\, dn_3 - 2\, dn_3\, dm_3 + 2\, m_3\, dm_3\right) = d_{MN}^2\end{aligned} \tag{15}$$

ed eliminando le parti finite, sfruttando la (13):

$$\left(dn_1^2 + dm_1^2 + n_1\, dn_1 - n_1\, dm_1 - m_1\, dn_1 - dn_1\, dm_1 + m_1\, dm_1\right) +$$

$$\left(dn_2^2 + dm_2^2 + n_2\, dn_2 - n_2\, dm_2 - m_2\, dn_2 - dn_1\, dm_1 + m_2\, dm_2\right) + \left(dn_3^2 + dm_3^2 + n_3\, dn_3 - n_3\, dm_3 - m_3\, dn_3 - dn_1\, dm_1 + m_3\, dm_3\right) = 0$$

trascurando i termini quadratici in dm_i e dn_i si giunge a scrivere:

$$(n_1\, dn_1 - n_1\, dm_1 - m_1\, dn_1 + m_1\, dm_1) + (n_2\, dn_2 - n_2\, dm_2 - m_2\, dn_2 + m_2\, dm_2) + (n_3\, dn_3 - n_3\, dm_3 - m_3\, dn_3 + m_3\, dm_3) = 0 \tag{17}$$

ossia, infine:

$$(n_1 - m_1)\,(dn_1 - dm_1) + (n_2 - m_2)\,(dn_2 - dm_2) + (n_3 - m_3)\,(dn_3 - dm_3) = 0 \tag{18}$$

In termini vettoriale, sara' quindi:

$$\left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\right) \cdot \left(\overrightarrow{NN'} - \overrightarrow{MM'}\right) = 0 \tag{19}$$

e poiche' $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$, la relazione precedente esprime l'ortogonalita' tra il vettore $\overrightarrow{MN}$ ed il vettore spostamento relativo $\overrightarrow{NN'}$-$\overrightarrow{MM'}$:

$$\overrightarrow{MN} \cdot \left(\overrightarrow{NN'} - \overrightarrow{MM'}\right) = 0 \tag{20}$$

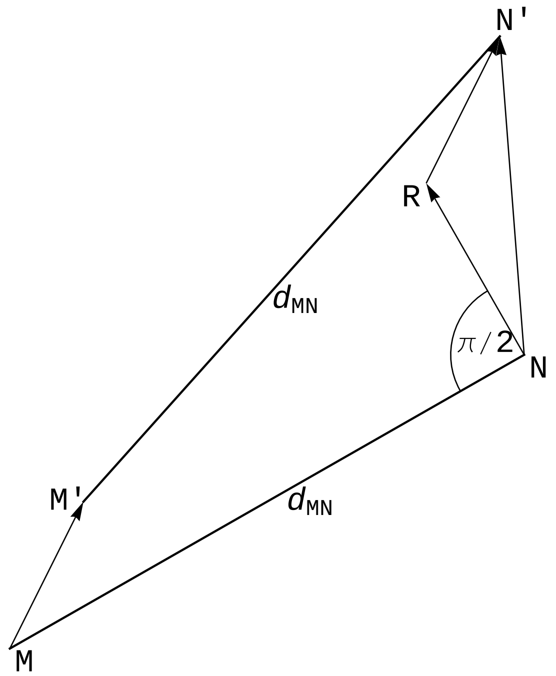

Figura 3 - Il vincolo di rigidita' : $\overrightarrow{RN'} = \overrightarrow{MM'}$ e quindi $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{NN'}$-$\overrightarrow{MM'}$

Sistemi di punti con vincoli di rigidita'

Si consideri un sistema di N punti materiali, con $N \geq 3$, e si ipotizzi che ciascun punto sia vincolato rigidamente. Si dimostrera' ora che tale sistema ha 6 gradi di liberta', indipendentemente dal numero N di punti del sistema.
Ed infatti, si parta da un sistema di tre punti materiali, per cui si hanno 3N = 9 gradi di liberta' in assenza di vincoli. Poiche' poi esistono tre vincoli di rigidita', il sistema con tre punti ha sei gradi di liberta'.
Si aggiunga ora un quarto punto, che aggiunge al sistema tre gradi di liberta', ma poi sottrae tre gradi di liberta', corrispondenti ai vincoli di rigidita' tra il punto aggiunto ed i tre punti di partenza. Quindi anche per N = 4 il sistema ha sei gradi di liberta'.
Aggiungendo un altro punto, si introducono altri tre gradi di liberta', e si possono considerare quattro equazioni di vincolo. Tuttavia, e' immediato riconoscere che - a parte casi eccezionali - una di queste equazioni e' dipendente, e quindi ancora una volta il sistema avra' sei gradi di liberta'.
In generale, ogni volta che si introduce un punto nel sistema, si incrementano i gradi di liberta' di tre, e si possono scrivere tre equazioni di vincolo indipendenti.

Il corpo rigido

Un corpo rigido puo' essere riguardato come un insieme di infiniti punti materiali collegati tra loro da vincoli di rigidita', in modo tale da imporre che la mutua distanza tra due qualsiasi punti del corpo rimanga inalterata. Estendendo il precedente ragionamento al caso in cui N va all'infinito, e' immediato dedurre che un corpo rigido ha nello spazio sei gradi di liberta'.

Nota - E' spesso importante specializzare quanto detto finora al caso di bidimensionale, in cui i punti sono obbligati a giacere su un piano. In tal caso il sistema di N punti materiali avrebbe 3N-N = 2N gradi di liberta', in quanto per ciascun punto si potrebbe scrivere l'equazione che lo vincola ad appartenere al piano. Inoltre, il corpo rigido (o meglio, la superficie rigida) ha nel piano tre gradi liberta'.

Per identificare nel modo piu' conveniente le sei coordinate lagrangiane relative ad un corpo rigido, si scelga ora arbitrariamente un punto P (detto *polo*), e si scriva il vincolo di rigidita' che lega il suddetto polo P al generico punto P_i del corpo in esame. Riscrivendo la (20) si ha:

$$\overrightarrow{PP_i} \cdot \left(\overrightarrow{P_i P_i'} - \overrightarrow{PP'}\right) = 0 \tag{21}$$

che puo' geometricamente interpretarsi come condizione di ortogonalita' tra la congiungente il polo ed il punto P_i (ossia $\overrightarrow{PP_i}$) e lo spostamento relativo del punto P_i rispetto al polo. Tale condizione di ortogonalita' puo' anche scriversi:

$$\overrightarrow{P_i P_i'} - \overrightarrow{PP'} = \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} \times \overrightarrow{PP_i} \tag{22}$$

con $\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}$ vettore arbitrario. Lo spostamento del generico punto P_i puo' allora scriversi come:

$$\overrightarrow{P_i P_i'} = \overrightarrow{PP'} + \mathbf{d}\boldsymbol{\phi} \times \overrightarrow{PP_i} \tag{23}$$

Per esprimere scalarmente tale espressione, si consideri che a primo membro avremo le tre componenti dello spostamento (infinitesimo) del punto P_i :

$$\overrightarrow{P_i\,P_i'} = \begin{pmatrix} du_1^{(i)} \\ du_2^{(i)} \\ du_3^{(i)} \end{pmatrix} \tag{24}$$

che il vettore $\mathbf{d\phi}$ ha componenti:

$$d\phi = \begin{pmatrix} d\phi_1 \\ d\phi_2 \\ d\phi_3 \end{pmatrix} \tag{25}$$

e che il vettore $\overrightarrow{PP_i} = \overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OP}$ ha componenti:

$$\overrightarrow{PP_i} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} - x_1 \\ x_2^{(i)} - x_2 \\ x_3^{(i)} - x_3 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Ne segue:

$$\begin{pmatrix} du_1^{(i)} \\ du_2^{(i)} \\ du_3^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d\phi_3 & d\phi_2 \\ d\phi_3 & 0 & -d\phi_1 \\ -d\phi_2 & d\phi_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} - x_1 \\ x_2^{(i)} - x_2 \\ x_3^{(i)} - x_3 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Per dare un significato fisico al vettore $d\phi$, si consideri il caso piano, per cui la relazione precedente si semplifica in:

$$\begin{pmatrix} du_1^{(i)} \\ du_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -d\phi_3 \\ d\phi_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} - x_1 \\ x_2^{(i)} - x_2 \end{pmatrix} \tag{28}$$

ossia:

$$\begin{aligned} du_1^{(i)} &= du_1 - d\phi_3\,\left(x_2^{(i)} - x_2\right) \\ du_2^{(i)} &= du_2 + d\phi_3\,\left(x_1^{(i)} - x_1\right) \end{aligned} \tag{29}$$

Ora, dalla Figura 1 si evince facilmente che il vettore spostamento relativo $\overrightarrow{P_i\,P_i'} - \overrightarrow{PP\,'}$, indicato in figura con $\overrightarrow{AP_i'}$, ha modulo pari a:

$$AP_i' = L\,d\phi \tag{30}$$

dove L e' la lunghezza del segmento PP_i e $d\phi$ e' la variazione dell'angolo ϕ che lo stesso segmento PP_i forma con l'asse orizzontale. Le componenti del vettore di spostamento relativo saranno allora fornite da:

$$\begin{aligned} du_1^{(i)} - du_1 &= -L\,d\phi\,\mathrm{Sin}\,\phi \\ du_2^{(i)} - du_2 &= L\,d\phi\,\mathrm{Cos}\,\phi \end{aligned} \tag{31}$$

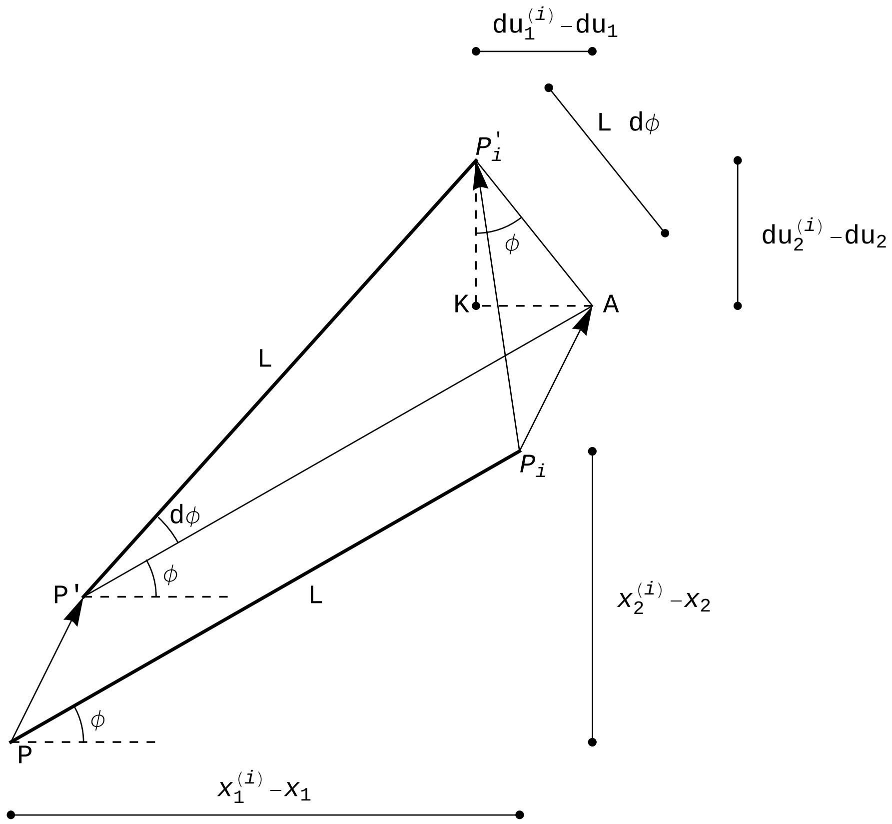

Figura 4 - Lo spostamento rigido infinitesimo come somma di una traslazione $\overrightarrow{PP'}$ ed una rotazione intorno a P'

Ma e' anche:

$$\begin{aligned} L \operatorname{Sin} \phi &= x_2^{(i)} - x_2 \\ L \operatorname{Cos} \phi &= x_1^{(i)} - x_1 \end{aligned} \tag{32}$$

e quindi le (30) si scrivono:

$$\begin{aligned} du_1^{(i)} - du_1 &= -d\phi \left(x_2^{(i)} - x_2\right) \\ du_2^{(i)} - du_2 &= d\phi \left(x_1^{(i)} - x_1\right) \end{aligned} \tag{33}$$

permettendo di dare un significato fisico a $d\phi_3$: la rotazione del segmento PP_i intorno a P nel piano di normale x_3. Ne segue ancora che:

- *un generico spostamento piano infinitesimo di un corpo rigido puo' considerarsi composto da una traslazione rigida e da una rotazione intorno ad un asse normale al piano*

Tale spostamento puo' anche riguardarsi come una rotazione intorno ad un punto C, detto *centro assoluto di rotazione*, identificato come intersezione delle normali ai vettori spostamento PP' e $P_i P_i^{'}$. Tale rotazione ha ampiezza, riferendosi alla Figura 2, pari a:

$$d\phi' = \frac{|PP'|}{|CP|} = \frac{|P_i P_i'|}{|CP_i|} \tag{34}$$

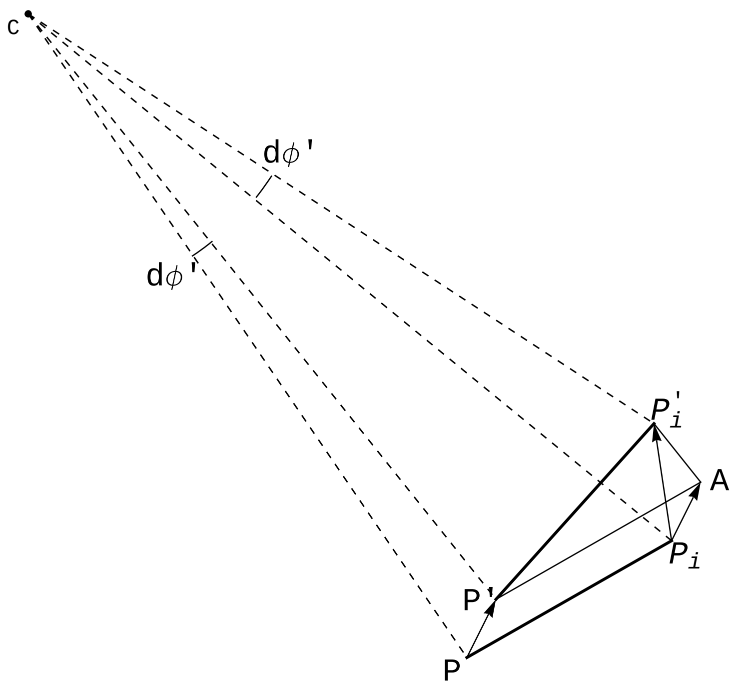

Figura 5 - Lo spostamento rigido come rotazione intorno al centro istantaneo di rotazione C

In generale, per un corpo rigido tridimensionale puo' dirsi che un qualsiasi spostamento infinitesimo puo' riguardarsi come somma di tre traslazioni lungo tre assi coordinati, e tre rotazioni intorno alle rette parallele agli assi e passanti per il punto assunto come polo.

Figure