

Capitolo 22

Una maglia chiusa con carico e variazioni termiche

Si consideri la maglia chiusa di Figura 22.1, isostatica sia internamente che esternamente, e soggetta ad un carico distribuito lungo il ritto di destra, ad una variazione termica flessionale lungo il ritto di sinistra, ed a variazioni termiche assiali sui tratti orizzontali. Per essa si vuole applicare il principio dei lavori virtuali al fine di conoscere lo spostamento orizzontale del carrello in B , tenendo conto dei contributi flessionali, assiali e taglianti del lavoro del carico distribuito.

Si scrivono poi le opportune linee elastiche dei quattro tratti, in ipotesi di trave di Eulero-Bernoulli e di estensibilità assiale finita, e si impongono le ventiquattro condizioni ai limiti nei quattro nodi. Risolvendo il conseguente sistema di equazioni si ottengono le deformate assiali e flessionali, nonché le caratteristiche della sollecitazione interna.

22.1 Il principio dei lavori virtuali

Come detto, la struttura è isostatica, sia internamente che esternamente. Per calcolare lo spostamento richiesto attraverso il principio dei lavori virtuali si utilizza lo schema reale di Figura 22.1 per leggere gli spostamenti e lo schema virtuale di Figura 22.2 per leggere le forze.

Uguagliando il lavoro esterno ed il lavoro interno si ottiene:

$$F' u_{3B} = \int_s M' \frac{M}{EI} dx_3 - \int_s M' \mu dx_3 + \int_s N' \frac{N}{EA} dx_3 - \int_s N' \lambda dx_3 + \int_s T' \frac{T}{GA_s} dx_3 \quad (22.1)$$

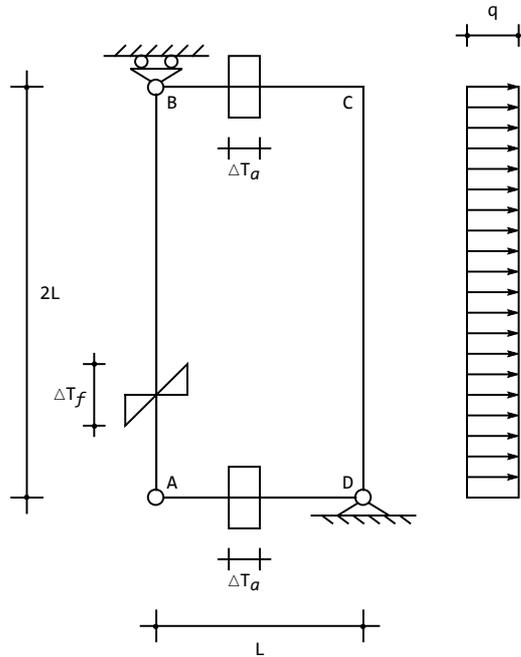


Figura 22.1: Una maglia chiusa soggetta a carico distribuito e variazioni termiche

Il calcolo delle caratteristiche M, N e T dovute al carico applicato

Sul sistema reale, occorre calcolare le caratteristiche dovute al carico applicato q . Le reazioni vincolari da esso provocate sono fornite dalle equazioni di equilibrio globale:

$$\begin{aligned} R_{Dh} + 2qL &= 0 \\ R_{Bv} + R_{Dv} &= 0 \\ R_{Bv}L - 2qL^2 &= 0 \end{aligned} \quad (22.2)$$

e sono pari a:

$$\begin{aligned} R_{Bv} &= 2qL \\ R_{Dv} &= -2qL \\ R_{Dh} &= -2qL \end{aligned} \quad (22.3)$$

Il diagramma del momento è limitato ai tratti BC , dove varia con legge lineare, e CD , dove invece varia con legge quadratica. Nel primo tratto, annullandosi in B , si potrà scrivere, nella generica sezione a distanza x_3 :

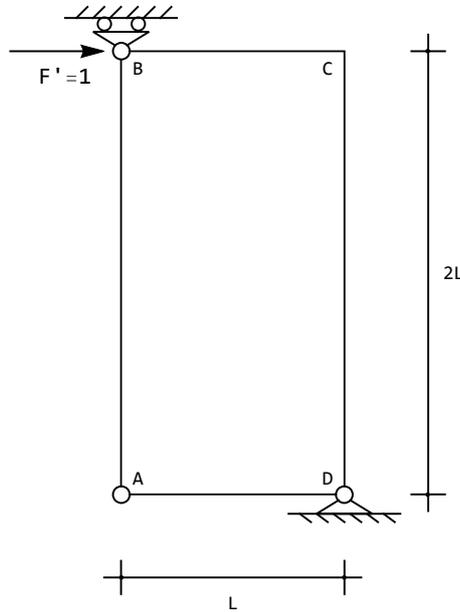


Figura 22.2: Lo schema delle forze virtuali

$$R_{Bv}x_3 + m_{BC}(x_3) = 0 \quad (22.4)$$

da cui:

$$m_{BC}(x_3) = -2qLx_3 \quad (22.5)$$

Nel secondo caso si potrà scrivere:

$$m_{CD}(x_3) = -q\frac{x_3^2}{2} + ax_3 + b \quad (22.6)$$

e le due costanti a e b possono calcolarsi imponendo che sia:

$$\begin{aligned} m_{CD}(0) &= 2qL^2 \\ m_{CD}(2L) &= 0 \end{aligned} \quad (22.7)$$

da cui:

$$\begin{aligned} b &= 2qL^2 \\ -2qL^2 + 2aL + b &= 0 \end{aligned} \quad (22.8)$$

Infine, quindi:

$$m_{CD}(x_3) = -q\frac{x_3^2}{2} + 2qL^2 \quad (22.9)$$

ed il diagramma del momento è riportato in Figura 22.3.

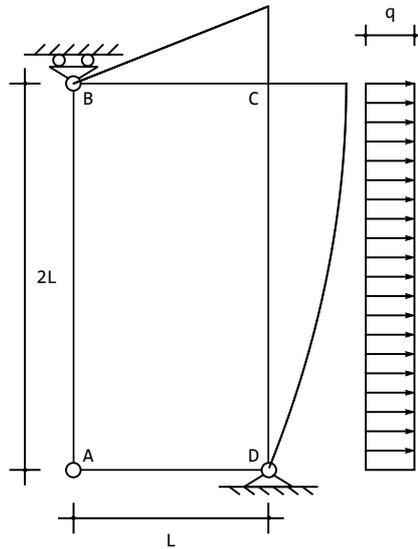


Figura 22.3: Il diagramma M del momento dovuto al carico applicato

Dal diagramma del momento si deduce anche che il taglio, limitato ai tratti BC e CD , è fornito da:

$$\begin{aligned} t_{BC} &= -2qL \\ t_{CD}(x_3) &= -qx_3 \end{aligned} \quad (22.10)$$

L'equilibrio del nodo in A garantisce che, essendo nullo il taglio lungo AD , sarà anche nullo lo sforzo normale lungo AB :

$$n_{AB} = 0 \quad (22.11)$$

e del tutto analogamente il tratto AD , poichè è nullo il taglio lungo AB , non è soggetto a sforzo normale:

$$n_{AD} = 0 \quad (22.12)$$

Sul ritto DC si ha poi, per l'equilibrio del concio in D :

$$n_{CD} = R_{Dv} = -2qL \quad (22.13)$$

Infine, poichè — come si è detto — il taglio è nullo in C , l'equilibrio del concio in C permette di affermare che lo sforzo normale in BC è nullo:

$$n_{BC} = 0 \quad (22.14)$$

Il calcolo delle caratteristiche M' , N' e T' dovute alla forza fittizia

Sul sistema caricato dalla forza fittizia F' le reazioni valgono, banalmente:

$$\begin{aligned} R'_{Bv} &= 2F' \\ R'_{Dv} &= -2F' \\ R'_{Dh} &= -F' \end{aligned} \quad (22.15)$$

Il momento flettente si limita ai tratti BC e CD , varia linearmente annullandosi in B ed in D , valendo:

$$\begin{aligned} m'_{BC}(x_3) &= -2F'x_3 \\ m'_{CD}(x_3) &= 2F'L \left(1 - \frac{x_3}{2L}\right) \end{aligned} \quad (22.16)$$

I tagli sono anch'essi limitati ai due tratti BC e CD , e valgono:

$$\begin{aligned} t'_{BC}(x_3) &= -2F' \\ t'_{CD}(x_3) &= F' \end{aligned} \quad (22.17)$$

Gli sforzi normali, calcolabili tramite l'equilibrio dei conci, valgono:

$$\begin{aligned} n'_{BC}(x_3) &= -F' \\ n'_{CD}(x_3) &= -2F' \end{aligned} \quad (22.18)$$

e sono nulli lungo AB ed AD . Il diagramma del momento è riportato in Figura 22.4.

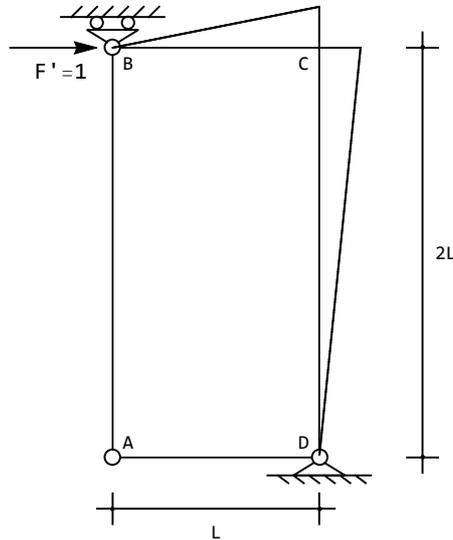
Il calcolo dello spostamento

Si suddividano ora le aliquote di spostamento dovute alle varie cause:

- l'aliquota dovuta alla deformazione flessionale per effetto del carico è pari a:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{EI} \left(\int_0^L m'_{BC}(x_3) m_{BC}(x_3) dx_3 + \int_0^{2L} m'_{CD}(x_3) m_{CD}(x_3) dx_3 \right) = \\ &\frac{1}{EI} \left(\int_0^L (-2x_3)(-2qLx_3) dx_3 + \int_0^{2L} \left(2L \left(1 - \frac{x_3}{2L}\right)\right) \left(-q \frac{x_3^2}{2} + 2qL^2\right) dx_3 \right) = \\ &\frac{14}{3} \frac{qL^4}{EI} \end{aligned} \quad (22.19)$$

- l'aliquota dovuta alla deformazione assiale per effetto del carico è pari a:


 Figura 22.4: Il diagramma M' del momento dovuto alla forza virtuale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EA} \int_0^{2L} n'_{CD}(x_3) n_{CD}(x_3) dx_3 \\ &= \frac{1}{EA} \int_0^{2L} (-2)(-2qL) dx_3 = 8 \frac{qL^2}{EA} \end{aligned} \quad (22.20)$$

- l'aliquota dovuta alla deformazione tagliante per effetto del carico è pari a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{GA_s} \left(\int_0^L t'_{BC}(x_3) t_{BC}(x_3) dx_3 + \int_0^{2L} t'_{CD}(x_3) t_{CD}(x_3) dx_3 \right) = \\ & \frac{1}{GA_s} \left(\int_0^L (-2)(-2qL) dx_3 + \int_0^{2L} (1)(-qx_3) dx_3 \right) = 2 \frac{qL^2}{GA_s} \end{aligned} \quad (22.21)$$

- l'aliquota dovuta alla variazione termica uniforme è pari a:

$$- \int_0^L \lambda n'_{BC} dx_3 = \alpha \Delta T_a \int_0^L n'_{BC} dx_3 = -\alpha \Delta T_a \int_0^L dx_3 = -\alpha \Delta T L \quad (22.22)$$

- l'aliquota dovuta alla variazione termica flessionale è pari a zero.

In definitiva, quindi si avrà

$$u_{3B} = \frac{14}{3} \frac{qL^4}{EI} + 8 \frac{qL^2}{EA} + 2 \frac{qL^2}{GA_s} - \alpha \Delta TL \quad (22.23)$$

22.2 La linea elastica

La trave è costituita da quattro tratti, e le relative equazioni della linea elastica forniscono polinomi cubici per gli spostamenti trasversali, e lineari per gli spostamenti assiali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\ u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\ u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\ u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 - \frac{q x_3^4}{24EI} \\ u_3^{CD}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3 \\ u_2^{AD}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 \\ u_3^{AD}(x_3) &= h_0 + h_1 x_3 \end{aligned} \quad (22.24)$$

Le condizioni ai limiti da imporre in A , B , C e D saranno in numero pari alle ventiquattro costanti di integrazione:

— nella cerniera in A si hanno le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(0) &= u_3^{AD}(0) \\ u_3^{AB}(0) &= -u_2^{AD}(0) \end{aligned} \quad (22.25)$$

come può dedursi dallo schema di Figura 22.5, le due condizioni di vincolo:

$$\begin{aligned} m^{AB}(0) &= 0 \\ m^{AD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (22.26)$$

e le due condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} -n^{AB}(0) + t^{AD}(0) &= 0 \\ t^{AB}(0) + n^{AD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (22.27)$$

come può leggersi dalla Figura 22.6.

— in corrispondenza del nodo B , dove agisce un carrello a piano di scorrimento orizzontale, ed è situata una cerniera, si ha la singola equazione di

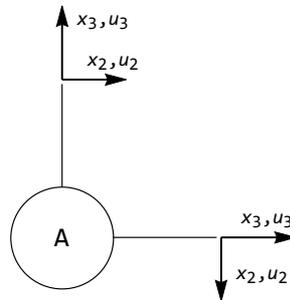


Figura 22.5: Lo schema dei sistemi di riferimento per la scrittura delle equazioni di congruenza nella cerniera in A

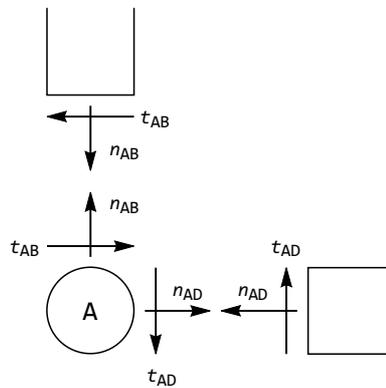


Figura 22.6: Lo schema delle forze interne per la scrittura delle equazioni di equilibrio della cerniera in A

congruenza tra lo spostamento assiale del traverso e lo spostamento trasversale del ritto, nonché le due condizioni di congruenza dettate dal vincolo:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(2L) &= u_3^{BC}(0) \\ u_3^{AB}(2L) &= 0 \\ u_2^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{22.28}$$

come può dedursi dalla Figura 22.7.

Inoltre la presenza della cerniera impone l'annullarsi dei momenti:

$$\begin{aligned} m^{AB}(2L) &= 0 \\ m^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{22.29}$$

Infine, l'equilibrio del nodo permetterà di scrivere, come evidente dalla Figura 22.8:

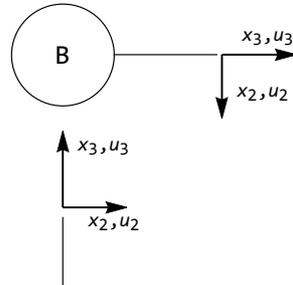


Figura 22.7: Lo schema dei sistemi di riferimento per la scrittura delle equazioni di congruenza nella cerniera in B

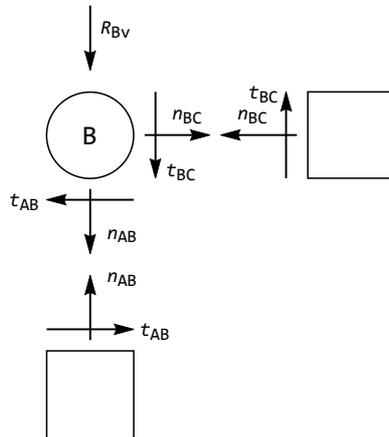


Figura 22.8: Lo schema delle forze interne per la scrittura delle equazioni di equilibrio della cerniera in B

$$-t^{AB}(2L) + n^{BC}(0) = 0 \quad (22.30)$$

Si noti che l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale:

$$t^{BC}(0) + n^{AB}(2L) + R_{Bv} = 0 \quad (22.31)$$

potrà essere usata *a posteriori* per il calcolo della reazione incognita R_{Bv}

— nel nodo in C si hanno tre condizioni di congruenza, da leggersi sullo schema di Figura 22.9:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(L) &= u_3^{CD}(0) \\ u_3^{BC}(L) &= -u_2^{CD}(0) \\ \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0) \end{aligned} \quad (22.32)$$

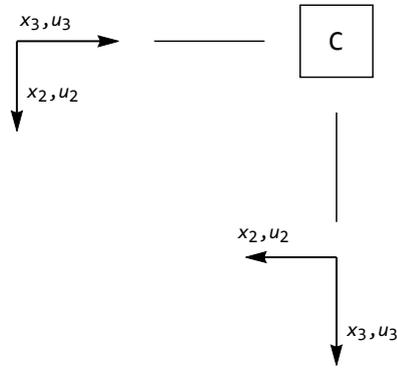


Figura 22.9: Lo schema dei sistemi di riferimento per la scrittura delle equazioni di congruenza nel nodo in C

nonchè le tre condizioni di equilibrio, leggibili in Figura 22.10:

$$\begin{aligned}
 -n^{BC}(L) - t^{CD}(0) &= 0 \\
 -t^{BC}(L) + n^{CD}(0) &= 0 \\
 -m^{BC}(L) + m^{CD}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{22.33}$$

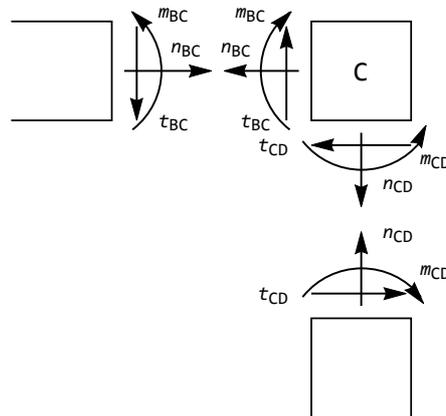


Figura 22.10: Lo schema delle forze interne per la scrittura delle equazioni di equilibrio del nodo in C

Infine, nella cerniera in D , su cui insiste un appoggio, saranno nulli sia gli

spostamenti che i momenti, dando luogo alle condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{CD}(2L) &= 0 \\
 u_3^{CD}(2L) &= 0 \\
 u_2^{AD}(L) &= 0 \\
 u_3^{AD}(L) &= 0 \\
 m^{CD}(2L) &= 0 \\
 m^{AD}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{22.34}$$

La deformata

Tenendo conto che lungo il tratto AB il momento è fornito da:

$$m^{AB}(x_3) = -EI \frac{d^2 u_2^{AB}}{dx_3^2} + EI\mu \tag{22.35}$$

e che lungo i tratti BC ed AD lo sforzo normale sarà pari a:

$$\begin{aligned}
 n^{BC}(x_3) &= EA \frac{du_3^{BC}}{dx_3} + EA\lambda \\
 n^{AD}(x_3) &= EA \frac{du_3^{AD}}{dx_3} + EA\lambda
 \end{aligned} \tag{22.36}$$

le ventiquattro condizioni ai limiti si tramutano in ventiquattro equazioni lineari nelle ventiquattro costanti di integrazione. Si giunge così alle deformate flessionali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{4Lq}{EA}x_3 + \frac{7L^3q}{3EI}x_3 + \frac{5\lambda}{2}x_3 + \mu \left(\frac{x_3^2}{2} - Lx_3 \right) \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{4Lq}{EA}x_3 - \frac{L^3q}{3EI}x_3 + \frac{Lqx_3^3}{3EI} + 2\lambda x_3 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{q}{EA}(-8L^2 + 4Lx_3) + \frac{q}{EI} \left(-\frac{14L^4}{3} + \frac{2L^3}{3}x_3 + L^2x_3^2 - \frac{x_3^4}{24} \right) + \\
 &\quad 2\lambda(x_3 - 2L) \\
 u_2^{AD}(x_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{22.37}$$

in cui si riconoscono chiaramente i diversi contributi. Analogamente si potranno ottenere le deformate assiali:

$$\begin{aligned}
 u_3^{AB}(x_3) &= 0 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= \frac{8L^2q}{EA} + \frac{14L^4q}{3EI} + \lambda(5L - x_3) \\
 u_3^{CD}(x_3) &= \frac{q}{EA}(4L^2 - 2Lx_3) + \lambda(2L - x_3) \\
 u_3^{AD}(x_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{22.38}$$

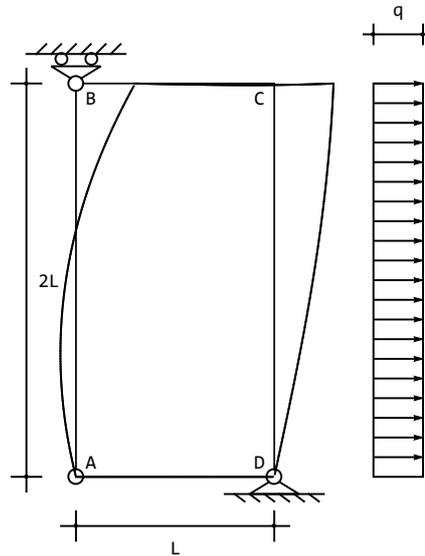


Figura 22.11: Una possibile deformata dovuta al carico applicato ed alla distorsione flessionale lungo AB

Una possibile deformata, in presenza carico e distorsione flessionale, è riportata in Figura 22.11 mentre in presenza del solo carico il tratto AB non è soggetto a momento e quindi si limita a ruotare, come illustrato in Figura 22.12.

Infine, l'effetto della distorsione flessionale si limita al tratto AB , come riportato in Figura 22.13.

Le caratteristiche

A partire dalle deformate flessionali è immediato ricavare i momenti flettenti:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= 0 \\
 m^{BC}(x_3) &= -2qLx_3 \\
 m^{CD}(x_3) &= \frac{1}{2}q(x_3^2 - 4L^2) \\
 m^{AD}(x_3) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{22.39}$$

con i relativi tagli:

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= 0 \\
 t^{BC}(x_3) &= -2qL \\
 t^{CD}(x_3) &= qx_3 \\
 t^{AD}(x_3) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{22.40}$$

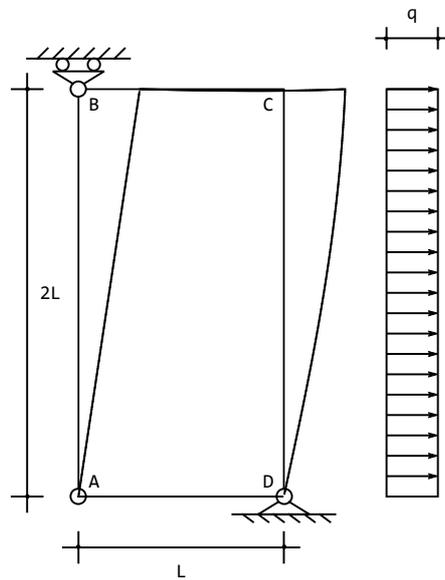


Figura 22.12: Una possibile deformata dovuta solo al carico applicato, in assenza di distorsioni

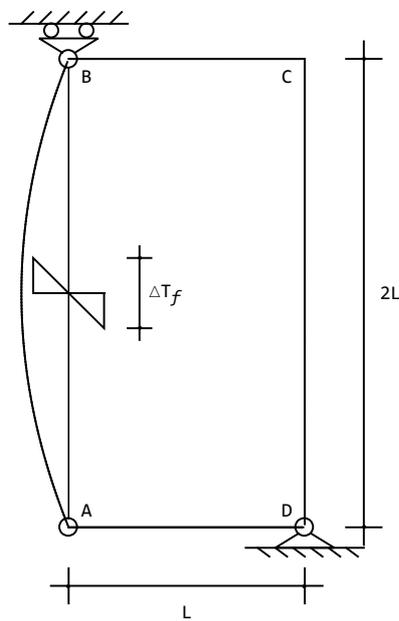


Figura 22.13: Una possibile deformata dovuta solo alla distorsione flessionale

Infine, gli sforzi assiali sono diversi da zero solo su CD , dove si avrà :

$$n^{CD}(x_3) = -2qL \quad (22.41)$$