

Esercizi di Scienza delle Costruzioni

Claudio Franciosi

9 settembre 2018



Indice

1	Introduzione	1
2	Un telaio zoppo	5
2.1	Teoria di Eulero-Bernoulli ed aste assialmente deformabili . . .	6
2.2	Teoria di Eulero-Bernoulli ed aste assialmente indeformabili . .	11
2.3	La scrittura diretta delle equazioni di congruenza	15
2.4	Le variazioni termiche flessionali	19
2.5	Le variazioni termiche assiali	25
3	Portale doppio	33
3.1	Il principio dei lavori virtuali	38
4	Un telaio con bipendolo interno	43
4.1	L'ipotesi di indeformabilità assiale	48
4.2	L'utilizzo della teoria di Timoshenko	50
4.3	La verifica col principio delle forze virtuali	54
4.4	L'effetto dello sforzo normale	61
4.5	La presenza di un cedimento anelastico	62
4.6	Il telaio soggetto a variazione termica	69
5	Una pensilina	75
5.1	Una verifica	82
6	Un telaio a nodi spostabili	85
6.1	Una verifica con il principio dei lavori virtuali	89
7	Un telaio con pendolo	93
7.1	Il caso della variazione termica assiale	101
8	Una maglia chiusa	107
8.1	Il principio dei lavori virtuali	111
9	Telaio asimmetrico	119
9.1	Il principio dei lavori virtuali	123
10	Una trave su tre appoggi	129

10.1	L'utilizzo della teoria di Timoshenko	131
10.2	Le verifiche col principio dei lavori virtuali	135
10.3	Il metodo dell'analogia di Mohr	138
11	Un Carroponte	141
11.1	Le verifiche	145
11.1.1	L'utilizzo del principio dei lavori virtuali	146
12	Travature reticolari	149
12.1	Esempio n.1: Travatura rettangolare	149
12.1.1	Una verifica con il principio dei lavori virtuali	152
12.2	Esempio n. 2	156
13	Travatura reticolare su ritti	165
13.1	La deduzione delle caratteristiche	166
13.2	La deduzione della deformata	168
14	Maglia triangolare	173
14.1	L'utilizzo del principio dei lavori virtuali	181
15	Un telaio a croce	187
15.1	Il metodo misto	191
15.2	Un secondo esempio di telaio a croce	193
16	Un Telaio con coppia al piede	197
16.1	Il metodo della linea elastica	198
16.2	Il metodo misto	200
17	Doppia Trave con pendolo di collegamento	203
17.1	La scrittura diretta dell'equazione di congruenza	206
17.2	Il caso della variazione termica uniforme	208
17.3	Un secondo esempio di doppia trave	213
17.4	La scrittura diretta dell'equazione di congruenza	217
18	Travi triple collegate con pendoli	221
18.1	La presenza di variazioni termiche flessionali	226
18.2	La presenza delle variazioni termiche assiali nei pendoli	230
19	Una mensola con sostegno	237
19.1	La linea elastica di Timoshenko	241
19.2	Il principio dei lavori virtuali	242
20	Un telaio a bandiera	245
20.1	La deduzione del diagramma dei momenti	254
21	Maglia chiusa con variazione termica	257
21.1	La maglia vincolata	264

21.1.1	Verifica	266
21.2	Il caso delle forze lungo la diagonale	266
22	Maglia chiusa con incastro al piede	271
22.1	Il tracciamento grafico del diagramma del momento	278
22.2	Telaio a bandiera iperstatico	279
22.3	Il plv per il calcolo della reazione in L	284
23	Maglia chiusa con bipendolo inclinato	287
23.1	La scrittura delle equazioni di equilibrio	288
23.2	Calcolo grafico delle reazioni	290
23.3	Il tracciamento grafico del momento	290
23.4	Doppia integrazione: calcolo delle c.s.i.	291
23.5	Un caso iperstatico	299
23.5.1	Il metodo della linea elastica	301
24	Un cassone	309
24.1	Un caso di simmetria	314
25	Un telaio a due piani	321
26	Un modello di arco	327
26.1	Il caso del carico su metà luce	331
26.2	Il caso dell'arco con incastro ed appoggio	334
26.3	Il caso dell'arco con incastro e bipendolo	336
27	Telaio a doppio spiovente	341
27.1	Il caso della forza orizzontale	345
27.2	Il caso del carico uniformemente distribuito	348
28	Trave a ginocchio	353

Capitolo 1

Introduzione

L'oggetto di questa raccolta di esercizi è l'analisi statica di telai piani ad asse rettilineo, in presenza di carichi distribuiti, forze e coppie concentrate, variazioni termiche uniformi ed alla Navier, cedimenti elastici o anelastici dei vincoli.

La struttura sarà quindi idealizzata come un insieme di N nodi, connessi tra loro da M elementi; per ciascuno degli esempi proposti, si dedurranno le linee elastiche di ciascun elemento, si imporranno le condizioni ai limiti di equilibrio e di congruenza nei nodi, e risolvendo le risultanti equazioni lineari si espliciteranno gli spostamenti (assiali e trasversali) di ciascun elemento, e le caratteristiche (sforzo normale, taglio e momento flettente) cui esso è soggetto. Infine, si disegneranno i relativi diagrammi, e si indicheranno gli eventuali valori notevoli.

Per la maggior parte degli esercizi, si cercheranno conferme sull'esattezza dei risultati utilizzando metodi alternativi, come il principio dei lavori virtuali, il metodo della composizione degli spostamenti, la scrittura diretta di equazioni di congruenza, il metodo misto.

Per ciascun esempio, si procederà secondo il seguente schema:

1. si battezzano gli N nodi
2. per ciascun elemento, si identificano i nodi iniziale I e finale J
3. per ciascun elemento, si definisce un sistema di riferimento con l'origine nel nodo iniziale I , con l'asse X_3 coincidente con l'asse dell'elemento. L'asse X_2 , ortogonale ad X_3 , ruota di un angolo di novanta gradi, in senso antiorario, per sovrapporsi ad X_3
4. per ciascun elemento, si definiscono le linee elastiche degli spostamenti assiali (secondo X_3) e trasversali (secondo X_2).

Si utilizzeranno le seguenti teorie:

-
- (a) teoria di Eulero-Bernoulli, con rigidezze flessionali ed assiali finite. In questo caso le linee elastiche saranno fornite da:

$$u_2^{IJ}(x_3) = a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + I_1 \quad (1.1)$$

$$u_3^{IJ}(x_3) = b_0 + b_1x_3 + I_2 \quad (1.2)$$

dove I_1 ed I_2 sono integrali particolari, che dipendono dai carichi eventualmente presenti lungo l'elemento. Se ad esempio si ha un carico distribuito $p(x_3)$ orientato secondo X_2 (carico trasversale), e se esso ha intensità costante p_0 , si avrà, come ben noto: $I_1 = \frac{p_0x_3^4}{24EI}$. Ciascun elemento, in questa ipotesi, è poi definito da sei costanti di integrazione.

- (b) teoria di Eulero-Bernoulli, con rigidezza assiale infinita, ipotesi largamente utilizzata nella pratica tecnica, in quanto usualmente la deformabilità assiale degli elementi è trascurabile. In questo caso la linea elastica assiale si riduce ad una costante:

$$u_3^{IJ}(x_3) = b_0 \quad (1.3)$$

e l'elemento si limita a subire una traslazione rigida lungo l'asse.

- (c) teoria di Eulero-Bernoulli, con rigidezze flessionali ed assiali infinite. In questo caso le linee elastiche saranno fornite da:

$$u_2^{IJ}(x_3) = a_0 + a_1x_3 \quad (1.4)$$

$$u_3^{IJ}(x_3) = b_0 \quad (1.5)$$

e l'elemento subisce solo spostamenti rigidi lungo gli assi, ed una rotazione rigida. Questa ipotesi è raramente utilizzata, e solo per alcuni elementi del telaio. Ad esempio, è tipico che i ritti (elementi verticali) e i traversi (elementi orizzontali) abbiano rigidezze flessionali diverse, e talvolta può ipotizzarsi che i traversi siano tanto più rigidi dei ritti da poter accettare questa ipotesi

- (d) teoria di Timoshenko, in cui si abbandona l'ipotesi di Eulero-Bernoulli sulla rotazione $\phi = -\frac{du_2}{dx_3}$, e ciascun elemento è caratterizzato da una rigidezza a taglio GA_s finita. Questo caso verrà trattato introducendo una opportuna funzione ausiliaria η , che permette di ricondursi a soluzioni simili a quelle della teoria di Eulero-Bernoulli.

5. Definite le linee elastiche degli M elementi, si avranno n costanti di integrazione da dedurre, e ciò potrà farsi imponendo, negli N nodi, le opportune condizioni di equilibrio e congruenza, e risolvendo le risultanti n equazioni lineari. A partire dagli spostamenti trasversali u_2^{IJ} , una prima derivazione fornisce la rotazione ϕ^{IJ} , una seconda ed una terza i momenti m^{IJ} ed i tagli t^{IJ} . A partire dagli spostamenti assiali u_3^{IJ} si giunge, tramite derivazione, agli sforzi assiali n^{IJ} .

6. Infine, nel tracciamento dei diagrammi si riporterà il momento positivo nel semipiano $x_2 > 0$ ed il taglio positivo nel semipiano $x_2 < 0$ (in analogia a quanto fatto con le tratti ad asse rettilineo).



Capitolo 2

Un telaio zoppo

Si considera il semplice telaio zoppo di Figura 2.1, identificato da quattro nodi ($N = 4$) collegati da tre elementi ($M = 3$). I nodi al suolo sono incastrati, e non esistono sconnessioni interne. Il telaio è soggetto alla forza orizzontale F agente in corrispondenza del nodo B .

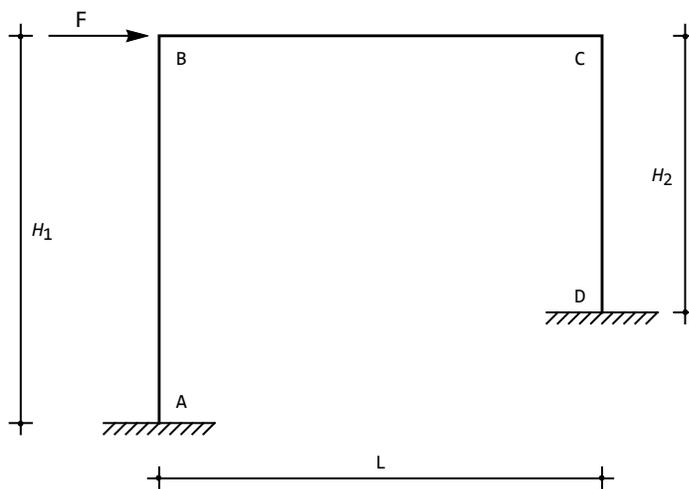


Figura 2.1: Un semplice telaio zoppo

Per ciascuno dei tre elementi si sceglie arbitrariamente un origine del sistema di riferimento, e quindi un verso di percorrenza, definendo quindi gli elementi AB , BC e CD . A sua volta, questa scelta porta ai sistemi di riferimento locali di Figura 2.2.

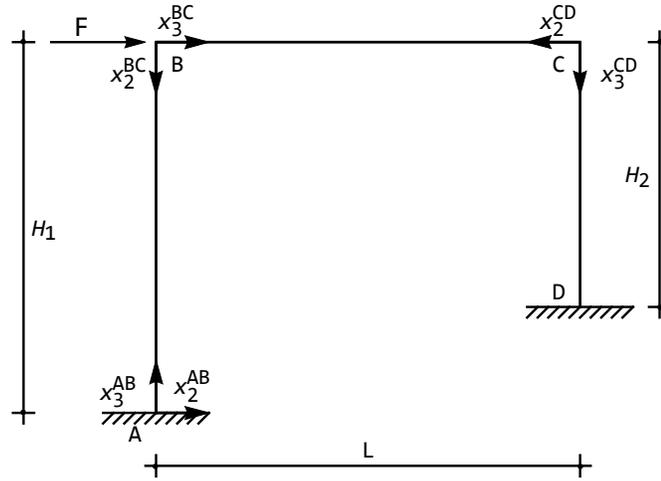


Figura 2.2: Una scelta di sistemi di riferimento

2.1 Teoria di Eulero-Bernoulli ed aste assialmente deformabili

In ipotesi di validità della teoria di Eulero-Bernoulli per travi snelle, e di elementi assialmente deformabili, gli spostamenti trasversali saranno polinomi cubici, mentre gli spostamenti assiali saranno lineari:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\
 u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 \\
 u_3^{CD}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Per poter determinare le diciotto costanti di integrazione, occorre imporre le condizioni ai limiti (di equilibrio e congruenza) in corrispondenza dei quattro nodi:

— nell'incastro in A si annullano ambedue le componenti di spostamento, e la rotazione:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 u_3^{AB}(0) &= 0 \\
 \phi^{AB}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

— nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(H_1) &= u_3^{BC}(0) \\ u_3^{AB}(H_1) &= -u_2^{BC}(0) \\ \phi^{AB}(H_1) &= \phi^{BC}(0) \end{aligned} \tag{2.3}$$

e le tre condizioni di equilibrio :

$$\begin{aligned} -t^{AB}(H_1) + n^{BC}(0) + F &= 0 \\ n^{AB}(H_1) + t^{BC}(0) &= 0 \\ -m^{AB}(H_1) + m^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

La prima condizione di congruenza esprime l'uguaglianza tra lo spostamento orizzontale del nodo B , inteso come spostamento trasversale dell'asta AB , e lo spostamento orizzontale del nodo, inteso come spostamento assiale dell'asta BC . Poichè — come evidenziato in Figura 2.2 — ambedue questi spostamenti sono positivi se verso destra, si ha uguaglianza anche in segno. La seconda condizione di congruenza, invece, esprime l'uguaglianza tra lo spostamento verticale del nodo B inteso come spostamento assiale dell'asta AB , e lo spostamento verticale del nodo, inteso come spostamento trasversale dell'asta BC . Poichè lo spostamento assiale di AB è positivo se verso l'alto, mentre lo spostamento trasversale di BC è positivo se verso il basso, vi è discordanza di segno.

Per la scrittura delle tre condizioni di equilibrio si può fare riferimento alla Figura 2.3, dove si è enucleato il nodo B , assieme alle forze su di esso agenti. La convenzione sui segni delle caratteristiche della sollecitazione interna è usuale: sulle facce di normale uscente equiversa all'asse X_3 , le c.s.i. positive sono equiverse agli assi, e quindi lo sforzo normale è equiverso ad X_3 , il taglio è equiverso ad X_2 , il momento ha asse diretto secondo X_1 , ossia è anti-orario. Sulle facce di normale uscente controversa all'asse X_3 , le c.s.i. positive sono controverse agli assi, e quindi lo sforzo normale è controverso ad X_3 , il taglio è controverso ad X_2 , il momento ha asse diretto contro X_1 , ossia è orario.

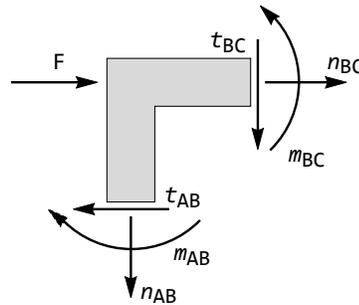


Figura 2.3: Le forze agenti sul nodo B

Si noti quindi che lo sforzo normale è comunque positivo se fuoriesce dal nodo, il taglio è comunque positivo se tende a far ruotare il concio in senso orario, mentre il momento sarà antiorario nei nodi di partenza, ed orario nei nodi di arrivo.

Nel nodo in C , analogamente a quanto si ottiene in B bisogna imporre la

congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(L) &= u_3^{CD}(0) \\ u_3^{BC}(L) &= -u_2^{CD}(0) \\ \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0) \end{aligned} \quad (2.5)$$

e l'equilibrio:

$$\begin{aligned} -t^{BC}(L) + n^{CD}(0) &= 0 \\ -n^{BC}(L) - t^{CD}(0) &= 0 \\ -m^{BC}(L) + m^{CD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

I segni delle equazioni di congruenza possono facilmente spiegarsi a partire dalla Figura 2.2, mentre le equazioni di equilibrio possono leggersi dalla Figura 2.4, dove si è evidenziato il nodo C , assieme alle c.s.i. su di esso agenti.

Infine, nell'incastro in D si annullano spostamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(H_2) &= 0 \\ u_3^{CD}(H_2) &= 0 \\ \phi^{CD}(H_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

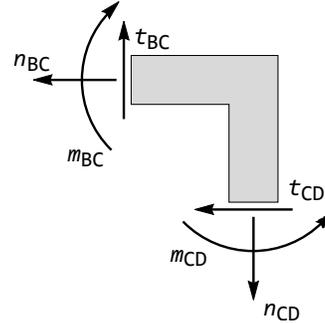


Figura 2.4: Le forze agenti sul nodo C

Si sono così ottenute diciotto condizioni ai limiti, che possono tradursi in altrettante equazioni lineari nelle diciotto costanti di integrazione. A ciò fare, si dovranno utilizzare le note relazioni differenziali, che permettono di esprimere rotazioni e c.s.i. in termini di derivate di spostamento:

$$\phi^{IJ}(x_3) = -\frac{du_2^{IJ}(x_3)}{dx_3} \quad (2.8)$$

$$m^{IJ}(x_3) = -EI \frac{d^2 u_2^{IJ}(x_3)}{dx_3^2} \quad (2.9)$$

$$t^{IJ}(x_3) = -EI \frac{d^3 u_2^{IJ}(x_3)}{dx_3^3} \quad (2.10)$$

$$n^{IJ}(x_3) = EA \frac{du_3^{IJ}(x_3)}{dx_3} \quad (2.11)$$

Si ha infine il sistema di diciotto equazioni lineari:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 \\
 b_0 &= 0 \\
 a_1 &= 0 \\
 a_0 + a_1 H_1 + a_2 H_1^2 + a_3 H_1^3 - d_0 &= 0 \\
 b_0 + b_1 H_1 + c_0 &= 0 \\
 a_1 + 2a_2 H_1 + 3a_3 H_1^2 - c_1 &= 0 \\
 6EIa_3 + EAd_1 + F &= 0 \\
 EAb_1 - 6EIC_3 &= 0 \\
 c_2 - a_2 - 3a_3 H_1 &= 0 \\
 c_0 + Lc_1 + L^2 c_2 + L^3 c_3 - f_0 &= 0 \\
 d_0 + Ld_1 + e_0 &= 0 \\
 c_1 + 2Lc_2 + 3L^2 c_3 - e_1 &= 0 \\
 6EIC_3 + EAff_1 &= 0 \\
 EAd_1 - 6EIE_3 &= 0 \\
 c_2 + 3Lc_3 - e_2 &= 0 \\
 e_0 + e_1 H_2 + e_2 H_2^2 + e_3 H_2^3 &= 0 \\
 f_0 + f_1 H_2 &= 0 \\
 e_1 + 2e_2 H_2 + 3e_3 H_2^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

La presenza di numerosi parametri (la forza F , le altezze dei due ritti, la lunghezza del traverso, le rigidità assiali e flessionali) rendono laboriosa la soluzione del sistema, che tuttavia può essere ottenuta tramite calcolo simbolico. Le espressioni finali sono lunghe e poco maneggevoli: per semplificarne la visualizzazione, si riporta solo il caso di telaio quadrato, per cui $H_1 = H_2 = L$. Gli spostamenti trasversali sono forniti da:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{F}{12EI\Delta} (x_3^2 (6(60I^2L + 25AEIL^3 + 2A^2L^5) \\
 &\quad - (144I^2 + 66AIL^2 + 7A^2L^4) x_3)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{FL}{4EI\Delta} (-12IL^2(3I + AL^2) + (96I^2L + 34AIL^3 + A^2L^5) x_3 - \\
 &\quad (24I^2 + 16AIL^2 + 3A^2L^4) x_3^2 + 2AL(3I + AL^2) x_3^3)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{FL}{12EI\Delta} (L - x_3)^2 (72I^2 + 42AEIL^2 + 5A^2L^4 + \\
 &\quad AL(24I + 7AL^2) x_3)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

con:

$$\Delta = 72I^2 + 45AIL^2 + 7A^2L^4 \tag{2.16}$$

Gli spostamenti assiali, invece, sono dati da:

$$u_3^{AB}(x_3) = \frac{3FL^2}{24EI + 7EAL^2} x_3 \quad (2.17)$$

$$u_3^{BC}(x_3) = \frac{FL^2 (216I^2L + 84AIL^3 + 5A^2L^5 - 6I(24I + 7AL^2) x_3)}{12EI\Delta} \quad (2.18)$$

$$u_3^{CD}(x_3) = \frac{3FL^2}{24EI + 7EAL^2} (L - x_3) \quad (2.19)$$

Nella stessa ipotesi di telai quadrati, le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= -\frac{F}{2\Delta} (120I^2L + 50AIL^3 + 4A^2L^5 - (144I^2 + 66AIL^2 + 7A^2L^4) x_3) \\ m^{BC}(x_3) &= \frac{FL}{2\Delta} (24I^2 + 16AIL^2 + 3A^2L^4 - 6AL(3I + AL^2) x_3) \\ m^{CD}(x_3) &= -\frac{FL}{2\Delta} (-24I^2 + 2AIL^2 + 3A^2L^4 - AL(24I + 7AL^2) x_3) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} t^{AB}(x_3) &= \frac{F(6I + AL^2)}{6I + 2AL^2} \\ t^{BC}(x_3) &= -\frac{3FAL^2}{24I + 7AL^2} \\ t^{CD}(x_3) &= \frac{FAL^2}{6I + 2AL^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= \frac{3FAL^2}{24I + 7AL^2} \\ n^{BC}(x_3) &= -\frac{FAL^2}{6I + 2AL^2} \\ n^{CD}(x_3) &= -\frac{3FAL^2}{24I + 7AL^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Il caso limite $EA = \infty$

Se, come spesso accade, la deformabilità assiale delle aste è trascurabile, si possono semplificare notevolmente i risultati portando la rigidezza assiale ad infinito. E' però conveniente, se si adotta una tale ipotesi, imporla *a priori*, fin dalla definizione delle linee elastiche assiali (che diventano costanti), così da ridurre drasticamente il numero di equazioni da risolvere e da semplificare il quadro strutturale.

2.2 Teoria di Eulero–Bernoulli ed aste assialmente indeformabili

Se si assume una rigidezza assiale infinita, le linee elastiche assiali diventano costanti, e gli sforzi normali non potranno più calcolarsi attraverso la (2.11), bensì dovranno dedursi *a posteriori* tramite considerazioni di equilibrio. Le linee elastiche assiali si semplificano in:

$$\begin{aligned}u_3^{AB}(x_3) &= b_0 \\u_3^{BC}(x_3) &= d_0 \\u_3^{CD}(x_3) &= f_0\end{aligned}\tag{2.23}$$

La presenza degli incastri in A ed in D implica che in tali punti lo spostamento assiale delle aste AB e CD è nullo, e quindi le due linee elastiche saranno identicamente nulle. Ne segue che l'unica linea elastica superstite è quella del traverso, per cui sarà:

$$u_3^{BC}(x_3) = \delta\tag{2.24}$$

Andranno ora imposte tredici condizioni ai limiti, coinvolgendo solo le linee elastiche flessionali, e lo spostamento δ del traverso. Quindi, nell'incastro in A si potranno imporre le due condizioni di congruenza che annullano spostamento trasversale e rotazione:

$$\begin{aligned}u_2^{AB}(0) &= 0 \\ \phi^{AB}(0) &= 0\end{aligned}\tag{2.25}$$

mentre la terza condizione è già stata soddisfatta annullando la linea elastica assiale del ritto AB .

Nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned}u_2^{AB}(H_1) &= \delta \\u_2^{BC}(0) &= 0 \\ \phi^{AB}(H_1) &= \phi^{BC}(0)\end{aligned}\tag{2.26}$$

e la singola condizione di equilibrio sui momenti:

$$-m^{AB}(H_1) + m^{BC}(0) = 0\tag{2.27}$$

Le tre condizioni di congruenza sono una ovvia semplificazione delle condizioni (2.3), mentre le due condizioni di equilibrio coinvolgenti gli sforzi normali andranno utilizzate *a posteriori*, una volta noti i tagli.

Nel nodo in C , analogamente a quanto si ottiene in B bisogna imporre la congruenza:

$$\begin{aligned}u_2^{BC}(L) &= 0 \\u_2^{CD}(0) &= -\delta \\ \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0)\end{aligned}\tag{2.28}$$

e l'equilibrio dei momenti:

$$-m^{BC}(L) + m^{CD}(0) = 0 \quad (2.29)$$

Nell'incastro in D , come in A , si annullano spostamenti trasversali e rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(H_2) &= 0 \\ \phi^{CD}(H_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

A queste dodici equazioni bisognerà aggiungere una *equazione di piano*, che esprime l'equilibrio del tratto BC alla traslazione orizzontale. Dalla Figura 2.5 è immediato dedurre che dovrà essere:

$$-t^{AB}(H_1) - t^{CD}(0) + F = 0 \quad (2.31)$$

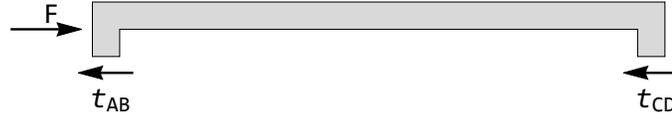


Figura 2.5: Le forze orizzontali agenti sul traverso

Si sono così ottenute tredici condizioni ai limiti, che possono tradursi in altrettante equazioni lineari nelle tredici costanti di integrazione. Da esse possono definirsi le tre linee elastiche flessionali, e lo spostamento assiale del traverso:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{FH_2^2 x_3^2}{12EI\Delta} (3LH_1^3 + 2H_1H_2(L(3L - 4x_3) + 3H_2(L - x_3)) - \\ &\quad 2LH_2(L + H_2)x_3 + 3H_1^2(4LH_2 + 3H_2^2 - Lx_3)) \\ u_2^{BC}(x_3) &= -\frac{FH_1^2 H_2^2 (L - x_3)x_3}{4EIL\Delta} (2LH_1x_3 + H_1^2(L + x_3) + \\ &\quad H_2(H_2(-2L + x_3) + 2L(-L + x_3))) \\ u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{FH_1^2 (H_2 - x_3)^2}{12EI\Delta} (3LH_2^2x_3 + 2LH_1(2H_2^2 + Lx_3 + 2H_2(L + 2x_3)) + \\ &\quad H_1^2(3H_2^2 + 2Lx_3 + H_2(4L + 6x_3))) \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\delta = \frac{FH_1^3 H_2^3 (4L(L + H_2) + H_1(4L + 3H_2))}{12EI\Delta} \quad (2.33)$$

e:

$$\begin{aligned} \Delta &= 3LH_1^2 H_2^2 + LH_2^3(L + H_2) + H_1^4(L + 3H_2) + H_1H_2^3(4L + 3H_2) + \\ &\quad LH_1^3(L + 4H_2) \end{aligned} \quad (2.34)$$

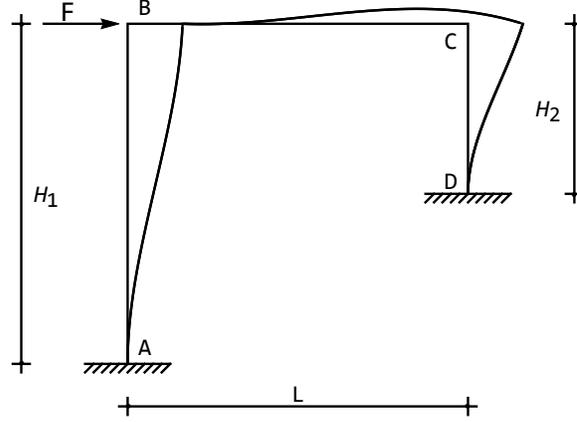


Figura 2.6: La deformata

La deformata, nel caso in cui $H_1 = L$ ed $H_2 = L/2$ si presenta come in Figura 2.6.

I momenti flettenti ed i tagli si traggono dalle linee elastiche tramite opportune derivazioni, giungendo a:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{FH_2^2}{2\Delta} (LH_1^3 + 2H_1H_2(L(L - 4x_3) + H_2(L - 3x_3)) - \\
 &\quad 2LH_2(L + H_2)x_3 + H_1^2(4LH_2 + 3H_2^2 - 3Lx_3)) \\
 m^{BC}(x_3) &= \frac{FH_1^2H_2^2}{2L\Delta} (H_2(2L(2L - 3x_3) + 3H_2(L - x_3)) + \\
 &\quad 2LH_1(L - 3x_3) - 3H_1^2x_3) \\
 m^{CD}(x_3) &= \frac{FH_1^2}{2\Delta} (LH_2^2(-2H_2 + 3x_3) + 2LH_1(-2H_2^2 + Lx_3 + 4H_2x_3) + \\
 &\quad H_1^2(-3H_2^2 + 2Lx_3 + 6H_2x_3))
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= \frac{FH_2^2(3LH_1^2 + 2LH_2(L + H_2) + 2H_1H_2(4L + 3H_2))}{2\Delta} \\
 t^{BC}(x_3) &= -\frac{3FH_1^2H_2^2(2LH_1 + H_1^2 + H_2(2L + H_2))}{2L\Delta} \\
 t^{CD}(x_3) &= \frac{FH_1^2(3LH_2^2 + 2H_1^2(L + 3H_2) + 2LH_1(L + 4H_2))}{2\Delta}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Il diagramma del momento, nella stessa ipotesi $H_1 = L$ ed $H_2 = L/2$ si presenta come in Figura 2.7. Si noti — come sempre — la corrispondenza tra i punti di nullo del diagramma del momento, ed i punti di flesso del diagramma degli spostamenti.

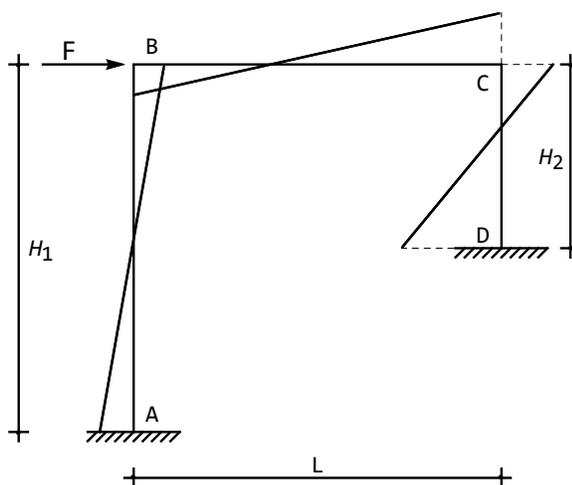


Figura 2.7: Il diagramma del momento flettente

Come detto, gli sforzi normali sono forniti dalle equazioni di equilibrio in corrispondenza dei nodi B :

$$\begin{aligned} -t^{AB}(H_1) + n^{BC}(0) + F &= 0 \\ n^{AB}(H_1) + t^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

e C :

$$\begin{aligned} -t^{BC}(L) + n^{CD}(0) &= 0 \\ -n^{BC}(L) - t^{CD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

da cui:

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= -t^{BC}(x_3) \\ n^{BC}(x_3) &= -t^{CD}(x_3) \\ n^{CD}(x_3) &= t^{BC}(x_3) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Il caso del telaio quadrato

Nell'ipotesi di telai quadrati, si ha più semplicemente:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{F(12L - 7x_3)x_3^2}{84EI} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{Fx_3(L^2 - 3Lx_3 + 2x_3^2)}{28EI} \\ u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{F(L - x_3)^2(5L + 7x_3)}{84EI} \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\delta = \frac{5 FL^3}{84 EI} \quad (2.41)$$

con momenti e tagli forniti da :

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= -\frac{2FL}{7} + \frac{Fx_3}{2} \\ m^{BC}(x_3) &= \frac{3}{14}F(L - 2x_3) \\ m^{CD}(x_3) &= \frac{1}{14}(-3FL + 7Fx_3) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} t^{AB}(x_3) &= t^{CD}(x_3) = \frac{F}{2} \\ t^{BC}(x_3) &= -\frac{3}{7}F \end{aligned} \quad (2.43)$$

Come detto, gli sforzi normali sono forniti dalle equazioni di equilibrio in corrispondenza dei nodi B e C :

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= -n^{CD}(x_3) = \frac{3}{7}F \\ n^{BC}(x_3) &= -\frac{F}{2} \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.3 La scrittura diretta delle equazioni di congruenza

Una verifica sulla correttezza dei risultati ottenuti può ottenersi utilizzando il metodo delle forze. Si osservi preliminarmente che la struttura ha tre gradi di iperstaticità, in quanto possono scrivere tre equazioni di equilibrio e vi sono sei incognite reattive. Alternativamente, la struttura senza vincoli possiede tre gradi di libertà, mentre i due incastri sopprimono sei gradi di libertà.

Per ottenere una struttura isostatica equivalente (S.I.E.) occorre quindi rimuovere tre gradi di vincolo, oppure introdurre tre sconnessioni; se ad esempio si rimuove l'incastro in D , ci si riconduce ad uno schema a mensola, su cui scrivere le equazioni di congruenza che impongono spostamenti e rotazioni nulle in D . Si possono trasformare i due incastri in due appoggi, ed aggiungere una cerniera intermedia, riconducendosi ad un arco a tre cerniere. Nel seguito, per poter utilizzare nel modo più semplice il metodo della composizione degli spostamenti, si sceglie lo schema di Figura 2.8, in cui si è operata una sconnessione tripla in corrispondenza della mezzeria M del traverso.

Le tre incognite iperstatiche sono quindi le tre caratteristiche della sollecitazione interna in M , e le tre equazioni di congruenza dovranno ristabilire la continuità degli spostamenti e della rotazione in M :

$$\begin{aligned} u_{2\text{sin}}^M &= u_{2\text{des}}^M \\ u_{3\text{sin}}^M &= u_{3\text{des}}^M \\ \phi_{\text{sin}}^M &= \phi_{\text{des}}^M \end{aligned} \quad (2.45)$$

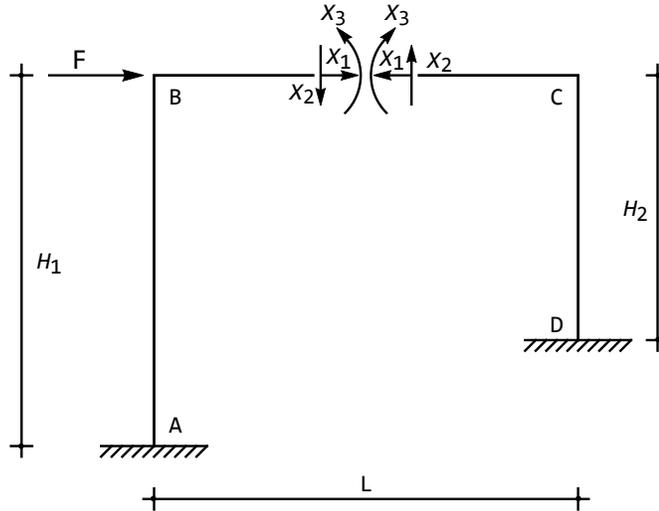


Figura 2.8: Il sistema isostatico equivalente

Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti (p.s.e), si esaminano separatamente i contributi delle sette forze, e per ciascuna di esse si calcoleranno gli spostamenti e la rotazione in M . Tornano utili, in questa fase, il metodo di composizione degli spostamenti, e la conoscenza dei *coefficienti fondamentali* per lo schema a mensola: per ciascuno schema, si traccia il diagramma dei momenti, ed a partire da questo si riconosce il contributo di ciascun tratto, operando su schemi noti.

Il contributo della forza F e dello sforzo normale a sinistra

Sullo schema di Figura 2.9, a partire dal diagramma del momento si può dedurre:

$$\begin{aligned} u_{3 \sin}^0 &= \frac{FH_1^3}{3EI} \\ u_{2 \sin}^0 &= \frac{FH_1^2 L}{2EI} \\ \phi_{\sin}^0 &= -\frac{FH_1^2}{2EI} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Lo spostamento orizzontale del punto M , infatti, è pari allo spostamento orizzontale del punto B , che è l'estremo libero della mensola AB , caricata da una forza F all'estremo, ed analoghe considerazioni valgono per la rotazione. Lo spostamento verticale, invece, è calcolabile considerando che il tratto BM ruota intorno al nodo B della quantità $\phi_B = -\frac{FH_1^2}{2EI}$, e quindi il punto M subisce lo spostamento verticale $-\phi_B \frac{L}{2}$.

Poichè il tratto BM è assialmente rigido, la forza X_1 può pensarsi agente in B , e quindi si ottengono subito i coefficienti:

$$\begin{aligned} u_{3 \sin}^{(1)} &= \frac{X_1 H_1^3}{3EI} \\ u_{2 \sin}^{(1)} &= \frac{X_1 H_1^2 L}{2EI} \\ \phi_{\sin}^{(1)} &= -\frac{X_1 H_1^2}{2EI} \end{aligned} \quad (2.47)$$

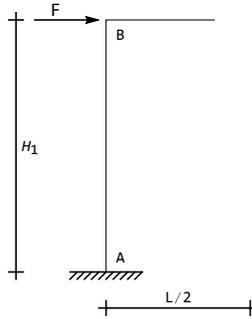


Figura 2.9: Lo schema con la forza F (o lo sforzo normale)

Il contributo dello sforzo di taglio a sinistra

A partire dal diagramma del momento di Figura 2.10 si può dedurre:

$$\begin{aligned} u_{3 \sin}^{(2)} &= \left(X_2 \frac{L}{2} \right) \frac{H_1^2}{2EI} \\ u_{2 \sin}^{(2)} &= \left(X_2 \frac{L}{2} \right) \frac{H_1 L}{EI} + \frac{X_2}{3EI} \left(\frac{L}{2} \right)^3 \\ \phi_{\sin}^{(2)} &= - \left(X_2 \frac{L}{2} \right) \frac{H_1}{EI} - \frac{X_2}{2EI} \left(\frac{L}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

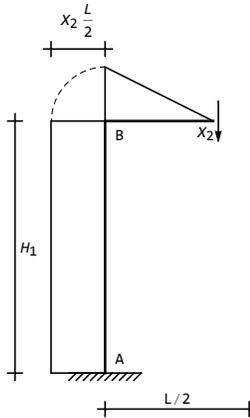


Figura 2.10: Lo schema con il taglio a sinistra

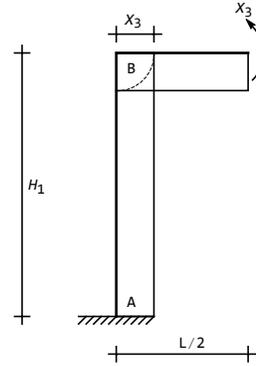
Lo spostamento assiale è uguale allo spostamento orizzontale del punto B , che è calcolabile sullo schema a mensola AB caricata da una coppia in estremità di intensità $-X_2 \frac{L}{2}$. Lo spostamento verticale del punto M è dovuto a due aliquote: il diagramma del momento sul tratto verticale implica una rotazione rigida del tratto BM , uguale alla rotazione in B della mensola AB caricata dalla coppia di intensità $-X_2 \frac{L}{2}$. Tale rotazione sarà, come noto, pari a $\phi_B = -X_2 \frac{L H_1}{2 EI}$, e quindi l'aliquota di abbassamento dovuta al momento in AB è pari a $-\phi_B \frac{L}{2}$. Ad essa va aggiunto lo spostamento dovuto al momento sul tratto BM , che può riguardarsi come dovuto ad una forza X_2 sulla sommità di una mensola di luce $\frac{L}{2}$.

La rotazione in M , infine, è la somma delle rotazioni dovute al momento costante lungo AB , e dal momento lungo BM .

Il contributo del momento a sinistra

A partire dal diagramma del momento in Figura 2.11 si possono infine dedurre i tre coefficienti:

$$\begin{aligned} u_{3\text{sin}}^{(3)} &= -X_3 \frac{H_1^2}{2EI} \\ u_{2\text{sin}}^{(3)} &= -X_3 \frac{H_1 L}{EI} - \frac{X_3}{2EI} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ \phi_{\text{sin}}^{(3)} &= X_3 \frac{H_1}{EI} + \frac{X_3}{EI} \left(\frac{L}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.49)$$



così esaurendo l'esame della semi-mensola di sinistra. L'esame della semi-mensola di destra porta a risultati simili, e permette di completare la scrittura delle equazioni di congruenza.

Figura 2.11: Lo schema con il momento a sinistra

Il contributo delle c.s.i. a destra

Il contributo dello sforzo normale sulla semi-mensola di destra si ottiene immediatamente come:

$$\begin{aligned} u_{3\text{des}}^{(1)} &= -\frac{X_1 H_2^3}{3EI} \\ u_{2\text{des}}^{(1)} &= -\frac{X_1 H_2^2 L}{2EI} \\ \phi_{\text{des}}^{(1)} &= \frac{X_1 H_2^2}{2EI} \end{aligned} \quad (2.50)$$

e sempre a partire dal diagramma del momento si può leggere il contributo del taglio:

$$\begin{aligned} u_{3\text{des}}^{(2)} &= \left(X_2 \frac{L}{2}\right) \frac{H_2^2}{2EI} \\ u_{2\text{des}}^{(2)} &= -\left(X_2 \frac{L}{2}\right) \frac{H_2 L}{EI} - \frac{X_2}{3EI} \left(\frac{L}{2}\right)^3 \\ \phi_{\text{des}}^{(2)} &= -\left(X_2 \frac{L}{2}\right) \frac{H_2}{EI} - \frac{X_2}{2EI} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

e quello del momento flettente:

$$\begin{aligned} u_{3\text{des}}^{(3)} &= X_3 \frac{H_2^2}{2EI} \\ u_{2\text{des}}^{(3)} &= -X_3 \frac{H_2 L}{EI} - \frac{X_3}{2EI} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ \phi_{\text{des}}^{(3)} &= -X_3 \frac{H_2}{EI} - \frac{X_3}{EI} \left(\frac{L}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Il calcolo dei coefficienti

Le equazioni di congruenza si esplicitano come:

$$\begin{aligned}
 u_{3\sin}^{(0)} + u_{3\sin}^{(1)} + u_{3\sin}^{(2)} + u_{3\sin}^{(3)} &= u_{3des}^{(1)} + u_{3des}^{(2)} + u_{3des}^{(3)} \\
 u_{2\sin}^{(0)} + u_{2\sin}^{(1)} + u_{2\sin}^{(2)} + u_{2\sin}^{(3)} &= u_{2des}^{(1)} + u_{2des}^{(2)} + u_{2des}^{(3)} \\
 \phi_{\sin}^{(0)} + \phi_{\sin}^{(1)} + \phi_{\sin}^{(2)} + \phi_{\sin}^{(3)} &= \phi_{des}^{(1)} + \phi_{des}^{(2)} + \phi_{des}^{(3)}
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Inserendo i valori trovati, e semplificando, si giunge al sistema di tre equazioni nelle tre incognite iperstatiche:

$$(H_1^2 - H_2^2) X_1 + \left(H_1 + \frac{L}{3} + H_2 \right) LX_2 + 2(H_2 - H_1) X_3 = -FH_1^2 \tag{2.54}$$

$$\frac{H_1^3 + H_2^3}{3} X_1 + (H_1^2 - H_2^2) \frac{L}{4} X_2 - \left(\frac{H_1^2}{2} + \frac{H_2^2}{2} \right) X_3 = -\frac{FH_1^3}{3} \tag{2.55}$$

$$\left(\frac{H_1^2}{2} + \frac{H_2^2}{2} \right) X_1 + (H_1 - H_2) \frac{L}{2} X_2 - (H_1 + L + H_2) X_3 = -\frac{FH_1^2}{2} \tag{2.56}$$

Risolvendo si ottengono le caratteristiche della sollecitazione interna nella mezzeria del traverso:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -\frac{FH_1^2 (3LH_2^2 + 2H_1^2 (L + 3H_2) + 2LH_1 (L + 4H_2))}{2\Delta} \\
 X_2 &= -\frac{3FH_1^2 H_2^2 (2LH_1 + H_1^2 + H_2 (2L + H_2))}{2L\Delta} \\
 X_3 &= -\frac{FH_1^2 (H_1 - H_2) H_2^2 (2L + 3H_1 + 3H_2)}{4\Delta}
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

e Δ fornita dalla 2.34.

I valori delle tre incognite iperstatiche vengono quindi a coincidere con quanto ottenuto con il metodo della linea elastica:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= n^{BC} \\
 X_2 &= t^{BC} \\
 X_3 &= m^{BC} \left(x_3 = \frac{L}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

2.4 Le variazioni termiche flessionali

Si ipotizzi ora che il telaio sia soggetto ad una variazione termica flessionale lungo l'intero traverso, come indicato in Figura 2.12.

Tutto quanto detto per le linee elastiche resta valido, sia che la rigidità assiale sia finita, sia che sia supposta infinita, come si farà nel seguito. Le

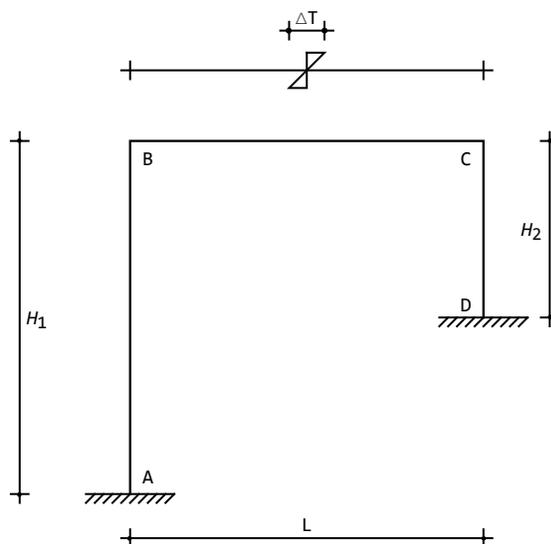


Figura 2.12: Il telaio zoppo soggetto a variazione termica flessionale lungo il traverso

tredici condizioni ai limiti descritte in precedenza restano inalterate, con l'unica eccezione dell'equazione di piano (2.31), che in assenza di forza si scriverà:

$$-t^{AB}(H_1) - t^{CD}(0) = 0 \quad (2.59)$$

Si ricordi però che in presenza di distorsioni flessionali $\mu = -\frac{\alpha\Delta T}{h}$ si ha:

$$m^{AB}(x_3) = -EI \frac{d^2 u_2^{AB}}{dx_3^2} + EI\mu = -EI \frac{d^2 u_2^{AB}}{dx_3^2} - EI \frac{\alpha\Delta T}{h} \quad (2.60)$$

Assumendo d'ora in poi $H_1 = L$ ed $H_2 = \frac{L}{2}$, si giunge alle tredici equazioni lineari:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_0 + La_1 + L^2 a_2 + L^3 a_3 &= \delta \\ c_0 &= 0 \\ -a_1 - 2La_2 - 3L^2 a_3 + c_1 &= 0 \\ 2a_2 + 6La_3 - 2c_2 &= \frac{\alpha\Delta T}{h} \\ c_0 + Lc_1 + L^2 c_2 + L^3 c_3 &= 0 \\ \delta + e_0 &= 0 \\ -c_1 - 2Lc_2 - 3L^2 c_3 + e_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned}
 2c_2 + 6Lc_3 - 2e_2 &= -\frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 e_0 + \frac{Le_1}{2} + \frac{L^2e_2}{4} + \frac{L^3e_3}{8} &= 0 \\
 -e_1 - Le_2 - \frac{3L^2e_3}{4} &= 0 \\
 a_3 + e_3 &= 0
 \end{aligned}$$

immediatamente risolvibili, fornendo gli spostamenti trasversali, e la traslazione assiale del traverso:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{x_3^2(-105L + 92x_3)}{456L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{x_3(22L^2 - 19Lx_3 - 3x_3^2)}{152L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{(13L - 23x_3)(L - 2x_3)^2}{456L} \frac{\alpha\Delta T}{h}
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\delta = -\frac{13L^2}{456} \frac{\alpha\Delta T}{h} \tag{2.63}$$

Si noti che la deformata, riportata in Figura 2.13, non dipende dalla rigidezza flessionale EI .

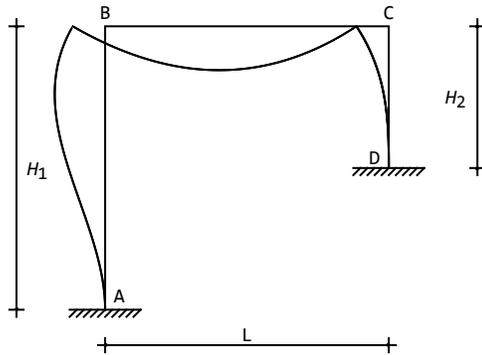


Figura 2.13: La deformata dovuta alla variazione termica flessionale lungo il traverso

I momenti ed i tagli, invece, dipendono dalla rigidezza flessionale, e si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{EI(35L - 92x_3)}{76L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 m^{BC}(x_3) &= \frac{3EI(-19L + 3x_3)}{76L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 m^{CD}(x_3) &= \frac{EI(-12L + 23x_3)}{19L} \frac{\alpha\Delta T}{h}
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= -\frac{23EI}{19L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 t^{BC}(x_3) &= \frac{9EI}{76L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 t^{CD}(x_3) &= \frac{23EI}{19L} \frac{\alpha\Delta T}{h}
 \end{aligned}
 \tag{2.65}$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 2.14:

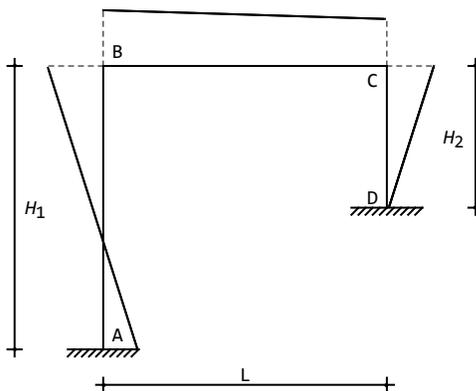


Figura 2.14: I momenti flettenti generati dalla variazione termica flessionale lungo il traverso

Il principio dei lavori virtuali

Un'utile verifica può essere condotta utilizzando il principio dei lavori virtuali. Per lo schema di Figura 2.12, scegliendo la struttura isostatica equivalente di Figura 2.15, si scriveranno tre espressioni del principio dei lavori virtuali, utilizzando come sistema di spostamenti la struttura reale, e come sistema di forze i tre schemi virtuali di Figura 2.16:

$$\begin{aligned}
 \int_s \frac{M_1 M}{EI} ds - \int_s M_1 \mu ds &= 0 \\
 \int_s \frac{M_2 M}{EI} ds - \int_s M_2 \mu ds &= 0 \\
 \int_s \frac{M_3 M}{EI} ds - \int_s M_3 \mu ds &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.66}$$

Il momento M può essere calcolato sulla struttura isostatica equivalente, e quindi, per il principio di sovrapposizione degli effetti, potrà scriversi:

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3 \tag{2.67}$$

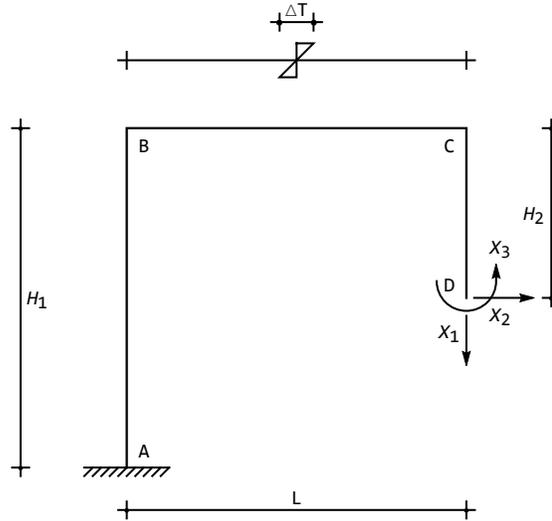


Figura 2.15: Un possibile sistema isostatico equivalente

Si noti però che M_0 sarà nullo, in quanto le distorsioni non provocano caratteristiche in una struttura isostatica. Inserendo quindi la (2.67) nelle espressioni del principio dei lavori virtuali, si giunge alle tre equazioni lineari nelle tre incognite iperstatiche:

$$\begin{aligned}
 X_1 \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds + X_2 \int_s \frac{M_1 M_2}{EI} ds + X_3 \int_s \frac{M_1 M_3}{EI} ds - \int_s M_1 \mu ds &= 0 \\
 X_1 \int_s \frac{M_2 M_1}{EI} ds + X_2 \int_s \frac{M_2^2}{EI} ds + X_3 \int_s \frac{M_2 M_3}{EI} ds - \int_s M_2 \mu ds &= 0 \quad (2.68) \\
 X_1 \int_s \frac{M_3 M_1}{EI} ds + X_2 \int_s \frac{M_3 M_2}{EI} ds + X_3 \int_s \frac{M_3^2}{EI} ds - \int_s M_3 \mu ds &= 0
 \end{aligned}$$

Nell' ipotesi, già fatta, in cui $H_1 = L$ ed $H_2 = \frac{L}{2}$, i momenti potranno scriversi come:

$$\begin{aligned}
 m_1^{AE}(x_3) &= m_1^{EB}(x_3) = -L \\
 m_1^{BC}(x_3) &= -L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\
 m_1^{DC}(x_3) &= 0 \\
 m_2^{AE}(x_3) &= -\frac{L}{2} \left(1 - \frac{2x_3}{L}\right) \\
 m_1^{EB}(x_3) &= x_3 \\
 m_2^{BC}(x_3) &= \frac{L}{2}
 \end{aligned} \quad (2.69)$$

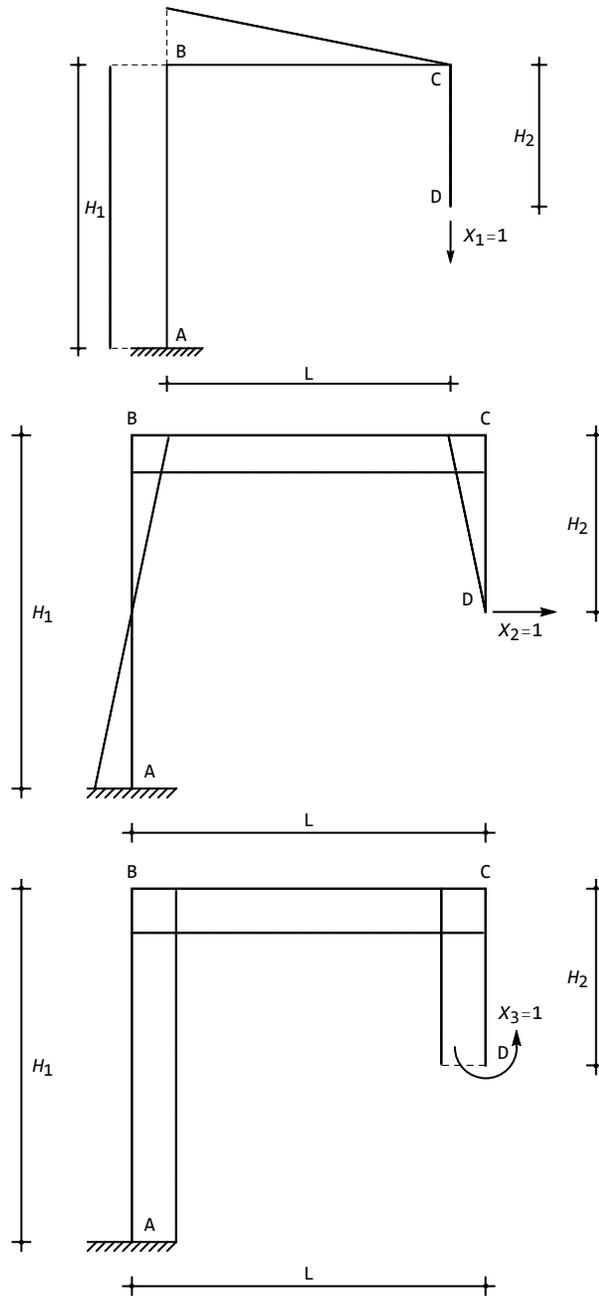


Figura 2.16: I tre sistemi virtuali su cui calcolare M_1 , M_2 ed M_3

$$\begin{aligned}
 m_2^{DC}(x_3) &= -x_3 \\
 m_1^{AE}(x_3) &= m_1^{EB}(x_3) = 1 \\
 m_1^{BC}(x_3) &= 1 \\
 m_1^{DC}(x_3) &= -1
 \end{aligned}$$

e gli integrali potranno facilmente esplicitarsi, portando a scrivere:

$$\begin{aligned}
 \frac{4L^3 X_1}{3EI} - \frac{L^3 X_2}{4EI} - \frac{3L^2 X_3}{2EI} + \frac{1}{2}L^2\mu &= 0 \\
 -\frac{L^3 X_1}{4EI} + \frac{3L^3 X_2}{8EI} + \frac{5L^2 X_3}{8EI} - \frac{1}{2}L^2\mu &= 0 \\
 -\frac{3L^2 X_1}{2EI} + \frac{5L^2 X_2}{8EI} + \frac{5L X_3}{2EI} - L\mu &= 0
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -\frac{9EI\mu}{76L} \\
 X_2 &= \frac{23EI\mu}{19L} \\
 X_3 &= \frac{EI\mu}{38}
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

confermando le (2.64) e le (2.65).

2.5 Le variazioni termiche assiali

Si ipotizzi ora che il traverso BC sia soggetto ad una variazione termica uniforme Δt di tipo assiale (cfr. Figura 2.17), assimilabile ad una distorsione assiale:

$$\lambda = -\alpha\Delta T \tag{2.72}$$

Se la rigidezza assiale del traverso è pari ad EA , lo sforzo normale nel tratto sarà quindi fornito da:

$$n^{BC}(x_3) = EA \frac{du_3^{BC}}{dx_3} - EA\alpha\Delta t \tag{2.73}$$

Ipotizzando che i ritti siano assialmente rigidi, le relative linee elastiche assiali sono identicamente nulle (per la presenza dei vincoli), e quindi si avrà:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= d_0 x_3 + d_1 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

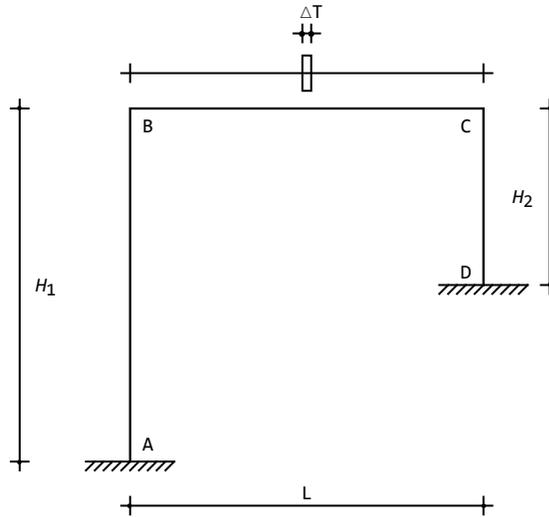


Figura 2.17: Il telaio zoppo soggetto a variazione termica uniforme lungo il traverso

Le condizioni ai limiti da imporre nei nodi dovranno rispecchiare queste ipotesi preliminari, e di conseguenza non potranno essere prese in considerazione equazioni in cui compaiono spostamenti assiali e sforzi normali dei ritti.

— nell'incastro in A si annullano spostamento trasversale e rotazione:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(0) &= 0 \\ \phi^{AB}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

— nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(H_1) &= u_3^{BC}(0) \\ u_2^{BC}(0) &= 0 \\ \phi^{AB}(H_1) &= \phi^{BC}(0) \end{aligned} \quad (2.76)$$

e le condizioni di equilibrio :

$$\begin{aligned} -m^{AB}(H_1) + m^{BC}(0) &= 0 \\ -t^{AB}(H_1) + n^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

— nel nodo in C , analogamente:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(L) &= 0 \\ u_2^{CD}(0) &= -u_3^{BC}(L) \\ \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0) \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} -m^{BC}(L) + m^{CD}(0) &= 0 \\ -t^{CD}(0) - n^{BC}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

— nell'incastro in D , infine, si annullano spostamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(H_2) &= 0 \\ \phi^{CD}(H_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

Risolvendo le quattordici equazioni si ottengono le costanti di integrazione e quindi gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{x_3^2(-99L + 52x_3)}{312EI + 57EAL^2} EA\alpha\Delta T \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{(-14L^2 + 19Lx_3 - 5x_3^2)}{104EI + 19EAL^2} EA\alpha\Delta T \\ u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{(L - 2x_3)^2(10L + 13x_3)}{312EI + 57EAL^2} EA\alpha\Delta T \end{aligned} \quad (2.81)$$

mentre la linea elastica assiale del traverso è fornita da:

$$u_3^{BC}(x_3) = \frac{L^2(-47L + 57x_3)}{312EI + 57EAL^2} EA\alpha\Delta T \quad (2.82)$$

La relativa deformata è riportata in Figura 2.18

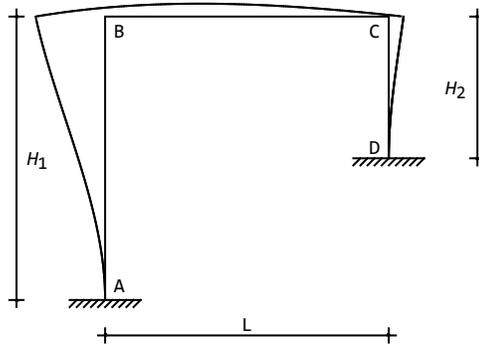


Figura 2.18: La deformata causata dalla variazione termica uniforme lungo il traverso

Le caratteristiche flessionali si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= \frac{2I(33L - 52x_3)}{104I + 19AL^2} EA\alpha\Delta T \\ m^{BC}(x_3) &= \frac{2I(-19L + 15x_3)}{104I + 19AL^2} EA\alpha\Delta T \\ m^{CD}(x_3) &= -\frac{8I(L - 13x_3)}{104I + 19AL^2} EA\alpha\Delta T \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= -\frac{104I}{104I + 19AL^2}EA\alpha\Delta T \\
 t^{BC}(x_3) &= \frac{30I}{104I + 19AL^2}EA\alpha\Delta T \\
 t^{CD}(x_3) &= \frac{104I}{104I + 19AL^2}EA\alpha\Delta T
 \end{aligned}
 \tag{2.84}$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 2.19:

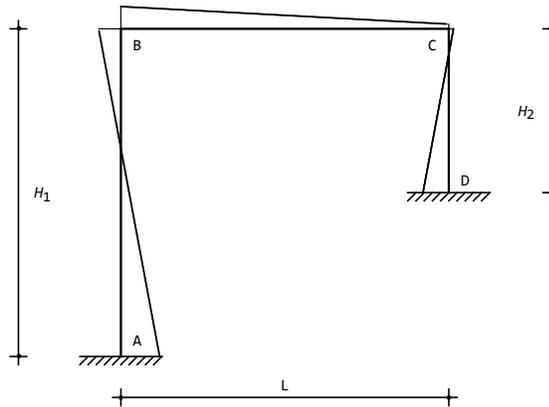


Figura 2.19: I momenti causati dalla variazione termica uniforme lungo il traverso

Lo sforzo normale nel traverso è ottenibile dalla (2.73):

$$n^{BC}(x_3) = -\frac{104I}{104I + 19AL^2}EA\alpha\Delta T
 \tag{2.85}$$

mentre gli sforzi normali nei ritti sono ottenibili dall'equilibrio dei nodi B e C :

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= -t_{BC}(0) \\
 n^{CD}(x_3) &= t_{BC}(L)
 \end{aligned}
 \tag{2.86}$$

L'effetto della deformabilità assiale del traverso BC può trascurarsi semplicemente portando la rigidità assiale EA ad infinito, nelle formule precedenti. Ad esempio, lo sforzo normale nel traverso si semplifica in:

$$n^{BC}(x_3) = -\frac{104EI}{19L^2}\alpha\Delta T
 \tag{2.87}$$

Si può però anche semplificare *a priori* lo schema di partenza, ponendo la linea elastica assiale del traverso nella forma:

$$u_3^{BC}(x_3) = d_0 - \lambda x_3
 \tag{2.88}$$

e modificando le condizioni ai limiti, eliminando le due condizioni di equilibrio in cui compare lo sforzo assiale $n^{BC}(x_3)$, ed aggiungendo l'equazione di piano che esprime l'equilibrio del traverso:

$$-t^{AB}(H_1) - t^{CD}(0) = 0 \quad (2.89)$$

Risolvendo le tredici equazioni si ottengono le costanti di integrazione, da cui gli spostamenti trasversali (nel caso in cui $H_1 = L$ ed $H_2 = L/2$):

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{x_3^2(-99L + 52x_3)}{57L^2} \alpha \Delta T \\ u_2^{BC}(x_3) &= -\frac{x_3(14L^2 - 19Lx_3 + 5x_3^2)}{19L^2} \alpha \Delta T \\ u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{(L - 2x_3)^2(10L + 13x_3)}{57L^2} \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (2.90)$$

mentre la linea elastica assiale del traverso è fornita da:

$$u_3^{BC}(x_3) = \left(-\frac{47}{57}L + x_3\right) \alpha \Delta T \quad (2.91)$$

Le caratteristiche flessionali si ottengono per derivazione successiva :

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= \frac{2EI(33L - 52x_3)}{19L^2} \alpha \Delta T \\ m^{BC}(x_3) &= -\frac{2EI(19L - 15x_3)}{19L^2} \alpha \Delta T \\ m^{CD}(x_3) &= -\frac{8EI(L - 13x_3)}{19L^2} \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} t^{AB}(x_3) &= -\frac{104EI}{19L^2} \alpha \Delta T \\ t^{BC}(x_3) &= \frac{30EI}{19L^2} \alpha \Delta T \\ t^{CD}(x_3) &= \frac{104EI}{19L^2} \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (2.93)$$

Lo sforzo normale nel traverso è ottenibile dall'equilibrio del nodo B (o del nodo C) alla traslazione orizzontale:

$$-t^{AB}(x_3) + n_{BC}(0) = 0 \quad (2.94)$$

da cui:

$$n^{BC}(x_3) = -\frac{104EI}{19L^2} \alpha \Delta T \quad (2.95)$$

confermando la (2.87). Gli sforzi normali nei ritti sono ottenibili dall'equilibrio dei nodi B e C alla traslazione verticale:

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= -t_{BC}(0) \\ n^{CD}(x_3) &= t_{BC}(L) \end{aligned} \quad (2.96)$$

Il principio dei lavori virtuali

Utilizzando anche in questo caso il principio dei lavori virtuali, si sceglie per comodità lo schema isostatico equivalente di Figura 2.20, in modo da poter utilizzare i risultati già dedotti nel caso di variazione termica flessionale. Ed infatti, potrà ora scriversi:

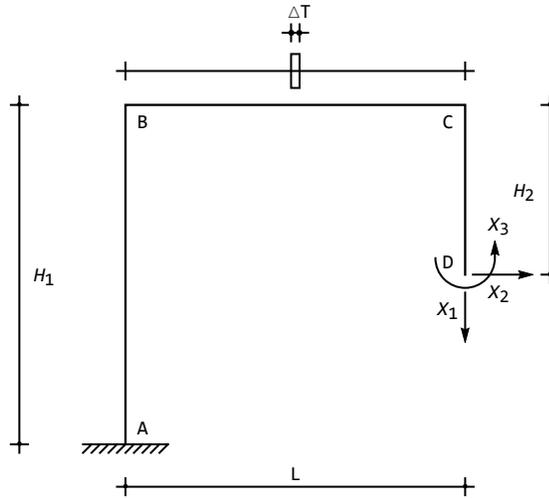


Figura 2.20: Un possibile sistema isostatico equivalente

$$\begin{aligned}
 \int_s \frac{M_1 M}{EI} ds + \int_s \frac{N_1 N}{EA} ds - \int_s N_1 \lambda ds &= 0 \\
 \int_s \frac{M_2 M}{EI} ds + \int_s \frac{N_2 N}{EA} ds - \int_s N_2 \lambda ds &= 0 \\
 \int_s \frac{M_3 M}{EI} ds + \int_s \frac{N_3 N}{EA} ds - \int_s N_3 \lambda ds &= 0
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

Si è per ora considerato anche l'effetto delle deformazioni da sforzo assiale, anche se si è deciso di considerare rigidi assialmente ambedue i ritti. Il momento M e lo sforzo normale N possono essere calcolati sulla struttura isostatica equivalente, e quindi, per il principio di sovrapposizione degli effetti, potrà scriversi:

$$\begin{aligned}
 M &= M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3 \\
 N &= N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 + X_3 N_3
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Si noti però che M_0 ed N_0 saranno nulli, in quanto le distorsioni non provocano caratteristiche in una struttura isostatica. Inserendo quindi le (2.98) nelle espressioni del principio dei lavori virtuali, si giunge alle tre equazioni lineari

nelle tre incognite iperstatiche:

$$\begin{aligned}
 & X_1 \left(\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds + \int_s \frac{N_1^2}{EA} ds \right) + X_2 \left(\int_s \frac{M_1 M_2}{EI} ds + \int_s \frac{N_1 N_2}{EA} ds \right) + \\
 & \quad X_3 \left(\int_s \frac{M_1 M_3}{EI} ds + \int_s \frac{N_1 N_3}{EA} ds \right) - \int_s N_1 \lambda ds = 0 \\
 & X_1 \left(\int_s \frac{M_2 M_1}{EI} ds + \int_s \frac{N_2 N_1}{EA} ds \right) + X_2 \left(\int_s \frac{M_2^2}{EI} ds + \int_s \frac{N_2^2}{EA} ds \right) + \\
 & \quad X_3 \left(\int_s \frac{M_2 M_3}{EI} ds + \int_s \frac{N_2 N_3}{EA} ds \right) - \int_s N_2 \lambda ds = 0 \\
 & X_1 \left(\int_s \frac{M_3 M_1}{EI} ds + \int_s \frac{N_3 N_1}{EA} ds \right) + X_2 \left(\int_s \frac{M_3 M_2}{EI} ds + \int_s \frac{N_3 N_2}{EA} ds \right) + \\
 & \quad X_3 \left(\int_s \frac{M_3^2}{EI} ds + \int_s \frac{N_3^2}{EA} ds \right) - \int_s N_1 \lambda ds = 0
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

Nell'ipotesi, già fatta, in cui $H_1 = L$ ed $H_2 = \frac{L}{2}$, gli sforzi normali saranno facilmente deducibili come:

$$\begin{aligned}
 n_1^{AB}(x_3) &= -1 \\
 n_1^{BC}(x_3) &= 0 \\
 n_1^{DC}(x_3) &= 1 \\
 n_2^{AB}(x_3) &= 0 \\
 n_2^{BC}(x_3) &= 1 \\
 n_2^{DC}(x_3) &= 0 \\
 n_3(x_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

e quindi gli integrali si annulleranno tutti, tranne:

$$\begin{aligned}
 \int_s \frac{N_1^2}{EA} ds &= \frac{3L}{2EA} \\
 \int_s \frac{N_2^2}{EA} ds &= \frac{L}{EA} \\
 \int_s N_2 \lambda ds &= L\lambda
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

Infine, se si vuole trascurare la deformabilità assiale dei ritti, occorrerà trascurare anche il primo di questi integrali, che è esteso proprio lungo i ritti.

Il sistema (2.99) si modifica allora come:

$$\begin{aligned}
 & \frac{4L^3}{3EI} X_1 - \frac{L^3 X_2}{4EI} - \frac{3L^2 X_3}{2EI} = 0 \\
 & -\frac{L^3 X_1}{4EI} + \left(\frac{3L^3}{8EI} + \frac{L}{EA} \right) X_2 + \frac{5L^2 X_3}{8EI} - L\lambda = 0 \\
 & -\frac{3L^2 X_1}{2EI} + \frac{5L^2 X_2}{8EI} + \frac{5L X_3}{2EI} = 0
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}X_1 &= -\frac{30I}{104I + 19AL^2}EA\lambda \\X_2 &= \frac{104I}{104I + 19AL^2}EA\lambda \\X_3 &= -\frac{44IL}{104I + 19AL^2}EA\lambda\end{aligned}\tag{2.103}$$

confermando le (2.84) e (2.85).

Capitolo 3

Portale doppio

Si esamina ora il portale doppio di Figura 3.1, alto H e di luce complessiva $2L$. Esso è costituito da tre segmenti, collegati al suolo mediante tre appoggi, e tra loro con una cerniera multipla in C . Il traverso di sinistra è caricato da un carico uniformemente distribuito di intensità q .

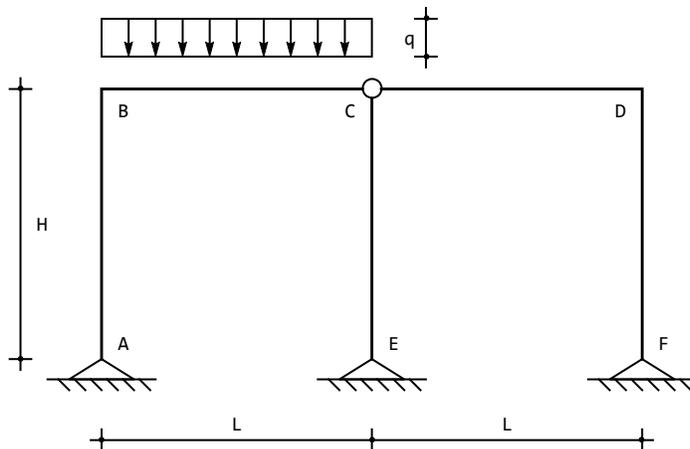


Figura 3.1: Un telaio a due campate ed un piano

La struttura è suddivisibile in cinque elementi, connessi da sei nodi. Ipotizzando che le rigidità assiali e flessionali siano ambedue finite, le linee elastiche flessionali saranno polinomi cubici, mentre le linee elastiche assiali saranno lineari, a parte la linea elastica flessionale del tratto BC , che vede la presenza di

un integrale particolare:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\
u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{24EI} \\
u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 \\
u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
u_3^{CD}(x_3) &= f_0 + f_1x_3 \\
u_2^{CE}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \\
u_3^{CE}(x_3) &= h_0 + h_1x_3 \\
u_2^{DF}(x_3) &= m_0 + m_1x_3 + m_2x_3^2 + m_3x_3^3 \\
u_3^{DF}(x_3) &= n_0 + n_1x_3
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Corrispondentemente, si potranno scrivere trenta equazioni nei sei nodi.

Si può poi ipotizzare una inestensibilità assiale delle cinque aste, per cui le linee elastiche assiali sarebbero costanti. Inoltre, le condizioni ai limiti impongono subito che le linee assiali dei tre tratti verticali sono identicamente nulle, mentre i due tratti orizzontali subiscono lo stesso spostamento assiale δ . Potrà quindi scriversi, in questa ipotesi:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
u_3^{AB}(x_3) &= 0 \\
u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{24EI} \\
u_3^{BC}(x_3) &= \delta \\
u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
u_3^{CD}(x_3) &= \delta \\
u_2^{CE}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \\
u_3^{CE}(x_3) &= 0 \\
u_2^{DF}(x_3) &= m_0 + m_1x_3 + m_2x_3^2 + m_3x_3^3 \\
u_3^{DF}(x_3) &= 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Corrispondentemente, si scriveranno venti equazioni ai limiti nelle sole quantità flessionali, imponendo poi anche l'equilibrio del traverso nei confronti della traslazione orizzontale (equazione di piano).

Un'altra semplificazione si ottiene realizzando che il tratto CE può essere considerato un pendolo, non soggetto a momenti o tagli. Può quindi assumersi a priori che la linea elastica $u_2^{CE}(x_3)$ sia lineare. Infine, il pendolo CE può anche assumersi estensibile, a differenza degli altri tratti.

Nel seguito, si assume il modello definito dalle (3.2), e quindi si scriveranno le seguenti condizioni ai limiti:

— negli appoggi in A , E ed F si annullano gli spostamenti trasversali, ed il momento flettente. L'annullarsi della componente assiale di spostamento è già stata considerata, in via preliminare, quando si sono annullate le linee elastiche assiali dei rititi:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 m^{AB}(0) &= 0 \\
 u_2^{CE}(H) &= 0 \\
 m^{CE}(H) &= 0 \\
 u_2^{DF}(H) &= 0 \\
 m^{DF}(H) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

— nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(H) &= \delta \\
 u_2^{BC}(0) &= 0 \\
 \phi^{AB}(H) &= \phi^{BC}(0)
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

e la condizione di equilibrio:

$$-m^{AB}(H) + m^{BC}(0) = 0
 \tag{3.5}$$

Le altre due condizioni di equilibrio, relative alle forze orizzontali ed alle forze verticali:

$$\begin{aligned}
 -t^{AB}(H) + n^{BC}(0) &= 0 \\
 n^{AB}(H) + t^{BC}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

coinvolgono gli sforzi normali, e non possono essere utilizzate in questa fase. Potranno però fornire gli sforzi normali, una volta conosciuti i tagli.

Nel nodo triplo in C , le condizioni di congruenza dovranno imporre l'annullarsi dell'abbassamento del nodo, ed uguagliare a δ il suo spostamento orizzontale:

$$\begin{aligned}
 u_2^{BC}(L) &= 0 \\
 u_2^{CD}(0) &= 0 \\
 u_2^{CE}(0) &= -\delta
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Si noti che l'origine del sistema di riferimento del tratto CE è in C , che di conseguenza l'asse X_3 è diretto verso il basso, e quindi l'asse X_2 punta verso sinistra. Ciò spiega i segni dell'ultima equazione. Per l'equilibrio, invece, bisognerà simulare la cerniera annullando i momenti:

$$\begin{aligned}
 m^{BC}(L) &= 0 \\
 m^{CD}(0) &= 0 \\
 m^{CE}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

mentre le restanti equazioni di equilibrio, da leggersi sulla Figura 3.2, coinvolgono gli sforzi normali, e quindi non possono essere utilizzate direttamente:

$$\begin{aligned} -n^{BC}(L) + n^{CD}(0) - t^{CE}(0) &= 0 \\ -t^{BC}(L) + n^{CE}(0) + t^{CD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nel nodo in D si hanno condizioni simili a quelle imposte in B :

$$\begin{aligned} u_2^{DF}(0) &= -\delta \\ u_2^{CD}(L) &= 0 \\ \phi^{CD}(L) &= \phi^{DF}(0) \\ -m^{CD}(L) + m^{DF}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

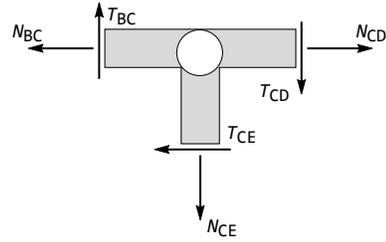


Figura 3.2: La cerniera nel nodo triplo

Infine, l'equilibrio del traverso permette di scrivere l'equazione di piano:

$$-t^{AB}(H) - t^{CE}(0) - t^{DF}(0) = 0 \quad (3.11)$$

Si ottengono le costanti di integrazione, da cui gli spostamenti trasversali e lo spostamento assiale δ del traverso:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{qL^3}{96EI} \frac{x_3(H(H+2L) + x_3^2)}{H(H+L)} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{q}{96EI} \frac{(L-x_3)x_3(2L^2(2H+L) + L(4H+5L)x_3 - 4(H+L)x_3^2)}{(H+L)} \\ u_2^{CD}(x_3) &= \frac{qL^2}{96EI} \frac{x_3(-L^2 + x_3^2)}{(H+L)} \\ u_2^{CE}(x_3) &= \frac{qL^3}{48EI} (x_3 - H) \\ u_2^{DF}(x_3) &= -\frac{qL^3}{96EI} \frac{(H-x_3)(2H(H+L) + 2Hx_3 - x_3^2)}{H(H+L)} \\ \delta &= \frac{qHL^3}{48EI} \end{aligned} \quad (3.12)$$

La deformata si presenta come in Figura 3.3.

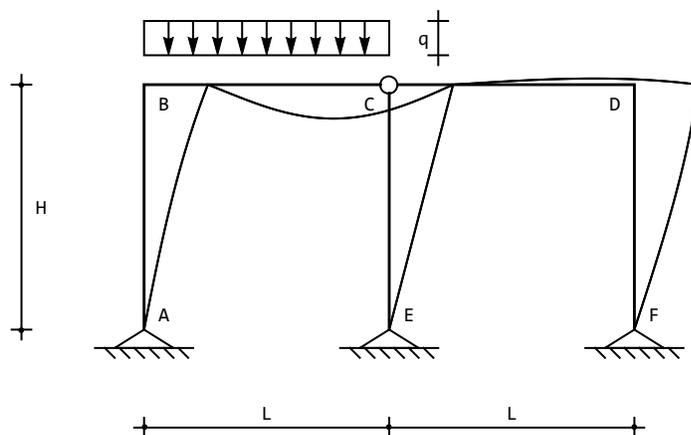


Figura 3.3: La deformata del telaio

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{qL^3x_3}{16H(H+L)} \\
 m^{BC}(x_3) &= -\frac{q(L-x_3)(L^2-8(H+L)x_3)}{16(H+L)} \\
 m^{CD}(x_3) &= -\frac{qL^2x_3}{16(H+L)} \\
 m^{CE}(x_3) &= 0 \\
 m^{DF}(x_3) &= \frac{qL^3(-H+x_3)}{16H(H+L)}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 3.4.

Gli sforzi di taglio si ottengono derivando i momenti:

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= -\frac{qL^3}{16H(H+L)} \\
 t^{BC}(x_3) &= \frac{q(L(8H+9L)-16(H+L)x_3)}{16(H+L)} \\
 t^{CD}(x_3) &= -\frac{qL^2}{16(H+L)} \\
 t^{CE}(x_3) &= 0 \\
 t^{DF}(x_3) &= \frac{qL^3}{16H(H+L)}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

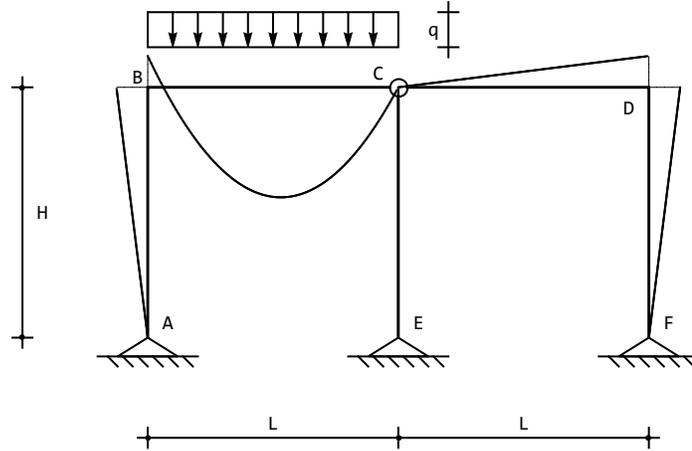


Figura 3.4: Il diagramma del momento flettente per il portale doppio

Il massimo valore del momento si attinge in corrispondenza del punto di nullo del taglio, ossia in:

$$x_3^* = \frac{L(8H + 9L)}{16(H + L)} \quad (3.15)$$

ed è pari a :

$$M_{\max} = m^{BC}(x_3^*) = \frac{qL^2(8H + 7L)^2}{512(H + L)^2} \quad (3.16)$$

Gli sforzi normali si deducono a partire da condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= -\frac{qL(8H + 9L)}{16(H + L)} \\ n^{BC}(x_3) &= -\frac{qL^3}{16H(H + L)} \\ n^{CD}(x_3) &= -\frac{qL^3}{16H(H + L)} \\ n^{CE}(x_3) &= -\frac{qL(4H + 3L)}{8(H + L)} \\ n^{DF}(x_3) &= -\frac{qL^2}{16(H + L)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.1 Il principio dei lavori virtuali

Per verificare la correttezza dei risultati ottenuti, può utilizzarsi il principio delle forze virtuali. Una veloce analisi statica del telaio evidenzia la possibilità di scrivere nove equazioni di equilibrio, mentre ogni appoggio al piede genera

due reazioni incognite, ed in corrispondenza della cerniera si hanno tre tagli e tre sforzi normali incogniti (come evidenziato in Figura 3.2). Ne segue che la struttura ha un grado di iperstaticità.

L'analisi cinematica porta ovviamente alla stessa conclusione: la struttura senza vincoli possiede nove gradi di libertà, in corrispondenza di ciascun appoggio possono scriversi due equazioni di vincolo, e nella cerniera interna occorre imporre la congruenza dello spostamento verticale e dello spostamento orizzontale del nodo per le tre aste concorrenti, generando quindi quattro equazioni di vincolo.

Si sceglie allora la struttura isostatica equivalente di Figura 3.5, e si utilizza il principio dei lavori virtuali al fine di calcolare la corrispondente incognita iperstatica, ossia il momento flettente in B .

Il sistema di spostamenti è quello reale, e può leggersi sullo schema di Figura 3.1, o equivalentemente sullo schema isostatico equivalente di Figura 3.5. Esso è sicuramente congruente. Il sistema di forze si deduce dallo schema di Figura 3.6, ed è costituito da due coppie unitarie, uguale e contrarie, agenti in B , e dalle risultanti reazioni vincolari. Esso è quindi in equilibrio.

Il principio delle forze virtuali si scrive :

$$\int_s M_1 \frac{M ds}{EI} = 0 \quad (3.18)$$

dove M_1 è il diagramma dei momenti sullo schema di Figura 3.6, ed M è il momento calcolato sul sistema di Figura 3.1 (o sullo schema equivalente di Figura 3.5). A sua volta, il principio di sovrapposizione degli effetti permette di scrivere:

$$M = M_0 + XM_1 \quad (3.19)$$

dove M_0 dovrà essere calcolato sullo schema S_0 di Figura 3.7.

Sarà quindi:

$$\int_s M_1 \frac{(M_0 + XM_1) ds}{EI} = 0 \quad (3.20)$$

da cui l'incognita iperstatica:

$$X = - \frac{\int_s M_1 M_0 ds}{\int_s M_1^2 ds} \quad (3.21)$$

Lo schema S_0 vede il momento non nullo solo sulla campata BC , che si comporta come trave semplicemente appoggiata. Segue quindi subito:

$$m_0^{BC}(x_3) = \frac{q}{2} x_3 (L - x_3) \quad (3.22)$$

Il diagramma M_1 si può tracciare immediatamente sul tratto AB , dove è lineare ed assume valori noti agli estremi. Il taglio su AB è uguale e contrario al taglio in FD , e quindi l'inclinazione dei due tratti di diagramma è anch'essa

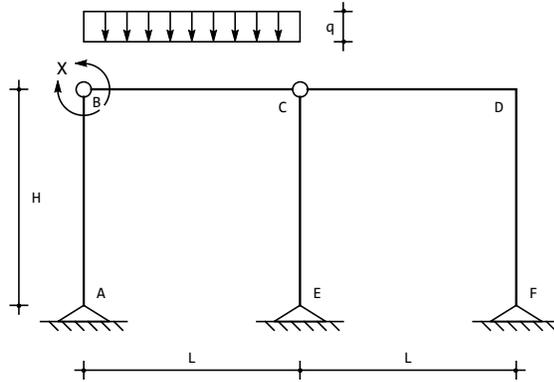


Figura 3.5: Un sistema isostatico equivalente al portale di Figura 3.1

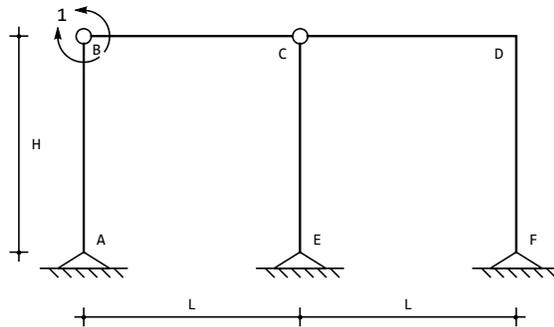


Figura 3.6: Il sistema di forze virtuali

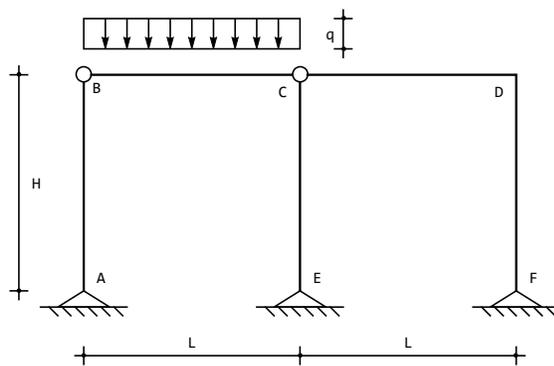


Figura 3.7: Il sistema S_0 caricato dalle sole forze esterne

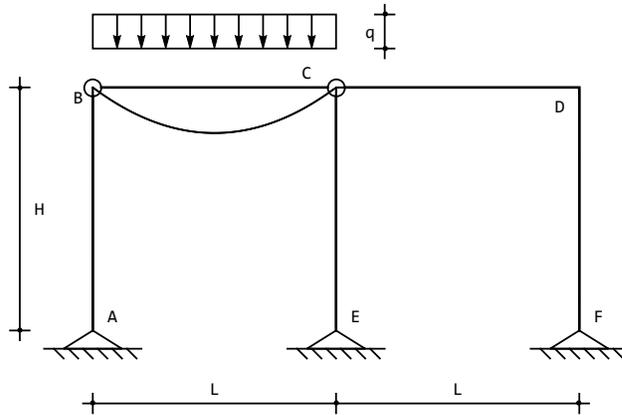


Figura 3.8: Il momento M_0

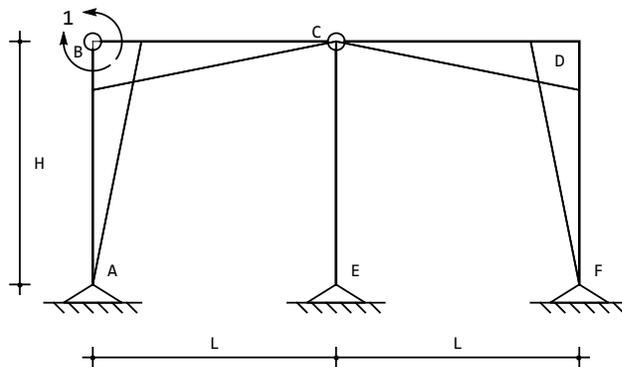


Figura 3.9: Il momento M_1

uguale e contraria. Il resto è banale:

$$\begin{aligned}
 m_1^{AB}(x_3) &= \frac{x_3}{H} \\
 m_1^{BC}(x_3) &= 1 - \frac{x_3}{L} \\
 m_1^{CD}(x_3) &= \frac{x_3}{L} \\
 m_1^{DF}(x_3) &= 1 - \frac{x_3}{H}
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

Il calcolo della incognita iperstatica è immediato:

$$\begin{aligned} X &= - \frac{\frac{q}{2} \int_0^L x_3 (L - x_3) \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) dx_3}{\int_0^H \left(\frac{x_3}{H}\right)^2 dx_3 + \int_0^L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right)^2 dx_3 + \int_0^L \left(\frac{x_3}{L}\right)^2 dx_3 + \int_0^H \left(1 - \frac{x_3}{H}\right)^2 dx_3} \\ &= - \frac{qL^3}{16(H + L)} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Capitolo 4

Un telaio con bipendolo interno

Si vuole conoscere la deformata della struttura in Figura 4.1, insieme alle caratteristiche della sollecitazione interna. I tratti sono assialmente deformabili, e la soluzione in ipotesi di inestensibilità assiale è ottenuta portando ad infinito la rigidità assiale delle aste. Il telaio non è soggetto a carichi distribuiti, e quindi

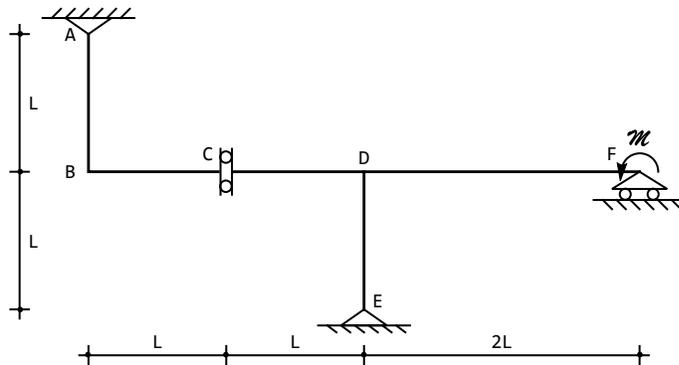


Figura 4.1: Il telaio di esempio

le linee elastiche flessionali saranno polinomi cubici, mentre le linee elastiche assiali saranno lineari:

$$\begin{aligned}u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 \\u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
u_3^{CD}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3 \\
u_2^{DE}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 \\
u_3^{DE}(x_3) &= h_0 + h_1 x_3 \\
u_2^{DF}(x_3) &= k_0 + k_1 x_3 + k_2 x_3^2 + k_3 x_3^3 \\
u_3^{DF}(x_3) &= m_0 + m_1 x_3
\end{aligned}$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno:

— nell'appoggio in A si annullano ambedue le componenti di spostamento, ed il momento flettente:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(0) &= 0 \\
u_3^{AB}(0) &= 0 \\
m^{AB}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

— nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(L) &= -u_3^{BC}(0) \\
u_3^{AB}(L) &= u_2^{BC}(0) \\
\phi^{AB}(L) &= \phi^{BC}(0)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

e le tre condizioni di equilibrio :

$$\begin{aligned}
t^{AB}(L) + n_3^{BC}(0) &= 0 \\
-n^{AB}(L) + t^{BC}(0) &= 0 \\
-m^{AB}(L) + m^{BC}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

In corrispondenza del bipendolo sono permesse le discontinuità negli spostamenti verticali. Sono però da imporre le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
u_3^{BC}(L) &= u_3^{CD}(0) \\
\phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

e le quattro condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
t^{BC}(L) &= 0 \\
t^{CD}(0) &= 0 \\
n^{BC}(L) &= n^{CD}(0) \\
m^{BC}(L) &= m^{CD}(0)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Nel nodo triplo, in D , bisognerà rispettare la congruenza degli spostamenti e delle rotazioni tra il tratto CD ed il tratto DE :

$$\begin{aligned}
u_2^{CD}(L) &= u_3^{DE}(0) \\
u_3^{CD}(L) &= -u_2^{DE}(0) \\
\phi^{CD}(L) &= \phi^{DE}(0)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

ed anche la congruenza tra i due tratti orizzontali CD e DF :

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(L) &= u_2^{DF}(0) \\ u_3^{CD}(L) &= u_3^{DF}(0) \\ \phi^{CD}(L) &= \phi^{DF}(0) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sono automaticamente soddisfatte le condizioni di congruenza tra gli spostamenti di DE e di DF . Restano da imporre le tre equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} -t^{CD}(L) + t^{DF}(0) + n^{DE}(0) &= 0 \\ -n^{CD}(L) + n^{DF}(0) - t^{DE}(0) &= 0 \\ -m^{CD}(L) + m^{DF}(0) + m^{DE}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nell'appoggio in E si annullano spostamenti e momenti:

$$\begin{aligned} u_2^{DE}(L) &= 0 \\ u_3^{DE}(L) &= 0 \\ m^{DE}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

mentre nel carrello in F la congruenza imporrà l'annullarsi dello spostamento verticale:

$$u_2^{DF}(2L) = 0 \quad (4.11)$$

ed infine, per l'equilibrio:

$$\begin{aligned} n^{DF}(2L) &= 0 \\ m^{DF}(L) &= \mathcal{M} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Risolviendo le trenta equazioni si ottengono le costanti di integrazione, da cui si deducono gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}x_3}{12\Delta} (-18I^2 + 45AIL^2 - 28A^2L^4 + A(-3I + 4AL^2)x_3^2) \\ u_2^{BC}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3}{12\Delta} (3I - 4AL^2)(6I - 4AL^2 + 3ALx_3) \\ u_2^{CD}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{12\Delta} (54I^2L + 111AIL^3 - 20A^2L^5 \\ &\quad + 2(-9I^2 + 9AIL^2 + 4A^2L^4)x_3 + 3AL(-3I + 4AL^2)x_3^2) \\ u_2^{DE}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(L - x_3)}{12\Delta} (-6(-3I^2 + AIL^2 + 4A^2L^4) + \\ &\quad 2AL(-3I + 4AL^2)x_3 + A(3I - 4AL^2)x_3^2) \\ u_2^{DF}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(2L - x_3)}{6\Delta} (3I(3I + 10AL^2) + AL(15I + 8AL^2)x_3 + \\ &\quad A(3I + 10AL^2)x_3^2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

e gli spostamenti assiali:

$$\begin{aligned}
u_3^{AB}(x_3) &= 0 \\
u_3^{BC}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{2\Delta} (-3I + 4AL^2) (-IL + AL^3 + Ix_3) \\
u_3^{CD}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{2\Delta} (-3I + 4AL^2) (AL^3 + Ix_3) \\
u_3^{DE}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}I(L - x_3)}{\Delta} (3I + 10AL^2) \\
u_3^{DF}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{2\Delta} (-3I^2 + AIL^2 + 4A^2L^4)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

con:

$$\Delta = AIL(9EI + 16EAL^2) \tag{4.15}$$

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned}
m^{AB}(x_3) &= \frac{(3I - 4AL^2)\mathcal{M}x_3}{18IL + 32AL^3} \\
m^{BC}(x_3) &= m^{CD}(x_3) = \frac{(3I - 4AL^2)\mathcal{M}}{18I + 32AL^2} \\
m^{DE}(x_3) &= -\frac{(3I - 4AL^2)\mathcal{M}(L - x_3)}{18IL + 32AL^3} \\
m^{DF}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(3IL - 4AL^3 + (3I + 10AL^2)x_3)}{9IL + 16AL^3}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
t^{AB}(x_3) &= t^{DE}(x_3) = \frac{(3I - 4AL^2)\mathcal{M}}{18IL + 32AL^3} \\
t^{BC}(x_3) &= t^{CD}(x_3) = 0 \\
t^{DF}(x_3) &= \frac{(3I + 10AL^2)\mathcal{M}}{9IL + 16AL^3}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
n^{AB}(x_3) &= n^{DF}(x_3) = 0 \\
n^{BC}(x_3) &= n^{CD}(x_3) = \frac{(-3I + 4AL^2)\mathcal{M}}{18IL + 32AL^3} \\
n^{DE}(x_3) &= -\frac{(3I + 10AL^2)\mathcal{M}}{9IL + 16AL^3}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Il caso di inestensibilità assiale

Nel caso si vogliono ritrovare i risultati ottenuti in ipotesi di inestensibilità assiale, occorre operare il limite per EA che tende ad infinito. I risultati si

semplificano notevolmente:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{48EI} \frac{x_3(-7L^2 + x_3^2)}{L} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{48EI} (4L - 3x_3)x_3 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{48EI} (-5L^2 + 2Lx_3 + 3x_3^2) \\
 u_2^{DE}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{48EI} \frac{(L - x_3)(6L^2 - 2Lx_3 + x_3^2)}{L} \\
 u_2^{DF}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{48EI} \frac{(2L - x_3)x_3(4L + 5x_3)}{L}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{8} \frac{x_3}{L} \\
 m^{BC}(x_3) &= m^{CD}(x_3) = -\frac{\mathcal{M}}{8} \\
 m^{DE}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{8} \frac{(L - x_3)}{L} \\
 m^{DF}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{8} \left(-2 + \frac{5x_3}{L} \right)
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= t^{DE}(x_3) = -\frac{\mathcal{M}}{8L} \\
 t^{BC}(x_3) &= t^{CD}(x_3) = 0 \\
 t^{DF}(x_3) &= \frac{5}{8} \frac{\mathcal{M}}{L}
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Il diagramma dei momenti è riportato in Figura 4.2.

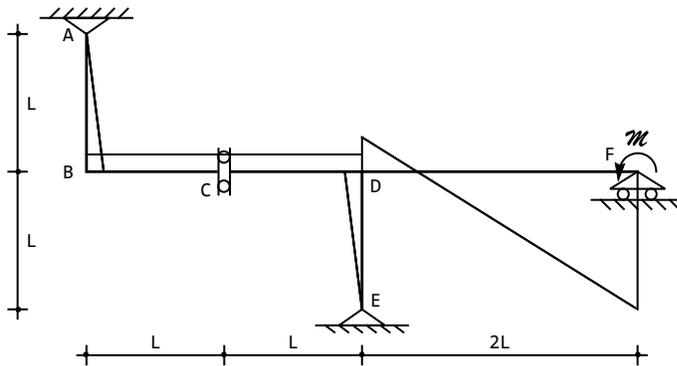


Figura 4.2: Il diagramma del momento

Gli spostamenti assiali delle aste verticali sono nulli, mentre i tre tratti orizzontali traslano della medesima quantità:

$$u_3^{BC}(x_3) = u_3^{CD}(x_3) = u_3^{DF}(x_3) = \frac{ML^2}{8EI} = \delta \quad (4.22)$$

chiaramente visibile nella deformata di Figura 4.3.

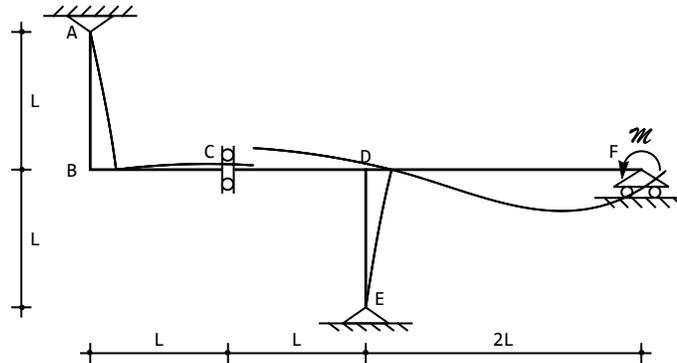


Figura 4.3: La deformata

Lo spostamento relativo in corrispondenza del bipendolo sarà calcolabile come :

$$\Delta u_2^C = u_{2\text{des}} - u_{2\text{sin}} = u_2^{CD}(0) - u_2^{BC}(L) = -\frac{ML^2}{8EI} \quad (4.23)$$

La rotazione in corrispondenza della coppia sarà invece :

$$\phi_F = -\frac{du_2^{DF}(x_3 = 2L)}{dx_3} = \frac{7}{12} \frac{ML}{EI} \quad (4.24)$$

4.1 L'ipotesi di indeformabilità assiale

Se si assume *a priori* che le aste siano assialmente indeformabili, le linee elastiche assiali si riducono a costanti. In corrispondenza dell'appoggio in A lo spostamento assiale è nullo, quindi la linea elastica u_3^{AB} del tratto AB è identicamente nullo. Analogamente si nota che u_3^{DE} dovrà annullarsi. Inoltre, in corrispondenza del bipendolo e del nodo D la congruenza impone che gli spostamenti assiali siano uguali per i tre tratti orizzontali. In definitiva, quindi, l'esame preliminare delle deformate assiali ha portato a scrivere:

$$\begin{aligned} u_3^{AB}(x_3) &= 0 \\ u_3^{BC}(x_3) &= u_3^{CD}(x_3) = u_3^{DF}(x_3) = \delta \\ u_3^{DE}(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Il telaio, quindi, ha una sola incognita assiale (*telaio ad un nodo spostabile*). Le linee elastiche flessionali saranno polinomi cubici:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
 u_2^{DE}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \\
 u_2^{DF}(x_3) &= k_0 + k_1x_3 + k_2x_3^2 + k_3x_3^3
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno ora relative solo al quadro flessionale, mentre le equazioni di equilibrio in cui compaiono gli sforzi normali saranno utilizzate *a posteriori*:

— nell'appoggio in A si annullano gli spostamenti trasversale, ed il momento flettente:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 m^{AB}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

— nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(L) &= -\delta \\
 u_2^{BC}(0) &= 0 \\
 \phi^{AB}(L) &= \phi^{BC}(0)
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

e la condizione di equilibrio :

$$-m^{AB}(L) + m^{BC}(0) = 0
 \tag{4.29}$$

In corrispondenza del bipendolo sono permesse le discontinuità negli spostamenti verticali. E' perciò da imporre la singola condizione di congruenza:

$$\phi^{BC}(L) = \phi^{CD}(0)
 \tag{4.30}$$

insieme alle tre condizioni di equilibrio :

$$\begin{aligned}
 t^{BC}(L) &= 0 \\
 t^{CD}(0) &= 0 \\
 m^{BC}(L) &= m^{CD}(0)
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

Nel nodo triplo, in D , bisognerà rispettare la congruenza degli spostamenti e delle rotazioni tra il tratto CD ed il tratto DE :

$$\begin{aligned}
 u_2^{CD}(L) &= 0 \\
 u_2^{DE}(0) &= -\delta \\
 \phi^{CD}(L) &= \phi^{DE}(0)
 \end{aligned}
 \tag{4.32}$$

ed anche la congruenza tra i due tratti orizzontali CD e DF :

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(L) &= u_2^{DF}(0) \\ \phi^{CD}(L) &= \phi^{DF}(0) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Sono automaticamente soddisfatte le condizioni di congruenza tra gli spostamenti di DE e di DF . Resta da imporre l'equazione di equilibrio:

$$-m^{CD}(L) + m^{DF}(0) + m^{DE}(0) = 0 \quad (4.34)$$

riservandosi le altre due:

$$\begin{aligned} -t^{CD}(L) + t^{DF}(0) + n^{DE}(0) &= 0 \\ -n^{CD}(L) + n^{DF}(0) - t^{DE}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

per il calcolo degli sforzi normali. Nell'appoggio in E si annullano spostamenti e momenti:

$$\begin{aligned} u_2^{DE}(L) &= 0 \\ m^{DE}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

mentre nel carrello in F la congruenza imporrà l'annullarsi dello spostamento verticale:

$$u_2^{DF}(2L) = 0 \quad (4.37)$$

Per l'equilibrio del nodo, poi, dovrà imporsi che il momento in esso sia pari alla coppia applicata:

$$m^{DF}(L) = \mathcal{M} \quad (4.38)$$

Infine, l'equilibrio del traverso BF alla traslazione orizzontale fornisce :

$$t^{AB}(L) - t^{DE}(0) = 0 \quad (4.39)$$

Risolvendo le ventuno equazioni si ottengono le costanti di integrazione, e lo spostamento δ del traverso:

$$\delta = \frac{\mathcal{M}L^2}{8EI} \quad (4.40)$$

ritrovando gli stessi risultati del caso generale.

4.2 L'utilizzo della teoria di Timoshenko

Si ipotizza ora che le travi siano deformabili a taglio, e quindi caratterizzate da una rigidezza tagliante GA_s finita, dove G è il modulo di elasticità tangenziale, $A_s = \kappa A$ è l'area resistente a taglio e κ è il fattore di taglio. Si assume invece $EA = \infty$.

E' opportuno ricordare che tale ipotesi ha una sua logica qualora le travi si presentino tozze, oppure se si ha ragione di ritenere che il materiale di cui è costituita la struttura sia caratterizzato da un basso valore del modulo G di

resistenza a taglio. In tali casi, la teoria di Eulero-Bernoulli è inapplicabile, ed occorre rinunciare all'ipotesi che la sezione retta si conservi ortogonale all'asse neutro deformato, sostituendola con altra opportuna ipotesi sul modo di deformarsi della sezione retta stessa.

La più semplice ipotesi, che tenga in conto la deformabilità a taglio, ma che non rinunci alla conservazione della pianeità della sezione retta, è dovuta a Timoshenko, e porta a scrivere la rotazione della sezione retta come somma della rotazione dell'asse neutro, e di una quantità $\psi(x_3)$, detta *angolo addizionale da taglio*:

$$\phi(x_3) = -\frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \psi(x_3) \quad (4.41)$$

A differenza di quanto accade nel modello di Eulero-Bernoulli, dove tutto viene espresso in funzione della sola funzione u_2 , della sola variabile x_3 , nella teoria di Timoshenko si hanno due funzioni incognite indipendenti nella singola variabile x_3 .

Utilizzando la (4.41), la terna di spostamenti che caratterizza il modello si scriverà:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_3) + \phi(x_3)x_2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Sorge quindi anche una deformazione tagliante:

$$\begin{aligned} e_{33} &= \frac{du_3(x_3)}{dx_3} + \frac{d\phi(x_3)}{dx_3}x_2 \\ e_{23} &= \frac{1}{2}\psi(x_3) = \frac{1}{2}\left(\phi + \frac{du_2(x_3)}{dx_3}\right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

che a sua volta permette di definire lo sforzo di taglio come risultante delle tensioni σ_{23} :

$$\begin{aligned} M &= EI\phi'(x_3) \\ T &= GA_s(\phi(x_3) + u_2'(x_3)) \end{aligned} \quad (4.44)$$

dove — come usuale — l'operazione di derivazione rispetto ad x_3 è stata indicata con l'apice.

Utilizzando le ben note relazioni di equilibrio tra carico applicato, taglio e momento flettente, che non dipendono dalla particolare teoria adottata:

$$\begin{aligned} T' &= -q \\ M' &= T \end{aligned} \quad (4.45)$$

si ottengono subito le due equazioni differenziali accoppiate nelle due incognite ϕ ed u_2 :

$$\begin{aligned} GA_s(\phi' + u_2'') &= -q \\ EI\phi'' &= GA_s(\phi + u_2') \end{aligned} \quad (4.46)$$

Invece di utilizzare, per ciascun elemento, le due linee elastiche (4.46), si può introdurre una funzione ausiliaria $\eta(x_3)$, che permette di ricondursi ad un problema ai limiti simile al problema del quarto ordine di Eulero-Bernoulli: a tal fine basta definire la funzione ausiliaria $\eta(x_3)$ in modo che sia:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \eta - \frac{EI}{GA_s} \eta'' \\ \phi(x_3) &= -\eta' \end{aligned} \quad (4.47)$$

Ne segue che le caratteristiche si esprimeranno come:

$$\begin{aligned} M &= -EI\eta'' \\ T &= -EI\eta''' \end{aligned} \quad (4.48)$$

Utilizzando le (4.47) si soddisfa identicamente la seconda equazione differenziale, mentre la prima diviene:

$$EI\eta'''' = q \quad (4.49)$$

Le condizioni ai limiti devono essere convenientemente espresse in termini della funzione ausiliaria η , anche se è immediato realizzare che — a parte l'incastro — le condizioni ai limiti più usuali si trasferiscono inalterate alla funzione η . Per l'incastro, invece, occorrerà imporre le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} \eta - \frac{EI}{GA_s} \eta'' &= 0 \\ \eta' &= 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Si inizia allora col porre, ferme restando le (4.25) relative agli spostamenti assiali:

$$\begin{aligned} \eta^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ \eta^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\ \eta^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 \\ \eta^{DE}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 \\ \eta^{DF}(x_3) &= k_0 + k_1 x_3 + k_2 x_3^2 + k_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno identiche a quelle illustrate nel paragrafo precedente, ma andranno tradotte in termini di funzione ausiliaria, secondo le (4.47) e le (4.48). Nell'appoggio in A , ad esempio, si annullano gli spostamenti trasversali, ed il momento flettente, e quindi:

$$\begin{aligned} \eta^{AB}(0) - \frac{EI}{GA_s} \eta''^{AB}(0) &= 0 \\ \eta''^{AB}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

che si tramutano nello scrivere le due condizioni:

$$\begin{aligned} a_0 - \frac{2EIa_2}{GA_s} &= 0 \\ a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

mentre nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} \eta^{AB}(L) - \frac{EI}{GA_s} \eta''^{AB}(L) &= -\delta \\ \eta^{BC}(0) - \frac{EI}{GA_s} \eta''^{BC}(0) &= 0 \\ \eta'^{AB}(L) &= \eta'^{BC}(0) \end{aligned} \quad (4.54)$$

che divengono:

$$\begin{aligned} a_0 - \frac{2EIa_2}{GA_s} &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ \delta + a_0 + La_1 + L^2a_2 + L^3a_3 - \frac{EI(2a_2 + 6La_3)}{GA_s} &= 0 \\ c_0 - \frac{2EIc_2}{GA_s} &= 0 \\ -a_1 - 2La_2 - 3L^2a_3 + c_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Risolviendo le ventuno equazioni si ottengono le costanti di integrazione, e quindi le funzioni ausiliarie, insieme allo spostamento δ del traverso:

$$\delta = \frac{ML^2}{4EI} \frac{-3 + 2\alpha}{3 + 4\alpha} \quad (4.56)$$

Si noti che si é introdotto l'usuale rapporto adimensionale:

$$\alpha = \frac{GA_s L^2}{EI} \quad (4.57)$$

e che quindi il corrispondente valore (4.40) di Eulero–Bernoulli viene recuperato portando α ad infinito.

Gli abbassamenti sono deducibili ora in base alle (4.47):

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{24EIL} \frac{-3 + 2\alpha}{3 + 4\alpha} x_3 (7L^2 - x_3^2) \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{24EI} \frac{-3 + 2\alpha}{\alpha(3 + 4\alpha)} x_3 (L(6 - 4\alpha) + 3\alpha x_3) \\ u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{24EI} \frac{-3 + 2\alpha}{\alpha(3 + 4\alpha)} (L - x_3) (L(6 + 5\alpha) + 3\alpha x_3) \\ u_2^{DE}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{24EIL} \frac{-3 + 2\alpha}{3 + 4\alpha} (6L^3 - 8L^2 x_3 + 3L x_3^2 - x_3^3) \\ u_2^{DF}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{24EIL} \frac{(2L - x_3) x_3 (8L(3 + \alpha) + (3 + 10\alpha) x_3)}{3 + 4\alpha} \end{aligned} \quad (4.58)$$

mentre momenti e tagli seguono dalle (4.48)

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{4L} \frac{(-3 + 2\alpha)x_3}{3 + 4\alpha} \\
 m^{BC}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{4} \frac{3 - 2\alpha}{3 + 4\alpha} \\
 m^{CD}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{4} \frac{3 - 2\alpha}{3 + 4\alpha} \\
 m^{DE}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{4L} \frac{(-3 + 2\alpha)(L - x_3)}{3 + 4\alpha} \\
 m^{DF}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{4L} \frac{L(6 - 4\alpha) + (3 + 10\alpha)x_3}{3 + 4\alpha}
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= t^{DE}(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{4L} \frac{3 - 2\alpha}{3 + 4\alpha} \\
 t^{BC}(x_3) &= t^{CD}(x_3) = 0 \\
 t^{DF}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{4L} \frac{3 + 10\alpha}{3 + 4\alpha}
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

L'influenza delle deformazioni da taglio

Come detto, per valutare l'influenza delle deformazioni taglianti, è usuale definire un parametro adimensionale, che misuri contemporaneamente la snellezza della trave e la sua deformabilità a taglio. Nel caso in esame, in cui le rigidità flessionali e taglianti sono costanti, ed in cui l'intera struttura è definita attraverso il singolo parametro geometrico L , il parametro naturale è:

$$\alpha = \frac{GA_s L^2}{EI} \tag{4.61}$$

Quanto più piccolo α , tanto più assumono importanza le deformazioni da taglio, mentre per alti valori di α si riottengono i risultati della teoria di Eulero e Bernoulli.

Per un elemento di luce $L = 5$ metri, con sezione retta rettangolare di base 30 centimetri ed altezza 40 centimetri, con modulo di Young pari ad $E = 300000$ Kg/cm², e modulo di Poisson pari a 0.25, si ha un momento di inerzia pari ad $I = 160000$ cm⁴, un'area efficace a taglio pari ad $A_s = 1020$ cm²(assumendo, come usuale, un fattore di taglio pari a $\kappa = 0.85$), e quindi il parametro α è pari a 637.5. Ne segue che lo spostamento del traverso è pari a:

$$\delta = 0.996475 \frac{ML^2}{8EI} \tag{4.62}$$

4.3 La verifica col principio delle forze virtuali

La struttura presenta due tratti, quindi possono scriversi, per essa, sei equazioni di equilibrio. I vincoli sviluppano sette reazioni (due per ciascun appoggio, due

per il bipendolo interno, una per il carrello), e la struttura possiede un singolo grado di iperstaticità. Scegliendo la reazione X del carrello quale incognita iperstatica, si ottiene il sistema isostatico equivalente (S.I.E.) di Figura 4.4, ed esso verrà assunto quale sistema di spostamenti. Il sistema di forze virtuali, invece, è riportato in Figura 4.5, sicchè il principio dei lavori virtuali si scriverà:

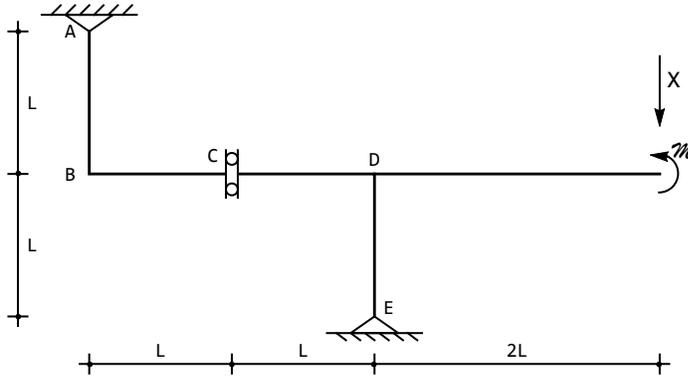


Figura 4.4: Un possibile sistema isostatico equivalente

$$\int_s \frac{M}{EI} M_1 ds = 0 \quad (4.63)$$

dove M è il momento flettente calcolato sullo schema degli spostamenti di Figura 4.4, ed M_1 è il momento calcolato sullo schema delle forze di Figura 4.5. Il momento M può ora ottenersi, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, come:

$$M = M_0 + XM_1 \quad (4.64)$$

dove M_0 è il momento per la struttura di Figura 4.6, con l'incognita iperstatica rimossa e caricata dai soli carichi applicati. La (4.63) diviene:

$$\int_s \frac{M_0}{EI} M_1 ds + X \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds = 0 \quad (4.65)$$

da cui la richiesta incognita iperstatica :

$$X = - \frac{\int_s M_0 M_1 ds}{\int_s M_1^2 ds} \quad (4.66)$$

Restano quindi da calcolare i momenti M_0 ed M_1 sulla struttura isostatica, e svolgere due integrali.

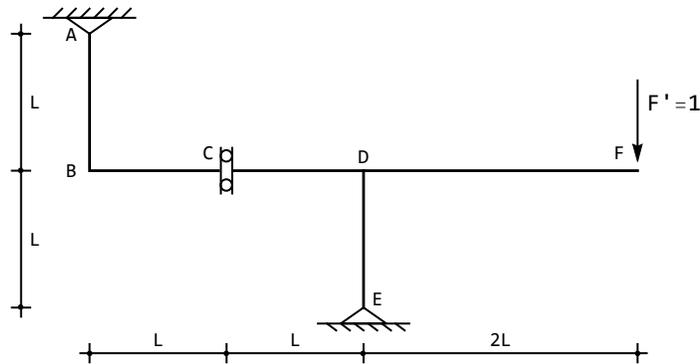


Figura 4.5: Il sistema S_1 di forze virtuali per il calcolo della reazione

Il diagramma M_0

Il calcolo delle reazioni é immediato, a partire dalle equazioni di equilibrio del primo tratto e della intera struttura:

$$\begin{aligned} a + c &= 0 \\ a + e + M &= 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

La reazione c del bispoggio deve essere una forza orizzontale, mentre la reazione a dell'appoggio deve passare per il punto A . Poichè esse devono farsi equilibrio, la reazione a passerà per l'appoggio in A e sarà orizzontale.

La seconda equazione indica che le due reazioni a ed e devono equilibrare la coppia applicata, quindi devono essere parallele, e formare una coppia oraria di valore M . Ne segue che anche e sarà orizzontale, e che il valore assoluto delle reazioni sarà $\frac{M}{2L}$. Le reazioni sono quindi disegnate in Figura 4.7.

Il diagramma del momento, riportato in Figura 4.8, può tracciarsi a partire dal punto A . Sul tratto verticale AB esso varia linearmente, da zero in A ad $\frac{M}{2}$ in B , e dev'essere riportato dalla parte delle fibre tese. In B l'equilibrio del concio B permette di ottenere il primo valore del tratto BD , e quindi si può tracciare il diagramma fino a D : esso sarà costante, in quanto dovuto sempre alla sola reazione R_A . Lungo DF esso sarà ancora costante, e pari alla coppia applicata M , e sempre da riportare dalla parte delle fibre tese (intradosso). Infine, lungo il tratto verticale DE esso varia linearmente da zero, in corrispondenza dell'appoggio in E , ad $\frac{M}{2}$ in D . Un'utile verifica consiste nel controllare che il nodo D sia equilibrato.

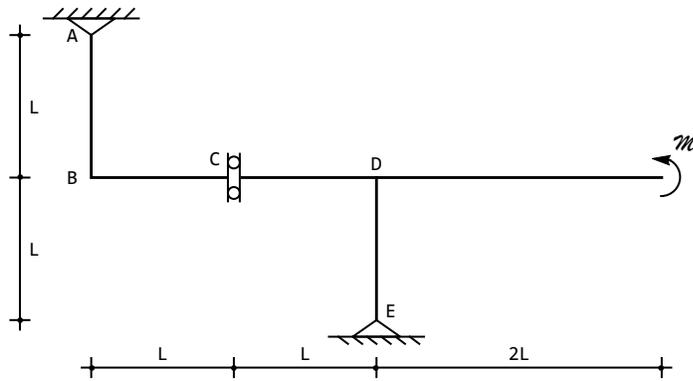


Figura 4.6: Il sistema isostatico S_0 caricato dai soli carichi applicati

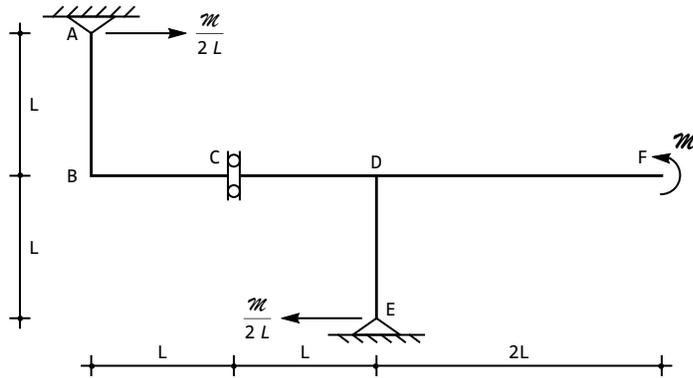


Figura 4.7: Le reazioni vincolari sullo schema S_0

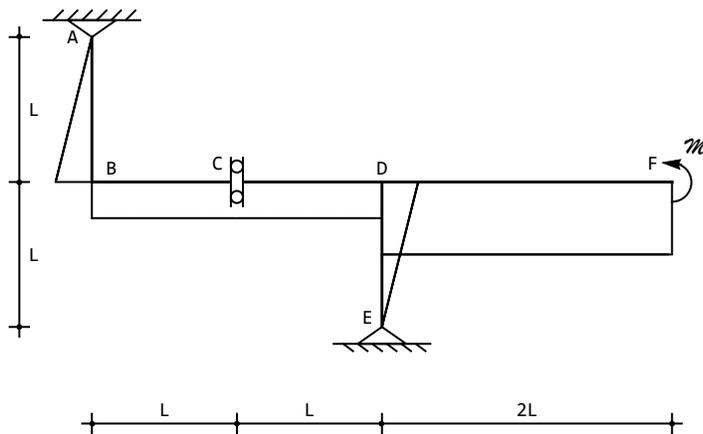


Figura 4.8: Il diagramma M_0 calcolato sullo schema S_0

Analiticamente avremo quindi:

$$\begin{aligned}
 m_0^{AB} &= \frac{\mathcal{M}}{2} \frac{x_3}{L} \\
 m_0^{BD} &= \frac{\mathcal{M}}{2} \\
 m_0^{DF} &= \mathcal{M} \\
 m_0^{DE} &= -\frac{\mathcal{M}}{2} \left(1 - \frac{x_3}{L}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.68}$$

Si noti che si è indicato con m^{IJ} il momento sul tratto IJ in cui I è il nodo iniziale e J il nodo finale. Di conseguenza, l'asse x_3 va dal nodo I al nodo J , e l'asse x_2 forma con esso un angolo di $\pi/2$ in senso antiorario. Infine, il diagramma del momento sarà positivo se riportato dalla parte di $x_2 > 0$, sarà negativo altrimenti.

Il diagramma M_1

Sullo schema di Figura 4.5 l'equilibrio del primo tratto e l'equilibrio globale dettano:

$$\begin{aligned}
 a + c &= 0 \\
 a + e + F' &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.69}$$

Ne segue anche in questo caso che la reazione a è orizzontale, mentre ora la seconda equazione impone che le tre forze F' , a ed e debbano concorrere in un punto, ottenendo la situazione di Figura 4.9.

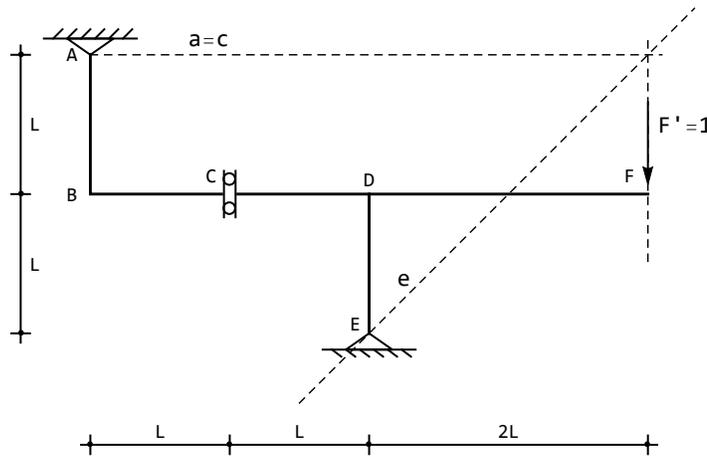


Figura 4.9: Le reazioni vincolari sullo schema S_1

Il diagramma del momento, riportato in Figura 4.10, può ottenersi partendo dal punto F , dove si annulla, e proseguendo verso D , dove giungerà con un

valore pari a $2F'L$. Esso andrà riportato dalla parte della fibre tese, ossia all'estradosso. Proseguendo lungo BD il diagramma del momento sarà costante, e pari ad $F'L$. E' infatti immediato realizzare che in qualsiasi punto del tratto BD il momento è dovuto alla forza F' ed alla reazione e , e che nel punto M^* di intersezione tra e ed il trasverso l'effetto di e si annulla. Una semplice proporzione geometrica permette di situare M^* a distanza L dalla forza, e quindi il valore del momento in M^* è pari ad $F'L$.

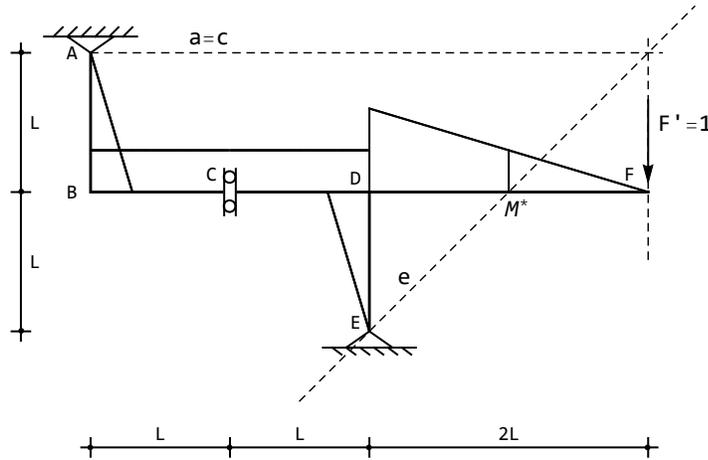


Figura 4.10: Il diagramma M_1 calcolato sullo schema S_1

In B il diagramma si ribalta, e prosegue fino ad annullarsi in A . Lungo DE , invece, l'equilibrio del nodo permette di calcolare il momento in D lungo DE come $F'L$, e si conclude portandolo ad annullarsi in E . Analiticamente si ha:

$$\begin{aligned}
 m_1^{AB} &= -F'x_3 \\
 m_1^{BD} &= -F'L \\
 m_1^{DF} &= -2F'L \left(1 - \frac{x_3}{2L}\right) \\
 m_1^{DE} &= F'L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right)
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Il calcolo degli integrali

Il numeratore sarà fornito da:

$$\begin{aligned}
 \text{num} &= - \int_s M_0 M_1 ds = \frac{\mathcal{M}}{2L} \int_0^L x_3^2 dx_3 + \frac{\mathcal{M}L}{2} \int_0^{2L} dx_3 + \\
 & 2\mathcal{M}L \int_0^{2L} \left(1 - \frac{x_3}{2L}\right) dx_3 + \frac{\mathcal{M}L}{2} \int_0^L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right)^2 dx_3 = \frac{10}{3} \mathcal{M}L^2
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

dove si è assunta F' unitaria. Analogamente, il denominatore sarà pari a :

$$\begin{aligned} \text{den} &= \int_s M_1^2 ds = \int_0^L x_3^2 dx_3 + L^2 \int_0^{2L} dx_3 + 4L^2 \int_0^{2L} \left(1 - \frac{x_3}{2L}\right)^2 dx_3 + \\ &L^2 \int_0^L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right)^2 dx_3 = \frac{16L^3}{3} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Infine, la richiesta reazione sarà pari a :

$$X = \frac{5}{8} \frac{\mathcal{M}}{L} \quad (4.73)$$

L'effetto del taglio

I risultati ottenuti in precedenza applicando la teoria di Timoshenko possono riottenersi attraverso una applicazione del principio delle forze virtuali, in cui viene aggiunto il lavoro virtuale interno delle deformazioni taglianti. In altri termini, ora sarà:

$$\int_s \frac{M}{EI} M_1 ds + \int_s \frac{T}{GA_s} T_1 ds = 0 \quad (4.74)$$

ed applicando anche in questo caso il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\int_s \frac{M_0}{EI} M_1 ds + X \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds + \int_s \frac{T_0}{GA_s} T_1 ds + X \int_s \frac{T_1^2}{GA_s} ds = 0 \quad (4.75)$$

da cui:

$$X = - \frac{\int_s \frac{M_0}{EI} M_1 ds + \int_s \frac{T_0}{GA_s} T_1 ds}{\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds + \int_s \frac{T_1^2}{GA_s} ds} \quad (4.76)$$

Ambedue i diagrammi del taglio possono ottenersi dai rispettivi momenti, attraverso derivazione. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} t_0^{AB} &= t_0^{DE} = \frac{\mathcal{M}}{2L} \\ t_0^{BD} &= t_0^{DF} = 0 \\ t_1^{AB} &= t_1^{DE} = -F' \\ t_1^{BD} &= 0 \\ t_1^{DF} &= F' \end{aligned} \quad (4.77)$$

da cui segue, con F' unitaria:

$$- \int_s \frac{T_0}{GA_s} T_1 ds = \frac{\mathcal{M}F}{2LGA_s} \int_0^L dx_3 + \frac{\mathcal{M}F}{2LGA_s} \int_0^L dx_3 = \frac{\mathcal{M}}{GA_s} \quad (4.78)$$

$$\int_s \frac{T_1^2}{GA_s} ds = \frac{F^2}{GA_s} \int_0^L dx_3 + \frac{F^2}{GA_s} \int_0^L dx_3 + \frac{F^2}{GA_s} \int_0^{2L} dx_3 = 4 \frac{F^2 L}{GA_s} = \frac{4L}{GA_s} \quad (4.79)$$

Sarà quindi, in definitiva:

$$X = \frac{\frac{10}{3} \frac{L^2}{EI} + \frac{1}{GA_s}}{\frac{16L^3}{3EI} + \frac{4L}{GA_s}} \mathcal{M} \quad (4.80)$$

che potrà anche scriversi, convenientemente:

$$X = \frac{\frac{10}{3} \frac{GA_s L^2}{GA_s EI} + \frac{1}{GA_s}}{\frac{16GA_s L^3}{3GA_s EI} + \frac{4L}{GA_s}} \mathcal{M} = \frac{10\alpha + 3}{16\alpha + 12} \frac{\mathcal{M}}{L} \quad (4.81)$$

NB. Il risultato coincide con quello ottenuto tramite equazione della linea elastica di Timoshenko:

$$X = \frac{3EI + 10GA_s L^2}{12EIL + 16GA_s L^3} \mathcal{M} \quad (4.82)$$

4.4 L'effetto dello sforzo normale

Se, infine, si vuole tener conto della deformabilità assiale delle aste, occorrerà modificare l'espressione del lavoro interno, aggiungendo il lavoro delle deformazioni assiali:

$$\int_s \frac{M}{EI} M_1 ds + \int_s \frac{N}{EA} N_1 ds = 0 \quad (4.83)$$

ed applicando anche in questo caso il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\int_s \frac{M_0}{EI} M_1 ds + X \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds + \int_s \frac{N_0}{EA} N_1 ds + X \int_s \frac{N_1^2}{EA} ds = 0 \quad (4.84)$$

da cui:

$$X = - \frac{\int_s \frac{M_0}{EI} M_1 ds + \int_s \frac{N_0}{EA} N_1 ds}{\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds + \int_s \frac{N_1^2}{EA} ds} \quad (4.85)$$

Le equazioni di equilibrio nei nodi permettono la deduzione degli sforzi normali, per cui:

$$\begin{aligned}
 n_0^{AB} &= n_0^{DF} = n_0^{DE} = 0 \\
 n_0^{BD} &= -\frac{\mathcal{M}}{2L} \\
 n_1^{AB} &= n_1^{DF} = 0 \\
 n_1^{BD} &= F' \\
 n_1^{DE} &= -F'
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

da cui segue, con F' unitaria:

$$\int_s \frac{N_0}{EA} N_1 ds = -\frac{\mathcal{M}}{2LEA} \int_0^{2L} dx_3 = -\frac{\mathcal{M}}{EA} \tag{4.87}$$

$$\int_s \frac{N_1^2}{EA} ds = \frac{1}{EA} \int_0^{2L} dx_3 + \frac{1}{EA} \int_0^L dx_3 = \frac{3L}{EA} \tag{4.88}$$

Sarà allora:

$$X = \frac{\frac{10}{3} \frac{L^2}{EI} + \frac{1}{EA}}{\frac{16L^3}{3EI} + \frac{3L}{EA}} \mathcal{M} \tag{4.89}$$

coincidente con quanto ottenuto con la linea elastica:

$$X = \frac{3I + 10AL^2}{9IL + 16AL^3} \mathcal{M} \tag{4.90}$$

4.5 La presenza di un cedimento anelastico

Si immagini ora che la stessa struttura di esempio subisca un cedimento verticale anelastico v_0 dell'appoggio centrale, come illustrato in Figura 4.11.

Nell'ipotesi generale di deformabilità assiale finita, l'unica condizione ai limiti da modificare riguarda lo spostamento assiale del nodo E . Esso non è più nullo, come nella (4.10), ma pari al cedimento anelastico v_0 , sicchè nel nodo E si dovrà scrivere:

$$\begin{aligned}
 u_2^{DE}(L) &= 0 \\
 u_3^{DE}(L) &= v_0 \\
 m^{DE}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

Se invece si ipotizza che le deformabilità assiali siano infinite, la linea elastica assiale del tratto verticale DE non è più identicamente nulla, ma è costante, e pari a:

$$u_3^{DE}(x_3) = v_0 \tag{4.92}$$

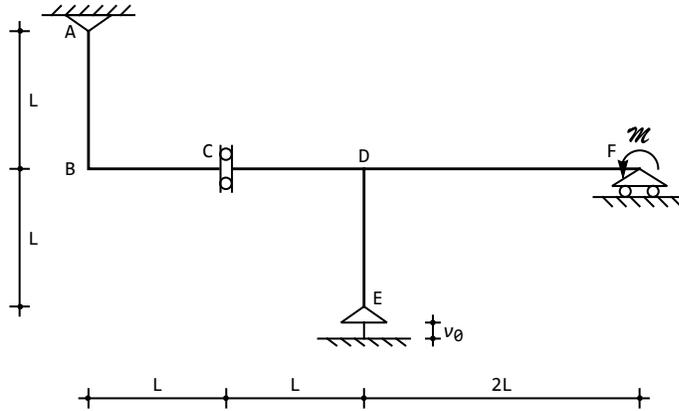


Figura 4.11: Il telaio soggetto a cedimento anelastico

Ne segue che la condizione di congruenza (4.32) in D dovrà essere sostituita dalla condizione:

$$u_2^{CD}(L) = v_0 \quad (4.93)$$

Questa è l'unica modifica, e porta agli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{(-2ML^2 + 3EIv_0)x_3(7L^2 - x_3^2)}{96EIL^3} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{(-2ML^2 + 3EIv_0)(4L - 3x_3)x_3}{96EIL^2} \\ u_2^{CD}(x_3) &= \frac{3EIv_0(37L^2 - 2Lx_3 - 3x_3^2) + 2ML^2(-5L^2 + 2Lx_3 + 3x_3^2)}{96EIL^2} \\ u_2^{DE}(x_3) &= \frac{(-2ML^2 + 3EIv_0)(L - x_3)(6L^2 - 2Lx_3 + x_3^2)}{96EIL^3} \\ u_2^{DF}(x_3) &= \frac{(2L - x_3)(2ML^2x_3(4L + 5x_3) + 3EIv_0(16L^2 + 4Lx_3 - x_3^2))}{96EIL^3} \end{aligned} \quad (4.94)$$

ed alle caratteristiche:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= -\frac{(2ML^2 - 3EIv_0)x_3}{16L^3} \\ m^{BC}(x_3) &= m^{CD}(x_3) = -\frac{\mathcal{M}}{8} + \frac{3EIv_0}{16L^2} \\ m^{DE}(x_3) &= \frac{(2L^2\mathcal{M} - 3EIv_0)(L - x_3)}{16L^3} \\ m^{DF}(x_3) &= \frac{2ML^2(-2L + 5x_3) + v_0(6EIL - 3EIx_3)}{16L^3} \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= t^{DE}(x_3) = -\frac{2ML^2 - 3EIv_0}{16L^3} \\
 t^{BC}(x_3) &= t^{CD}(x_3) = 0 \\
 t^{DF}(x_3) &= \frac{10ML^2 - 3EIv_0}{16L^3}
 \end{aligned}
 \tag{4.96}$$

L'effetto del cedimento è chiaramente distinguibile dall'effetto della coppia applicata. Il diagramma dei momenti dovuto al cedimento anelastico — e quindi per coppia nulla — è riportato in Figura 4.12

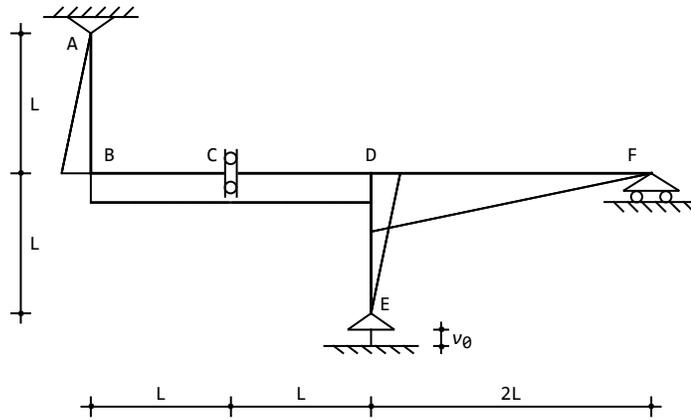


Figura 4.12: Il momento generato dal cedimento anelastico

Gli spostamenti assiali dell'asta verticale AB sono nulli, quelli dell'altra asta verticale DE sono pari al cedimento imposto v_0 , mentre i tre tratti orizzontali traslano della medesima quantità:

$$u_3^{BC}(x_3) = u_3^{CD}(x_3) = u_3^{DF}(x_3) = \frac{ML^2}{8EI} - \frac{3v_0}{16} = \delta
 \tag{4.97}$$

chiaramente visibile nella deformata di Figura 4.13, dove ancora una volta l'effetto della coppia è stato annullato:

Il principio dei lavori virtuali

Con il sistema isostatico equivalente di Figura 4.14, assunto come sistema di spostamenti, e col sistema di forze virtuali di Figura 4.5, il principio dei lavori virtuali si scrive ora:

$$\int_s \frac{M}{EI} M_1 ds = R_{Ev}^1 v_0
 \tag{4.98}$$

dove R_{Ev}^1 è la reazione verticale dell'appoggio in E calcolata sullo schema delle forze, ossia sul sistema di Figura 4.5.

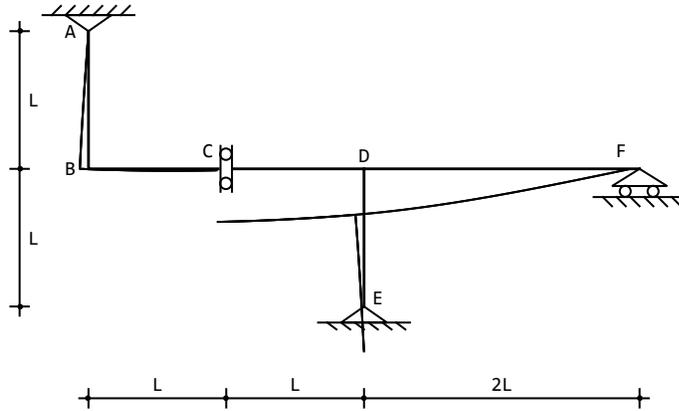


Figura 4.13: La deformata generata dal cedimento anelastico

Il momento M può ora ottenersi, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, come:

$$M = M_0 + X M_1 \quad (4.99)$$

dove M_0 è il momento calcolato sulla struttura isostatica, e caricata dai soli carichi applicati. La (4.98) diviene:

$$\int_s \frac{M_0}{EI} M_1 ds + X \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds = R_{Ev}^1 v_0 \quad (4.100)$$

da cui la richiesta incognita iperstatica :

$$X = \frac{R_{Ev}^1 v_0 - \int_s M_0 M_1 ds}{\int_s M_1^2 ds} \quad (4.101)$$

Sia M_0 che M_1 sono già stati calcolati in precedenza, quindi resta solo da dedurre la reazione R_{Ev}^1 , e ciò si può ottenere dall'equilibrio del secondo tratto alla traslazione verticale sullo schema S_1 di Figura 4.5:

$$R_{Ev}^1 + F' = 0 \quad (4.102)$$

e quindi, essendo F' unitaria:

$$R_{Ev}^1 = -1 \quad (4.103)$$

La (4.101) porge allora, utilizzando le (4.68) e le (4.70):

$$X = \frac{-v_0 + \frac{10}{3} \frac{ML^2}{EI}}{\frac{16L^3}{3EI}} = \frac{-3EIv_0 + 10ML^2}{16L^3} \quad (4.104)$$

coincidente con quanto ottenuto con la linea elastica.

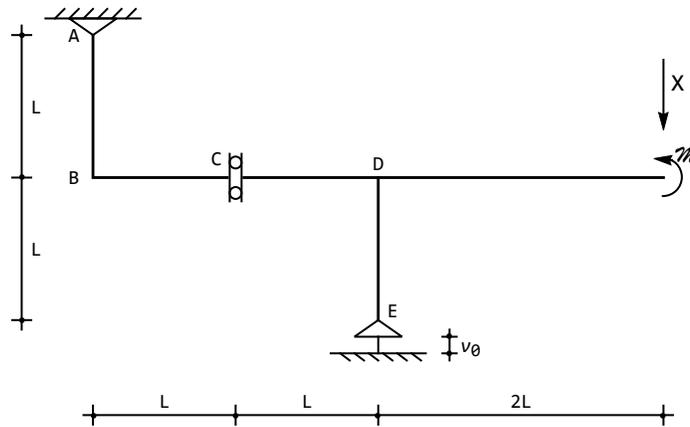


Figura 4.14: Un possibile sistema isostatico equivalente

La presenza di un cedimento elastico

Se l'appoggio in E subisce un cedimento elastico verticale, come schematizzato in Figura 4.15, si può ipotizzare che esista la relazione lineare:

$$u_3^{DE}(H) = -c_v R_{Ev} \quad (4.105)$$

tra lo spostamento assiale dell'estremo E e la reazione verticale dell'appoggio. Il vincolo è quindi definito dal valore della costante di cedibilità c_v . Per $c_v = 0$ si ritrova l'appoggio perfetto, mentre $c_v = \infty$ riproduce un carrello a piano di scorrimento verticale.

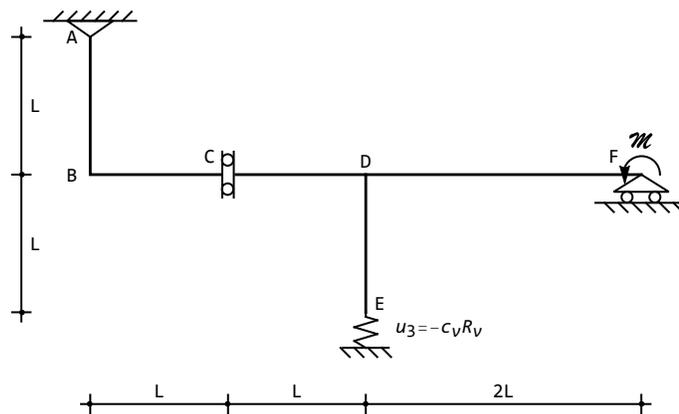


Figura 4.15: Il telaio con vincolo elasticamente cedevole

Nel vincolo in E , comunque, la reazione verticale R_E è uguale allo sforzo normale n^{DE} in $x_3 = L$. Ipotizzando quindi che le aste siano assialmente deformabili, si dovrà solo modificare la condizione ai limiti che riguarda lo spostamento assiale dell'elemento DE . Al posto delle condizioni (4.10) si scriverà infatti:

$$\begin{aligned} u_2^{DE}(L) &= 0 \\ u_3^{DE}(L) &= -c_v n^{DE}(L) \\ m^{DE}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (4.106)$$

Risolvendo le equazioni, e portando la rigidezza assiale ad infinito, si ottengono gli spostamenti in ipotesi di indeformabilità assiale:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(-4L^3 + 3EIC_v)x_3(7L^2 - x_3^2)}{12EIL(16L^3 + 3EIC_v)} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(-4L^3 + 3EIC_v)(4L - 3x_3)x_3}{12EI(16L^3 + 3EIC_v)} \\ u_2^{CD}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(3EIC_v(45L^2 - 2Lx_3 - 3x_3^2) + 4L^3(-5L^2 + 2Lx_3 + 3x_3^2))}{12EI(16L^3 + 3EIC_v)} \\ u_2^{DE}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(-4L^3 + 3EIC_v)(L - x_3)(6L^2 - 2Lx_3 + x_3^2)}{12EIL(16L^3 + 3EIC_v)} \\ u_2^{DF}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(2L - x_3)(2L^2x_3(4L + 5x_3) + c_v(30EIL + 9EIx_3))}{6EI(16L^3 + 3EIC_v)} \end{aligned} \quad (4.107)$$

insieme alle caratteristiche:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= -\mathcal{M} \frac{4L^3 - 3EIC_v}{32L^4 + 6EILc_v} x_3 \\ m^{BC}(x_3) &= m^{CD}(x_3) = -\mathcal{M} \frac{4L^3 - 3EIC_v}{32L^3 + 6EIC_v} \\ m^{DE}(x_3) &= \mathcal{M} \frac{4L^3 - 3EIC_v}{32L^4 + 6EILc_v} (L - x_3) \\ m^{DF}(x_3) &= \mathcal{M} \frac{(3EIC_v + 2L^2(-2L + 5x_3))}{16L^3 + 3EIC_v} \end{aligned} \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} t^{AB}(x_3) &= t^{DE}(x_3) = -\mathcal{M} \frac{4L^3 - 3EIC_v}{32L^4 + 6EILc_v} \\ t^{BC}(x_3) &= t^{CD}(x_3) = 0 \\ t^{DF}(x_3) &= \mathcal{M} \frac{10L^2}{16L^3 + 3EIC_v} \end{aligned} \quad (4.109)$$

Gli spostamenti assiali dell'asta verticale AB sono nulli, mentre i tre tratti orizzontali traslano della medesima quantità:

$$u_3^{BC}(x_3) = u_3^{CD}(x_3) = u_3^{DE}(x_3) = \mathcal{M} \frac{4L^5 - 3EIL^2c_v}{32EIL^3 + 6(EI)^2c_v} = \delta \quad (4.110)$$

Infine, gli spostamenti assiali dell'asta DE sono forniti da:

$$u_3^{DE}(x_3) = \mathcal{M} \frac{10L^2c_v}{16L^3 + 3EIc_v} \quad (4.111)$$

Il principio dei lavori virtuali

Scegliendo la reazione X del carrello quale incognita iperstatica, si ottiene il sistema isostatico equivalente (S.I.E.) di Figura 4.16, ed esso verrà assunto quale sistema di spostamenti. Il sistema di forze virtuali, invece, è riportato in Figura 4.5, sicchè il principio dei lavori virtuali si scriverà:

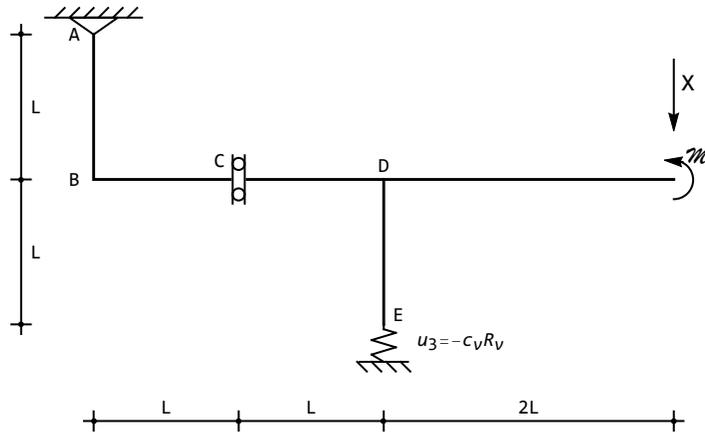


Figura 4.16: Un possibile sistema isostatico equivalente

$$\int_s \frac{M}{EI} M_1 ds = -c_v R_{Ev} R_{Ev}^1 \quad (4.112)$$

dove R_{Ev} è la reazione dell'appoggio in E calcolata sullo schema di Figura 4.16, mentre R_{Ev}^1 è la reazione verticale dell'appoggio in E calcolata sullo schema delle forze, ossia sul sistema di Figura 4.5. Il momento M e la reazione R_{Ev} possono ora ottenersi, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, come:

$$\begin{aligned} M &= M_0 + X M_1 \\ R_{Ev} &= R_{Ev}^0 + X R_{Ev}^1 \end{aligned} \quad (4.113)$$

dove M_0 ed R_{Ev}^0 sono il momento flettente e la reazione verticale in E calcolati sulla struttura isostatica di Figura 4.17 caricata dai soli carichi applicati. La (4.112) diviene:

$$\int_s \frac{M_0}{EI} M_1 ds + X \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds = -c_v (R_{Ev}^0 + X R_{Ev}^1) R_{Ev}^1 \quad (4.114)$$

da cui la richiesta incognita iperstatica :

$$X = -\frac{c_v R_{Ev}^0 R_{Ev}^1 + \int_s M_0 M_1 ds}{\int_s M_1^2 ds + c_v (R_{Ev}^1)^2} \quad (4.115)$$

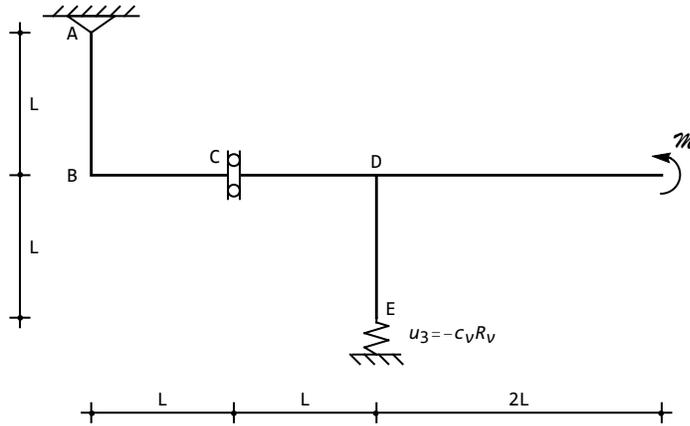


Figura 4.17: Il sistema isostatico caricato dai soli carichi applicati

Sullo schema S_0 , però, la reazione verticale in E è nulla, quindi $R_{Ev}^0=0$. Ne segue che la reazione richiesta potrà esprimersi come:

$$X = \frac{\frac{10}{3} \frac{ML^2}{EI}}{\frac{16L^3}{3EI} + c_v} = \frac{10ML^2}{16L^3 + 3c_v EI} \quad (4.116)$$

coincidente con quanto ottenuto con la linea elastica.

4.6 Il telaio soggetto a variazione termica

Il telaio è soggetto ad una variazione termica ΔT flessionale su tutto il traverso BF , per cui si avrà una distorsione μ costante e pari a:

$$\mu = -\frac{\alpha \Delta T}{h} \quad (4.117)$$

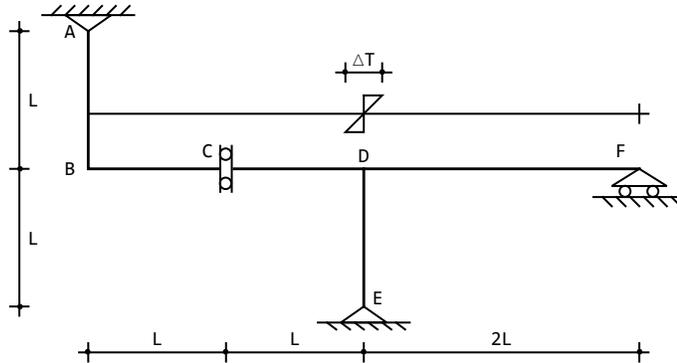


Figura 4.18: Il telaio soggetto a variazione termica sul traverso

agente sui tre tratti orizzontali.

Essendo costante, la distorsione non compare nelle equazioni differenziali della linea elastica, che pertanto restano le (4.2–4.12). Viceversa, occorrerà tener conto che la relazione momenti–curvatura sui tratti orizzontali andrà integrata come segue:

$$m^{IJ}(x_3) = -EI(u_2^{IJ})''(x_3) + EI\mu \quad (4.118)$$

mentre i tagli, poichè la distorsione è costante, rimarranno pari a:

$$t^{IJ}(x_3) = -EI(u_2^{IJ})'''(x_3) \quad (4.119)$$

Le condizioni ai limiti da imporre restano inalterate, con l'unica eccezione dell'equilibrio alla rotazione in F , che ora dovrà imporre l'annullarsi del momento flettente. In ipotesi di estensibilità assiale si hanno gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{Lx_3(21I + 2AL^2 + 2Ax_3^2)\alpha\Delta T}{(9I + 16AL^2)h} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{x_3(42IL + 16AL^3 - (9I + 4AL^2)x_3)\alpha\Delta T}{2(9I + 16AL^2)h} \\ u_2^{CD}(x_3) &= \frac{9IL^2 - 4AL^4 + 8(3IL + AL^3)x_3 - (9I + 4AL^2)x_3^2\alpha\Delta T}{2(9I + 16AL^2)h} \\ u_2^{DE}(x_3) &= \frac{L(-3IL + 4AL^3 + 3Ix_3 - 6ALx_3^2 + 2Ax_3^3)\alpha\Delta T}{9I + 16AL^2} \\ u_2^{DF}(x_3) &= \frac{(2L - x_3)(12IL + 9Ix_3 + 4ALx_3^2)\alpha\Delta T}{2(9I + 16AL^2)h} \end{aligned} \quad (4.120)$$

e gli spostamenti assiali:

$$\begin{aligned}
 u_3^{AB}(x_3) &= 0 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= \frac{L(-21IL - 4AL^3 + 12Ix_3)}{9I + 16AL^2} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 u_3^{CD}(x_3) &= \frac{L(-9IL - 4AL^3 + 12Ix_3)}{9I + 16AL^2} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 u_3^{DE}(x_3) &= \frac{12IL(L - x_3)}{9I + 16AL^2} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 u_3^{DF}(x_3) &= \frac{3IL^2 - 4AL^4}{9I + 16AL^2} \frac{\alpha\Delta T}{h}
 \end{aligned} \tag{4.121}$$

Le caratteristiche si ottengono tramite derivazione, e non sono riportate per brevità. In ipotesi di inestensibilità assiale, occorre operare il limite per EA che tende ad infinito, ottenendo gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{x_3(L^2 + x_3^2)}{8L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{(4L - x_3)x_3}{8} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{(L - x_3)^2}{8} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 u_2^{DE}(x_3) &= \frac{2L^3 - 3Lx_3^2 + x_3^3}{8L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 u_2^{DF}(x_3) &= \frac{(2L - x_3)x_3^2}{8L} \frac{\alpha\Delta T}{h}
 \end{aligned} \tag{4.122}$$

e le caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{3EIx_3}{4L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 m^{BC}(x_3) &= m^{CD}(x_3) = -\frac{3EI}{4} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 m^{DE}(x_3) &= \frac{3EI(L - x_3)}{4L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 m^{DF}(x_3) &= -\frac{3EI(2L - x_3)}{4L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 t^{AB}(x_3) &= t^{DE}(x_3) = -\frac{3EI}{4L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 t^{BC}(x_3) &= t^{CD}(x_3) = 0 \\
 t^{DF}(x_3) &= \frac{3EI}{4L} \frac{\alpha\Delta T}{h}
 \end{aligned} \tag{4.123}$$

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= t^{DE}(x_3) = -\frac{3EI}{4L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \\
 t^{BC}(x_3) &= t^{CD}(x_3) = 0 \\
 t^{DF}(x_3) &= \frac{3EI}{4L} \frac{\alpha\Delta T}{h}
 \end{aligned} \tag{4.124}$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 4.19.

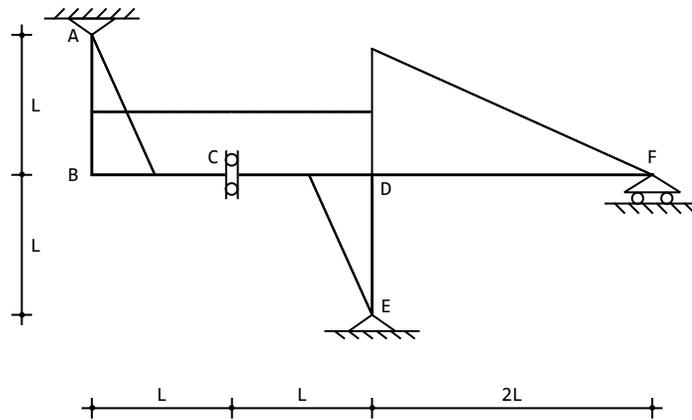


Figura 4.19: I momenti dovuti alla variazione termica

Gli spostamenti assiali delle aste verticali AB e DE sono nulli, mentre i tre tratti orizzontali traslano della medesima quantità:

$$u_3^{BC}(x_3) = u_3^{CD}(x_3) = u_3^{DF}(x_3) = -\frac{L^2}{4} \frac{\alpha \Delta T}{h} = \delta \quad (4.125)$$

La deformata è riportata in Figura 4.20.

Partendo dall'assunzione che le deformazioni assiali siano trascurabili, le condizioni ai limiti da imporre sono le (4.27–4.39), in cui occorre annullare la coppia applicata. Si ritrovano direttamente i risultati qui dedotti come caso limite.

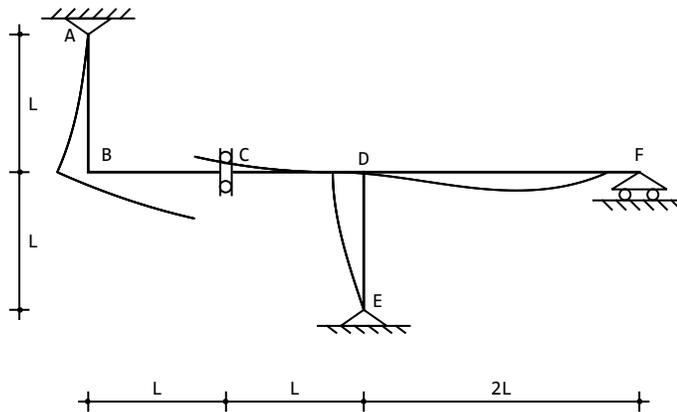


Figura 4.20: La deformata dovuta alla variazione termica

Il principio dei lavori virtuali

Scegliendo la reazione X del carrello quale incognita iperstatica, si ottiene il sistema isostatico equivalente (S.I.E.) di Figura 4.21, ed esso verrà assunto quale sistema di spostamenti. Il sistema di forze virtuali, invece, è riportato in Figura 4.5, sicché il principio dei lavori virtuali si scriverà:

$$\int_s \frac{M}{EI} M_1 ds - \int_s \mu M_1 ds = 0 \quad (4.126)$$

dove M è il momento flettente calcolato sullo schema degli spostamenti di Figura 4.21, ed M_1 è il momento calcolato sullo schema delle forze di Figura 4.5. Il momento M può ora ottenersi, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, come:

$$M = M_0 + XM_1 \quad (4.127)$$

dove M_0 è il momento sulla struttura isostatica caricata dalla sola distorsione, e quindi sarà nullo. L'incognita iperstatica è data quindi da:

$$X = \frac{\int_s \mu M_1 ds}{\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds} \quad (4.128)$$

Utilizzando le già dedotte espressione (4.70) del momento M_1 si ha subito:

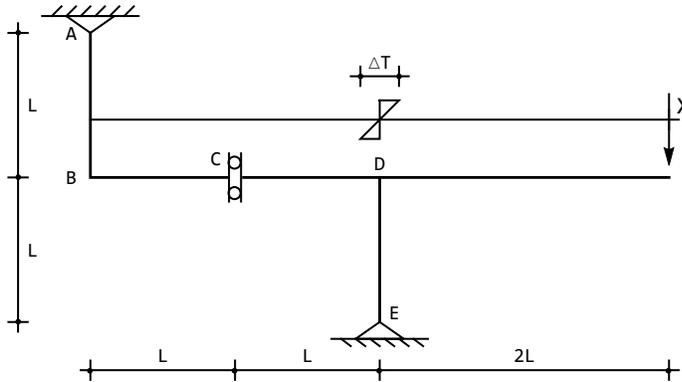


Figura 4.21: Un possibile sistema isostatico equivalente

$$\int_s M_1^2 ds = \int_0^L x_3^2 dx_3 + L^2 \int_0^{2L} dx_3 + 4L^2 \int_0^{2L} \left(1 - \frac{x_3}{2L}\right)^2 dx_3 + L^2 \int_0^L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right)^2 dx_3 = \frac{16L^3}{3} \quad (4.129)$$

$$\int_s \mu M_1 ds = - \int_0^{2L} \mu L dx_3 - \int_0^{2L} \mu 2L \left(1 - \frac{x_3}{2L}\right) dx_3 = -4L^2 \mu \quad (4.130)$$

e quindi:

$$X = -\frac{4L^2\mu}{16L^3} = -\frac{3EI\mu}{4L} \quad (4.131)$$

ossia, infine:

$$X = \frac{3EI}{4L} \frac{\alpha\Delta T}{h} \quad (4.132)$$

confermando quanto ottenuto (cfr. 4.124) utilizzando la linea elastica.

Capitolo 5

Una pensilina

Si vuole conoscere la deformata e le caratteristiche della sollecitazione interna per la struttura in Figura 5.1.

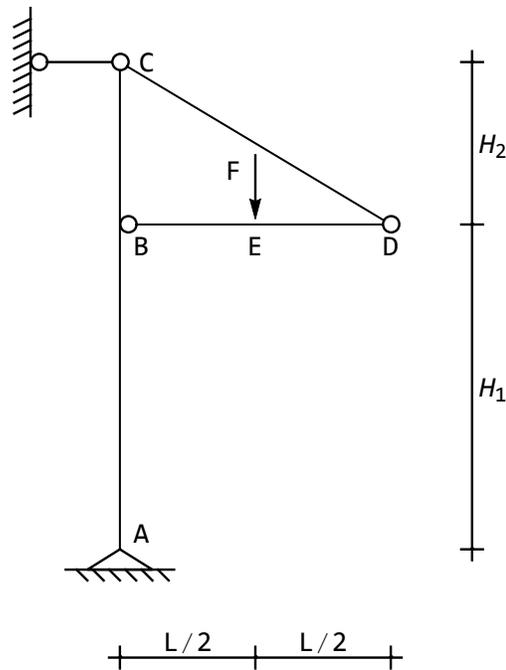


Figura 5.1: Schema di una pensilina

Si divide il telaio in cinque tratti, e per ciascuno di essi si ipotizza una linea elastica flessionale cubica ed una linea elastica assiale lineare, presupponendo che le aste siano assialmente deformabili, e non tenendo conto del comportamento

“a pendolo” del tratto CD :

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
 u_3^{CD}(x_3) &= f_0 + f_1x_3 \\
 u_2^{BE}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \\
 u_3^{BE}(x_3) &= h_0 + h_1x_3 \\
 u_2^{ED}(x_3) &= m_0 + m_1x_3 + m_2x_3^2 + m_3x_3^3 \\
 u_3^{ED}(x_3) &= n_0 + n_1x_3
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Corrispondentemente, si potranno scrivere trenta equazioni nei sei nodi.

— nell'appoggio in A si annullano ambedue le componenti di spostamento, ed il momento flettente:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 u_3^{AB}(0) &= 0 \\
 m^{AB}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

— nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza tra le due aste verticali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(H_1) &= u_2^{BC}(0) \\
 u_3^{AB}(H_1) &= u_3^{BC}(0) \\
 \phi^{AB}(H_1) &= \phi^{BC}(0)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

le condizioni di congruenza tra una delle aste verticali e l'asta orizzontale:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(H_1) &= u_3^{BE}(0) \\
 u_3^{AB}(H_1) &= -u_2^{BE}(0)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

e le condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 -t^{AB}(H_1) + t^{BC}(0) + n^{BE}(0) &= 0 \\
 n^{AB}(H_1) - n^{BC}(0) + t^{BE}(0) &= 0 \\
 -m^{AB}(H_1) + m^{BC}(0) &= 0 \\
 m^{BE}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

— nel nodo in C , la presenza del pendolo ad asse orizzontale vieta lo spostamento trasversale dell'asta verticale BC , e la componente orizzontale dello spostamento dell'asta CD :

$$\begin{aligned}
 u_2^{BC}(H_2) &= 0 \\
 u_2^{CD}(0) \sin[\alpha] - u_3^{CD}(0) \cos[\alpha] &= 0
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

dove $\alpha = \arctan \left[\frac{H_2}{L} \right]$. Per la congruenza, inoltre, dovrà aversi, come si deduce dalla Figura 5.2:

$$u_2^{CD}(0) \cos[\alpha] + u_3^{CD}(0) \sin[\alpha] = u_3^{BC}(H_2) \quad (5.7)$$

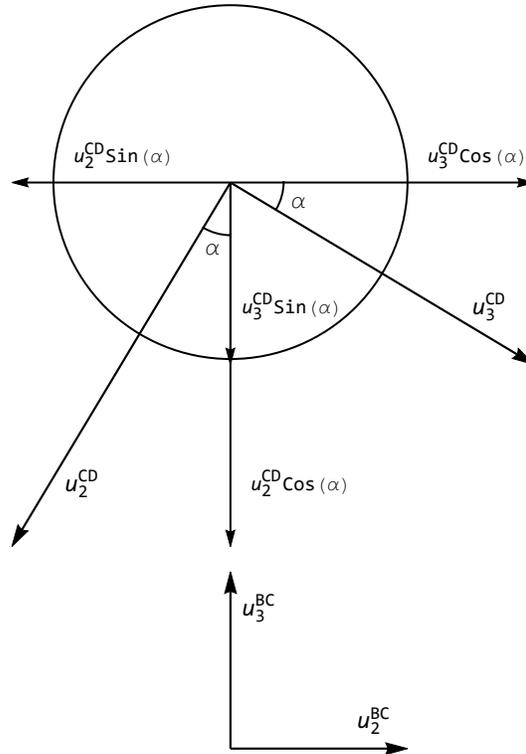


Figura 5.2: La congruenza del nodo in C

L'equilibrio della cerniera alla traslazione verticale ed alla rotazione permette di scrivere tre condizioni:

$$\begin{aligned} n^{CD}(0) \sin[\alpha] + t^{CD}(0) \cos[\alpha] + n^{BC}(H_2) &= 0 \\ m^{BC}(H_2) &= 0 \\ m^{CD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

come può leggersi dalla Figura 5.3: Nel nodo in D si hanno le condizioni di congruenza, da leggersi sulla Figura 5.4:

$$\begin{aligned} u_3^{ED} \left(\frac{L}{2} \right) &= -u_2^{CD}(L_1) \sin[\alpha] + u_3^{CD}(L_1) \cos[\alpha] \\ u_2^{ED} \left(\frac{L}{2} \right) &= u_2^{CD}(L_1) \cos[\alpha] + u_3^{CD}(L_1) \sin[\alpha] \end{aligned} \quad (5.9)$$

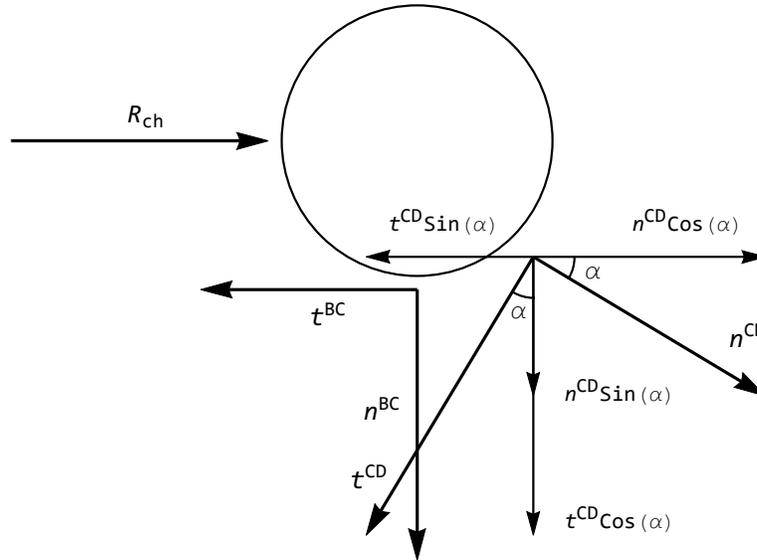


Figura 5.3: L'equilibrio del nodo in C

con $L_1 = \sqrt{L^2 + H_2^2}$. L'equilibrio della cerniera, invece, detta, come può leggersi dalla Figura 5.5:

$$\begin{aligned}
 n^{ED} \left(\frac{L}{2} \right) + n^{CD} (L_1) \cos[\alpha] - t^{CD} (L_1) \sin[\alpha] &= 0 \\
 t^{ED} \left(\frac{L}{2} \right) + n^{CD} (L_1) \sin[\alpha] + t^{CD} (L_1) \cos[\alpha] &= 0 \\
 m^{ED} \left(\frac{L}{2} \right) &= 0 \\
 m^{CD} (L_1) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Infine, nel nodo E si scriveranno le usuali condizioni in presenza di una forza:

$$\begin{aligned}
 u_2^{BE} \left(\frac{L}{2} \right) &= u_2^{ED} (0) \\
 u_3^{BE} \left(\frac{L}{2} \right) &= u_3^{ED} (0) \\
 \phi^{BE} \left(\frac{L}{2} \right) &= \phi^{ED} (0)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

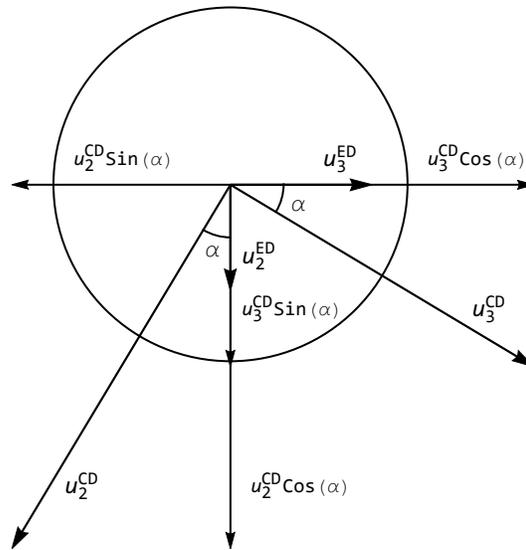


Figura 5.4: L'equilibrio del nodo in D

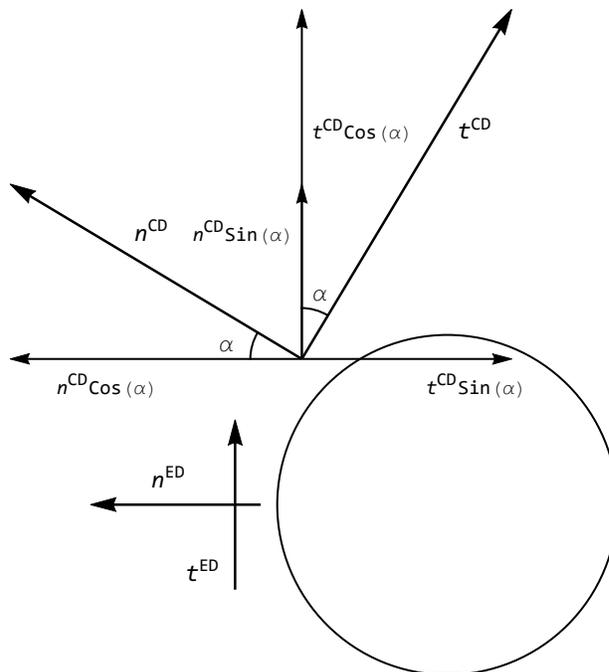


Figura 5.5: L'equilibrio del nodo in D

$$\begin{aligned}
n^{BE} \left(\frac{L}{2} \right) &= n^{ED}(0) \\
-t^{BE} \left(\frac{L}{2} \right) + t^{ED}(0) + F &= 0 \\
m^{BE} \left(\frac{L}{2} \right) &= m^{ED}(0)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Si ottengono le costanti di integrazione, da cui gli spostamenti assiali e trasversali. Portando EA ad infinito si potranno scrivere gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{FLx_3(H_1^2 + 2H_1H_2 - x_3^2)}{12EI(H_1 + H_2)} \\
u_2^{BC}(x_3) &= -\frac{FLH_1(H_2 - x_3)(2H_1H_2 + (2H_2 - x_3)x_3)}{12EIH_2(H_1 + H_2)} \\
u_2^{CD}(x_3) &= \frac{FH_1^2\sqrt{L^2 + H_2^2}x_3}{6EI(H_1 + H_2)\sqrt{1 + \frac{H_2^2}{L^2}}} \\
u_2^{BE}(x_3) &= \frac{(Fx_3(8LH_1^2 + H_1(3L^2 - 4x_3^2) + H_2(3L^2 - 4x_3^2)))}{48EI(H_1 + H_2)} \\
u_2^{ED}(x_3) &= \frac{F}{48EI(H_1 + H_2)} (4LH_1^2(L + 2x_3) + H_1(L^3 - 6Lx_3^2 + 4x_3^3) + \\
&\quad H_2(L^3 - 6Lx_3^2 + 4x_3^3))
\end{aligned} \tag{5.13}$$

mentre gli unici spostamenti assiali non nulli sono quelli delle aste orizzontali, per cui si ha:

$$u_3^{BE}(x_3) = u_3^{ED}(x_3) = \delta = -\frac{FLH_1^2H_2}{6EI(H_1 + H_2)} \tag{5.14}$$

La deformata si presenta come in Figura 5.6.

Le caratteristiche momento e taglio (che peraltro non sono influenzate dalla deformabilità assiale) si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned}
m^{AB}(x_3) &= -\frac{FLx_3}{2(H_1 + H_2)} \\
m^{BC}(x_3) &= -\frac{FLH_1(H_2 - x_3)}{2H_2(H_1 + H_2)} \\
m^{CD}(x_3) &= 0 \\
m^{BE}(x_3) &= \frac{Fx_3}{2} \\
m^{ED}(x_3) &= \frac{1}{4}F(L - 2x_3)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

ed il relativo diagramma si presenta come in Figura 5.7.

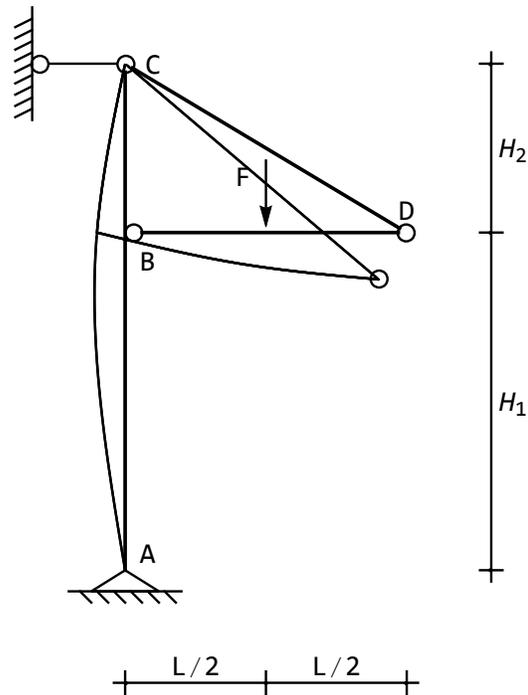


Figura 5.6: La deformata della pensilina

Gli sforzi di taglio si ottengono derivando i momenti:

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= -\frac{FL}{2(H_1 + H_2)} \\
 t^{BC}(x_3) &= \frac{FLH_1}{2H_2(H_1 + H_2)} \\
 t^{CD}(x_3) &= 0 \\
 t^{BE}(x_3) &= -t^{ED}(x_3) = \frac{F}{2}
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

Gli sforzi normali si deducono portando al limite la rigidità assiale, oppure da considerazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= -F \\
 n^{BC}(x_3) &= \frac{F}{2}
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

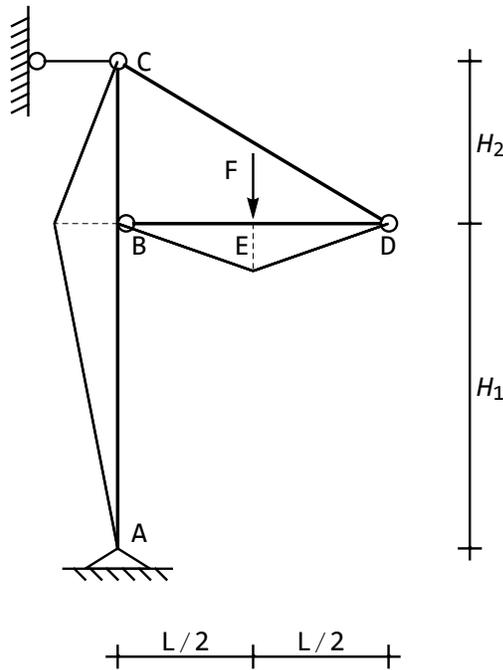


Figura 5.7: Il diagramma dei momenti flettenti

$$n^{CD}(x_3) = \frac{FL\sqrt{1 + \frac{H_2^2}{L^2}}}{2H_2} \quad (5.18)$$

$$n^{BE}(x_3) = n^{ED}(x_3) = -\frac{FL}{2H_2}$$

5.1 Una verifica

Il diagramma del momento può essere dedotto direttamente, a partire dal calcolo delle reazioni vincolari. E' infatti immediato realizzare, dall'equazione di equilibrio alla traslazione verticale dell'intera struttura, che:

$$R_{Av} = -F \quad (5.19)$$

mentre l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno al punto A fornisce:

$$-F\frac{L}{2} - R_{Ah}(H_1 + H_2) = 0 \quad (5.20)$$

da cui:

$$R_{Ch} = -\frac{FL}{2(H_1 + H_2)} \quad (5.21)$$

Infine, dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$R_{Ah} = -R_{Ch} = \frac{FL}{2(H_1 + H_2)} \quad (5.22)$$

Ciò fatto, lungo tutto il tratto AB il momento dovuto alla sola reazione orizzontale R_{Ah} , e sarà esprimibile come:

$$m^{AB}(x_3) = -\frac{FL}{2(H_1 + H_2)}x_3 \quad (5.23)$$

Del tutto analogamente, sul tratto BC il momento è dovuto alla sola reazione orizzontale R_{Ch} . Tenendo però presente che il sistema di riferimento ha origine in B , esso si dovrà esprimere come:

$$m^{BC}(x_3) = -\frac{FLH_1}{2(H_1 + H_2)}\left(1 - \frac{x_3}{H_2}\right) \quad (5.24)$$

Il pendolo CD non è ovviamente soggetto a momento flettente, mentre l'asta BD si comporta come una trave appoggiata di luce L soggetta a forza in mezzzeria:

$$\begin{aligned} m^{BE}(x_3) &= \frac{Fx_3}{2} \\ m^{ED}(x_3) &= \frac{1}{4}F(L - 2x_3) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Capitolo 6

Un telaio a nodi spostabili

Si vuole conoscere la deformata della struttura in Figura 6.1, insieme alle caratteristiche della sollecitazione interna. Si è in presenza di un telaio costituito da sei elementi e sei nodi, e quindi un approccio generale implica la definizione di sei linee elastiche flessionali e sei linee elastiche assiali, con la imposizione di trentasei condizioni ai limiti. Tuttavia, una serie di semplificazioni possono

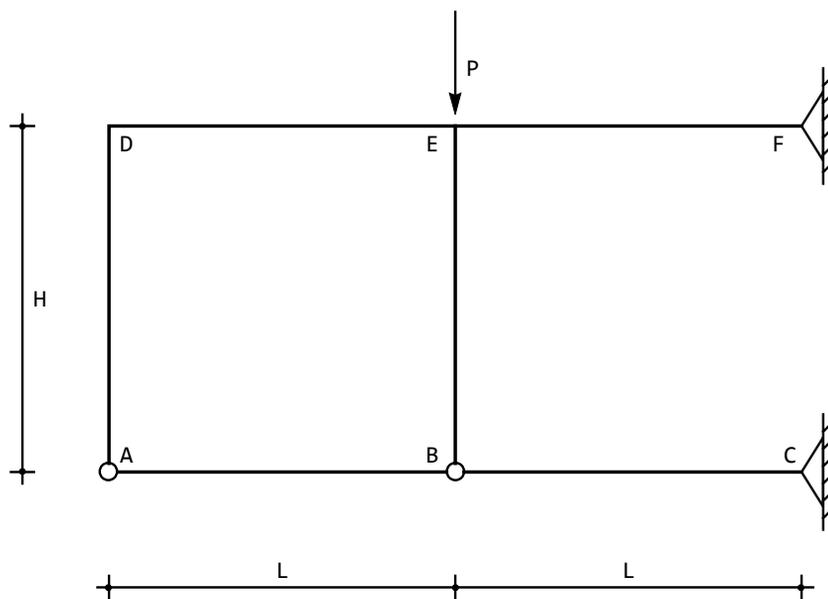


Figura 6.1: Un telaio a due nodi spostabili

ottenersi, considerando che l'asta AB è incernierata agli estremi, e che quindi — non essendo caricata — non è soggetta a momenti o tagli (“elemento pendolo”).

Identico discorso vale per l'asta BC . Le linee elastiche flessionali di ambedue gli elementi saranno perciò di tipo lineare:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 \\ u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Ipotizzando poi di poter trascurare le deformabilità assiali, le corrispondenti linee elastiche saranno costanti:

$$\begin{aligned} u_3^{AB}(x_3) &= b_0 \\ u_3^{BC}(x_3) &= d_0 \\ u_3^{AD}(x_3) &= f_0 \\ u_3^{DE}(x_3) &= h_0 \\ u_3^{EF}(x_3) &= n_0 \\ u_3^{BE}(x_3) &= s_0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

La presenza degli appoggi in C ed in F implica che gli spostamenti assiali delle aste EF e BC siano nulli. Poichè poi gli spostamenti assiali in E ed in B sono continui, si può concludere che anche gli spostamenti assiali delle aste DE ed AB sono identicamente nulli. Sarà quindi, in definitiva:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 \\ u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 \\ u_2^{AD}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 \\ u_3^{AD}(x_3) &= f_0 = \delta \\ u_2^{DE}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 \\ u_2^{EF}(x_3) &= m_0 + m_1 x_3 + m_2 x_3^2 + m_3 x_3^3 \\ u_2^{BE}(x_3) &= r_0 + r_1 x_3 + r_2 x_3^2 + r_3 x_3^3 \\ u_3^{BE}(x_3) &= s_0 = \delta_1 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Il telaio ha quindi due linee elastiche assiali diverse da zero, e viene comunemente detto “a due nodi spostabili”. Per esso occorrerà scrivere ventidue condizioni ai limiti, in modo da poter determinare le corrispondenti costanti di integrazione:

— nel nodo in A , lo spostamento trasversale dell'asta verticale AD dovrà annullarsi, mentre lo spostamento trasversale dell'asta orizzontale AB sarà uguale e contrario all'innalzamento δ del tratto AD . Infine, il momento lungo AD dovrà annullarsi:

$$\begin{aligned} u_2^{AD}(0) &= 0 \\ u_2^{AB}(0) &= -\delta \\ m^{AD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

— nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(L) &= u_2^{BC}(0) \\ u_2^{AB}(L) &= -\delta_1 \\ u_2^{BE}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Bisognerà poi annullare i momenti all'estremo dell'asta BE :

$$m^{BE}(0) = 0 \quad (6.6)$$

In corrispondenza dell'appoggio in C si avranno spostamenti nulli:

$$u_2^{BC}(L) = 0 \quad (6.7)$$

laddove la condizione di momento nullo è già stata utilizzata nella schematizzazione iniziale a pendolo.

Nel nodo D si hanno tre condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{AD}(H) &= 0 \\ u_2^{DE}(0) &= -\delta \\ \phi^{AD}(H) &= \phi^{DE}(0) \end{aligned} \quad (6.8)$$

ed una condizione di equilibrio:

$$-m^{AD}(H) + m^{DE}(0) \quad (6.9)$$

Nel nodo triplo caricato E bisognerà imporre la congruenza di spostamenti e rotazioni tra le aste DE ed EF :

$$\begin{aligned} u_2^{DE}(L) &= u_2^{EF}(0) \\ \phi^{DE}(L) &= \phi^{EF}(0) \end{aligned} \quad (6.10)$$

ed anche la congruenza di spostamenti e rotazioni tra l'asta DE e l'asta BE :

$$\begin{aligned} u_2^{DE}(L) &= -\delta_1 \\ u_2^{BE}(H) &= 0 \\ \phi^{DE}(L) &= \phi^{BE}(H) \end{aligned} \quad (6.11)$$

La congruenza tra gli spostamenti di EF e BE è automaticamente soddisfatta.

Bisognerà poi imporre l'equilibrio alla rotazione:

$$-m^{DE}(L) + m^{EF}(0) + m^{BE}(0) = 0 \quad (6.12)$$

Infine, in corrispondenza dell'appoggio in F si avrà l'annullarsi di spostamenti e momenti:

$$\begin{aligned} u_2^{EF}(L) &= 0 \\ m^{EF}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

A queste equazioni, scritte nei nodi, bisogna aggiungere le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale del tratto AD :

$$t^{DE}(0) = 0 \quad (6.14)$$

e dell'intero tratto $ABDE$:

$$t^{EF}(0) + P = 0 \quad (6.15)$$

Queste ultime due equazioni vengono talvolta dette “equazioni di piano”, in quanto frequentemente utilizzate nell’analisi di edifici multipiano. Risolvendo le ventidue equazioni si ottengono le componenti trasversali di spostamento:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{PL(L(4H^2 + 13HL + 6L^2) - H(2H + 3L)x_3)}{6EI(2H + 3L)} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{PL(H^2 + 5HL + 3L^2)(L - x_3)}{EI(6H + 9L)} \\ u_2^{AD}(x_3) &= \frac{PH^2Lx_3 - FLx_3^3}{12EIH + 18EIL} \\ u_2^{DE}(x_3) &= \frac{PL(L(4H^2 + 13HL + 6L^2) - 2H^2x_3 - 3Hx_3^2)}{6EI(2H + 3L)} \\ u_2^{EF}(x_3) &= \frac{P(L - x_3)(2L(H^2 + 5HL + 3L^2) + 2L(2H + 3L)x_3 - (2H + 3L)x_3^2)}{6EI(2H + 3L)} \\ u_2^{BE}(x_3) &= \frac{PL(H + 3L)x_3(H^2 - x_3^2)}{6EIH(2H + 3L)} \end{aligned} \quad (6.16)$$

e gli spostamenti assiali dei due tratti verticali :

$$\begin{aligned} \delta &= -\frac{PL^2(4H^2 + 13HL + 6L^2)}{6EI(2H + 3L)} \\ \delta_1 &= -\frac{PL^2(H^2 + 5HL + 3L^2)}{EI(6H + 9L)} \end{aligned} \quad (6.17)$$

La deformata è riportata in Figura 6.2, mentre momenti flettenti e tagli sono banalmente calcolabili tramite derivazione successive

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= m^{BC}(x_3) = 0 \\ m^{AD}(x_3) &= \frac{PLx_3}{2H + 3L} \\ m^{DE}(x_3) &= \frac{PHL}{2H + 3L} \\ m^{EF}(x_3) &= P(L - x_3) \\ m^{BE}(x_3) &= \frac{PL(H + 3L)x_3}{H(2H + 3L)} \end{aligned} \quad (6.18)$$

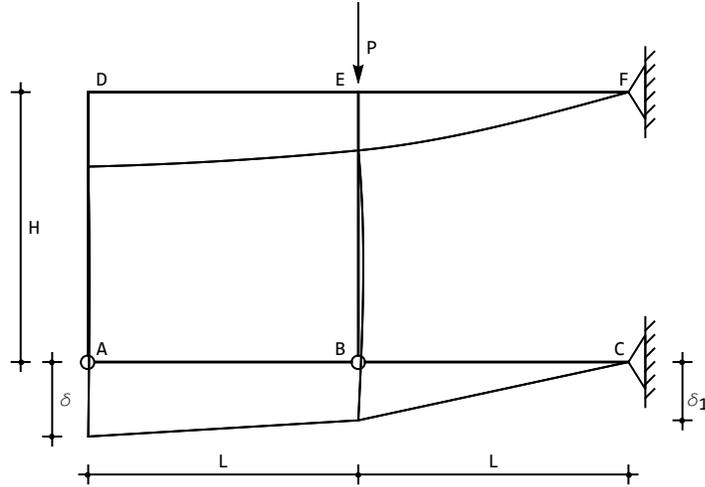


Figura 6.2: La deformata del telaio

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= t^{BC}(x_3) = t^{DE}(x_3) = 0 \\
 t^{AD}(x_3) &= \frac{PL}{2H + 3L} \\
 t^{EF}(x_3) &= -P \\
 t^{BE}(x_3) &= \frac{PL(H + 3L)}{H(2H + 3L)}
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Il diagramma dei momenti si presenta come in Figura 6.3. Gli sforzi normali si possono dedurre a partire dagli equilibri dei nodi. Essi sono nulli sui ritzi, sono di compressione sul tratto inferiore, e di trazione sul tratto superiore:

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= -\frac{PL}{2H + 3L} \\
 n^{BC}(x_3) &= -\frac{PL}{H} \\
 n^{DE}(x_3) &= -n^{AB}(x_3) \\
 n^{EF}(x_3) &= -n^{BC}(x_3) \\
 n^{AD}(x_3) &= n^{BE}(x_3) = 0
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

6.1 Una verifica con il principio dei lavori virtuali

Si voglia ora utilizzare, a scopo di verifica, il principio delle forze virtuali. La struttura può essere vista come una maglia chiusa a due cerniere, vincolata con un appoggio in F ed un pendolo BC ad asse orizzontale, risultando quindi una

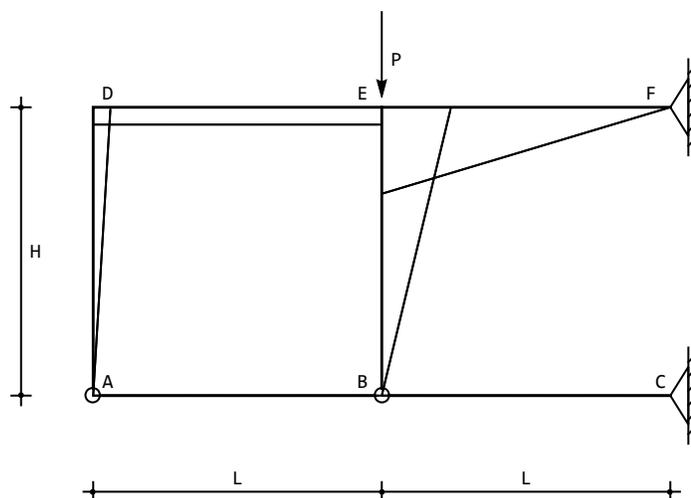


Figura 6.3: Il diagramma dei momenti

volta internamente iperstatica. Alternativamente, può verificarsi che essa è costituita da tre tratti rigidi, connessi tra loro ed al suolo da tre cerniere binarie, ciascuna sopprime due gradi di libertà, ed una cerniera multipla che sopprime quattro gradi di libertà. Anche in questo caso, quindi, la struttura senza vincoli ha nove gradi di libertà, mentre i vincoli sopprimono dieci possibilità di movimento, segnalando una iperstaticità.

Per scegliere una struttura isostatica equivalente, si consideri che sarebbe errato intervenire sui vincoli esterni in C od in F , in quanto si renderebbe la struttura labile. Ci si riconduce quindi al classico schema isostatico di maglia chiusa a tre cerniere, operando una sconnessione in D , inserendo una cerniera, ed aggiungendo le coppie incognite X , con segno tale da far ruotare il tratto DE in senso antiorario rispetto al tratto AD . Ne segue la struttura isostatica equivalente di Figura 6.4.

Tale sistema, equivalente allo schema reale, viene assunto come sistema di spostamenti, mentre il sistema di forze (virtuali) è costituito dallo schema isostatico caricato dalle sole coppie in D , di valore unitario. In tal modo il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (6.21)$$

Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti si potrà scrivere $M = M_0 + XM_1$, dove M_0 è il diagramma del momento calcolato sullo schema isostatico caricato dalla sola forza P , e quindi infine scrivere l'incognita iperstatica come:

$$X = - \frac{\int M_1 M_0 ds}{\int M_1^2 ds} \quad (6.22)$$

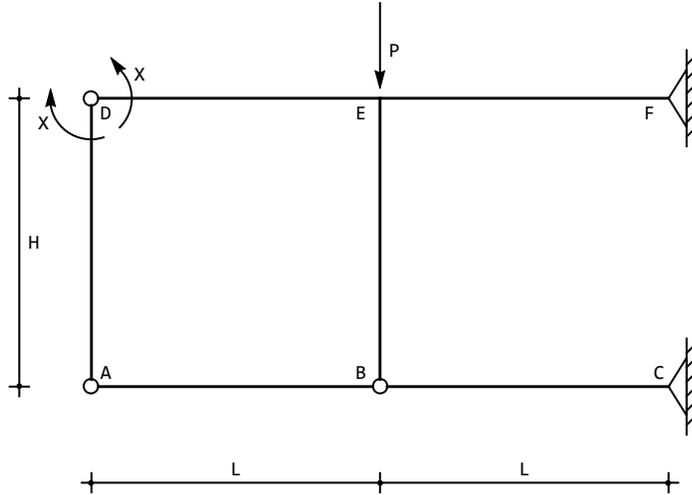


Figura 6.4: Il sistema isostatico equivalente per il calcolo dell'incognita iperstatica

Il diagramma M_0 è riportato in Figura 6.5, ed è immediatamente deducibile quando si consideri che la reazione c deve essere orizzontale, e che quindi la reazione f ha componente verticale pari a $-P$. Il diagramma del momento sarà poi nullo sui tre pendoli AB , AD e BC . Si ha quindi:

$$\begin{aligned} m_1^{EF}(x_3) &= PL \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ m_1^{BE}(x_3) &= PL \frac{x_3}{H} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Il diagramma M_1 è riportato in Figura 6.6, ed è anch'esso immediatamente deducibile quando si consideri che le reazioni esterne saranno nulle, e quindi che il momento è limitato alla maglia chiusa. Potrà quindi scriversi:

$$\begin{aligned} m_0^{AD}(x_3) &= X \frac{x_3}{H} = \frac{x_3}{H} \\ m_0^{BE}(x_3) &= -X \frac{x_3}{H} = -\frac{x_3}{H} \\ m_0^{DE}(x_3) &= X = 1 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Il calcolo dei due integrali risulta immediato:

$$\int M_1 M_0 ds = -\frac{PL}{H^2} \int_0^H x_3^2 dx_3 = -\frac{PLH}{3} \quad (6.25)$$

$$\int M_1^2 ds = \frac{1}{H^2} \int_0^H x_3^2 dx_3 + \int_0^L dx_3 + \frac{1}{H^2} \int_0^H x_3^2 dx_3 = \frac{2}{3}H + L \quad (6.26)$$

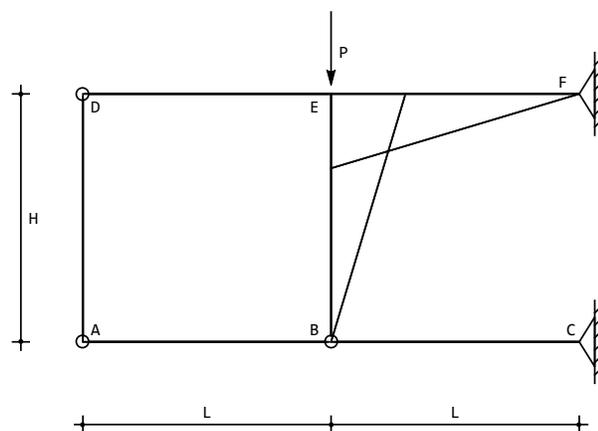


Figura 6.5: Il sistema isostatico caricato dal solo carico applicato

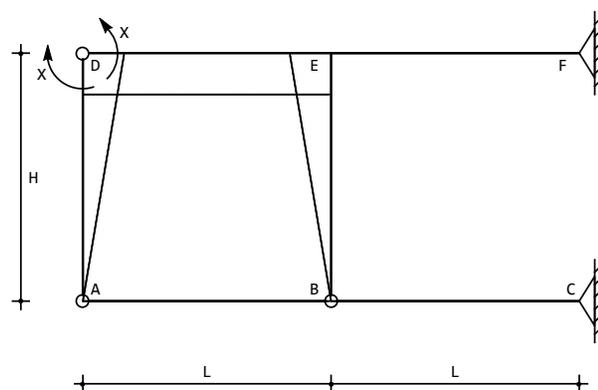


Figura 6.6: Il sistema isostatico caricato dalla sola incognita iperstatica

e quindi si può conoscere l'incognita iperstatica:

$$X = \frac{PLH}{2H + 3L} \quad (6.27)$$

Essa viene a coincidere anche in segno con i momenti calcolati secondo le (6.18), in quanto si è assunto un sistema di riferimento con l'origine rispettivamente in A ed in D . Si completi l'espressione dei momenti lungo la struttura, utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti

Capitolo 7

Un telaio con pendolo

Si vuole studiare la struttura in Figura 7.1, considerando i tratti assialmente indeformabili, mentre il pendolo BE ha rigidezza assiale finita, e pari ad EA_p .

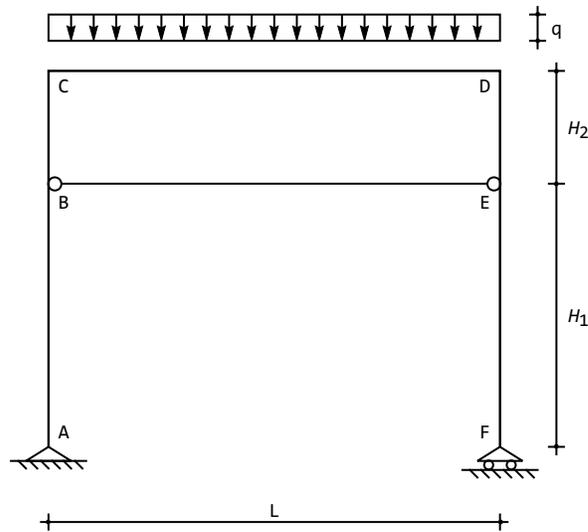


Figura 7.1: Un portale con pendolo interno

Il telaio è costituito da cinque segmenti di trave, e dal pendolo BE . Esso, inoltre, è soggetto a carichi distribuiti lungo il traverso CD , e quindi le linee elastiche flessionali degli elementi di trave saranno esprimibili come:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\ u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 + q \frac{x_3^4}{24EI} \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} u_2^{ED}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 \\ u_2^{FE}(x_3) &= m_0 + m_1 x_3 + m_2 x_3^2 + m_3 x_3^3 \end{aligned}$$

Poichè si è ipotizzato che le travi siano assialmente indeformabili, le linee elastiche assiali sono costanti: inoltre, le condizioni ai limiti permettono di realizzare che solo la linea elastica assiale del traverso sarà diversa di zero (telaio ad un nodo spostabile). Sia quindi δ lo spostamento del traverso:

$$u_3^{CD}(x_3) = \delta \quad (7.2)$$

Infine, lo spostamento trasversale del pendolo sarà identicamente nullo, in quanto nulli sono gli spostamenti verticali dei punti B ed E , mentre la linea elastica assiale si scriverà:

$$u_3^{BE}(x_3) = s_0 + s_1 x_3 \quad (7.3)$$

Ne segue che lo sforzo normale nel pendolo sarà pari a:

$$n^{BE}(x_3) = EA_p u_3'^{BE}(x) \quad (7.4)$$

mentre gli sforzi normali nelle travi andranno calcolati *a posteriori* tramite condizioni di equilibrio.

Le ventitrè costanti di integrazione si determinano imponendo la congruenza degli spostamenti e l'equilibrio delle forze nei nodi, e l'equilibrio di piano. Più in dettaglio, si avrà:

— nell'appoggio in A si annulla lo spostamento trasversale, ed il momento flettente:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(0) &= 0 \\ m^{AB}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

— nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza tra le due aste verticali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(H_1) &= u_2^{BC}(0) \\ \phi^{AB}(H_1) &= \phi^{BC}(0) \end{aligned} \quad (7.6)$$

la condizione di congruenza tra un'asta verticale ed il pendolo BE :

$$u_2^{AB}(H_1) = u_3^{BE}(0) \quad (7.7)$$

e le due condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} -t^{AB}(H_1) + t^{BC}(0) + n^{BE}(0) &= 0 \\ -m^{AB}(H_1) + m^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

— nel nodo in C , si hanno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(H_2) &= \delta \\ u_2^{CD}(0) &= 0 \\ \phi^{BC}(H_2) &= \phi^{CD}(0) \end{aligned} \quad (7.9)$$

e la condizione di equilibrio:

$$-m^{BC}(H_2) + m^{CD}(0) = 0 \quad (7.10)$$

— nel nodo in D , analogamente, si hanno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{ED}(H_2) &= \delta \\ u_2^{CD}(L) &= 0 \\ \phi^{ED}(H_2) &= \phi^{CD}(L) \end{aligned} \quad (7.11)$$

e la condizione di equilibrio:

$$-m^{ED}(H_2) - m^{CD}(L) = 0 \quad (7.12)$$

— nel nodo in E si ha uno scenario simile al nodo in B . Si impongono le condizioni di congruenza tra le due aste verticali:

$$\begin{aligned} u_2^{FE}(H_1) &= u_2^{ED}(0) \\ \phi^{FE}(H_1) &= \phi^{ED}(0) \end{aligned} \quad (7.13)$$

la condizione di congruenza tra un'asta verticale ed il pendolo BE :

$$u_2^{FE}(H_1) = u_3^{BE}(L) \quad (7.14)$$

e le due condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} -t^{FE}(H_p) + t^{ED}(0) - n^{BE}(L) &= 0 \\ -m^{FE}(H_1) + m^{ED}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

— Nel carrello in F , con piano di scorrimento orizzontale, si ha infine:

$$\begin{aligned} t^{FE}(0) &= 0 \\ m^{FE}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

A queste ventidue equazioni scritte nei nodi, occorre aggiungere l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale del traverso CD (equazione di piano):

$$-t^{BC}(H_2) - t^{ED}(H_2) = 0 \quad (7.17)$$

Risolvendo le ventitrè equazioni si ottengono le costanti di integrazione, e gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{qL^3}{24EI\Delta} (3IL - A_p H_2^3) x_3 \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{qL^3}{24EI\Delta} (H_1 (3IL - A_p H_2^3) + x_3 (3IL + A_p (-H_2^3 + H_2 x_3^2))) \\ u_2^{CD}(x_3) &= \frac{q(L - x_3)x_3}{24EI\Delta} (3IL(L^2 + Lx_3 - x_3^2) + A_p H_2^2 (3L(L - x_3)x_3 + \\ &\quad 2H_2(L^2 + Lx_3 - x_3^2))) \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$u_2^{ED}(x_3) = \frac{qL^3}{24EI\Delta} (H_1 (3IL - A_p H_2^3) - 3ILx_3 + A_p H_2^3 x_3 + H_2 (6IL - A_p x_3^3))$$

$$u_2^{FE}(x_3) = \frac{qL^3}{24EI\Delta} (6ILH_2 + H_1 (6IL - 2A_p H_2^3) - 3ILx_3 + A_p H_2^3 x_3) \quad (7.19)$$

con:

$$\Delta = (3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2)) \quad (7.20)$$

Lo spostamento orizzontale del traverso è pari a:

$$\delta = \frac{qL^3}{24EI} \frac{(3ILH_2 + H_1 (3IL - A_p H_2^3))}{(3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2))} \quad (7.21)$$

o, per pendolo inestensibile:

$$\delta = -\frac{qL^3}{24EI} \frac{H_1 H_2}{3L + 2H_2} \quad (7.22)$$

La deformata è riportata in Figura 7.2.

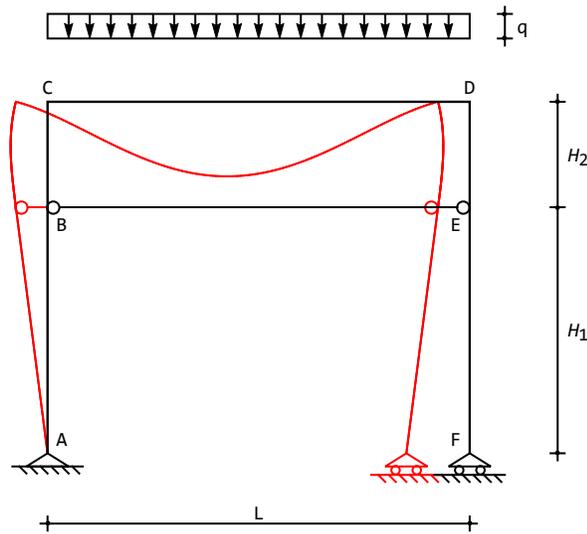


Figura 7.2: La deformata per il portale con pendolo interno

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva :

$$m^{AB}(x_3) = m^{FE}(x_3) = 0$$

$$m^{BC}(x_3) = -\frac{qL^3}{4} \frac{A_p H_2 x_3}{(3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2))} \quad (7.23)$$

$$m^{CD}(x_3) = \frac{qL^3}{4} \left(-\frac{A_p H_2^2}{3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2)} + 2(L - x_3)x_3 \right) \quad (7.24)$$

$$m^{ED}(x_3) = -m^{BC}(x_3)$$

$$t^{AB}(x_3) = t^{FE}(x_3) = 0$$

$$t^{BC}(x_3) = -\frac{qL^3 A_p H_2}{4(3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2))}$$

$$t^{CD}(x_3) = \frac{q}{2}(L - 2x_3) \quad (7.25)$$

$$t^{ED}(x_3) = \frac{qL^3 A_p H_2}{4(3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2))}$$

$$n^{BE}(x_3) = \frac{qL^3 A_p H_2}{4(3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2))}$$

Lo sforzo normale nel pendolo, se il pendolo è inestensibile, è pari a:

$$n^{BE}(x_3) = \frac{qL^3}{4H_2(3L + 2H_2)} \quad (7.26)$$

Il diagramma dei momenti è riportato in Figura 7.3.

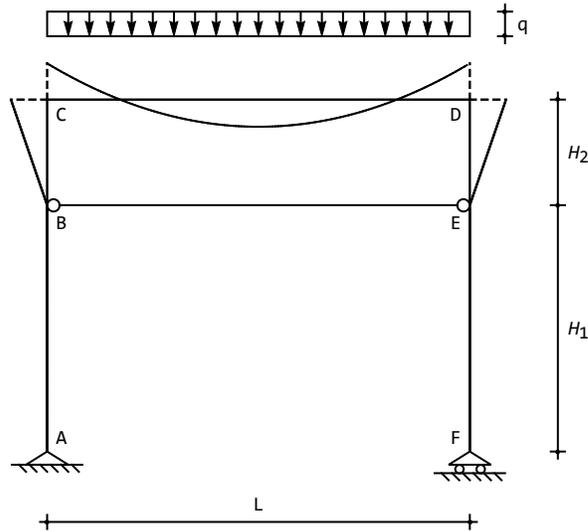


Figura 7.3: I momenti flettenti per il portale con pendolo interno

Il principio dei lavori virtuali

Per ottenere lo sforzo normale nel pendolo, si può applicare il principio dei lavori virtuali, utilizzando la struttura isostatica equivalente di Figura 7.4, in

cui il pendolo è stato rimosso, e sostituito con lo sforzo normale incognito X . Utilizzando questo sistema per il calcolo degli spostamenti, ed il sistema di Figura 7.5 per il calcolo delle forze, si potrà scrivere:

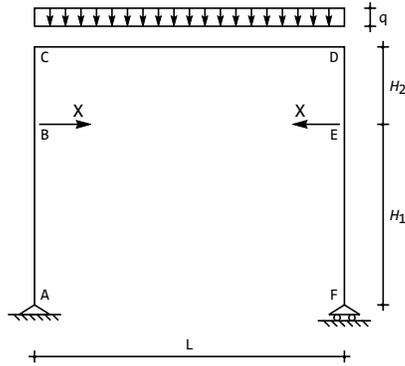


Figura 7.4: Un possibile S.I.E. per il portale con pendolo interno

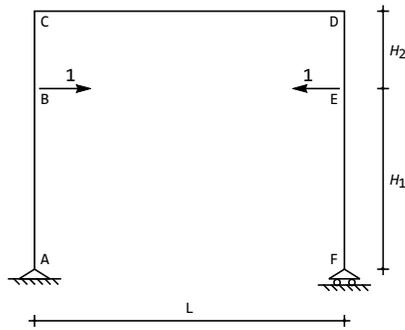


Figura 7.5: Il sistema S_1 delle forze virtuali

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = -(1) \frac{XL}{EA_p} \quad (7.27)$$

e quindi, in base al principio di sovrapposizione degli effetti :

$$X = - \frac{\int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds}{\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds + \frac{L}{EA_p}} \quad (7.28)$$

Il momento M_0 , da calcolare sul sistema isostatico caricato dal solo carico applicato, è limitato al tratto orizzontale, ed è quello di trave semplicemente appoggiata, e si presenta come in Figura 7.6. Analiticamente, quindi:

$$m_0^{CD}(x_3) = \frac{q}{2} x_3 (L - x_3) \quad (7.29)$$

Il momento M_1 deve essere calcolato sullo schema S_1 , di Figura 7.5. Le reazioni esterne sono nulle, il diagramma si limita alla parte superiore del telaio, come riportato in Figura 7.7. Analiticamente si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} m_1^{BC}(x_3) &= -x_3 \\ m_1^{CD}(x_3) &= -H_2 \\ m_1^{ED}(x_3) &= x_3 \end{aligned} \quad (7.30)$$

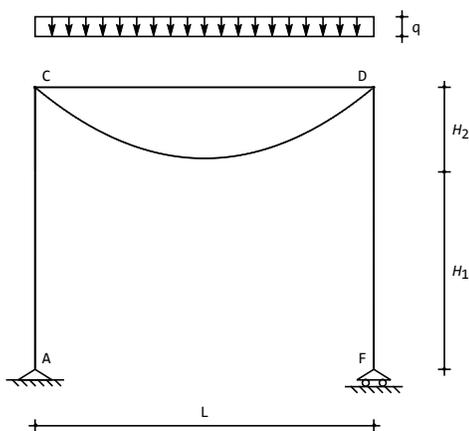


Figura 7.6: Il momento M_0 dovuto ai carichi applicati

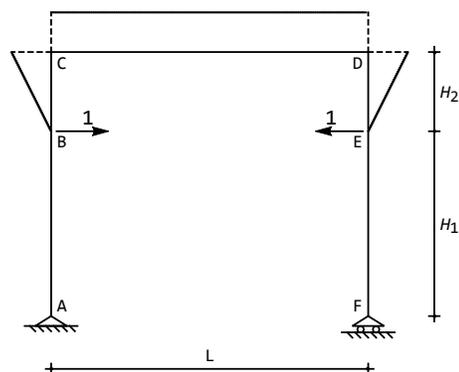


Figura 7.7: Il momento M_1 dovuto alla forza unitaria

Gli integrali si calcolano allora facilmente :

$$\int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds = -\frac{qH_2}{2EI} \int_0^L x_3 (L - x_3) dx_3 = -\frac{qL^3 H_2}{12EI} \quad (7.31)$$

$$\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{2}{EI} \int_0^{H_2} x_3^2 dx_3 + \frac{H_2^2}{EI} \int_0^L dx_3 = \frac{H_2^2}{EI} \left(L + \frac{2}{3} H_2 \right) \quad (7.32)$$

e quindi il richiesto sforzo normale si ottiene come :

$$X = \frac{qL^3}{4} \frac{A_p H_2}{(3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2))} \quad (7.33)$$

coincidente con quanto ottenuto attraverso l'utilizzo della linea elastica.

Lo spostamento del traverso

Si voglia ora conoscere lo spostamento orizzontale δ del traverso CD attraverso una applicazione del principio dei lavori virtuali. A tal fine, si utilizza lo schema reale di Figura 7.1 come sistema di spostamenti, o — più precisamente — si utilizza lo schema isostatico equivalente di Figura 7.4, in cui l'incognita iperstatica X è stata già calcolata. Lo schema fittizio di Figura 7.8 verrà invece assunto come insieme di forze (virtuali). Si avrà quindi:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = \delta \quad (7.34)$$

Il diagramma del momento M_1 su questo schema è riportato in Figura 7.9, e poichè la reazione orizzontale dell'appoggio in A dovrà essere pari ad uno, ed orientata verso sinistra, potrà scriversi:

$$\begin{aligned} m_1^{AB}(x_3) &= x_3 \\ m_1^{BC}(x_3) &= H_1 + x_3 \\ m_1^{CD}(x_3) &= (H_1 + H_2) \left(1 - \frac{x_3}{L} \right) \end{aligned} \quad (7.35)$$

Il diagramma del momento M è immediatamente scrivibile in base al principio di sovrapposizione degli effetti, e sarà, limitatamente ai tratti di interesse:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= 0 \\ m^{BC}(x_3) &= -Xx_3 = -\frac{qL^3 A_p H_2}{4(3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2))} x_3 \\ m^{CD}(x_3) &= \frac{q}{2} x_3 (L - x_3) - XH_2 = \frac{q}{2} x_3 (L - x_3) - \\ &\quad \frac{qL^3 A_p H_2}{4(3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2))} \end{aligned} \quad (7.36)$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \int_s M_1 \frac{M}{EI} ds &= \frac{1}{EI} \int_0^{H_2} (H_1 + x_3) (-Xx_3) ds + \\ &\quad \frac{1}{EI} \int_0^L \left((H_1 + H_2) \left(1 - \frac{x_3}{L} \right) \right) \left(\frac{q}{2} x_3 (L - x_3) - XH_2 \right) ds \end{aligned} \quad (7.37)$$

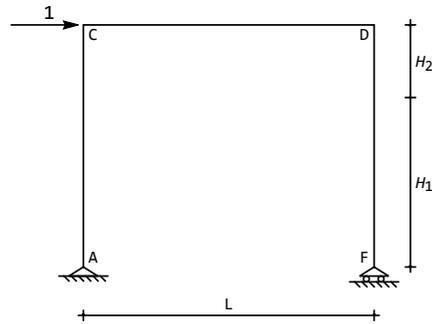


Figura 7.8: Lo schema di forze virtuali per il calcolo dello spostamento δ del traverso

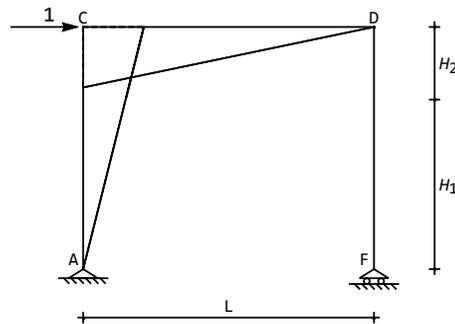


Figura 7.9: Il diagramma del momento M_1 per il calcolo dello spostamento δ del traverso

e semplificando ed inserendo la (7.33):

$$\delta = \frac{qL^3}{24EI} \frac{(3ILH_2 + H_1(3IL - A_p H_2^3))}{(3IL + A_p H_2^2(3L + 2H_2))} \quad (7.38)$$

7.1 Il caso della variazione termica assiale

Si ipotizzi ora che il pendolo BE sia soggetto alla variazione termica uniforme $\lambda = -\alpha\Delta T$ su tutta la sua lunghezza, come illustrato in Figura 7.10.

Rispetto a quanto dedotto prima, occorre solo annullare il carico applicato, e modificare lo sforzo normale nel pendolo, che ora sarà pari a:

$$n^{BE}(x_3) = EA_p u_3'^{BE}(x) + EA_p \lambda \quad (7.39)$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno le stesse del caso precedente, e la

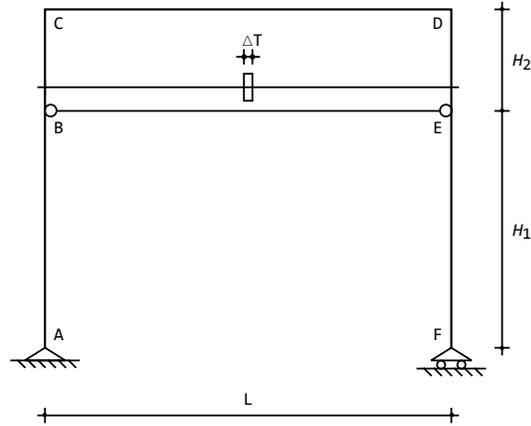


Figura 7.10: Il telaio soggetto a variazione termica uniforme nel pendolo

loro risoluzione porta agli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{\alpha \Delta T}{D} (3LA_p H_2 (L + H_2) x_3) \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{\alpha \Delta T}{D} (LA_p (3H_1 H_2 (L + H_2) + x_3 (3LH_2 + 3H_2^2 - x_3^2))) \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{\alpha \Delta T}{D} (3LA_p H_2 (L - x_3) x_3) \\
 u_2^{ED}(x_3) &= \frac{\alpha \Delta T}{D} (LA_p (4H_2^3 + 3H_1 H_2 (L + H_2) + H_2^2 (6L - 3x_3) \\
 &\quad - 3LH_2 x_3 + x_3^3)) \\
 u_2^{FE}(x_3) &= \frac{\alpha \Delta T}{D} (LA_p H_2 (4H_2^2 + 6H_1 (L + H_2) + H_2 (6L - 3x_3) - 3Lx_3))
 \end{aligned} \tag{7.40}$$

mentre lo spostamento orizzontale del traverso è pari a:

$$\delta = \frac{\alpha \Delta T}{D} (LA_p H_2 (3H_1 (L + H_2) + H_2 (3L + 2H_2))) \tag{7.41}$$

con:

$$D = IL + 2A_p H_2^2 (3L + 2H_2) \tag{7.42}$$

Per pendolo inestensibile, invece, si avranno gli spostamenti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{3L(L + H_2) x_3}{2H_2 (3L + 2H_2)} \alpha \Delta T \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{L (3H_1 H_2 (L + H_2) + x_3 (3LH_2 + 3H_2^2 - x_3^2))}{2H_2^2 (3L + 2H_2)} \alpha \Delta T
 \end{aligned} \tag{7.43}$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{3L(L-x_3)x_3}{2H_2(3L+2H_2)}\alpha\Delta T \\
 u_2^{ED}(x_3) &= \frac{L(4H_2^3+3H_1H_2(L+H_2)+H_2^2(6L-3x_3)-3LH_2x_3+x_3^3)}{2H_2^2(3L+2H_2)}\alpha\Delta T \\
 u_2^{FE}(x_3) &= \frac{L(4H_2^2+6H_1(L+H_2)+H_2(6L-3x_3)-3Lx_3)}{2H_2(3L+2H_2)}\alpha\Delta T \\
 \delta &= \frac{L(3H_1(L+H_2)+H_2(3L+2H_2))}{2H_2(3L+2H_2)}\alpha\Delta T \quad (7.44)
 \end{aligned}$$

La deformata è riportata in Figura 7.11.

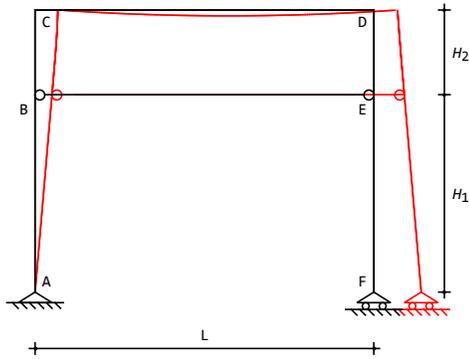


Figura 7.11: Un portale con pendolo interno: deformata per variazione termica nel pendolo

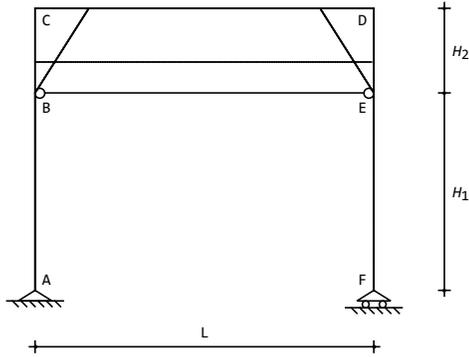


Figura 7.12: Un portale con pendolo interno: momenti per variazione termica nel pendolo

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= 0 \\
 m^{BC}(x_3) &= \frac{3EILA_p x_3}{3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2)}\alpha\Delta T \quad (7.45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m^{CD}(x_3) &= \frac{3EIL A_p H_2}{3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2)} \alpha \Delta T \\ m^{ED}(x_3) &= -\frac{3EIL A_p x_3}{3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2)} \alpha \Delta T \\ m^{FE}(x_3) &= 0 \end{aligned}$$

e, per pendolo inestensibile:

$$\begin{aligned} m^{BC}(x_3) &= \frac{3EIL x_3}{H_2^2 (3L + 2H_2)} \alpha \Delta T \\ m^{CD}(x_3) &= \frac{3EIL}{3LH_2 + 2H_2^2} \alpha \Delta T \\ m^{ED}(x_3) &= -\frac{3EIL x_3}{H_2^2 (3L + 2H_2)} \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (7.46)$$

Infine, lo sforzo normale nel pendolo è pari a:

$$n^{BE}(x_3) = -\frac{3EIL A_p}{3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2)} \alpha \Delta T \quad (7.47)$$

o, per pendolo inestensibile, a:

$$n^{BE}(x_3) = -\frac{3EIL}{H_2^2 (3L + 2H_2)} \alpha \Delta T \quad (7.48)$$

Il diagramma dei momenti è riportato in Figura 7.12.

Il principio dei lavori virtuali

Per ottenere lo sforzo normale nel pendolo, si può applicare il principio dei lavori virtuali, utilizzando la struttura isostatica equivalente di Figura 7.13, in cui il pendolo è stato rimosso, e sostituito con lo sforzo normale incognito X . Utilizzando questo sistema per il calcolo degli spostamenti, ed il sistema di Figura 7.14 per il calcolo delle forze, si potrà scrivere:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds - \int_s N_1 \lambda ds = -(1) \frac{XL}{EA_p} \quad (7.49)$$

ossia, tenendo conto che lo sforzo normale N_1 nel pendolo è unitario, e che $\lambda = -\alpha \Delta T$:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = -\frac{XL}{EA_p} - \alpha \Delta T L \quad (7.50)$$

Quindi, in base al principio di sovrapposizione degli effetti :

$$X = -\frac{\alpha \Delta T L}{\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds + \frac{L}{EA_p}} \quad (7.51)$$

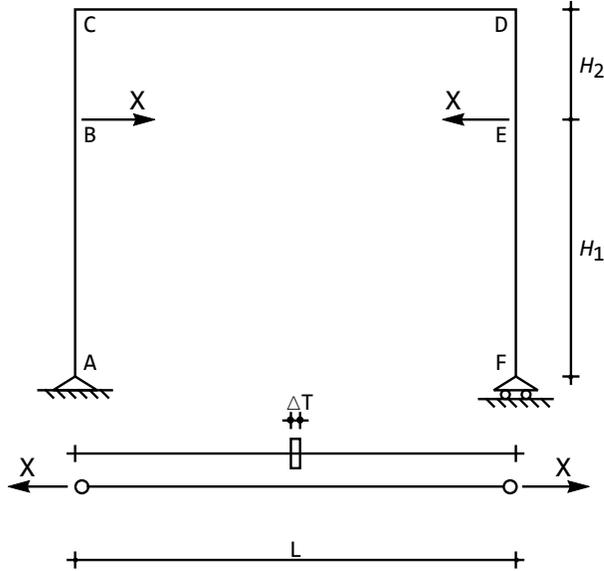


Figura 7.13: Un portale con pendolo interno: S.I.E. (sistema degli spostamenti)

in quanto il momento M_0 , da calcolare sul sistema isostatico caricato dalla sola distorsione, è nullo.

Il momento M_1 deve essere calcolato sullo schema S_1 , di Figura 7.14. Le reazioni esterne sono nulle, il diagramma si limita alla parte superiore del telaio, e si avrà, come deducibile dal diagramma di Figura 7.15:

$$\begin{aligned} m_1^{BC}(x_3) &= -x_3 \\ m_1^{CD}(x_3) &= -H_2 \\ m_1^{ED}(x_3) &= x_3 \end{aligned} \quad (7.52)$$

L'integrale si calcola allora facilmente:

$$\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{2}{EI} \int_0^{H_2} x_3^2 dx_3 + \frac{H_2^2}{EI} \int_0^L dx_3 = \frac{H_2^2}{EI} \left(L + \frac{2}{3} H_2 \right) \quad (7.53)$$

e quindi il richiesto sforzo normale si ottiene come:

$$X = -\frac{3EI\alpha\Delta T A_p}{3IL + A_p H_2^2 (3L + 2H_2)} \quad (7.54)$$

coincidente con quanto ottenuto attraverso l'utilizzo della linea elastica.

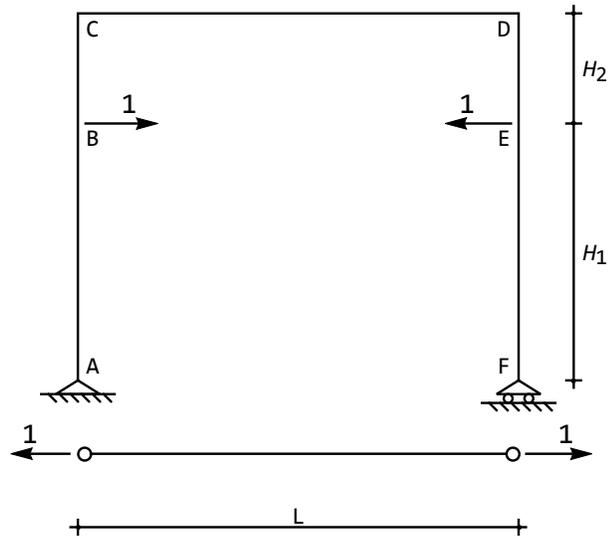


Figura 7.14: Un portale con pendolo interno: il sistema S_1 delle forze

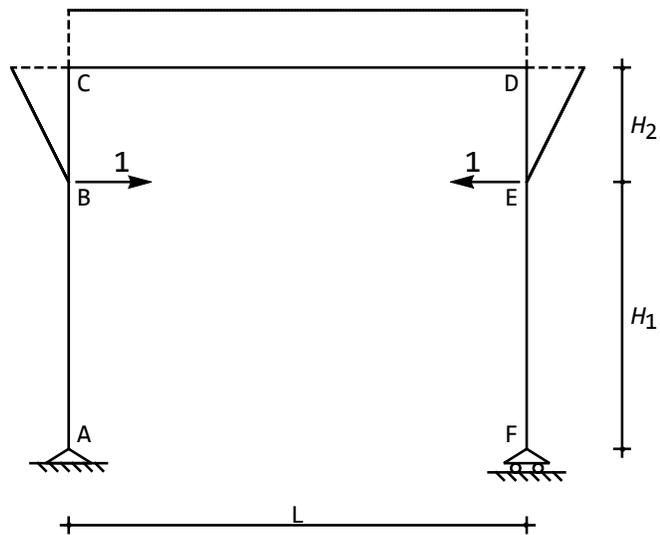


Figura 7.15: Un portale con pendolo interno: il momento M_1

Capitolo 8

Una maglia chiusa

Si vuole conoscere lo stato di sollecitazione e la deformata della struttura in Figura 8.1: si tratta di una maglia chiusa non vincolata esternamente, ma in equilibrio per la condizione di carico indicata. La presenza di tre cerniere la rende isostatica internamente, e naturalmente divisa in otto tratti.

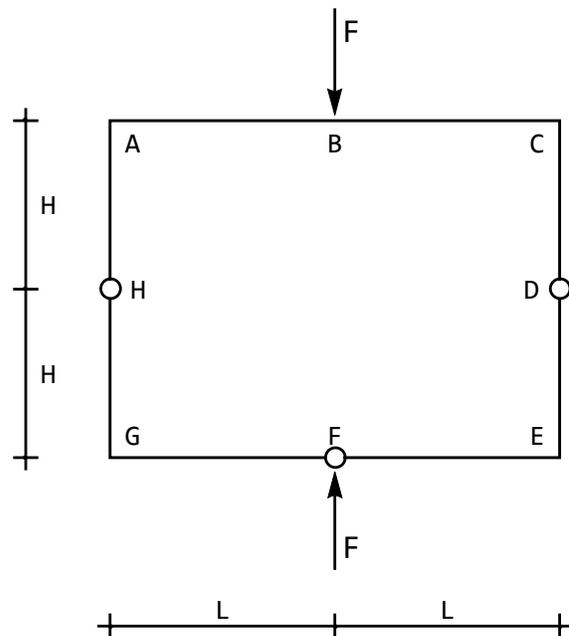


Figura 8.1: Una maglia chiusa isostatica

Il telaio non è soggetto a carichi distribuiti, e quindi le linee elastiche fles-

sionali saranno polinomi cubici:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 + b_2x_3^2 + b_3x_3^3 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_2^{DE}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 + d_2x_3^2 + d_3x_3^3 \\
 u_2^{FE}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
 u_2^{GF}(x_3) &= f_0 + f_1x_3 + f_2x_3^2 + f_3x_3^3 \\
 u_2^{HG}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \\
 u_2^{AH}(x_3) &= h_0 + h_1x_3 + h_2x_3^2 + h_3x_3^3
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Se si accetta l'ipotesi di rigidità assiale infinita, le linee elastiche assiali saranno identicamente nulle, e quindi si è in presenza di una struttura a nodi fissi. I quattro nodi d'angolo non subiranno pertanto alcuno spostamento, e le condizioni ai limiti da imporre al fine di determinare le costanti di integrazione riguarderanno solo l'equilibrio e la congruenza dei nodi. Inoltre, bisognerà considerare solo condizioni in cui non compaiono spostamenti assiali o sforzi normali:

— nel nodo in A lo spostamento trasversale del tratto orizzontale AB dovrà annullarsi, in quanto uguale allo spostamento assiale (nullo) del tratto verticale AH . Analogamente, è nullo lo spostamento trasversale del tratto verticale AH . L'ultima condizione di congruenza impone l'uguaglianza delle rotazioni dei due tratti convergenti in A , mentre l'unica condizione di equilibrio riguarderà i momenti flettenti, in quanto le altre due possibili condizioni coinvolgono gli sforzi normali, e non possono essere utilizzate in questa fase:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 u_2^{AH}(0) &= 0 \\
 \phi^{AB}(0) &= \phi^{AH}(0) \\
 m^{AB}(0) + m^{AH}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

— in corrispondenza della forza F la congruenza impone l'uguaglianza degli spostamenti e delle rotazioni, mentre l'equilibrio del concio impone la continuità dei momenti, e la discontinuità dei tagli:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(L) &= u_2^{BC}(0) \\
 \phi^{AB}(L) &= \phi^{BC}(0) \\
 m^{AB}(L) &= m^{BC}(0) \\
 -t^{AB}(L) + t^{BC}(0) + F &= 0
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

— nel nodo in C le condizioni sono analoghe alle condizioni di A . Variano soltanto i segni dei momenti, in funzione della scelta dell'origine dei diversi

sistemi di riferimento:

$$\begin{aligned}
 u_2^{BC}(L) &= 0 \\
 u_2^{CD}(0) &= 0 \\
 \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0) \\
 -m^{BC}(L) + m^{CD}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

— in corrispondenza della cerniera in D si ha continuità degli spostamenti, l'annullarsi dei momenti e l'uguaglianza dei tagli:

$$\begin{aligned}
 u_2^{CD}(H) &= u_2^{DE}(0) \\
 m^{CD}(H) &= 0 \\
 m^{DE}(0) &= 0 \\
 t^{CD}(H) &= t^{DE}(0)
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

— nel nodo in E , ancora una volta, le condizioni sono analoghe a quanto scritto in A ed in C :

$$\begin{aligned}
 u_2^{DE}(H) &= 0 \\
 u_2^{FE}(L) &= 0 \\
 \phi^{DE}(H) &= \phi^{FE}(L) \\
 -m^{DE}(H) - m^{FE}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

— in corrispondenza della forza $-F$ è situata anche una cerniera, per cui si scriverà:

$$\begin{aligned}
 u_2^{GF}(L) &= u_2^{FE}(0) \\
 m^{GF}(L) &= 0 \\
 m^{FE}(0) &= 0 \\
 -t^{GF}(L) + t^{FE}(0) - F &= 0
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

— nel nodo in G le condizioni sono analoghe a quelle scritte negli altri tre vertici:

$$\begin{aligned}
 u_2^{HG}(H) &= 0 \\
 u_2^{GF}(0) &= 0 \\
 \phi^{HG}(H) &= \phi^{GF}(L) \\
 -m^{HG}(H) + m^{GF}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

— in corrispondenza della cerniera in H si ha continuità degli spostamenti, l'annullarsi dei momenti e l'uguaglianza dei tagli:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AH}(H) &= u_2^{HG}(0) \\
 m^{AH}(H) &= 0 \\
 m^{HG}(0) &= 0 \\
 t^{AH}(H) &= t^{HG}(0)
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Risolvendo le trentadue equazioni si ottengono le costanti di integrazione, e quindi gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{Fx_3(-9L^2 + 3Lx_3 + x_3^2)}{12EI} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{F(5L^3 - 6Lx_3^2 + x_3^3)}{12EI} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{FLx_3(-9HL - 3Hx_3 + x_3^2)}{12EIH} \\
 u_2^{DE}(x_3) &= -\frac{FL(H - x_3)(H(2H + 9L) + Hx_3 + x_3^2)}{12EIH} \\
 u_2^{FE}(x_3) &= -\frac{F(L - x_3)(L(4H + 11L) - Lx_3 - x_3^2)}{12EI} \\
 u_2^{GF}(x_3) &= \frac{Fx_3(-L(4H + 9L) - 3Lx_3 + x_3^2)}{12EI} \\
 u_2^{HG}(x_3) &= \frac{FL(H - x_3)(H(2H + 9L) + Hx_3 + x_3^2)}{12EIH} \\
 u_2^{AH}(x_3) &= \frac{FLx_3(9HL + 3Hx_3 - x_3^2)}{12EIH}
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

con una deformata come in Figura 8.2. Lo spostamento in corrispondenza della

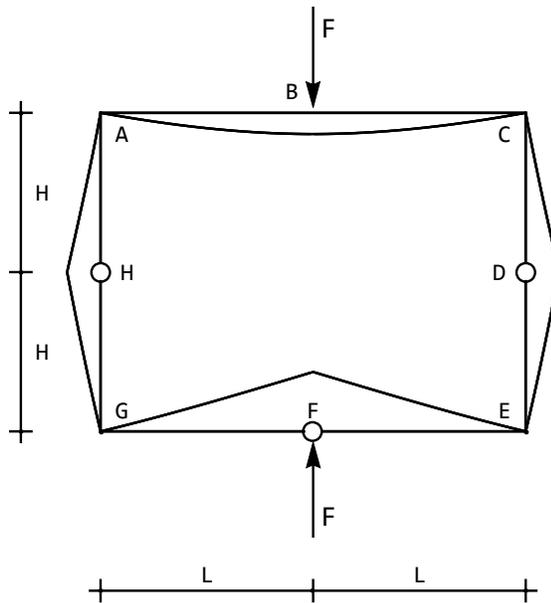


Figura 8.2: La deformata per la maglia chiusa isostatica

forza in B sarà pari a:

$$u_{2B} = \frac{5}{12} \frac{FL^3}{EI} \quad (8.11)$$

mentre in corrispondenza della cerniera in F si avrà l'innalzamento:

$$u_{2F} = -\frac{FL^2(4H + 11L)}{12EI} \quad (8.12)$$

Infine, le due cerniere H e D subiranno lo spostamento:

$$u_{2D} = -u_{2H} = \frac{FHL(2H + 9L)}{12EI} \quad (8.13)$$

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= \frac{1}{2}F(L + x_3) \\ m^{BC}(x_3) &= F\left(L - \frac{x_3}{2}\right) \\ m^{CD}(x_3) &= \frac{FL(H - x_3)}{2H} \\ m^{DE}(x_3) &= -\frac{FLx_3}{2H} \\ m^{FE}(x_3) &= \frac{Fx_3}{2} \\ m^{GF}(x_3) &= \frac{F}{2}(L - x_3) \\ m^{HG}(x_3) &= \frac{FLx_3}{2H} \\ m^{AH}(x_3) &= \frac{FL(-H + x_3)}{2H} \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} t^{AB}(x_3) &= t^{FE}(x_3) = \frac{F}{2} \\ t^{BC}(x_3) &= t^{GF}(x_3) = -\frac{F}{2} \\ t^{CD}(x_3) &= t^{DE}(x_3) = -\frac{FL}{2H} \\ t^{HG}(x_3) &= t^{AH}(x_3) = \frac{FL}{2H} \end{aligned} \quad (8.15)$$

Il diagramma dei momenti è riportato in Figura 8.3. Gli sforzi normali si possono ottenere facilmente tramite equilibrio nei nodi.

8.1 Il principio dei lavori virtuali

Si vuole ora conoscere, tramite il principio dei lavori virtuali, lo spostamento nel punto B , in corrispondenza della forza F .

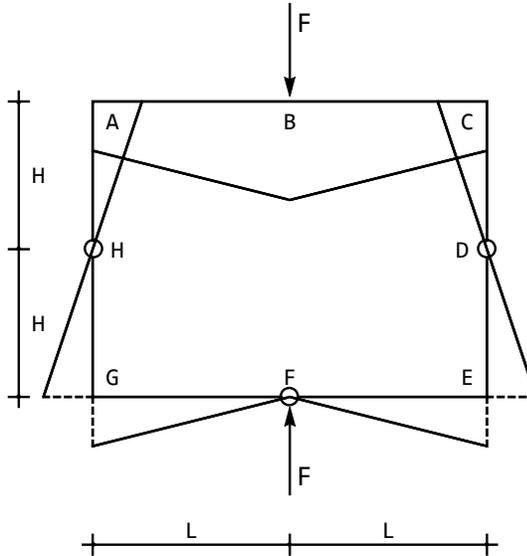


Figura 8.3: I momenti flettenti sulla maglia chiusa isostatica

Come sempre, si sceglie il sistema effettivo, di Figura 8.1, come sistema di spostamenti (sicuramente geometricamente ammissibile). Come insieme di forze si sceglie il sistema di Figura 8.4, altrettanto sicuramente staticamente ammissibile.

Con questa scelta, poichè i nodi G ed E non subiscono spostamenti, si potrà scrivere il principio dei lavori virtuali:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = u_{2B} \quad (8.16)$$

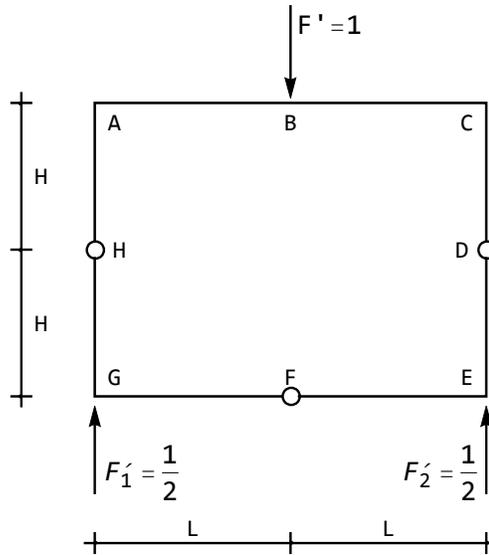
Il diagramma del momento M sul sistema degli spostamenti si ottiene a partire dalla deduzione delle reazioni nelle tre cerniere. Poichè la cerniera in F è caricata da una forza F , si indichino con f_s ed f_d le reazioni della cerniera sul tratto HGF e sul tratto DEF , rispettivamente. Sarà quindi possibile scrivere le tre equazioni simboliche dei tre tratti:

$$\begin{aligned} h + F + d &= 0 \\ h + f_s &= 0 \\ d + f_d &= 0 \end{aligned} \quad (8.17)$$

insieme all'equazione di equilibrio della cerniera in F :

$$f_s + F + f_d = 0 \quad (8.18)$$

Ne seguono le reazioni di Figura 8.5. Per tracciare il diagramma del momento, si può partire dal punto B , assegnando arbitrariamente un valore del


 Figura 8.4: Il sistema di forze virtuali per il calcolo dello spostamento in B

momento al di sotto della forza. Si può poi proseguire verso A oppure verso C , realizzando che il momento si dovrà annullare in M ed N , laddove le reazioni h e d intersecano (virtualmente) il tratto AC . Il resto è ovvio, portando al diagramma della stessa Figura 8.5.

Per ottenere le corrispondenti espressioni analitiche si consideri che lungo il tratto FE il momento è dovuto alla sola reazione f_d , inclinata di $\frac{\pi}{4}$, e di valore $f_d = \frac{F}{\sqrt{2}}$. La sua componente verticale è quindi pari ad $\frac{F}{2}$, e quindi il momento in E è pari ad $\frac{F}{2}L$. Identico ragionamento induce a calcolare il momento in G , ancora pari a $\frac{F}{2}L$, e poichè le due cerniere in H ed in D sono situate in mezzzeria dei rispettivi tratti verticali, i momenti in A ed in C saranno pari ad $\frac{F}{2}L$. Infine, una semplice proporzione geometrica permette di situare il punto N all'ascissa $3L$, e quindi il momento in B sarà pari ad FL . Sarà quindi, in definitiva:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{F}{2}(L + x_3) \\
 m^{BC}(x_3) &= F\left(L - \frac{x_3}{2}\right) \\
 m^{CD}(x_3) &= \frac{FL(H - x_3)}{2H} \\
 m^{DE}(x_3) &= -\frac{FLx_3}{2H}
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

$$\begin{aligned}
 m^{FE}(x_3) &= \frac{Fx_3}{2} \\
 m^{GF}(x_3) &= \frac{F}{2}(L - x_3) \\
 m^{HG}(x_3) &= \frac{FLx_3}{2H} \\
 m^{AH}(x_3) &= \frac{FL(-H + x_3)}{2H}
 \end{aligned}$$

Il diagramma M_1 del momento dovuto alle forze fittizie di Figura 8.4 è im-

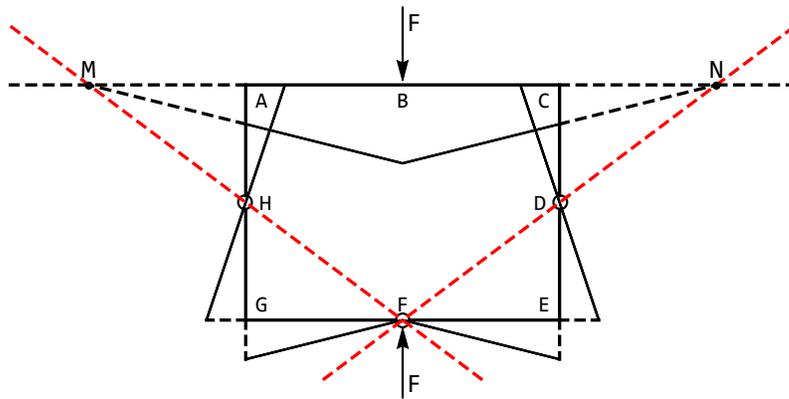


Figura 8.5: Il diagramma del momento M per il sistema di spostamenti di Figura 8.1

mediato, in quanto esso si limita al tratto superiore, che si comporta come appoggiato sui due tratti verticali. Ne segue un diagramma identico a quello di trave appoggiata con carico unitario in mezzera:

$$\begin{aligned}
 m_1^{AB}(x_3) &= \frac{x_3}{2} \\
 m_1^{BC}(x_3) &= \frac{1}{2}(L - x_3)
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

Il richiesto spostamento, quindi, è calcolabile come :

$$\int_0^L \frac{1}{2EI} F(L + x_3) \frac{x_3}{2} dx_3 + \int_0^L \frac{F}{EI} \left(L - \frac{x_3}{2}\right) \frac{1}{2}(L - x_3) dx_3 = \frac{5}{12} \frac{FL^3}{EI} \tag{8.21}$$

Secondo caso

Si vuole conoscere ora lo spostamento nel punto F , in corrispondenza della mezzera del tratto inferiore. Come sempre, si sceglie il sistema effettivo, di

Figura 8.1, come sistema di spostamenti (sicuramente geometricamente ammissibile). Come insieme di forze si sceglie ora il sistema di Figura 8.6, altrettanto sicuramente staticamente ammissibile.

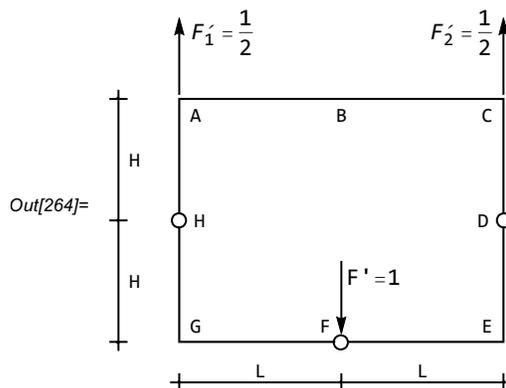


Figura 8.6: Il sistema di forze virtuali per il calcolo dello spostamento in F

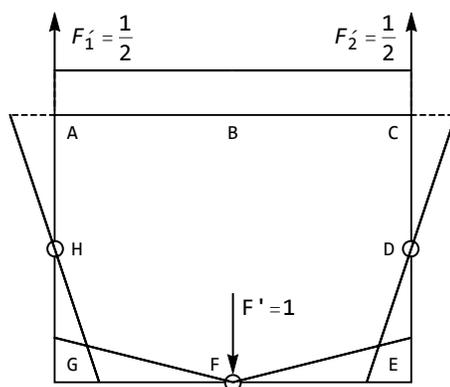


Figura 8.7: Il momento M'

Con questa scelta, poichè i nodi A e C non subiscono spostamenti, si potrà scrivere il principio dei lavori virtuali:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = u_{2F} \quad (8.22)$$

Il diagramma del momento M è già stato calcolato, mentre il diagramma M_1 , da calcolare sullo schema di Figura 8.6, porta alla Figura 8.7.

E' infatti immediato partire dal punto di nullo in corrispondenza della cerniera in F , con una data inclinazione, e giungere sia in G che in E con lo stesso valore (data la simmetria dello schema). Equilibrando i nodi in E e G e proseguendo annullando il diagramma in D ed in H , si giunge nei punti A e

C. Equilibrando i nodi si hanno due valori del momento lungo AC , che quindi risulta costante.

Alternativamente, può studiarsi l'equilibrio del tratto superiore, soggetto a quattro forze, costruire l'ausiliaria $F'_1 + h = F'_2 + d$ e concludere che essa risulta orizzontale (e passante per le cerniere). Ne segue la costanza del momento sul tratto orizzontale AC .

Infine, lo stesso ragionamento già fatto per il momento M permette di affermare che il momento M_1 in E (ed in G) è pari a $\frac{-F'L}{2}$. Gli altri valori seguono immediatamente, e portano a scrivere le espressioni analitiche:

$$\begin{aligned}
 m_1^{AB}(x_3) &= m_1^{BC}(x_3) = -\frac{L}{2} \\
 m_1^{CD}(x_3) &= \frac{L(-H+x_3)}{2H} \\
 m_1^{DE}(x_3) &= \frac{L}{2H}x_3 \\
 m_1^{FE}(x_3) &= -\frac{x_3}{2} \\
 m_1^{GF}(x_3) &= \frac{1}{2}(x_3-L) \\
 m_1^{HG}(x_3) &= -m_1^{DE}(x_3) \\
 m_1^{AH}(x_3) &= -m_1^{GF}(x_3)
 \end{aligned} \tag{8.23}$$

Il richiesto spostamento, quindi, è calcolabile come:

$$\begin{aligned}
 u_{2F} &= \int_0^L \frac{1}{2EI} F(L+x_3) \left(-\frac{L}{2}\right) dx_3 + \int_0^L \left(F\frac{L}{EI} - \frac{Fx_3}{2EI}\right) \left(-\frac{L}{2}\right) dx_3 + \\
 &\int_0^H \left(\frac{FL(H-x_3)}{2EIH}\right) \left(\frac{L(-H+x_3)}{2H}\right) dx_3 + \int_0^H \left(-\frac{FLx_3}{2EIH}\right) \left(\frac{Lx_3}{2H}\right) dx_3 + \\
 &\int_0^L \left(\frac{Fx_3}{2EI}\right) \left(-\frac{x_3}{2}\right) dx_3 + \int_0^L \left(\frac{1}{2EI} F(L-x_3)\right) \left(\frac{1}{2}(-L+x_3)\right) dx_3 + \\
 &\int_0^H \left(\frac{FLx_3}{2EIH}\right) \left(-\frac{Lx_3}{2H}\right) dx_3 + \int_0^H \left(\frac{FL(-H+x_3)}{2EIH}\right) \left(\frac{L(H-x_3)}{2H}\right) dx_3
 \end{aligned} \tag{8.24}$$

ossia, in definitiva:

$$u_{2F} = -\frac{1}{3}FHL^2 - \frac{11FL^3}{12} \tag{8.25}$$

Terzo caso

Si vuole conoscere lo spostamento nel punto D , in corrispondenza della cerniera del tratto verticale di destra

Come sempre, si sceglie il sistema effettivo, di Figura 8.1, come sistema di spostamenti (sicuramente geometricamente ammissibile). Come insieme di

forze si sceglie ora il sistema di Figura 8.8, altrettanto sicuramente staticamente ammissibile.

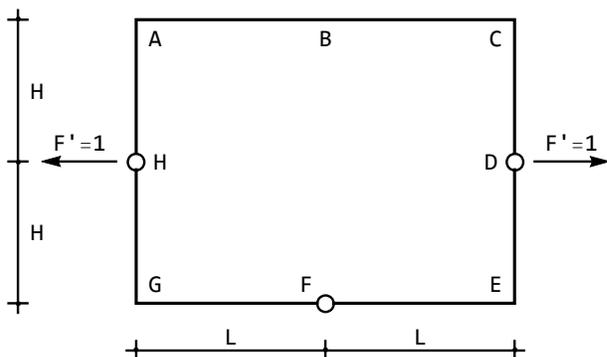


Figura 8.8: Il sistema di forze virtuali per il calcolo dello spostamento in D

Con questa scelta, si potrà scrivere il principio dei lavori virtuali:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = u_{2D} - u_{2H} = 2u_{2D} \quad (8.26)$$

in quanto lo spostamento in H sarà uguale e contrario allo spostamento in D .

Il diagramma del momento M è già stato calcolato, mentre il diagramma M_1 è ora da calcolare sullo schema di Figura 8.8, ed è immediatamente calcolabile considerando che l'equilibrio del tratto inferiore HFD è garantito solo da una cerniera F scarica. Ne segue che il diagramma si limita alla parte superiore, ed ha l'aspetto di Figura 8.9.

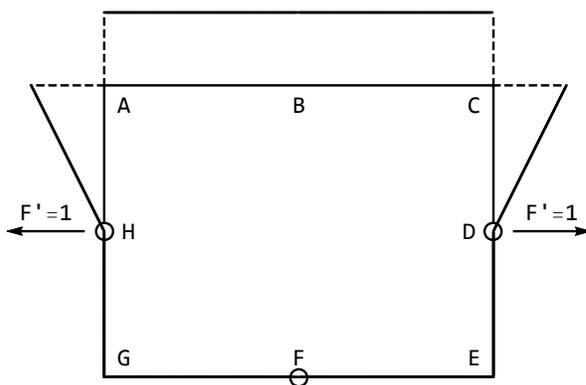


Figura 8.9: Il momento M'

Le espressioni analitiche sono immediatamente deducibili, non appena si realizza che il taglio lungo i tratti verticali sarà pari ad F' :

$$\begin{aligned}
 m_1^{AB}(x_3) &= m_1^{BC}(x_3) = -H \\
 m_1^{CD}(x_3) &= (x_3 - H) \\
 m_1^{DE}(x_3) &= m_1^{FE}(x_3) = m_1^{GF}(x_3) = m_1^{HG}(x_3) = 0 \\
 m_1^{AH}(x_3) &= -m_1^{CD}(x_3)
 \end{aligned}
 \tag{8.27}$$

Il richiesto spostamento, quindi, è calcolabile come:

$$\begin{aligned}
 2u_{2D} &= \int_0^L \frac{1}{2EI} F(L+x_3)(H) dx_3 + \int_0^L \left(F \frac{L}{EI} - \frac{Fx_3}{2EI} \right) (H) dx_3 + \\
 &\int_0^H \left(\frac{FL(H-x_3)}{2EIH} \right) (H-x_3) dx_3 + \int_0^H \left(\frac{FL(x_3-H)}{2EIH} \right) (-H+x_3) dx_3
 \end{aligned}
 \tag{8.28}$$

ossia, in definitiva :

$$u_{2D} = \frac{FH^2L}{6EI} + \frac{3FHL^2}{4EI}
 \tag{8.29}$$

Capitolo 9

Telaio asimmetrico

Si vuole conoscere la deformata della struttura in Figura 9.1, insieme alle caratteristiche della sollecitazione interna, ipotizzando che le aste siano assialmente indeformabili. In tale ipotesi, le linee elastiche assiali sono costanti, e conviene

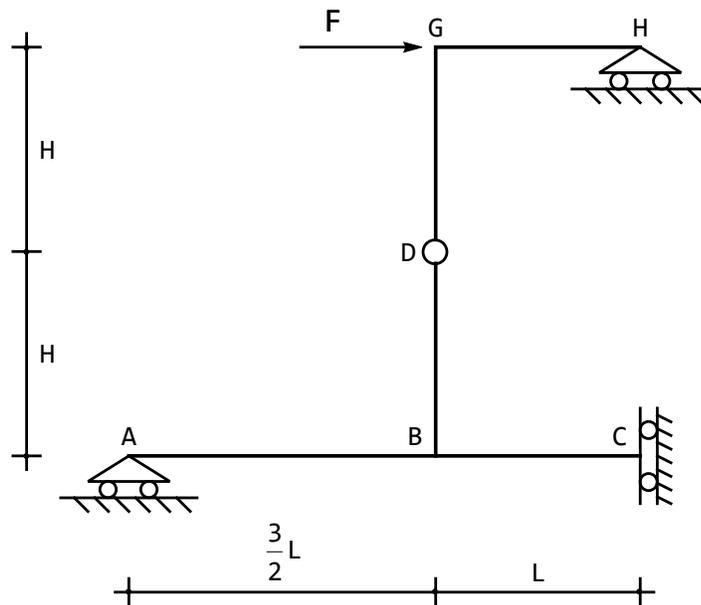


Figura 9.1: Un telaio asimmetrico

trarne preventivamente le possibili semplificazioni. Sia allora:

$$\begin{aligned} u_3^{AB}(x_3) &= b_0 \\ u_3^{BC}(x_3) &= d_0 \end{aligned} \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned}u_3^{DB}(x_3) &= f_0 \\u_3^{GD}(x_3) &= h_0 \\u_3^{GH}(x_3) &= m_0\end{aligned}$$

e si impongano le condizioni di congruenza che coinvolgono gli spostamenti assiali. In C lo spostamento assiale dell'asta BC è proibito dal vincolo, e se ne può dedurre l'annullarsi delle linee elastiche lungo tutto il tratto inferiore. Inoltre, i due tratti verticali GD e DB subiscono lo stesso spostamento assiale. In definitiva, quindi, potrà scriversi:

$$\begin{aligned}u_3^{AB}(x_3) &= 0 \\u_3^{BC}(x_3) &= 0 \\u_3^{DB}(x_3) &= u_3^{GD}(x_3) = \delta_v \\u_3^{GH}(x_3) &= \delta_w\end{aligned}\tag{9.2}$$

Il telaio non è soggetto a carichi distribuiti, e quindi le linee elastiche flessionali saranno polinomi cubici:

$$\begin{aligned}u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\u_2^{DB}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\u_2^{GD}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \\u_2^{GH}(x_3) &= k_0 + k_1x_3 + k_2x_3^2 + k_3x_3^3\end{aligned}\tag{9.3}$$

Le condizioni ai limiti da imporre riguarderanno solo gli spostamenti trasversali, le rotazioni, i momenti ed i tagli, ma non potranno essere considerate equazioni in cui compaiono gli sforzi normali: essi andranno calcolati *a posteriori* con considerazioni di equilibrio. Si potrà invece scrivere:

— nel carrello in A si annulla lo spostamento verticale ed il momento flettente:

$$\begin{aligned}u_2^{AB}(0) &= 0 \\m^{AB}(0) &= 0\end{aligned}\tag{9.4}$$

— nel nodo triplo in B si hanno le condizioni di congruenza tra i due tratti orizzontali:

$$\begin{aligned}u_2^{AB}\left(\frac{3}{2}L\right) &= u_2^{BC}(0) \\ \phi^{AB}\left(\frac{3}{2}L\right) &= \phi^{BC}(0)\end{aligned}\tag{9.5}$$

le condizioni di congruenza tra il tratto verticale ed un tratto orizzontale:

$$\begin{aligned} u_2^{AB} \left(\frac{3}{2}L \right) &= \delta_v \\ u_2^{DB}(H) &= 0 \\ \phi^{AB} \left(\frac{3}{2}L \right) &= \phi^{DB}(H) \end{aligned} \quad (9.6)$$

e la condizione di equilibrio:

$$-m^{AB} \left(\frac{3}{2}L \right) - m^{DB}(H) + m^{BC}(0) = 0 \quad (9.7)$$

— in corrispondenza del bipendolo si annulleranno le rotazioni ed i tagli:

$$\begin{aligned} \phi^{BC}(L) &= 0 \\ t^{BC}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (9.8)$$

— nella cerniera in D , la congruenza impone:

$$u_2^{GD}(H) = u_2^{DB}(0) \quad (9.9)$$

mentre le condizioni di equilibrio sono:

$$\begin{aligned} m^{GD}(H) &= 0 \\ m^{DB}(0) &= 0 \\ t^{GD}(H) &= t^{DB}(0) \end{aligned} \quad (9.10)$$

— nel nodo G , bisognerà rispettare la congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{GD}(0) &= -\delta_w \\ u_2^{GH}(0) &= \delta_v \\ \phi^{GD}(0) &= \phi^{GH}(0) \end{aligned} \quad (9.11)$$

e l'equilibrio del nodo:

$$m^{GD}(0) + m^{GH}(0) = 0 \quad (9.12)$$

— nel carrello in H , infine, si annullano spostamenti verticali, e momenti:

$$\begin{aligned} u_2^{GH}(L) &= 0 \\ m^{GH}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (9.13)$$

Due ulteriori equazioni possono scriversi imponendo l'equilibrio del tratto GH alla traslazione orizzontale, e l'equilibrio del tratto GB alla traslazione verticale:

$$\begin{aligned} t^{GD}(0) + F &= 0 \\ -t^{AB} \left(\frac{3}{2}L \right) + t^{GH}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (9.14)$$

Risolvendo le ventidue equazioni nelle ventidue incognite, si ottengono le costanti di integrazione, da cui le linee elastiche flessionali ed i due spostamenti assiali incogniti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{FHx_3(-39L^2 + 4x_3^2)}{24EIL} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= -\frac{FH(15L^2 + 4Lx_3 - 2x_3^2)}{8EI} \\
 u_2^{DB}(x_3) &= -\frac{F(H^2(2H - 3L) - 3H(H - L)x_3 + x_3^3)}{6EI} \\
 u_2^{GD}(x_3) &= -\frac{F(H^2(16H + 41L) - 53HLx_3 - 12Hx_3^2 + 4x_3^3)}{24EI} \\
 u_2^{GH}(x_3) &= -\frac{FH(L - x_3)(45L^2 - 8Lx_3 + 4x_3^2)}{24EIL}
 \end{aligned} \tag{9.15}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_v &= -\frac{15FHL^2}{8EI} \\
 \delta_w &= \frac{FH^2(16H + 41L)}{24EI}
 \end{aligned} \tag{9.16}$$

La deformata si presenta quindi come in Figura 9.2.

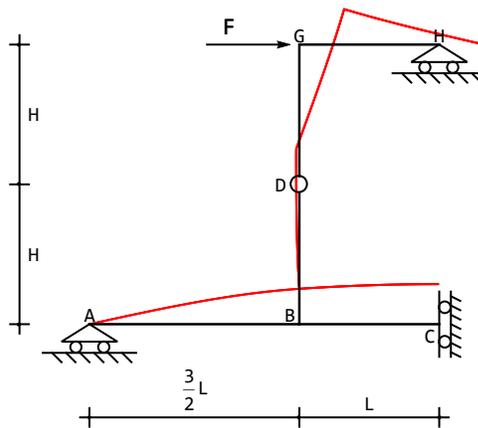


Figura 9.2: La deformata del telaio asimmetrico

Il bipendolo in C subisce l'innalzamento:

$$u_{2C} = -\frac{17FHL^2}{8EI} \tag{9.17}$$

Le caratteristiche flessionali si ottengono per derivazione successiva :

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{FHx_3}{L} \\
 m^{BC}(x_3) &= -\frac{FH}{2} \\
 m^{DB}(x_3) &= Fx_3 \\
 m^{GD}(x_3) &= F(-H + x_3) \\
 m^{GH}(x_3) &= FH\left(1 - \frac{x_3}{L}\right)
 \end{aligned}
 \tag{9.18}$$

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= t^{GH}(x_3) = -F\frac{H}{L} \\
 t^{BC}(x_3) &= 0 \\
 t^{DB}(x_3) &= t^{GD}(x_3) = F
 \end{aligned}
 \tag{9.19}$$

mentre gli sforzi normali sono deducibili da equazioni di equilibrio nei nodi:

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= n^{GH}(x_3) = 0 \\
 n^{BC}(x_3) &= -F \\
 n^{DB}(x_3) &= n^{GD}(x_3) = \frac{FH}{L}
 \end{aligned}
 \tag{9.20}$$

Il diagramma dei momenti è riportato in Figura 9.3

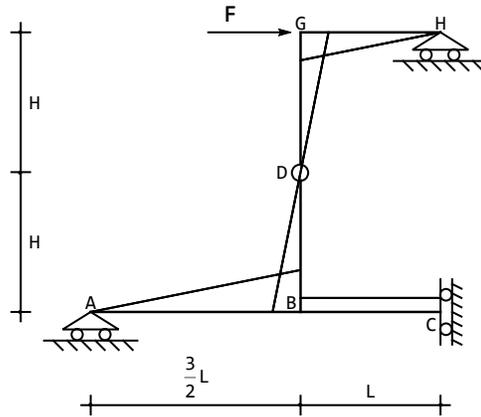


Figura 9.3: I momenti sul telaio asimmetrico

9.1 Il principio dei lavori virtuali

Si vuole ora utilizzare il principio dei lavori virtuali per conoscere lo spostamento nel punto B , ossia dell'intero tratto verticale GB .

Come sempre, si sceglie il sistema effettivo, di Figura 9.1, come sistema di spostamenti (sicuramente geometricamente ammissibile). Come insieme di forze si sceglie il sistema di Figura 9.4.

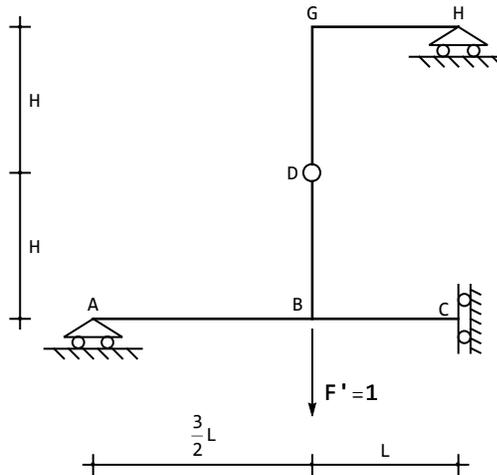


Figura 9.4: Il sistema di forze virtuali per il calcolo dello spostamento in B

Con questa scelta, si potrà scrivere il principio dei lavori virtuali:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = u_{2B} \quad (9.21)$$

Il diagramma del momento M sul sistema degli spostamenti si ottiene a partire dalla deduzione delle reazioni. Imponendo l'equilibrio dei due tratti si ha:

$$\begin{aligned} F + h + d &= 0 \\ a + d + c &= 0 \end{aligned} \quad (9.22)$$

Sul primo tratto agiscono la forza F , di cui si conosce la retta d'azione, la reazione del carrello in H , ovviamente verticale, e la reazione d della cerniera. Per l'equilibrio, queste tre forze devono concorrere in un punto, permettendo quindi di dedurre la direzione della reazione d , come illustrato in Figura 9.5. Sul secondo tratto agiscono la reazione d , ora nota, la reazione del carrello in A , ovviamente verticale, e la reazione orizzontale del bipendolo in C . Per l'equilibrio del tratto, essa dovrà passare per l'intersezione tra a e d , come riportato nella stessa Figura 9.5.

Per tracciare il diagramma del momento, si può partire dal punto A , considerando che la reazione in A sarà certamente negativa (verso l'alto), ed assegnando arbitrariamente una inclinazione al diagramma stesso. Si giunge in questo modo al nodo B .

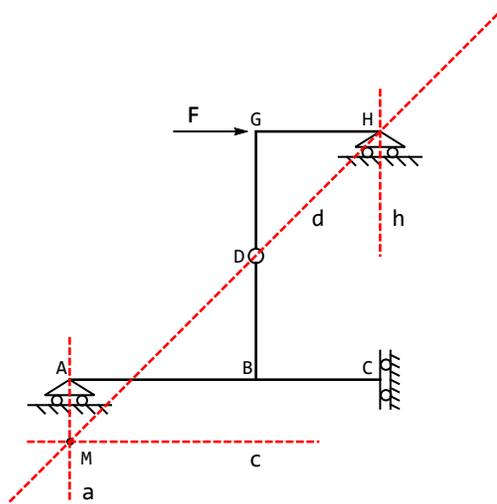


Figura 9.5: Le reazioni per il sistema di spostamenti di Figura 9.1

Per tracciare il diagramma nel tratto BC si consideri preliminarmente che esso dovrà essere costante, per la presenza del bipendolo in C . Serve quindi un solo valore del momento, che può ottenersi nel solito modo: lungo BC il momento è dovuto alla reazione A ed alla reazione D ; tuttavia in K , laddove il braccio della reazione d è nullo, il momento è dovuto alla sola reazione A , ed è quindi noto. Ciò permette di proseguire il diagramma lungo BC . L'equilibrio del nodo B permette di ottenere il momento in B lungo il tratto verticale BD , per poi proseguire fino a annullare il diagramma in D . Infine, si equilibra il nodo G e si prosegue lungo GH , annullando il diagramma in H . Si ha quindi il diagramma di Figura 9.6

Per ottenere l'espressione analitica, si consideri che l'equilibrio alla traslazione orizzontale del primo tratto fornisce subito il taglio nella cerniera:

$$F - t_D = 0 \quad (9.23)$$

e quindi il valore del momento in G e B lungo i tratti verticali (pari ad FH). Ne segue che il taglio in GH sarà pari a $-\frac{FH}{L}$, e quindi la reazione in A sarà pari a $\frac{FH}{L}$

Sarà quindi, in definitiva:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= -\frac{FHx_3}{L} \\ m^{BC}(x_3) &= -\frac{FH}{2} \end{aligned} \quad (9.24)$$

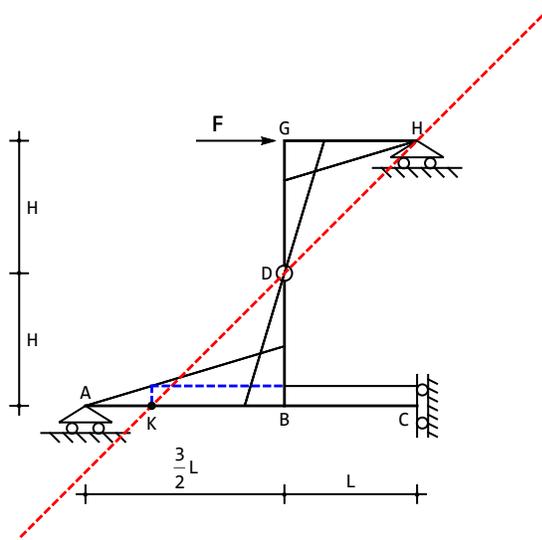


Figura 9.6: Il diagramma del momento M per il sistema di spostamenti di Figura 9.1

$$\begin{aligned} m^{DB}(x_3) &= Fx_3 \\ m^{GD}(x_3) &= F(-H + x_3) \\ m^{GH}(x_3) &= \frac{FH(L - x_3)}{L} \end{aligned}$$

Il diagramma M_1 del momento dovuto alle forze fittizie di Figura 9.4 è immediato, in quanto esso si limita al tratto inferiore, e sarà subito:

$$\begin{aligned} m_1^{AB}(x_3) &= x_3 \\ m_1^{BC}(x_3) &= \frac{3}{2}L \end{aligned} \quad (9.25)$$

Il richiesto spostamento, quindi, è calcolabile come:

$$u_{2B} = \int_0^{\frac{3}{2}L} \left(-\frac{FHx_3}{LEI} \right) x_3 dx_3 + \int_0^L \left(-\frac{FH}{2EI} \right) \frac{3}{2}L dx_3 = -\frac{15FHL^2}{8EI} \quad (9.26)$$

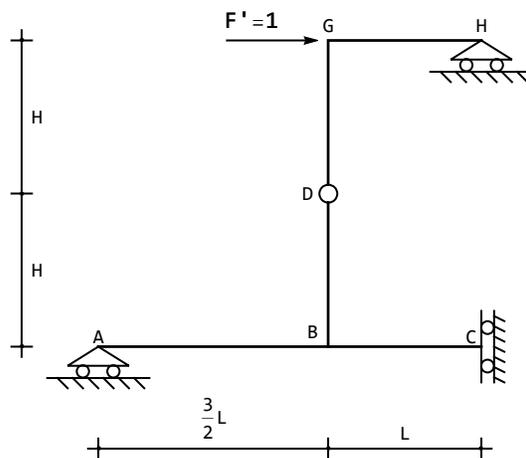
Secondo caso

Si vuole conoscere lo spostamento orizzontale del tratto GH.

Come sempre, si sceglie il sistema effettivo, di Figura 9.1, come sistema di spostamenti (sicuramente geometricamente ammissibile). Come insieme di forze si sceglie ora il sistema di Figura 9.7.

Con questa scelta, si potrà scrivere il principio dei lavori virtuali:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = u_{3G} \quad (9.27)$$


 Figura 9.7: Il sistema di forze virtuali per il calcolo dello spostamento in GH

Il diagramma del momento M_1 è uguale al diagramma M , ma per forza unitaria.

Il richiesto spostamento, quindi, è calcolabile come:

$$\begin{aligned}
 u_{3G} = & \int_0^{3/2L} \left(-\frac{FHx}{LEI} \right) \left(-\frac{Hx}{L} \right) dx + \int_0^L \left(-\frac{FH}{2EI} \right) \left(-\frac{H}{2} \right) dx + \\
 & \int_0^H \left(\frac{F}{EI}x \right) (x) dx + \int_0^H \left(\frac{F}{EI}(-H+x) \right) ((-H+x)) dx + \quad (9.28) \\
 & \int_0^L \left(\frac{FH(L-x)}{LEI} \right) \left(\frac{H(L-x)}{L} \right) dx
 \end{aligned}$$

ossia, in definitiva :

$$u_{3G} = \frac{2FH^3}{3EI} + \frac{41FH^2L}{24EI} \quad (9.29)$$

Capitolo 10

Una trave su tre appoggi

Si vuole conoscere la deformata della struttura in Figura 10.1, insieme alle caratteristiche della sollecitazione interna, nell'ipotesi di trave di Eulero-Bernoulli. La trave è costituita da tre tratti, gli spostamenti assiali ed i relativi sforzi nor-

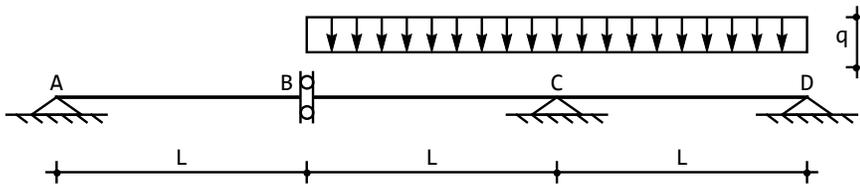


Figura 10.1: Una trave a due campate isostatica

mali sono assenti, mentre le relative equazioni della linea elastica sono facilmente ottenibili considerando che il secondo ed il terzo tratto sono caricati da una stesa di carico uniforme di intensità q :

$$\begin{aligned}u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\u_2^{BC}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 + b_2x_3^2 + b_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{24EI} \\u_2^{CD}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{24EI}\end{aligned}\quad (10.1)$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno:

— nell'appoggio in A si annullano gli spostamenti, ed il momento flettente:

$$\begin{aligned}u_2^{AB}(0) &= 0 \\m^{AB}(0) &= 0\end{aligned}\quad (10.2)$$

— nel bipendolo in B si ha la condizione di congruenza:

$$\phi^{AB}(L) = \phi^{BC}(0)\quad (10.3)$$

e le tre condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} t^{AB}(L) &= 0 \\ t^{BC}(0) &= 0 \\ -m^{AB}(L) + m^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (10.4)$$

— in corrispondenza dell'appoggio in C si annullano gli spostamenti, e si impone la continuità delle rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(L) &= 0 \\ u_2^{CD}(0) &= 0 \\ \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0) \end{aligned} \quad (10.5)$$

L'equilibrio del concio impone anche la continuità dei momenti:

$$-m^{BC}(L) + m^{CD}(0) = 0 \quad (10.6)$$

— nell'appoggio in D si annullano spostamenti e momenti:

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(L) &= 0 \\ m^{CD}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (10.7)$$

Si giunge quindi a dodici equazioni lineari immediatamente risolvibili a fornire le dodici costanti di integrazione, e gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{7}{24} \frac{qL^3}{EI} x_3 \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{q(6L^4 - 7L^3x_3 + x_3^4)}{24EI} \\ u_2^{CD}(x_3) &= \frac{qx_3(-3L^3 + 6L^2x_3 - 4Lx_3^2 + x_3^3)}{24EI} \end{aligned} \quad (10.8)$$

La deformata si presenta come in Figura 10.2, e da essa possono trarsi alcuni valori notevoli.

La variazione di spostamento tra le due facce del bipendolo si ottiene, secondo definizione, come:

$$\Delta u_{2D} = u_2^{BC}(0) - u_2^{AB}(L) = \frac{qL^4}{4EI} + \frac{7qL^4}{24EI} = \frac{13}{24} \frac{qL^4}{EI} \quad (10.9)$$

La rotazione in D si ottiene a partire dalla derivata dell'abbassamento:

$$\phi_D = -\frac{du_2^{CD}}{dx_3}(L) = -\frac{qL^3}{24EI} \quad (10.10)$$

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva :

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= 0 \\ m^{BC}(x_3) &= -\frac{1}{2}qx_3^2 \\ m^{CD}(x_3) &= -\frac{1}{2}q(L-x_3)^2 \end{aligned} \quad (10.11)$$

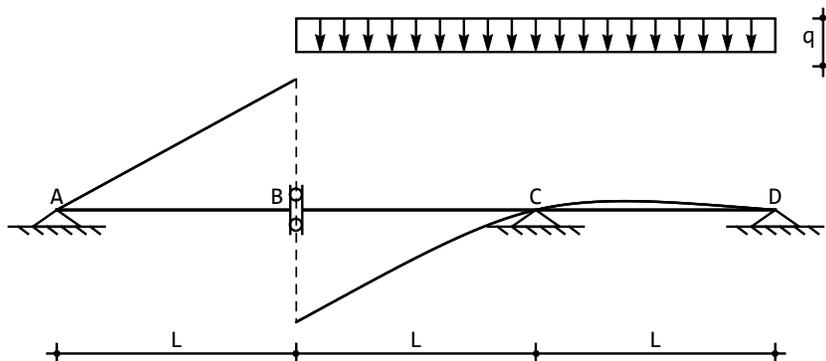


Figura 10.2: La deformata della trave

Il diagramma del momento è riportato in Figura 10.3, ed il momento massimo si ottiene in corrispondenza dell'appoggio in C, dove vale:

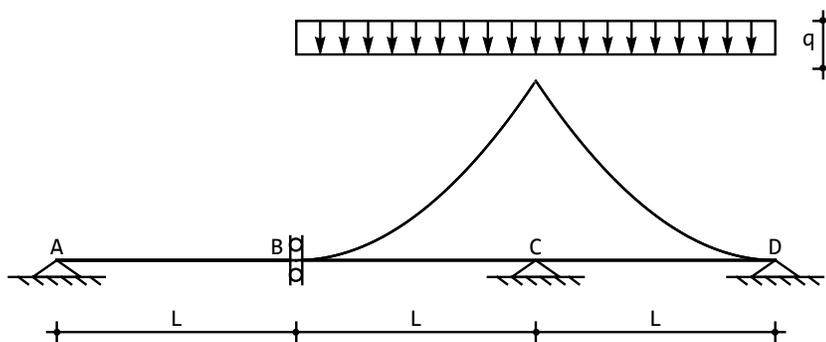


Figura 10.3: I momenti sulla trave

$$m_C = -\frac{1}{2}qL^2 \quad (10.12)$$

10.1 L'utilizzo della teoria di Timoshenko

In quanto precede si è fatto uso della usuale teoria di Eulero–Bernoulli, valida per travi snelle e nell'ipotesi di poter trascurare le deformabilità taglianti. Se invece si presuppone una rigidezza tagliente GA_s finita, occorre utilizzare la teoria di Timoshenko. A tal fine, si introduce la funzione ausiliaria η , per cui gli abbassamenti sono forniti da:

$$u_2 = \eta - \frac{EI}{GA_s} \eta'' \quad (10.13)$$

mentre rotazioni, momenti e tagli sono dati da:

$$\begin{aligned}\phi &= -\eta' \\ M &= -EI\eta'' \\ T &= -EI\eta'''\end{aligned}\quad (10.14)$$

Si inizia allora col porre:

$$\begin{aligned}\eta^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\ \eta^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{24EI} \\ \eta^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{24EI}\end{aligned}\quad (10.15)$$

e poi si impongono le condizioni ai limiti. Uno sguardo alle proprietà della funzione ausiliaria basta a convincersi che solo le quattro condizioni ai limiti nello spostamento dovranno essere modificate, e sostituite da:

$$\begin{aligned}a_0 - \frac{2EIa_2}{GA_s} &= 0 \\ \frac{qL^4}{24EI} + b_0 + Lb_1 + L^2b_2 + L^3b_3 - \frac{EI\left(\frac{qL^2}{2EI} + 2b_2 + 6Lb_3\right)}{GA_s} &= 0 \\ c_0 - \frac{2EIc_2}{GA_s} &= 0 \\ \frac{qL^4}{24EI} + c_0 + Lc_1 + L^2c_2 + L^3c_3 - \frac{EI\left(\frac{qL^2}{2EI} + 2c_2 + 6Lc_3\right)}{GA_s} &= 0\end{aligned}\quad (10.16)$$

Risolvendo le dodici equazioni si ottengono le costanti di integrazione, e gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}u_2^{AB}(x_3) &= -q\left(\frac{L}{2GA_s} + \frac{7L^3}{24EI}\right)x_3 \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{q(6L^2(4EI + GA_sL^2) - (12EIL + 7GA_sL^3)x_3 - 12EIx_3^2 + GA_sx_3^4)}{24EIGA_s} \\ u_2^{CD}(x_3) &= \frac{q(L - x_3)x_3(12EI - 3GA_sL^2 + 3GA_sLx_3 - GA_sx_3^2)}{24EIGA_s}\end{aligned}\quad (10.17)$$

La variazione di spostamento tra le due facce del bispindolo si ottiene ora, secondo definizione, come:

$$\Delta u_{2D} = u_2^{BC}(0) - u_2^{AB}(L) = \frac{13qL^4}{24EI} + \frac{3qL^2}{2GA_s}\quad (10.18)$$

La rotazione in D si ottiene invece come:

$$\phi_D = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{qL}{2GA_s} \quad (10.19)$$

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva, e coincidono con quelle previste dalla teoria di Eulero–Bernoulli.

Un vincolo elasticamente cedevole

Si ipotizza ora, come illustrato in Figura 10.4, che l'appoggio in C sia elasticamente cedevole, secondo la legge di proporzionalità lineare:

$$R_C = -k_{vC}u_{2C} \quad (10.20)$$

tra la reazione e lo spostamento dell'appoggio stesso. La costante k_{vC} è una

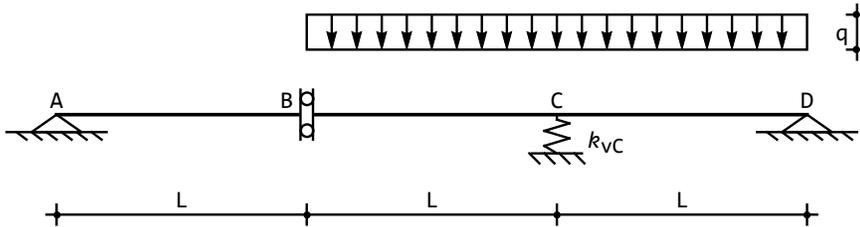


Figura 10.4: La trave con vincolo elasticamente cedevole

costante di *rigidezza*, e caratterizza il comportamento del vincolo. La legge che esprime lo spostamento in funzione della reazione:

$$u_{2C} = -c_{vC}R_C \quad (10.21)$$

passa attraverso l'introduzione della costante di *cedibilità* c_{vC} . Per utilizzare la teoria della linea elastica, si esprime la reazione del vincolo in funzione dei tagli adiacenti:

$$R_C = t^{BC}(L) - t^{CD}(0) \quad (10.22)$$

e quindi le condizioni ai limiti (10.5) si modificano in:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(L) &= -c_{vC} (t^{BC}(L) - t^{CD}(0)) \\ u_2^{CD}(0) &= -c_{vC} (t^{BC}(L) - t^{CD}(0)) \end{aligned} \quad (10.23)$$

Risolvendo le dodici equazioni si ottengono le costanti di integrazione, e gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \left(-\frac{7qL^3}{24EI} - 2qc_{vC} \right) x_3 \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{q(6L^4 + 48EIc_{vC}(2L - x_3) - 7L^3x_3 + x_3^4)}{24EI} \\ u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{q(L - x_3)(-48EIc_{vC} + x_3(3L^2 - 3Lx_3 + x_3^2))}{24EI} \end{aligned} \quad (10.24)$$

La deformata si presenta — per una elevata cedevolezza dell'appoggio — come in Figura 10.5:

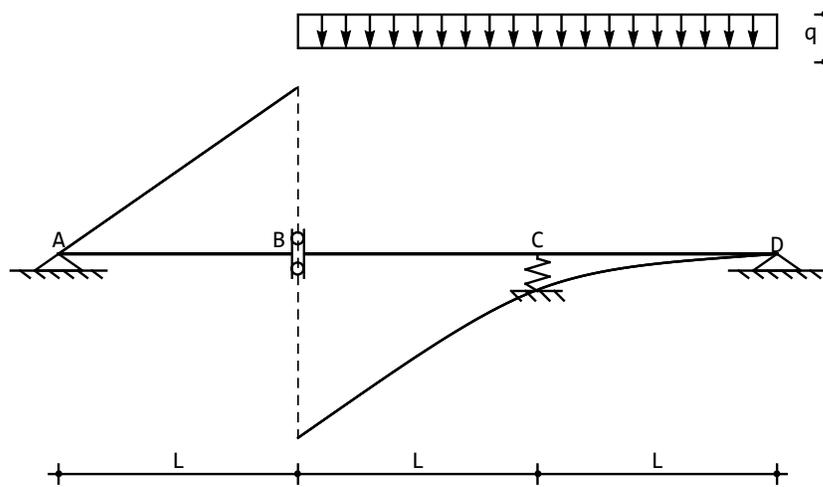


Figura 10.5: La deformata della trave con vincolo ad alta cedevolezza

La variazione di spostamento tra le due facce del bipendolo si ottiene, secondo definizione, come:

$$\Delta u_{2D} = u_2^{BC}(0) - u_2^{AB}(L) = \frac{13}{24} \frac{qL^4}{EI} + 6qLc_{vC} \quad (10.25)$$

La rotazione in D si ottiene a partire dalla derivata dell'abbassamento:

$$\phi_D = -\frac{qL^3}{24EI} + 2qc_{vC} \quad (10.26)$$

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva, e non sono influenzate dalla presenza dell'elasticità del vincolo (in quanto la struttura è isostatica).

10.2 Le verifiche col principio dei lavori virtuali

Si vuole calcolare la rotazione in D , quindi lo schema delle forze virtuali è quello di Figura 10.6, in cui la struttura è caricata da una coppia \mathcal{M}' , di valore unitario, nell'appoggio D . La struttura su cui leggere gli spostamenti è invece — come sempre — quella di Figura 10.1.

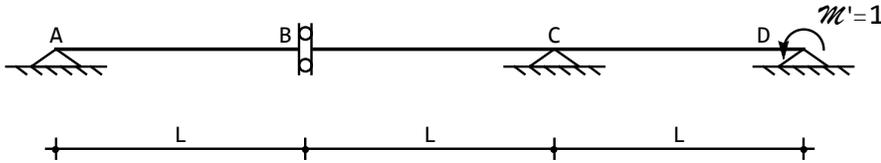


Figura 10.6: Lo schema delle forze virtuali per il calcolo della rotazione in D

Il principio dei lavori virtuali si scrive allora:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds + \int_s T_1 \frac{T}{GA_s} ds = \mathcal{M}' \phi_D \quad (10.27)$$

dove M e T sono i momenti ed i tagli calcolati sullo schema di Figura 10.1, ossia quello dovuto al carico, mentre M_1 e T_1 sono i momenti ed i tagli calcolati sullo schema di Figura 10.6, quindi dovuti alla coppia unitaria in D . Il momento M è già stato calcolato, è riportato in Figura 10.3, e può analiticamente esprimersi come:

$$\begin{aligned} m^{BC}(x_3) &= -q \frac{x_3^2}{2} \\ m^{CD}(x_3) &= qL \left(x_3 - \frac{x_3^2}{2L} \right) - \frac{qL^2}{2} = -\frac{1}{2}q(L - x_3)^2 \end{aligned} \quad (10.28)$$

I tagli, quindi, possono dedursi per derivazione:

$$\begin{aligned} t^{BC}(x_3) &= -qx_3 \\ t^{CD}(x_3) &= qL \left(1 - \frac{x_3}{L} \right) \end{aligned} \quad (10.29)$$

Il diagramma del momento M_1 può tracciarsi considerando che l'equilibrio del primo tratto implica che la reazione in A ed il momento in B devono essere nulli, e che quindi il momento sarà nullo lungo il tratto AC . Ne segue un andamento lineare nel restante tratto CD :

$$m_1^{CD}(x_3) = \mathcal{M}' \frac{x_3}{L} \quad (10.30)$$

come riportato in Figura 10.7. Il taglio, sullo stesso tratto, vale:

$$t_1^{CD}(x_3) = \frac{\mathcal{M}'}{L} \quad (10.31)$$

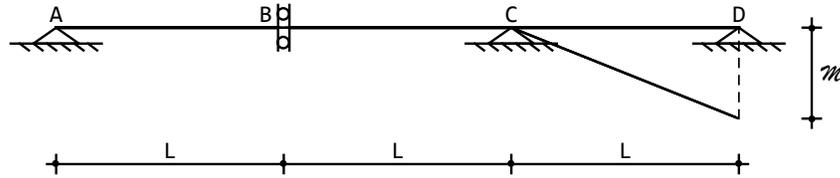


Figura 10.7: Il diagramma del momento M_1

Sarà quindi necessario integrare solo lungo il tratto CD , ottenendo (con $M' = 1$):

$$\phi_D = -\frac{1}{EI} \int_s \frac{1}{2} q (L - x_3)^2 \frac{x_3}{L} dx_3 + \frac{1}{GA_s} \int_s qL \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \frac{1}{L} dx_3 = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{qL}{2GA_s} \quad (10.32)$$

Spostamento relativo in B

Se si vuole ottenere lo spostamento relativo tra le due facce del bipendolo, il sistema di spostamenti resta quello reale di Figura 10.1, mentre il sistema di forze dovrà ora essere scelto in modo da compiere lavoro per la richiesta quantità cinematica, e quindi sarà quello riprodotto in Figura 10.8.

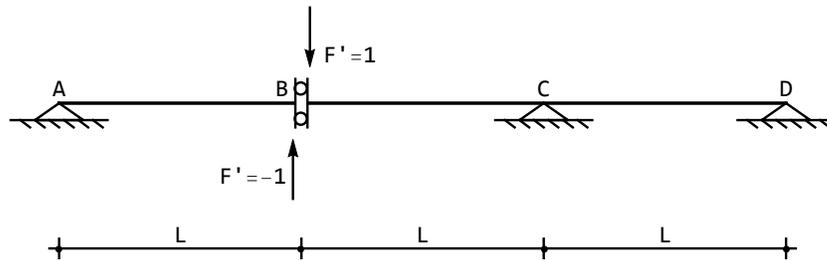


Figura 10.8: Lo schema delle forze virtuali per il calcolo dello spostamento relativo in B

Il principio dei lavori virtuali si scrive allora:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds + \int_s T_1 \frac{T}{GA_s} ds = \Delta u_{2B} \quad (10.33)$$

L'equilibrio del primo tratto permette di dedurre subito che la reazione in A è pari alla forza unitaria, mentre il momento nell'incastro è pari alla suddetta forza per il braccio L :

$$\begin{aligned} R'_A &= F' \\ M'_B &= -F'L \end{aligned} \quad (10.34)$$

Passando a studiare l'equilibrio del secondo tratto si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} R'_C + R'_D + F' &= 0 \\ -M'_B - R'_C L - 2R'_D L &= 0 \end{aligned} \quad (10.35)$$

e quindi le due reazioni dei due appoggi sono pari a:

$$\begin{aligned} R'_C &= -3F' \\ R'_D &= 2F' \end{aligned} \quad (10.36)$$

Ne segue il diagramma dei momenti di Figura 10.9, su cui può leggersi:

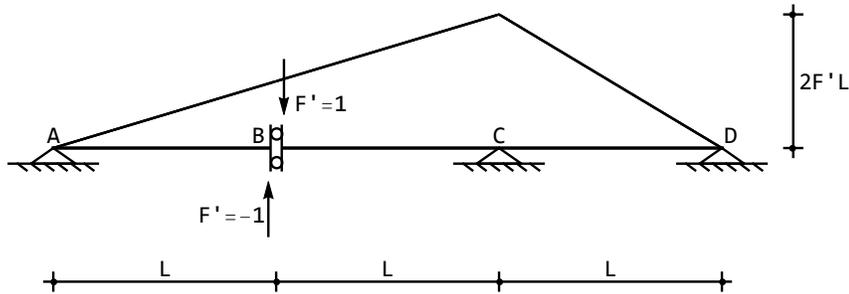


Figura 10.9: Il diagramma dei momenti M_1 per il calcolo dello spostamento relativo

$$\begin{aligned} m_1^{BC}(x_3) &= -F'L \left(1 + \frac{x_3}{L}\right) \\ m_1^{CD}(x_3) &= -2F'L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \end{aligned} \quad (10.37)$$

I tagli saranno calcolabili come:

$$\begin{aligned} t_1^{BC}(x_3) &= -F' \\ t_1^{CD}(x_3) &= 2F' \end{aligned} \quad (10.38)$$

Si noti che — poichè il momento M ed il taglio T risultano nulli in AB — ci si è limitati a scrivere le espressioni di momento e taglio da B a D .

Non resta che eseguire l'integrale, con forza $F' = 1$:

$$\begin{aligned} \Delta u_{2B} &= \frac{qL}{2EI} \int_0^L x_3^2 \left(1 + \frac{x_3}{L}\right) dx_3 + \frac{qL}{EI} \int_0^L (L - x_3)^2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) dx_3 + \\ &\quad \frac{q}{GA} \int_0^L x_3 dx_3 + \frac{2qL}{GA} \int_0^L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) dx_3 = \frac{13qL^4}{24EI} + \frac{3qL^2}{2GA_s} \end{aligned} \quad (10.39)$$

La presenza del vincolo elasticamente cedevole

In presenza di un vincolo elasticamente cedevole, come quello di Figura 10.4, il lavoro virtuale esterno si arricchirà del termine che tien conto del lavoro compiuto dalla reazione del vincolo — letta sul sistema di forze virtuali — per effetto dello spostamento del vincolo — letto sul sistema di spostamenti. Se quindi si vuole calcolare la rotazione in D , lo schema delle forze virtuali è quello di Figura 10.6, in cui la struttura è caricata da una coppia \mathcal{M}' , di valore unitario, nell'appoggio D , e si ha:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = \mathcal{M}' \phi_D + R'_C u_{2C} = \mathcal{M}' \phi_D - c_{vC} R_C R'_C \quad (10.40)$$

R_C ed R'_C sono le reazioni dell'appoggio sullo schema degli spostamenti e sullo schema delle forze, rispettivamente. La reazione R_C si ottiene dall'esame dello schema di Figura 10.4, considerando che l'equilibrio del primo tratto implica l'annullarsi della reazione in A e del momento in B , e che quindi l'equilibrio del secondo tratto intorno al punto C implica l'annullarsi anche della reazione in D . Ne segue:

$$R_C = -2qL \quad (10.41)$$

La reazione R'_C si ottiene dall'esame dello schema di Figura 10.6, considerando che l'equilibrio del primo tratto implica anche ora l'annullarsi della reazione in A e del momento in B , e che quindi l'equilibrio del secondo tratto implica che le due reazioni in C e D devono formare una coppia oraria di braccio L :

$$R'_C = -\frac{\mathcal{M}'}{L} \quad (10.42)$$

Sarà quindi possibile integrare solo lungo il tratto CD , ottenendo (con \mathcal{M}' unitaria):

$$\phi_D = \frac{1}{EI} - \int_s \frac{1}{2} q (L - x_3)^2 \frac{x_3}{L} dx_3 + c_{vC} R_C R'_C = -\frac{qL^3}{24EI} + 2qc_{vC} \quad (10.43)$$

Se si desidera lo spostamento relativo tra le due facce del bipendolo, e se quindi il sistema di forze virtuali è quello di Figura 10.8, si dovrà scrivere:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = \Delta u_{2B} + R'_C u_{2C} = \Delta u_{2B} - c_{vC} R_C R'_C \quad (10.44)$$

Utilizzando i valori già calcolati in precedenza si ha quindi:

$$\Delta u_{2B} = \frac{13qL^4}{24EI} + 6c_{vC} qL \quad (10.45)$$

10.3 Il metodo dell'analogia di Mohr

Si vuole ora utilizzare il procedimento della trave ausiliaria di Mohr, al fine di conoscere lo spostamento relativo tra le due facce del bipendolo, e la rotazione in D , per la struttura in Figura 10.1, nell'ipotesi di trave di Eulero-Bernoulli.

Utilizzando quanto già visto in precedenza, il carico fittizio sulla trave ausiliaria si presenta come in Figura 10.10, ed è esprimibile, in base alle (10.11) come:

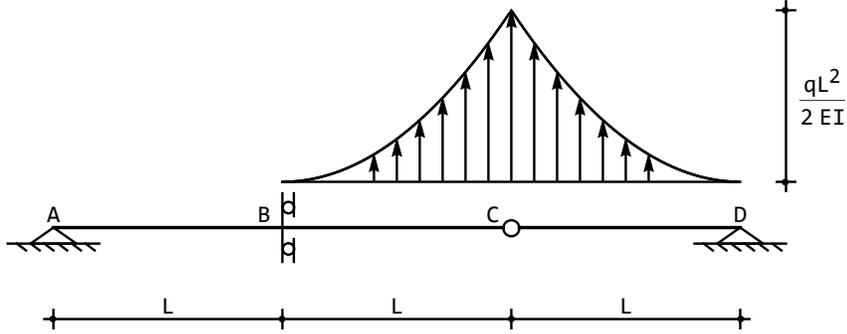


Figura 10.10: La trave ausiliaria ed il suo carico fittizio

$$\begin{aligned} q^{*AB}(x_3) &= 0 \\ q^{*BC}(x_3) &= -\frac{q}{2EI}x_3^2 \\ q^{*CD}(x_3) &= -\frac{q}{2EI}(L-x_3)^2 \end{aligned} \quad (10.46)$$

La coppia reattiva virtuale \mathcal{M}_{rB}^* del bipendolo esterno risulta pari al richiesto spostamento relativo, cambiato di segno, in quanto si ha, per l'equilibrio:

$$\mathcal{M}_{rB}^* = M_{Bsin}^* - M_{Bdes}^* \quad (10.47)$$

e quindi:

$$\Delta u_{2B} = u_2^{BC}(0) - u_2^{AB}(L) = M_{Bdes}^* - M_{Bsin}^* \quad (10.48)$$

La reazione virtuale R_D^* dell'appoggio in D è invece pari alla richiesta rotazione, cambiata di segno, in quanto:

$$\phi_D = -T_D^* = -R_D^* \quad (10.49)$$

La reazione virtuale si calcola facilmente imponendo l'equilibrio alla rotazione del secondo tratto rispetto al polo C:

$$-\int_0^L q^*(x_3) x_3 dx_3 - R_D^* L = 0 \quad (10.50)$$

da cui:

$$R_D^* = -\frac{1}{L} \int_0^L \left(-\frac{1}{2EI} q (L-x_3)^2 x_3 \right) dx_3 = \frac{qL^3}{24EI} \quad (10.51)$$

per cui, infine:

$$\phi_D = -\frac{qL^3}{24EI} \quad (10.52)$$

Il taglio virtuale in C si ottiene dall'equilibrio alla traslazione verticale del secondo tratto:

$$-T_C^* + R_D^* + \int_0^L q^*(x_3) dx_3 = 0 \quad (10.53)$$

da cui:

$$T_C^* = R_D^* + \int_0^L q^*(x_3) dx_3 = \frac{qL^3}{24EI} - \int_0^L \frac{1}{2EI} q(L-x_3)^2 dx_3 = -\frac{qL^3}{8EI} \quad (10.54)$$

Conosciuto il taglio virtuale in C , la coppia reattiva del bipendolo in B si ottiene dall'equilibrio alla rotazione del primo tratto intorno al polo A :

$$\mathcal{M}_{rB}^* - 2T_C^*L - \int_0^L q^*(x_3)(L+x_3) dx_3 = 0 \quad (10.55)$$

ossia:

$$\mathcal{M}_{rB}^* = -\frac{qL^4}{4EI} - \int_0^L q \frac{x_3^2}{2EI} (L+x_3) dx_3 = -\frac{13}{24} \frac{qL^4}{EI} \quad (10.56)$$

per cui, infine:

$$\Delta u_{2B} = \frac{13}{24} \frac{qL^4}{EI} \quad (10.57)$$

Capitolo 11

Un Carroponte

Si vuole conoscere la deformata del carroponte di Figura 11.1, schematizzando la struttura come un telaio, ed utilizzando il metodo della linea elastica.

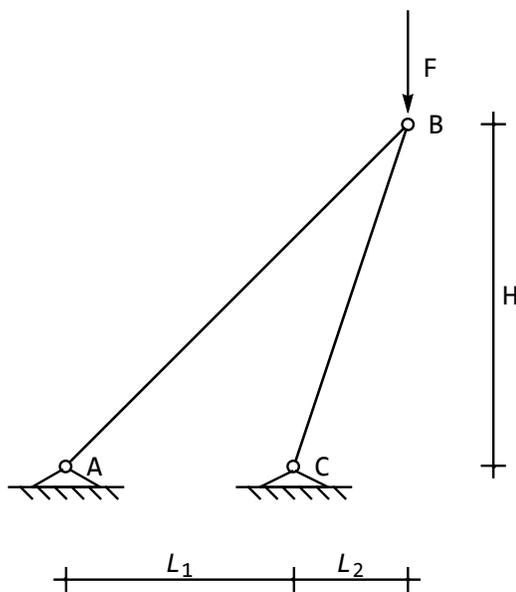


Figura 11.1: Uno schema elementare di carroponte

Si pongono, quindi, le linee elastiche dei due tratti nella forma usuale:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\
u_2^{CB}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
u_3^{CB}(x_3) &= d_0 + d_1x_3
\end{aligned}
\tag{11.1}$$

Si pone, al fine di semplificare i risultati:

$$\begin{aligned}
L &= L_1 + L_2 \\
L_1 &= 2L_2 \\
H &= L_1 + L_2
\end{aligned}
\tag{11.2}$$

Si hanno così le lunghezze dei due tratti, e le loro inclinazioni:

$$\begin{aligned}
L_{AB} &= \sqrt{L^2 + H^2} \\
L_{CB} &= \sqrt{L_2^2 + H^2} \\
\alpha &= \arctan\left(\frac{H}{L}\right) \\
\beta &= \arctan\left(\frac{H}{L_2}\right)
\end{aligned}
\tag{11.3}$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno:

— nell'appoggio in A si annullano ambedue le componenti di spostamento, ed il momento flettente

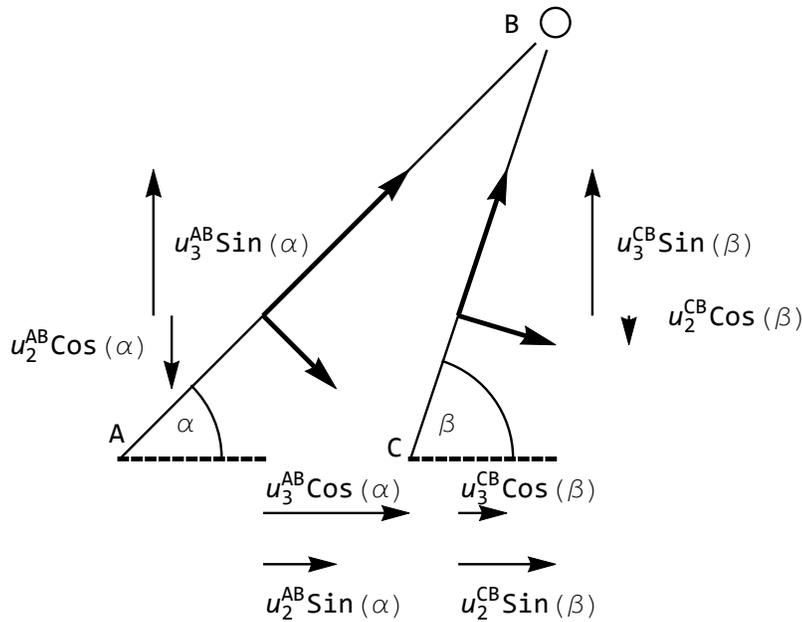
$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(0) &= 0 \\
u_3^{AB}(0) &= 0 \\
m^{AB}(0) &= 0
\end{aligned}
\tag{11.4}$$

— nell'appoggio in C si annullano ambedue le componenti di spostamento, ed il momento flettente

$$\begin{aligned}
u_2^{CB}(0) &= 0 \\
u_3^{CB}(0) &= 0 \\
m^{CB}(0) &= 0
\end{aligned}
\tag{11.5}$$

— nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza sugli spostamenti, da leggere sulla Figura 11.2:

$$\begin{aligned}
u_3^{AB}(L_{AB}) \cos(\alpha) + u_2^{AB}(L_{AB}) \sin(\alpha) &= u_3^{CB}(L_{CB}) \cos(\beta) + \\
&\quad u_2^{CB}(L_{CB}) \sin(\beta) \\
-u_3^{AB}(L_{AB}) \sin(\alpha) + u_2^{AB}(L_{AB}) \cos(\alpha) &= -u_3^{CB}(L_{CB}) \sin(\beta) \\
&\quad + u_2^{CB}(L_{CB}) \cos(\beta)
\end{aligned}
\tag{11.6}$$


 Figura 11.2: La congruenza degli spostamenti per il nodo B

e le condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 & t^{AB} (L_{AB}) \sin(\alpha) + n^{AB} (L_{AB}) \cos(\alpha) + t^{CB} (L_{CB}) \sin(\beta) + \\
 & \quad n^{CB} (L_{CB}) \cos(\beta) = 0 \\
 & -t^{AB} (L_{AB}) \cos(\alpha) + n^{AB} (L_{AB}) \sin(\alpha) - t^{CB} (L_{CB}) \cos(\beta) + \\
 & \quad n^{CB} (L_{CB}) \sin(\beta) + F = 0 \\
 & m^{AB} (L_{AB}) = 0 \\
 & m^{CB} (L_{CB}) = 0
 \end{aligned} \tag{11.7}$$

Risolviendo le dodici equazioni si ottengono le costanti di integrazione, gli spostamenti trasversali e gli spostamenti assiali. Per brevità, si riportano solo i risultati relativi al caso particolare in cui:

$$\begin{aligned}
 H &= L_1 + L_2 \\
 L_1 &= 2L_2
 \end{aligned} \tag{11.8}$$

Gli spostamenti trasversali sono pari a:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB} (x_3) &= \frac{(6 + 5\sqrt{5})}{3\sqrt{2}} \frac{F}{EA} x_3 \\
 u_2^{CB} (x_3) &= \frac{(3 + 2\sqrt{5})}{\sqrt{2}} \frac{F}{EA} x_3
 \end{aligned} \tag{11.9}$$

e gli spostamenti assiali:

$$\begin{aligned} u_3^{AB}(x_3) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F}{EA} x_3 \\ u_3^{CB}(x_3) &= -\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{F}{EA} x_3 \end{aligned} \quad (11.10)$$

I momenti ed i tagli sono ovviamente nulli, mentre gli sforzi assiali sono pari a:

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= \frac{F}{\sqrt{2}} \\ n^{CB}(x_3) &= -\sqrt{\frac{5}{2}} F \end{aligned} \quad (11.11)$$

L'asta AB è quindi tesa, ma l'asta CB risulta compressa. La deformata è riportata in Figura 11.3. Il nodo B si abbassa di:

$$\delta_{vB} = u_2^{AB}(L_{AB}) \cos(\alpha) - u_2^{CB}(L_{AB}) \sin(\alpha) = \frac{(3 + 5\sqrt{5})}{\sqrt{2}} \frac{FL}{EA} \quad (11.12)$$

e si sposta verso destra di:

$$\delta_{wB} = u_2^{AB}(L_{AB}) \sin(\alpha) + u_2^{CB}(L_{AB}) \cos(\alpha) = \frac{(9 + 5\sqrt{5})}{\sqrt{2}} \frac{FL}{EA} \quad (11.13)$$

Si vuole ora semplificare a priori lo schema strutturale, realizzando che momenti e tagli dovranno essere nulli, e quindi considerando la struttura come una *travatura reticolare*. In quest'ottica si ha quindi che le linee elastiche flessionali saranno polinomi lineari, e si potrà porre:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 \\ u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\ u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 \\ u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \end{aligned} \quad (11.14)$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno ora:

— nell'appoggio in A si annullano ambedue le componenti di spostamento:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(0) &= 0 \\ u_3^{AB}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (11.15)$$

— nell'appoggio in C si annullano ambedue le componenti di spostamento:

$$\begin{aligned} u_2^{CB}(0) &= 0 \\ u_3^{CB}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (11.16)$$

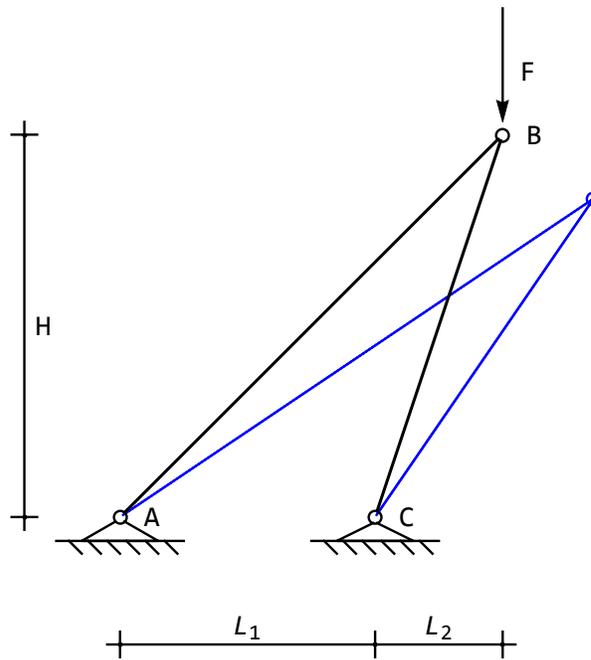


Figura 11.3: La deformata del carroponte

— nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza sugli spostamenti:

$$\begin{aligned}
 u_3^{AB} (L_{AB}) \cos(\alpha) + u_2^{AB} (L_{AB}) \sin(\alpha) &= u_3^{CB} (L_{CB}) \cos(\beta) + \\
 &u_2^{CB} (L_{CB}) \sin(\beta) \\
 -u_3^{AB} (L_{AB}) \sin(\alpha) + u_2^{AB} (L_{AB}) \cos(\alpha) &= -u_3^{CB} (L_{CB}) \sin(\beta) + \\
 &u_2^{CB} (L_{CB}) \cos(\beta)
 \end{aligned} \tag{11.17}$$

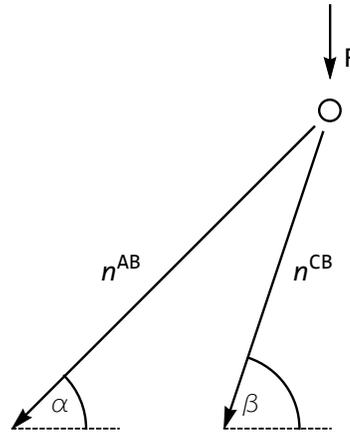
e le condizioni di equilibrio per gli sforzi assiali:

$$\begin{aligned}
 n^{AB} (L_{AB}) \cos(\alpha) + n^{CB} (L_{CB}) \cos(\beta) &= 0 \\
 n^{AB} (L_{AB}) \sin(\alpha) + n^{CB} (L_{CB}) \sin(\beta) + F &= 0
 \end{aligned} \tag{11.18}$$

Risolviendo le otto equazioni si ottengono gli stessi risultati cui si era giunti in precedenza.

11.1 Le verifiche

Poichè la struttura è isostatica, si può conoscere lo sforzo assiale nelle aste del carroponte in Figura 11.1 imponendo l'equilibrio del nodo B , come riportato in Figura 11.4:

Figura 11.4: L'equilibrio del nodo in B

$$\begin{aligned} n^{AB} \cos(\alpha) + n^{CB} \cos(\beta) &= 0 \\ n^{AB} \sin(\alpha) + n^{CB} \sin(\beta) + F &= 0 \end{aligned} \quad (11.19)$$

Si ha subito:

$$\begin{aligned} n^{AB} &= -\frac{F \cos(\beta)}{\cos(\beta) \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \sin(\beta)} \\ n^{CB} &= -\frac{F \cos(\alpha)}{-\cos(\beta) \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \sin(\beta)} \end{aligned} \quad (11.20)$$

ossia, introducendo le (11.3):

$$\begin{aligned} n^{AB} &= \frac{FL}{H} \frac{L_2}{L_1} \sqrt{1 + \frac{H^2}{L^2}} \\ n^{CB} &= -\frac{FL}{H} \frac{L_2}{L_1} \sqrt{1 + \frac{H^2}{L_2^2}} \end{aligned} \quad (11.21)$$

Nell'ipotesi (11.8) si ha infine:

$$\begin{aligned} n^{AB} &= F \frac{\sqrt{2}}{2} \\ n^{CB} &= -\frac{F}{2} \sqrt{10} = -F \sqrt{\frac{5}{2}} \end{aligned} \quad (11.22)$$

11.1.1 L'utilizzo del principio dei lavori virtuali

Si vuole infine calcolare lo spostamento del nodo B , utilizzando il principio dei lavori virtuali.

La componente verticale di spostamento si ottiene immediatamente, in quanto il sistema di forze coincide con quello di spostamento (ma la forza virtuale è posta unitaria). Non essendoci momenti flettenti, il principio dei lavori virtuali si scrive, nelle ipotesi (11.8):

$$\int_0^{L_{AB}} N_1 \frac{N}{EA} dx_3 + \int_0^{L_{CB}} N_1 \frac{N}{EA} dx_3 = u_{2B} \quad (11.23)$$

ossia:

$$\frac{F}{2EA} \int_0^{3\sqrt{2}L} dx_3 + \frac{5F}{2EA} \int_0^{\sqrt{10}L} dx_3 = u_{2B} \quad (11.24)$$

e quindi:

$$u_{2B} = \frac{(3 + 5\sqrt{5}) FL}{\sqrt{2}EA} \quad (11.25)$$

Per il calcolo dello spostamento orizzontale occorre utilizzare il sistema di forze virtuali di Figura 11.5, su cui si calcolano gli sforzi assiali tramite equilibrio del nodo B :

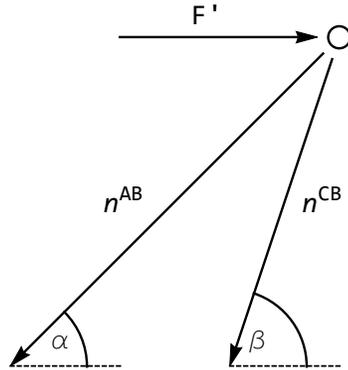


Figura 11.5: L'equilibrio del nodo in B

$$\begin{aligned} -n_1^{AB} \cos[\alpha] - n_1^{CB} \cos[\beta] + F' &= 0 \\ n_1^{AB} \sin[\alpha] + n_1^{CB} \sin[\beta] &= 0 \end{aligned} \quad (11.26)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} n_1^{AB} &= \frac{F' \sin(\beta)}{-\cos(\beta) \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \sin(\beta)} \\ n_1^{CB} &= \frac{F' \sin(\alpha)}{\cos(\beta) \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \sin(\beta)} \end{aligned} \quad (11.27)$$

ossia, introducendo le (11.3):

$$\begin{aligned} n_1^{AB} &= \frac{F'(L_1 + L_2)}{L_1} \sqrt{1 + \frac{H^2}{L^2}} \\ n_1^{CB} &= -F' \frac{L_2}{L_1} \sqrt{1 + \frac{H^2}{L_2^2}} \end{aligned} \quad (11.28)$$

ossia, per il caso (11.8):

$$\begin{aligned} n_1^{AB} &= \frac{3F'}{\sqrt{2}} \\ n_1^{CB} &= -\sqrt{\frac{5}{2}} F' \end{aligned} \quad (11.29)$$

Il principio dei lavori virtuali fornisce ora, con forza virtuale unitaria:

$$u_{3B} = \frac{F}{EA} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) \int_0^{3\sqrt{2}L} dx_3 + \frac{F}{EA} \frac{5}{2} \int_0^{\sqrt{10}L} dx_3 = \frac{(9 + 5\sqrt{5}) FL}{\sqrt{2} EA} \quad (11.30)$$

Capitolo 12

Travature reticolari

Ambedue gli esempi del capitolo sono tratti dalle lezioni di Anthony Armenakas *Structural Analysis* dell'Indian Institute of Technology (IIT) di Kharagpur.

12.1 Esempio n.1: Travatura rettangolare

Si esamini la travatura reticolare di Figura 12.1, lunga L ed alta H . Utilizzando la schematizzazione a travatura reticolare, si vuol calcolare gli sforzi assiali nei membri, e gli spostamenti dei nodi.

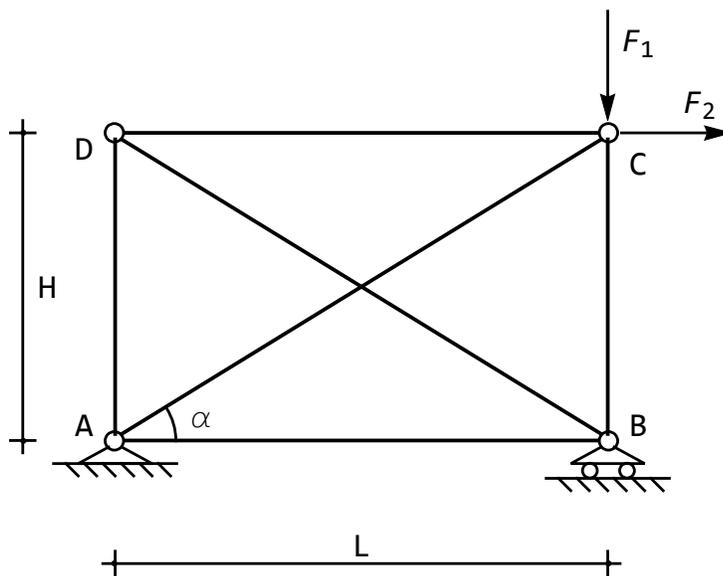


Figura 12.1: Una travatura reticolare

In assenza di momenti e tagli, le linee elastiche saranno lineari. Identificando sei aste, si potrà quindi scrivere:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 & u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 & u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\
 u_2^{DC}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 & u_3^{DC}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3 \\
 u_2^{BD}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 & u_3^{BD}(x_3) &= h_0 + h_1 x_3 \\
 u_2^{AC}(x_3) &= k_0 + k_1 x_3 & u_3^{AC}(x_3) &= m_0 + m_1 x_3 \\
 u_2^{AD}(x_3) &= l_0 + l_1 x_3 & u_3^{AD}(x_3) &= n_0 + n_1 x_3
 \end{aligned} \tag{12.1}$$

mentre gli sforzi normali si ottengono per derivazione. Ipotizzando che le aste abbiano rigidezza assiale EA costante, si porrà quindi:

$$n^{IJ}(x_3) = EA \frac{du_3^{IJ}}{dx_3} \tag{12.2}$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno:

— nell'appoggio in A si annullano ambedue le componenti di spostamento, per le tre aste che ivi concorrono:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 & u_3^{AB}(0) &= 0 \\
 u_2^{AC}(0) &= 0 & u_3^{AC}(0) &= 0 \\
 u_2^{AD}(0) &= 0 & u_3^{AD}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{12.3}$$

— nel nodo in B si annullano le componenti di spostamento ortogonali all'asse del carrello, ossia le componenti verticali di spostamento:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(L) &= 0 \\
 u_3^{BC}(0) &= 0 \\
 u_3^{BD}(0) \sin(\alpha) + u_2^{BD}(0) \cos(\alpha) &= 0
 \end{aligned} \tag{12.4}$$

dove l'angolo α è calcolabile come:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{H}{L}\right) \tag{12.5}$$

L'esame della componente orizzontale di spostamento porta a scrivere due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
 u_3^{AB}(L) &= u_2^{BC}(0) \\
 u_3^{AB}(L) &= -u_3^{BD}(0) \cos(\alpha) - u_2^{BD}(0) \sin(\alpha)
 \end{aligned} \tag{12.6}$$

Infine, si deve imporre l'equilibrio della cerniera alla traslazione orizzontale:

$$-n^{AB}(L) - n^{BD}(0) \cos(\alpha) = 0 \tag{12.7}$$

— in corrispondenza del nodo C , le tre aste concorrenti dovranno avere le stesse componenti di spostamento orizzontale e verticale:

$$\begin{aligned}
 u_2^{DC}(L) &= -u_3^{BC}(H) \\
 u_3^{DC}(L) &= u_2^{BC}(H) \\
 u_2^{DC}(L) &= -u_3^{AC}(L_1) \sin(\alpha) + u_2^{AC}(L_1) \cos(\alpha) \\
 u_3^{DC}(L) &= u_3^{AC}(L_1) \cos(\alpha) - u_2^{AC}(L_1) \sin(\alpha)
 \end{aligned} \tag{12.8}$$

dove L_1 è la lunghezza delle aste inclinate.

Potranno poi scriversi le due condizioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale:

$$\begin{aligned}
 n^{BC}(H) + n^{AC}(L_1) \sin(\alpha) + F_1 \\
 -n^{DC}(L) - n^{AC}(L_1) \cos(\alpha) + F_2
 \end{aligned} \tag{12.9}$$

— infine, in D , bisognerà rispettare la congruenza degli spostamenti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AD}(H) &= u_3^{DC}(0) \\
 u_3^{AD}(H) &= u_2^{DC}(0) \\
 u_2^{AD}(H) &= -u_3^{BD}(L_1) \cos(\alpha) + u_2^{BD}(L_1) \sin(\alpha) \\
 u_3^{AD}(H) &= u_3^{BD}(L_1) \sin(\alpha) + u_2^{BD}(L_1) \cos(\alpha)
 \end{aligned} \tag{12.10}$$

ed imporre l'equilibrio del nodo:

$$\begin{aligned}
 n^{AD}(H) + n^{BD}(L_1) \sin(\alpha) &= 0 \\
 n^{DC}(0) + n^{BD}(L_1) \cos(\alpha) &= 0
 \end{aligned} \tag{12.11}$$

Risolvendo le ventiquattro equazioni si ottengono le costanti di integrazione, gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= 0 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{F_1 \left((-1 + \sqrt{2}) L + 2x_3 \right) + F_2 \left(-(-3 + \sqrt{2}) L + (2 + 4\sqrt{2}) x_3 \right)}{4EA} \\
 u_2^{DC}(x_3) &= \frac{F_1}{4EA} \left(\left((-1 + \sqrt{2}) L - 2(-3 + \sqrt{2}) x_3 \right) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{F_2}{4EA} \left(-(-3 + \sqrt{2}) L + 2(-1 + \sqrt{2}) x_3 \right) \right) \\
 u_2^{AC}(x_3) &= \frac{(3F_1 + (3 + 2\sqrt{2}) F_2) x_3}{4EA} \\
 u_2^{AD}(x_3) &= \frac{(F_1 + (1 + 2\sqrt{2}) F_2) x_3}{2EA} \\
 u_2^{BD}(x_3) &= \frac{F_1 \left(-(-2 + \sqrt{2}) L + 2x_3 \right) + F_2 \left((-2 + 3\sqrt{2}) L + (2 + 4\sqrt{2}) x_3 \right)}{8EA}
 \end{aligned} \tag{12.12}$$

e gli spostamenti assiali:

$$\begin{aligned} u_3^{AB}(x_3) &= \frac{((-1 + \sqrt{2}) F_1 - (-3 + \sqrt{2}) F_2) x_3}{4EA} \\ u_3^{BC}(x_3) &= \frac{((-5 + \sqrt{2}) F_1 - (1 + \sqrt{2}) F_2) x_3}{4EA} \\ u_3^{DC}(x_3) &= \frac{F_2 (2(1 + 2\sqrt{2}) L - (-3 + \sqrt{2}) x_3) + F_1 (2L + (-1 + \sqrt{2}) x_3)}{4EA} \end{aligned} \quad (12.13)$$

$$\begin{aligned} u_3^{AC}(x_3) &= \frac{((-2 + \sqrt{2}) F_1 + (2 + \sqrt{2}) F_2) x_3}{4EA} \\ u_3^{AD}(x_3) &= \frac{((-1 + \sqrt{2}) F_1 - (-3 + \sqrt{2}) F_2) x_3}{4EA} \\ u_3^{BD}(x_3) &= \frac{((-2 + \sqrt{2}) F_1 + (2 - 3\sqrt{2}) F_2) (L + 2x_3)}{8EA} \end{aligned}$$

da cui anche gli sforzi normali:

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= \frac{1}{4} \left((-1 + \sqrt{2}) F_1 - (-3 + \sqrt{2}) F_2 \right) \\ n^{BC}(x_3) &= \frac{1}{4} \left((-5 + \sqrt{2}) F_1 - (1 + \sqrt{2}) F_2 \right) \\ n^{DC}(x_3) &= \frac{1}{4} \left((-1 + \sqrt{2}) F_1 - (-3 + \sqrt{2}) F_2 \right) \\ n^{AC}(x_3) &= \frac{1}{4} \left((-2 + \sqrt{2}) F_1 + (2 + \sqrt{2}) F_2 \right) \\ n^{AD}(x_3) &= \frac{1}{4} \left((-1 + \sqrt{2}) F_1 - (-3 + \sqrt{2}) F_2 \right) \\ n^{BD}(x_3) &= \frac{1}{4} \left((-2 + \sqrt{2}) F_1 + (2 - 3\sqrt{2}) F_2 \right) \end{aligned} \quad (12.14)$$

Per semplicità, si sono riportati i risultati per travatura quadrata, in cui $L = H$.

12.1.1 Una verifica con il principio dei lavori virtuali

La travatura è costituita da quattro nodi e sei membri, quindi il suo grado di iperstaticità è calcolabile come:

$$2c - a - n_e = -1 \quad (12.15)$$

dove c è il numero di nodi, a il numero delle aste, n_e il grado di vincolo esterno. La travatura, quindi, è una volta, internamente, iperstatica.

Si calcoli lo sforzo assiale nell'elemento BD applicando il principio dei lavori virtuali.

A tal fine, si sceglie il sistema di spostamenti di Figura 12.1, ed il sistema di forze virtuali di Figura 12.2, in cui l'asta BD è stata rimossa, e sostituita da

due forze assiali unitarie, uguali e contrarie. Il verso di queste forze è scelto in modo da far compiere lavoro positivo allo sforzo normale n_1^{BD} .

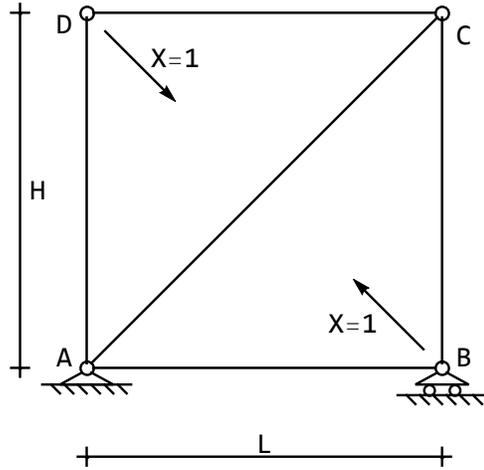


Figura 12.2: Il sistema S_1 delle forze virtuali

Il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_s N_1 \frac{N}{EA} ds = X \times \left(-\frac{n_{BD} L_{DB}}{EA} \right) \quad (12.16)$$

dove N_1 sono gli sforzi normali calcolati sul sistema di Figura 12.2, mentre N sono gli sforzi normali sul sistema di spostamenti di Figura 12.1. Il lavoro esterno è negativo in quanto le due forze unitarie tendono a comprimere il pendolo BD , che subisce invece un allungamento pari a:

$$\Delta L_{BD} = \frac{n_{BD} L_{BD}}{EA} = \frac{X \sqrt{2} L}{EA} \quad (12.17)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, poi, si potrà scrivere:

$$N = N_0 + X N_1 \quad (12.18)$$

dove N_0 sono gli sforzi normali calcolati sul sistema isostatico di Figura 12.3, caricato dai soli carichi applicati. Sarà quindi, infine:

$$\int_s N_1 N_0 ds + X \int_s N_1^2 ds = -X \sqrt{2} L \quad (12.19)$$

da cui la richiesta incognita iperstatica:

$$X = -\frac{\int_s N_1 N_0 ds}{\int_s N_1^2 ds + \sqrt{2} L} \quad (12.20)$$

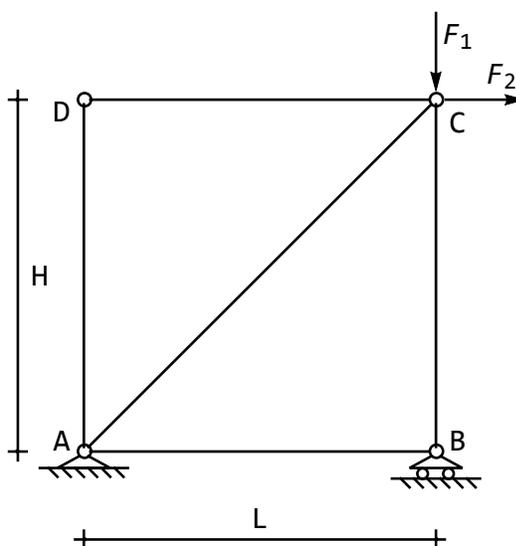


Figura 12.3: Il sistema S_0 , isostatico e caricato dai soli carichi applicati

Per lo studio del sistema S_0 , si inizi a calcolare le reazioni esterne, scrivendo le tre equazioni di equilibrio globale. Scegliendo il polo in C si ottiene:

$$\begin{aligned} R_{Ah} + F_2 &= 0 \\ R_{Av} + R_{Bv} + F_1 &= 0 \\ R_{Ah}H + R_{Av}L &= 0 \end{aligned} \quad (12.21)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} R_{Ah} &= -F_2 \\ R_{Av} &= F_2 \\ R_{Bv} &= -F_1 - F_2 \end{aligned} \quad (12.22)$$

Ciò fatto, il metodo dei nodi permette il calcolo degli sforzi assiali. L'equilibrio del nodo B fornisce n_0^{AB} ed n_0^{BC} :

$$\begin{aligned} n_0^{AB} &= 0 \\ n_0^{BC} &= -F_1 - F_2 \end{aligned} \quad (12.23)$$

Passando al nodo C , l'equilibrio impone:

$$\begin{aligned} -n_0^{DC} - n_0^{AC} \frac{\sqrt{2}}{2} + F_2 &= 0 \\ n_0^{BC} + n_0^{AC} \frac{\sqrt{2}}{2} + F_1 &= 0 \end{aligned} \quad (12.24)$$

da cui:

$$\begin{aligned} n_0^{AC} &= F_2\sqrt{2} \\ n_0^{DC} &= 0 \end{aligned} \quad (12.25)$$

L'esame del nodo D permette di scrivere subito:

$$n_0^{AD} = 0 \quad (12.26)$$

e quindi infine, il nodo A sarà equilibrato (possono scriversi le relative equazioni per verifica).

Per lo schema S_1 , auto-equilibrato, le reazioni esterne sono nulle, e l'esame dei nodi può partire, ad esempio, dal nodo B , per cui potrà scriversi:

$$\begin{aligned} -n_1^{AB} - X\frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \\ -n_1^{BC} - X\frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (12.27)$$

da cui:

$$n_1^{AB} = n_1^{BC} = -X\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (12.28)$$

Nel nodo C si ha :

$$\begin{aligned} -n_1^{DC} - n_1^{AC}\frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \\ n_1^{BC} + n_1^{AC}\frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (12.29)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} n_1^{DC} &= -X\frac{\sqrt{2}}{2} \\ n_1^{AC} &= X \end{aligned} \quad (12.30)$$

Infine, in D , si potrà scrivere:

$$n_1^{AD} = -X\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (12.31)$$

Lo sforzo normale richiesto sarà quindi fornito da:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{(-F_1 - F_2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + F_2\sqrt{2}\sqrt{2}}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (1)^2\sqrt{2} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(-2 + \sqrt{2}\right)F_1 + \left(2 - 3\sqrt{2}\right)F_2\right) \end{aligned} \quad (12.32)$$

coincidente con quanto ottenuto con la linea elastica.

12.2 Esempio n. 2

In questo secondo esempio è riportata — in Figura 12.4 — una travatura reticolare costituita da sei nodi, connessi da dieci aste, e vincolata al suolo da due appoggi. Uno dei nodi è caricato da una forza orientata in modo arbitraria, e quindi schematizzata come due forze dirette secondo l'orizzontale e la verticale. L'altezza H è posta pari a $\frac{3}{4}$ della luce dei tre tratti.

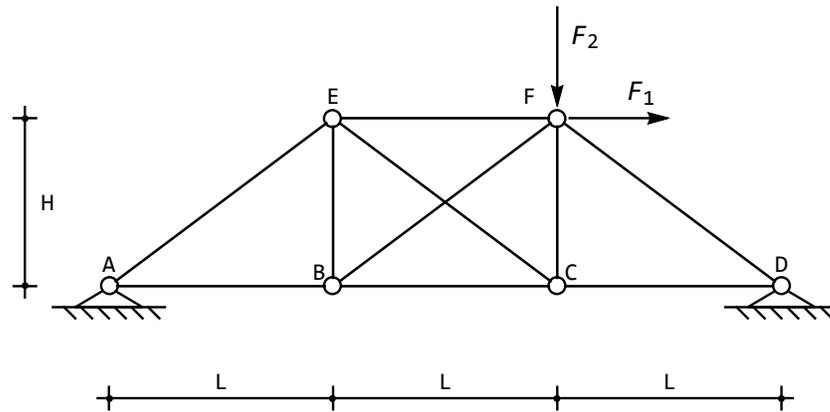


Figura 12.4: Una travatura reticolare di esempio

Un calcolo del grado di iperstaticità porta a scrivere:

$$2c - a - n_e = 12 - 10 - 4 = -2 \quad (12.33)$$

Si ha quindi una struttura doppiamente iperstatica, ed è immediato realizzare che una iperstaticità è dovuta ai vincoli esterni, ed una ai vincoli interni.

Per ciascuna asta si pongono linee elastiche assiali e trasversali di tipo lineare, essendo nulli momenti e tagli. Sarà quindi, in generale, per l'asta che collega la cerniera I alla cerniera J :

$$\begin{aligned} u_2^{IJ}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 \\ u_3^{IJ}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \end{aligned} \quad (12.34)$$

ed ovviamente:

$$n^{IJ} = (EA)_{IJ} \frac{du_3^{IJ}}{dx_3} \quad (12.35)$$

dove $(EA)_{IJ}$ è la rigidezza assiale dell'asta considerata. Scelto un valore di riferimento EA , le aste orizzontali avranno rigidezza assiale pari a $15EA$, e

quindi:

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= 15EA \frac{du_3^{AB}}{dx_3} \\
 n^{BC}(x_3) &= 15EA \frac{du_3^{BC}}{dx_3} \\
 n^{CD}(x_3) &= 15EA \frac{du_3^{CD}}{dx_3} \\
 n^{EF}(x_3) &= 15EA \frac{du_3^{EF}}{dx_3}
 \end{aligned} \tag{12.36}$$

le aste verticali avranno rigidezza assiale pari a $10EA$, e quindi:

$$\begin{aligned}
 n^{BE}(x_3) &= 10EA \frac{du_3^{BE}}{dx_3} \\
 n^{CF}(x_3) &= 10EA \frac{du_3^{CF}}{dx_3}
 \end{aligned} \tag{12.37}$$

Infine, le aste inclinate avranno lunghezza pari ad $L_1 = \sqrt{H^2 + L^2} = \frac{5}{4}L$, e rigidezza assiale $20EA$:

$$\begin{aligned}
 n^{AE}(x_3) &= 20EA \frac{du_3^{AE}}{dx_3} \\
 n^{CE}(x_3) &= 20EA \frac{du_3^{CE}}{dx_3} \\
 n^{BF}(x_3) &= 20EA \frac{du_3^{BF}}{dx_3} \\
 n^{DF}(x_3) &= 20EA \frac{du_3^{DF}}{dx_3}
 \end{aligned} \tag{12.38}$$

Le costanti di integrazione si calcolano imponendo la congruenza degli spostamenti nei nodi, e l'equilibrio dei nodi stessi:

— nel nodo A dovranno annullarsi gli spostamenti orizzontali e verticali per ambedue le aste concorrenti:

$$\begin{aligned}
 u_3^{AB}(0) &= 0 \\
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 u_3^{AE}(0) &= 0 \\
 u_2^{AE}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{12.39}$$

— nel nodo B dovrà imporsi la congruenza degli spostamenti tra l'asta AB e l'asta BC , tra l'asta AB e l'asta BE , ed infine tra l'asta AB e l'asta BF . Le

altre congruenze sono automaticamente verificate:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(L) &= u_2^{BC}(0) \\
 u_3^{AB}(L) &= u_3^{BC}(0) \\
 u_2^{AB}(L) &= -u_3^{BE}(0) \\
 u_3^{AB}(L) &= u_2^{BE}(0) \\
 u_2^{AB}(L) &= u_2^{BF}(0) \cos(\alpha) - u_3^{BF}(0) \sin(\alpha) \\
 u_3^{AB}(L) &= u_3^{BF}(0) \cos(\alpha) + u_2^{BF}(0) \sin(\alpha)
 \end{aligned} \tag{12.40}$$

In B , inoltre, si dovranno scrivere le due equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 -n^{AB}(L) + n^{BC}(0) + n^{BF}(0) \cos(\alpha) &= 0 \\
 -n^{BE}(0) - n^{BF}(0) \sin(\alpha) &= 0
 \end{aligned} \tag{12.41}$$

— nel nodo C dovrà imporsi la congruenza degli spostamenti tra l'asta BC e l'asta CD , tra l'asta BC e l'asta CF , ed infine tra l'asta AB e l'asta CE . Le altre congruenze sono automaticamente verificate:

$$\begin{aligned}
 u_2^{BC}(L) &= u_2^{CD}(0) \\
 u_3^{BC}(L) &= u_3^{CD}(0) \\
 u_2^{BC}(L) &= -u_3^{CF}(0) \\
 u_3^{BC}(L) &= u_2^{CF}(0) \\
 u_2^{BC}(L) &= u_2^{CE}(0) \cos(\alpha) - u_3^{CE}(0) \sin(\alpha) \\
 u_3^{BC}(L) &= -u_3^{CE}(0) \cos(\alpha) - u_2^{CE}(0) \sin(\alpha)
 \end{aligned} \tag{12.42}$$

In C , inoltre, si dovranno scrivere le due equazioni di equilibrio :

$$\begin{aligned}
 -n^{BC}(L) + n^{CD}(0) - n^{CE}(0) \cos(\alpha) &= 0 \\
 -n^{CF}(0) - n^{CE}(0) \sin(\alpha) &= 0
 \end{aligned} \tag{12.43}$$

— nel nodo D dovranno annullarsi gli spostamenti orizzontali e verticali per ambedue le aste concorrenti:

$$\begin{aligned}
 u_3^{CD}(L) &= 0 \\
 u_2^{CD}(L) &= 0 \\
 u_3^{DF}(0) &= 0 \\
 u_2^{DF}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{12.44}$$

— nel nodo E dovrà imporsi la congruenza degli spostamenti tra l'asta EF e l'asta BE , tra l'asta EF e l'asta CE , ed infine tra l'asta EF e l'asta AC . Le

altre congruenze sono automaticamente verificate:

$$\begin{aligned}
 u_2^{EF}(0) &= -u_3^{BE}(H) \\
 u_3^{EF}(0) &= u_2^{BE}(H) \\
 u_2^{EF}(0) &= u_2^{AE}(L_1) \cos(\alpha) - u_3^{AE}(L_1) \sin(\alpha) \\
 u_3^{EF}(0) &= u_3^{AE}(L_1) \cos(\alpha) + u_2^{AE}(L_1) \sin(\alpha) \\
 u_2^{EF}(0) &= -u_2^{CE}(L_1) \cos(\alpha) - u_3^{CE}(L_1) \sin(\alpha) \\
 u_3^{EF}(0) &= -u_3^{CE}(L_1) \cos(\alpha) + u_2^{CE}(L_1) \sin(\alpha)
 \end{aligned} \tag{12.45}$$

In E , inoltre, si dovranno scrivere le due equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 n^{EF}(0) - n^{AE}(L_1) \cos(\alpha) + n^{CE}(L_1) \cos(\alpha) &= 0 \\
 n^{BE}(H) + n^{AE}(L_1) \sin(\alpha) + n^{CE}(L_1) \sin(\alpha) &= 0
 \end{aligned} \tag{12.46}$$

— infine, nel nodo F dovrà imporsi la congruenza degli spostamenti tra l'asta EF e l'asta CF , tra l'asta EF e l'asta BF , ed infine tra l'asta EF e l'asta DF . Le altre congruenze sono automaticamente verificate:

$$\begin{aligned}
 u_2^{EF}(L) &= -u_3^{CF}(H) \\
 u_3^{EF}(L) &= u_2^{CF}(H) \\
 u_2^{EF}(L) &= u_2^{BF}(L_1) \cos(\alpha) - u_3^{BF}(L_1) \sin(\alpha) \\
 u_3^{EF}(L) &= u_3^{BF}(L_1) \cos(\alpha) + u_2^{BF}(L_1) \sin(\alpha) \\
 u_2^{EF}(L) &= -u_2^{DF}(L_1) \cos(\alpha) - u_3^{DF}(L_1) \sin(\alpha) \\
 u_3^{EF}(L) &= -u_3^{DF}(L_1) \cos(\alpha) + u_2^{DF}(L_1) \sin(\alpha)
 \end{aligned} \tag{12.47}$$

In F si dovranno scrivere anche le due equazioni di equilibrio :

$$\begin{aligned}
 -n^{EF}(L) - n^{BF}(L_1) \cos(\alpha) + n^{DF}(L_1) \cos(\alpha) + F_1 &= 0 \\
 n^{CF}(H) + n^{BF}(L_1) \sin(\alpha) + n^{DF}(L_1) \sin(\alpha) + F_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{12.48}$$

I calcoli sono laboriosi, ma di routine, e portano a scrivere gli spostamenti trasversali ed assiali delle aste orizzontali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{(-11123547F_1 + 35090396F_2)x_3}{350075520EA} \\
 u_3^{AB}(x_3) &= \frac{527(3F_1 - 4F_2)x_3}{121554EA} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{44F_2(797509L + 279124x_3) + F_1(-11123547L + 5983158x_3)}{350075520EA} \\
 u_3^{BC}(x_3) &= \frac{(3F_1 - 4F_2)(2635L - 768x_3)}{607770EA}
 \end{aligned} \tag{12.49}$$

$$\begin{aligned}
u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{(5140389F_1 - 47371852F_2)(L - x_3)}{350075520EA} \\
u_3^{CD}(x_3) &= \frac{1867(3F_1 - 4F_2)(L - x_3)}{607770EA} \\
u_2^{EF}(x_3) &= \frac{292F_2(97517L + 72032x_3) - 3F_1(2053991L + 193586x_3)}{350075520EA} \\
u_3^{EF}(x_3) &= \frac{4F_2(2053991L - 4301568x_3) + 3F_1(3010759L + 4301568x_3)}{466767360EA}
\end{aligned} \tag{12.50}$$

delle aste verticali:

$$\begin{aligned}
u_2^{BE}(x_3) &= \frac{68F_2(-89280L + 239863x_3) + 3F_1(1517760L + 987079x_3)}{350075520EA} \\
u_3^{BE}(x_3) &= \frac{3F_1(3707849L - 2205144x_3) + 4F_2(-8772599L + 2205144x_3)}{350075520EA}
\end{aligned} \tag{12.51}$$

$$\begin{aligned}
u_2^{CF}(x_3) &= \frac{-4F_2(1075392L + 813721x_3) + 3F_1(1075392L + 5878471x_3)}{350075520EA} \\
u_3^{CF}(x_3) &= \frac{3F_1(1713463L + 712152x_3) - 4F_2(11842963L + 712152x_3)}{350075520EA}
\end{aligned} \tag{12.52}$$

e delle aste inclinate:

$$\begin{aligned}
u_2^{AE}(x_3) &= \frac{(-692043F_1 + 21181724F_2)x_3}{350075520EA} \\
u_3^{AE}(x_3) &= \frac{(3F_1 - 4F_2)x_3}{144EA} \\
u_2^{BF}(x_3) &= \frac{4F_2(30537116L + 11131315x_3) + F_1(-30834348L + 42577305x_3)}{1750377600EA} \\
u_3^{BF}(x_3) &= \frac{3F_1(5731529L + 3062700x_3) - 4F_2(10796279L + 3062700x_3)}{583459200EA} \\
u_2^{DF}(x_3) &= \frac{(12212661F_1 - 34921828F_2)x_3}{350075520EA} \\
u_3^{DF}(x_3) &= -\frac{(3F_1 + 8F_2)x_3}{144EA} \\
u_2^{CE}(x_3) &= \frac{4F_2(252990140L - 297806049x_3) + F_1(-151200420L + 300842397x_3)}{8751888000EA} \\
u_3^{CE}(x_3) &= \frac{3F_1(279607L - 989100x_3) + 4F_2(-10409107L + 989100x_3)}{583459200EA}
\end{aligned} \tag{12.53}$$

I corrispondenti sforzi normali si ottengono per derivazione, utilizzando le

(12.36–12.38):

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= \frac{2635(3F_1 - 4F_2)}{40518} \\
 n^{BC}(x_3) &= -\frac{128(3F_1 - 4F_2)}{6753} \\
 n^{CD}(x_3) &= -\frac{1867(3F_1 - 4F_2)}{40518} \\
 n^{EF}(x_3) &= \frac{1867(3F_1 - 4F_2)}{13506} \\
 n^{BE}(x_3) &= -\frac{3403(3F_1 - 4F_2)}{54024} \\
 n^{AB}(x_3) &= \frac{2635(3F_1 - 4F_2)}{40518} \\
 n^{BC}(x_3) &= -\frac{128(3F_1 - 4F_2)}{6753} \\
 n^{CD}(x_3) &= -\frac{1867(3F_1 - 4F_2)}{40518} \\
 \\
 n^{EF}(x_3) &= \frac{1867(3F_1 - 4F_2)}{13506} \\
 n^{BE}(x_3) &= -\frac{3403(3F_1 - 4F_2)}{54024}
 \end{aligned} \tag{12.54}$$

Le reazioni vincolari possono calcolarsi a partire dagli equilibri dei nodi A e D :

$$\begin{aligned}
 R_{Ah} &= -n^{AB} - n^{AE} \cos(\alpha) = -\frac{793(3F_1 - 4F_2)}{4502} \\
 R_{Dh} &= n^{CD} + n^{DF} \cos(\alpha) = -\frac{2123F_1 + 3172F_2}{4502} \\
 R_{Av} &= n^{AE} \sin(\alpha) = \frac{F_1}{4} - \frac{F_2}{3} \\
 R_{Dv} &= n^{DF} \sin(\alpha) = -\left(\frac{F_1}{4} + \frac{2}{3}F_2\right)
 \end{aligned} \tag{12.55}$$

Applicazione numerica

Si può porre, come nel testo di riferimento :

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 20\text{kN} \\
 F_2 &= 60\text{kN}
 \end{aligned} \tag{12.56}$$

ottenendo i valori numerici:

$$\begin{array}{ll}
 n^{AB}(x_3) = -11.7059 & n^{BC}(x_3) = 3.41182 \\
 n^{CD}(x_3) = 8.29409 & n^{EF}(x_3) = -24.8823 \\
 n^{BE}(x_3) = 11.3383 & n^{CF}(x_3) = -3.66171 \\
 n^{AE}(x_3) = -25 & n^{BF}(x_3) = -18.8972 \\
 n^{DF}(x_3) = -75 & n^{CE}(x_3) = 6.10284
 \end{array}$$

coincidenti — a meno di errori di approssimazione — con quelli di riferimento.

Le variazioni termiche

Si ipotizzi ora che l'asta CE sia soggetta ad una variazione termica uniforme ΔT , sicchè sull'asta agisce una distorsione $\lambda = -\alpha\Delta T$. Rispetto al caso precedente, occorre solo annullare le forze F_1 ed F_2 , e sostituire l'espressione dello sforzo normale in CE con la formula modificata:

$$n^{CE}(x_3) = 20EA\left(\frac{du_3^{CE}}{dx_3} - \alpha\Delta T\right) \quad (12.57)$$

Le condizioni ai limiti restano le stesse, e si ottengono gli spostamenti delle aste orizzontali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{48625\alpha\Delta T x_3}{162072} \\
 u_3^{AB}(x_3) &= -\frac{200\alpha\Delta T x_3}{2251}
 \end{aligned} \quad (12.58)$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{BC}(x_3) &= -\frac{48625L\alpha\Delta T}{162072} + \frac{25\alpha\Delta T x_3}{36} \\
 u_3^{BC}(x_3) &= -\frac{200\alpha\Delta T(L - 2x_3)}{2251} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{63925\alpha\Delta T(L - x_3)}{162072} \\
 u_3^{CD}(x_3) &= \frac{200\alpha\Delta T(L - x_3)}{2251} \\
 u_2^{EF}(x_3) &= -\frac{85075L\alpha\Delta T}{162072} + \frac{25\alpha\Delta T x_3}{36} \\
 u_3^{EF}(x_3) &= -\frac{25\alpha\Delta T(3403L - 2304x_3)}{216096}
 \end{aligned}$$

delle aste verticali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{BE}(x_3) &= -\frac{25\alpha\Delta T(576L + 2635x_3)}{162072} \\
 u_3^{BE}(x_3) &= \frac{25\alpha\Delta T(1945L + 1944x_3)}{162072} \\
 u_2^{CF}(x_3) &= \frac{25\alpha\Delta T(576L - 1867x_3)}{162072} \\
 u_3^{CF}(x_3) &= -\frac{25\alpha\Delta T(2557L - 1944x_3)}{162072}
 \end{aligned} \tag{12.59}$$

e delle aste inclinate:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AE}(x_3) &= -\frac{85075\alpha\Delta T x_3}{162072} \\
 u_3^{AE}(x_3) &= 0 \\
 u_2^{BF}(x_3) &= -\frac{5\alpha\Delta T(9508L - 9145x_3)}{162072} \\
 u_3^{BF}(x_3) &= \frac{5\alpha\Delta T(1177L - 2700x_3)}{54024} \\
 u_2^{DF}(x_3) &= -\frac{27475\alpha\Delta T x_3}{162072} \\
 u_3^{DF}(x_3) &= 0 \\
 u_2^{CE}(x_3) &= \frac{\alpha\Delta T(42500L - 10179x_3)}{162072} \\
 u_3^{CE}(x_3) &= \frac{-16625L\alpha\Delta T + 40524\alpha\Delta T x_3}{54024}
 \end{aligned} \tag{12.60}$$

I corrispondenti sforzi normali si ottengono per derivazione, utilizzando all'uopo le (12.36–12.38) e la (12.57):

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= n^{CD}(x_3) = -\frac{3000EA\alpha\Delta T}{2251} \\
 n^{BC}(x_3) &= \frac{6000EA\alpha\Delta T}{2251} \\
 n^{EF}(x_3) &= \frac{9000EA\alpha\Delta T}{2251} \\
 n^{BE}(x_3) &= n^{CF}(x_3) = \frac{6750EA\alpha\Delta T}{2251} \\
 n^{AE}(x_3) &= n^{DF}(x_3) = 0 \\
 n^{BF}(x_3) &= n^{CE}(x_3) = -\frac{11250EA\alpha\Delta T}{2251}
 \end{aligned} \tag{12.61}$$

Le reazioni vincolari possono calcolarsi a partire dagli equilibri dei nodi A e

D :

$$\begin{aligned}
 R_{Ah} &= -n^{AB} - n^{AE} \cos(\alpha) = -\frac{3000}{2251} EA\alpha\Delta T \\
 R_{Dh} &= n^{CD} + n^{DF} \cos(\alpha) = \frac{3000}{2251} EA\alpha\Delta T \\
 R_{Av} &= n^{AE} \sin(\alpha) = 0 \\
 R_{Dv} &= n^{DF} \sin(\alpha) = 0
 \end{aligned}
 \tag{12.62}$$

Applicazione numerica

Si può porre, come nel testo di riferimento:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{75000} C^{-1} \\
 \Delta T &= 40C
 \end{aligned}
 \tag{12.63}$$

$$EA = 2 \times 10^5 Nmm^{-2} = 2 \times 10^5 \frac{kN}{10^3} 10^2 cm^{-2} = 2 \times 10^4 kNcm^{-2}$$

ottenendo le reazioni:

$$R_{Ah} = -R_{Dh} = 14.2159 \tag{12.64}$$

coincidenti — a meno di errori di approssimazione — con quelli di riferimento.

Capitolo 13

Travatura reticolare su ritti

Si vuole studiare la struttura in Figura 13.1, determinandone la deformata ed i diagrammi delle caratteristiche.

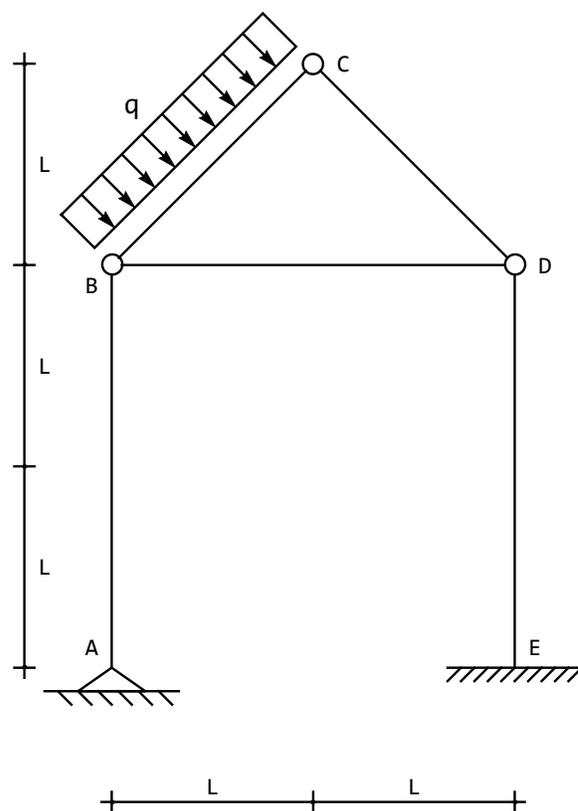


Figura 13.1: Una travatura reticolare triangolare poggiate su piedritti

La struttura è costituita da una classica maglia chiusa a tre cerniere, vincolata al suolo tramite un ritto appoggiato al piede, a sinistra, ed un ritto incastrato al piede, a destra. La struttura soddisfa il requisito di isostaticità, in quanto costituita da cinque tratti ($t = 5$) collegati al suolo da un appoggio ($s = 2$) ed un incastro ($s = 3$). I vincoli interni sono invece una cerniera semplice in C ($s = 2$) e due cerniere triple ($s = 4$). Si ha quindi $3t - s = 0$.

13.1 La deduzione delle caratteristiche

Come detto, la struttura è isostatica, quindi le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione interna possono calcolarsi sfruttando le equazioni di equilibrio. Per quanto riguarda i momenti, può asserirsi a priori che sui tratti AB , BD e DB essi saranno nulli (comportamento *a pendolo*), per cui potrà scriversi:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= 0 \\ m^{BC}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 - q \frac{x_3^2}{2} \\ m^{BD}(x_3) &= 0 \\ m^{DC}(x_3) &= 0 \\ m^{ED}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \end{aligned} \tag{13.1}$$

Gli sforzi assiali saranno invece costanti, e pari a:

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= c_0 \\ n^{BC}(x_3) &= d_0 \\ n^{BD}(x_3) &= e_0 \\ n^{DC}(x_3) &= f_0 \\ n^{ED}(x_3) &= g_0 \end{aligned} \tag{13.2}$$

Le nove costanti di integrazione si calcolano imponendo altrettante equazioni di equilibrio nei nodi:

— in A non si può scrivere alcuna equazione, in quanto il momento flettente è già stato ipotizzato nullo a priori. In B , invece, occorre annullare il momento flettente lungo BC , ed imporre l'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale del nodo:

$$\begin{aligned} m^{BC}(0) &= 0 \\ n^{BD}(0) + n^{BC}(0) \cos(\alpha) + t^{BC}(0) \sin(\alpha) &= 0 \\ n^{AB}(2L) - n^{BC}(0) \sin(\alpha) + t^{BC}(0) \cos(\alpha) &= 0 \end{aligned} \tag{13.3}$$

Si noti che si sono considerati nulli i tagli lungo i tratti AB e BD .

— in C , occorre annullare il momento flettente lungo BC , ed imporre l'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale del nodo:

$$\begin{aligned} m^{BC}(\sqrt{2}L) &= 0 \\ n^{BC}(\sqrt{2}L) &= 0 \\ t^{BC}(\sqrt{2}L) - n^{DC}(\sqrt{2}L) &= 0 \end{aligned} \quad (13.4)$$

— in D , infine, occorre annullare il momento flettente lungo ED , ed imporre l'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale del nodo:

$$\begin{aligned} m^{ED}(2L) &= 0 \\ -n^{BD}(2L) + n^{DC}(0) \cos(\alpha) - t^{ED}(2L) &= 0 \\ n^{ED}(2L) - n^{DC}(0) \sin(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (13.5)$$

Si ottengono facilmente le costanti di integrazione, giungendo ai momenti flettenti su AB e su ED :

$$\begin{aligned} m^{BC}(x_3) &= \frac{1}{2}qz(\sqrt{2}L - z) \\ m^{ED}(x_3) &= qL(z - 2L) \end{aligned} \quad (13.6)$$

agli sforzi di taglio:

$$\begin{aligned} t^{BC}(x_3) &= q\frac{L}{\sqrt{2}} - qz \\ t^{ED}(x_3) &= qL \end{aligned} \quad (13.7)$$

ed agli sforzi normali:

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= -\frac{qL}{2} \\ n^{BC}(x_3) &= 0 \\ n^{BD}(x_3) &= -\frac{qL}{2} \\ n^{DC}(x_3) &= -\frac{qL}{\sqrt{2}} \\ n^{ED}(x_3) &= -\frac{qL}{2} \end{aligned} \quad (13.8)$$

Infine, le reazioni esterne sono pari a :

$$\begin{aligned} R_{Av} &= n^{AB}(0) = -\frac{qL}{2} \\ R_{Ev} &= n^{ED}(0) = -\frac{qL}{2} \\ R_{Eh} &= -t^{ED}(0) = -qL \\ \mathcal{M}_{rE} &= -m^{ED}(0) = 2qL^2 \end{aligned} \quad (13.9)$$

Il diagramma del momento è riportato in Figura 13.2.

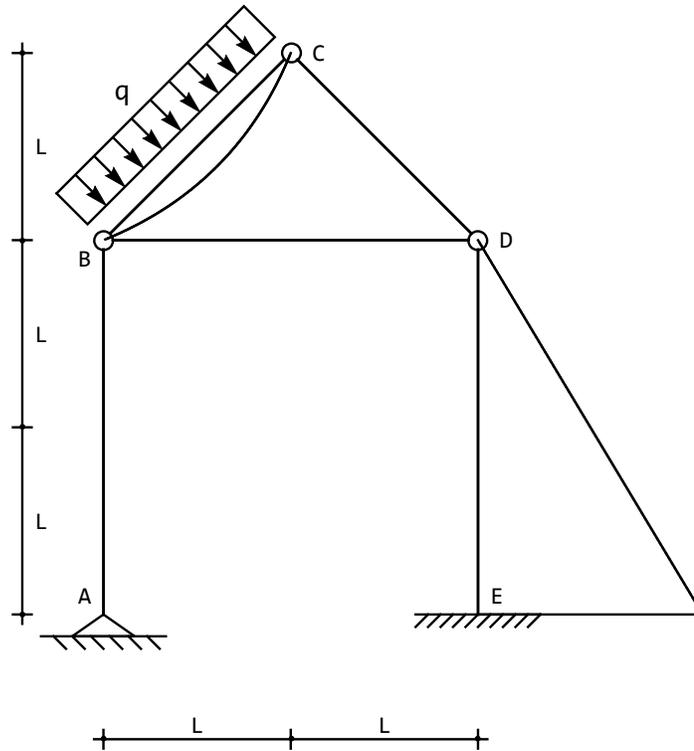


Figura 13.2: Il diagramma del momento flettente

13.2 La deduzione della deformata

Per il calcolo della deformata si può procedere in diversi modi.

Si può scegliere di trattare i cinque tratti come cinque travi collegate da cerniere, ed ipotizzare una deformaabilità assiale finita. Si scrivono quindi cinque linee elastiche flessionali cubiche (aggiungendo il termine quartico dovuto al carico sul tratto BC) e cinque linee elastiche assiali lineari, insieme con le usuali trenta equazioni di equilibrio e congruenza. Alla fine del procedimento, se si vuole, si ottengono i risultati per aste assialmente indeformabili, portando EA ad infinito.

Si può ipotizzare *a priori* un comportamento a pendolo delle aste AB , BD e CD , scrivendo per esse linee elastiche flessionali di tipo lineare, e di conseguenza scrivere le equazioni ai limiti senza considerare momenti e tagli lungo queste aste.

Infine, si può anche ipotizzare *a priori* che le linee elastiche assiali siano costanti, ossia che esse siano assialmente inestensibili; in questo caso gli sforzi normali non possono ricavarsi dagli spostamenti, ma vanno trattati come incognite indipendenti.

Scegliendo quest'ultimo approccio, si scriverà dunque, per le linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 + q \frac{x_3^4}{24EI} \\
 u_2^{BD}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 \\
 u_2^{DC}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\
 u_2^{ED}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3
 \end{aligned} \tag{13.10}$$

mentre le linee elastiche assiali si pongono nella forma :

$$\begin{aligned}
 u_3^{AB}(x_3) &= r_0 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= s_0 \\
 u_3^{BD}(x_3) &= t_0 \\
 u_3^{DC}(x_3) &= u_0 \\
 u_3^{ED}(x_3) &= v_0
 \end{aligned} \tag{13.11}$$

Si noti che si è rinunciato ad imporre *a priori* i vincoli assiali, che imporrebbero l'annullarsi della due linee assiali su AB ed ED . Si hanno quindi diciannove costanti di integrazione, cui vanno aggiunti i cinque sforzi normali incogniti nelle cinque aste. Corrispondentemente, vanno scritte le seguenti condizioni ai limiti:

— nell'appoggio in A , si annulleranno ambedue le componenti di spostamento:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 u_3^{AB}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{13.12}$$

— nella cerniera tripla in B si hanno le condizioni di congruenza tra i tratti AB e BD :

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(2L) &= u_3^{BD}(0) \\
 u_3^{AB}(2L) &= -u_2^{BD}(0)
 \end{aligned} \tag{13.13}$$

nonchè le condizioni di congruenza tra l'asta BC e l'asta BD :

$$\begin{aligned}
 u_3^{BD}(0) &= u_3^{BC}(0) \cos(\alpha) + u_2^{BC}(0) \sin(\alpha) \\
 u_2^{BD}(0) &= -u_3^{BC}(0) \sin(\alpha) + u_2^{BC}(0) \cos(\alpha)
 \end{aligned} \tag{13.14}$$

L'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale impone che sia:

$$\begin{aligned}
 n^{BD} + n^{BC} \cos(\alpha) + t^{BC}(0) \sin(\alpha) &= 0 \\
 n^{AB} - n^{BC} \sin(\alpha) + t^{BC}(0) \cos(\alpha) &= 0
 \end{aligned} \tag{13.15}$$

Ovviamente in queste equazioni non compaiono i tagli lungo AB e lungo BD , presupposti nulli *a priori*. Nella stessa ottica, l'unica equazione di equilibrio alla rotazione nel nodo B riguarderà l'asta BC :

$$m^{BC}(0) = 0 \quad (13.16)$$

— nella cerniera semplice in C si hanno le condizioni di congruenza tra i tratti BC e DC :

$$\begin{aligned} u_3^{BC}(\sqrt{2}L) &= u_2^{DC}(\sqrt{2}L) \\ u_2^{BC}(\sqrt{2}L) &= -u_3^{DC}(\sqrt{2}L) \end{aligned} \quad (13.17)$$

nonchè le tre equazioni di equilibrio, che in questo caso devono tener conto dell'annullarsi preventivo del taglio e del momento in DC :

$$\begin{aligned} n^{BC} &= 0 \\ t^{BC}(\sqrt{2}L) - n^{DC} &= 0 \\ m^{BC}(\sqrt{2}L) &= 0 \end{aligned} \quad (13.18)$$

— nella cerniera tripla in D si hanno condizioni simili a quelle già discusse in B . Si deve infatti imporre la congruenza tra i tratti ED e BD :

$$\begin{aligned} u_2^{ED}(2L) &= u_3^{BD}(2L) \\ u_3^{ED}(2L) &= -u_2^{BD}(2L) \end{aligned} \quad (13.19)$$

nonchè le condizioni di congruenza tra l'asta DC e l'asta BD :

$$\begin{aligned} u_3^{BD}(2L) &= -u_3^{DC}(0) \sin(\alpha) + u_2^{DC}(0) \cos(\alpha) \\ u_2^{BD}(2L) &= -u_3^{DC}(0) \cos(\alpha) + u_2^{DC}(0) \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (13.20)$$

L'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale impone che sia :

$$\begin{aligned} -n^{BD} - n^{DC} \cos(\alpha) - t^{ED}(2L) &= 0 \\ n^{ED} - n^{DC} \sin(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (13.21)$$

Infine, l'unica equazione di equilibrio alla rotazione nel nodo D riguarderà l'asta ED :

$$m^{ED}(2L) = 0 \quad (13.22)$$

— il nodo E è incastrato, e quindi si annulleranno gli spostamenti e le rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{ED}(0) &= 0 \\ u_3^{ED}(0) &= 0 \\ \phi^{ED}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (13.23)$$

Risolvendo le ventiquattro equazioni si ottengono le linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{4qL^3}{3EI}x_3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{4\sqrt{2}}{3EI}qL^4 + \frac{qL^3}{6\sqrt{2}EI}x_3 - \frac{qL}{6\sqrt{2}EI}x_3^3 + \frac{q}{24EI}x_3^4 \\
 u_2^{DB}(x_3) &= 0 \\
 u_2^{DC}(x_3) &= \frac{4\sqrt{2}qL^4}{3EI} \\
 u_2^{ED}(x_3) &= \frac{qL(6L-x_3)x_3^2}{6EI}
 \end{aligned}
 \tag{13.24}$$

e le linee elastiche assiali:

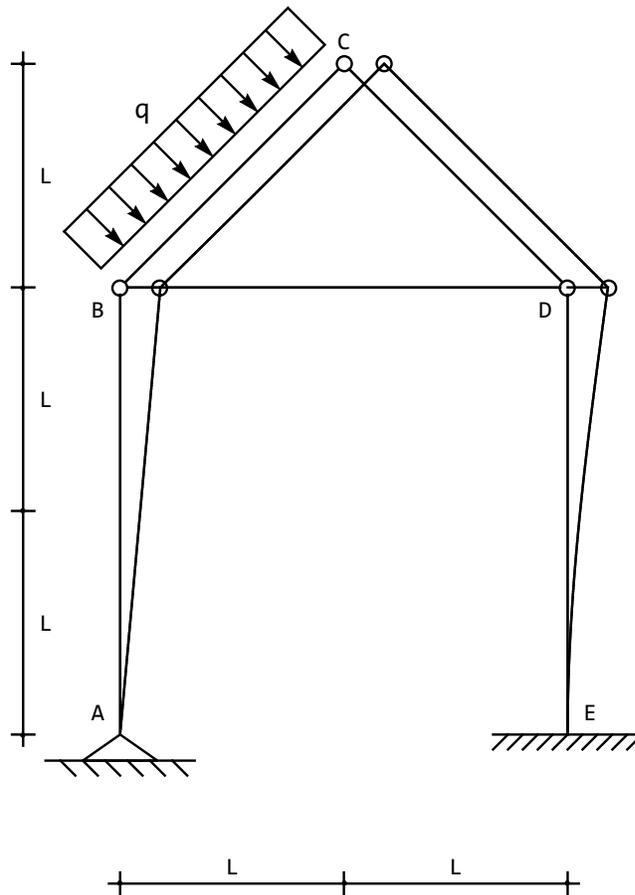


Figura 13.3: La deformata della struttura

$$\begin{aligned}u_3^{AB}(x_3) &= 0 \\u_3^{BC}(x_3) &= \frac{4\sqrt{2}qL^4}{3EI} \\u_3^{DB}(x_3) &= \frac{8qL^4}{3EI} \\u_3^{DC}(x_3) &= -\frac{4\sqrt{2}qL^4}{3EI} \\u_3^{ED}(x_3) &= 0\end{aligned}\tag{13.25}$$

La deformata è riportata in Figura 13.3. La maglia triangolare subisce uno spostamento orizzontale pari a:

$$\delta = \frac{8qL^4}{3EI}\tag{13.26}$$

La deformata del tratto BC , pur sembrando nel grafico una retta, è in realtà una curva cubica, come potrebbe evidenziarsi disegnando la deformata per valori irrealistici del carico.

Capitolo 14

Maglia triangolare

Si vuole conoscere la deformata della struttura in Figura 14.1, insieme alle caratteristiche della sollecitazione interna.

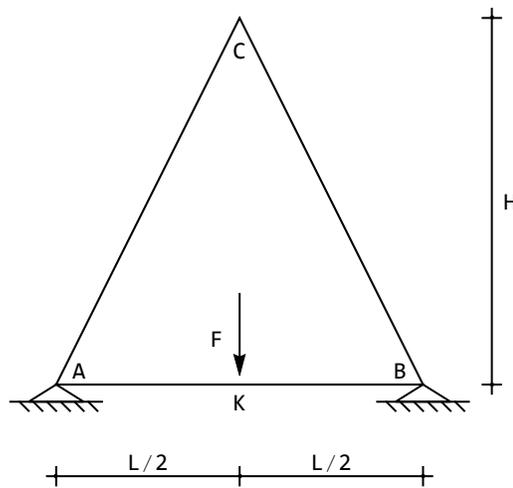


Figura 14.1: Una maglia chiusa triangolare: carico simmetrico

Si divide il telaio in quattro tratti, e per ciascuno di essi si ipotizza una linea elastica flessionale cubica:

$$\begin{aligned}u_2^{AK}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\u_2^{KB}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\u_2^{BC}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\u_2^{AC}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3\end{aligned}\tag{14.1}$$

Assumendo una rigidezza assiale infinita, le linee elastiche assiali risultano identicamente nulle. Si dovranno scrivere quindi sedici equazioni ai limiti nei quattro nodi:

— nell'appoggio in A si annullano gli spostamenti delle due aste concorrenti, mentre le rotazioni sono uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{AK}(0) &= 0 \\ u_2^{AC}(0) &= 0 \\ \phi^{AK}(0) &= \phi^{AC}(0) \end{aligned} \quad (14.2)$$

per l'equilibrio alla rotazione del nodo dovrà anche aversi:

$$m^{AK}(0) + m^{AC}(0) = 0 \quad (14.3)$$

— nel nodo in K si hanno le condizioni di congruenza tra le due aste:

$$\begin{aligned} u_2^{AK}\left(\frac{L}{2}\right) &= u_2^{KB}(0) \\ \phi^{AK}\left(\frac{L}{2}\right) &= \phi^{KB}(0) \end{aligned} \quad (14.4)$$

e le condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} -t^{AK}\left(\frac{L}{2}\right) + t^{KB}(0) + F &= 0 \\ -m^{AK}\left(\frac{L}{2}\right) + m^{KB}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (14.5)$$

— nell'appoggio in B hanno condizioni simili a quelle già analizzate in A :

$$\begin{aligned} u_2^{KB}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\ u_2^{BC}(0) &= 0 \\ \phi\left(\frac{L}{2}\right) &= \phi^{BC} \end{aligned} \quad (14.6)$$

e per l'equilibrio alla rotazione del nodo dovrà anche aversi:

$$-m^{KB}\left(\frac{L}{2}\right) + m^{BC}(0) = 0 \quad (14.7)$$

— nel nodo in C , la congruenza impone che le componenti orizzontali e verticali degli spostamenti delle due aste concorrenti siano uguali, e quindi, in ipotesi di rigidezza assiale infinita, gli spostamenti risultano nulli:

$$\begin{aligned} u_2^{AC}(L_d) &= 0 \\ u_2^{BC}(L_d) &= 0 \\ \phi^{AC}(L_d) &= \phi^{BC}(S) \end{aligned} \quad (14.8)$$

dove L_d é la lunghezza dei tratti inclinati:

$$L_d = \sqrt{\frac{L^2}{4} + H^2} \quad (14.9)$$

Infine, l'equilibrio del nodo alla rotazione detta:

$$-m^{AC}(L_d) - m^{BC}(L_d) = 0 \quad (14.10)$$

Si ottengono facilmente le costanti di integrazione, e quindi gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} u_2^{AK}(x_3) &= \frac{F}{48EI} \frac{3L^2 L_d + 6L^2 x_3 - 4(2L + L_d) x_3^2}{2L + L_d} x_3 \\ u_2^{KB}(x_3) &= \frac{F}{96EI} \frac{L^3(L + 2L_d) - 12L(L + L_d)x_3^2 + 8(2L + L_d)x_3^3}{2L + L_d} \\ u_2^{BC}(x_3) &= -u_2^{AC}(x_3) = -\frac{FL^2}{16EIL_d} \frac{L^2(L_d - x_3)^2 x_3}{2L + L_d} \end{aligned} \quad (14.11)$$

La deformata è riportata in Figura 14.2, e l'abbassamento in corrispondenza della forza sarà pari a:

$$u_{2K} = u_2^{KB}(0) = \frac{(1 + \sqrt{5})}{48(4 + \sqrt{5})} \frac{FL^3}{EI} \quad (14.12)$$

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{AK}(x_3) &= -\frac{F}{4} \frac{L^2 - 2(2L + L_d)x_3}{2L + L_d} \\ m^{KB}(x_3) &= \frac{F}{4} \frac{L(L + L_d) - 2(2L + L_d)x_3}{2L + L_d} \\ m^{BC}(x_3) &= -m^{AC}(x_3) = -\frac{FL^2}{8L_d} \frac{2L_d - 3x_3}{2L + L_d} \end{aligned} \quad (14.13)$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 14.3.

Gli sforzi di taglio si ottengono derivando i momenti:

$$\begin{aligned} t^{AK}(x_3) &= \frac{F}{2} \\ t^{KB}(x_3) &= -\frac{F}{2} \\ t^{BC}(x_3) &= -t^{AC}(x_3) = \frac{3FL^2}{16LL_d + 8L_d^2} \end{aligned} \quad (14.14)$$

Gli sforzi normali sul tratto AB sono nulli, mentre sulle due aste inclinate si ottengono imponendo l'equilibrio del nodo in C :

$$\begin{aligned} -n^{AC}(S) \cos(\alpha) - t^{AC}(S) \sin(\alpha) + n^{BC}(S) \cos(\alpha) - t^{BC}(S) \sin(\alpha) &= 0 \\ n^{AC}(S) \sin(\alpha) - t^{AC}(S) \cos(\alpha) + n^{BC}(S) \sin(\alpha) + t^{BC}(S) \cos(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (14.15)$$

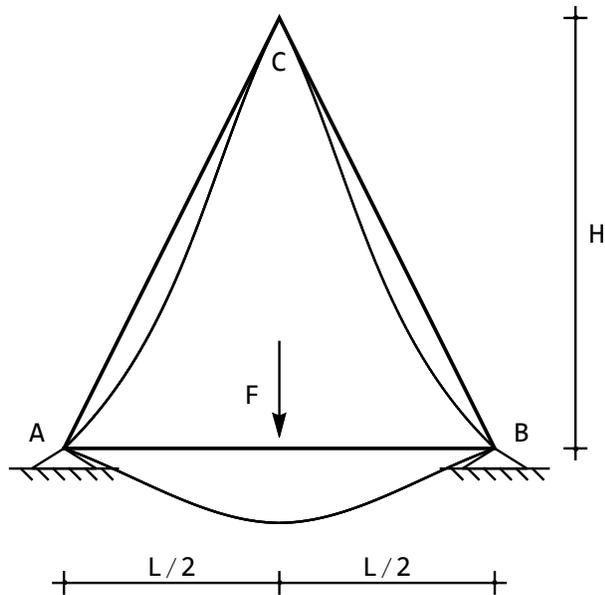


Figura 14.2: La deformata della maglia chiusa triangolare con carico simmetrico

dove l'angolo α è l'angolo di cui sono inclinate le aste AC e BC rispetto all'orizzontale:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2H}{L}\right) \quad (14.16)$$

Ne seguono gli sforzi normali:

$$n^{AC}(x_3) = n^{BC}(x_3) = -\frac{3FLH}{16LL_d + 8L_d^2} \quad (14.17)$$

Le reazioni esterne sono fornite dall'equilibrio dei nodi A e B :

$$\begin{aligned} R_{Av} &= n^{AC} \sin(\alpha) - t^{AC} \cos(\alpha) - t^{AK} = -\frac{F}{2} \\ R_{Ah} &= -n^{AC} \cos(\alpha) - t^{AC} \sin(\alpha) = \frac{3FLH \sqrt{1 + \frac{4L^2}{H^2}}}{16LL_d + 8L_d^2} \\ R_{Bv} &= n^{BC} \sin(\alpha) + t^{BC} \cos(\alpha) - t^{KB} = -\frac{F}{2} \\ R_{Bh} &= n^{BC} \cos(\alpha) - t^{BC} \sin(\alpha) = -\frac{3FLH \sqrt{1 + \frac{4L^2}{H^2}}}{16LL_d + 8L_d^2} \end{aligned} \quad (14.18)$$

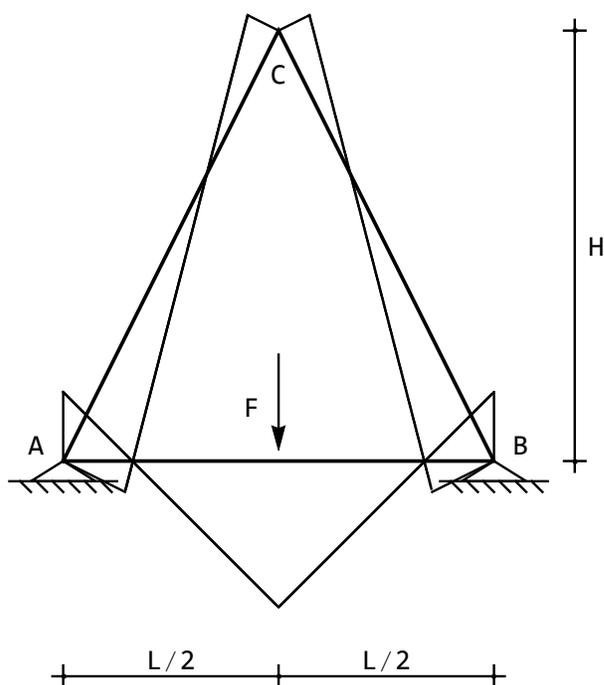


Figura 14.3: Il momento sulla maglia chiusa triangolare con carico simmetrico

Una condizione di carico non simmetrica

Si vuole conoscere la deformata della struttura in Figura 14.4, insieme alle caratteristiche della sollecitazione interna.

Come nel caso precedente, si possono ipotizzare linee elastiche flessionali cubiche per ciascuno dei quattro tratti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_2^{AK}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
 u_2^{KC}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3
 \end{aligned} \tag{14.19}$$

Se poi i tratti sono assialmente inestensibili, gli spostamenti assiali saranno identicamente nulli, ed il carrello in A si comporta come un appoggio. Nel seguito, accanto alle sedici costanti di integrazione incognite, si introdurranno le quattro incognite addizionali n^{AB} , n^{BC} , n^{AK} ed n^{KC} , in modo da poter scrivere le condizioni di equilibrio nei nodi insieme alle condizioni di congruenza sugli spostamenti trasversali e le rotazioni. In dettaglio si avrà:

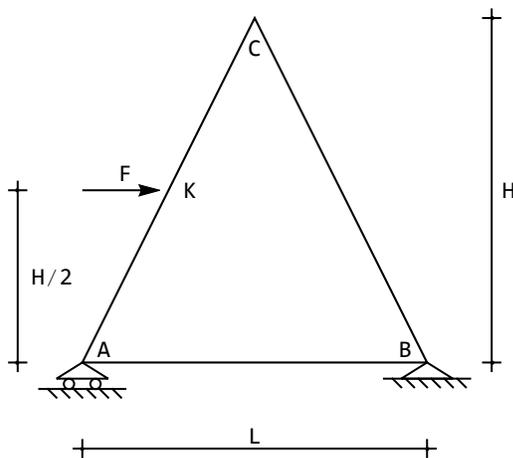


Figura 14.4: La maglia chiusa triangolare con carico non simmetrico

— nel carrello in A si annulla la componente verticale di spostamento, e si garantisce la continuità della rotazione:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(0) &= 0 \\ u_2^{AK}(0) &= 0 \\ \phi^{AB}(0) &= \phi^{AK}(0) \end{aligned} \quad (14.20)$$

Infine, si deve equilibrare il nodo alla traslazione orizzontale ed alla rotazione:

$$\begin{aligned} m^{AB}(0) + m^{AK}(0) &= 0 \\ n^{AK} \cos(\alpha) + t^{AK}(0) \sin(\alpha) + n^{AB} &= 0 \end{aligned} \quad (14.21)$$

— nell'appoggio in B si annullano ambedue le componenti di spostamento, per ambedue le aste che concorrono nel nodo. Inoltre, le rotazioni dovranno essere uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(L) &= 0 \\ u_2^{BC}(0) &= 0 \\ \phi^{AB}(L) &= \phi^{BC}(0) \end{aligned} \quad (14.22)$$

L'equilibrio alla rotazione impone poi:

$$-m^{AB}(L) + m^{BC}(0) = 0 \quad (14.23)$$

— nel nodo in C , la congruenza impone che gli spostamenti trasversali delle due aste concorrenti siano nulli, così come uguali saranno le due rotazioni:

$$\begin{aligned} v^{KC}(L_1) &= 0 \\ v^{BC}(2L_1) &= 0 \\ \phi^{KC}(L_1) &= \phi^{BC}(2L_1) \end{aligned} \quad (14.24)$$

dove:

$$L_1 = \sqrt{\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2} \quad (14.25)$$

è la lunghezza del tratto AK (e KC). Analogamente, l'equilibrio del nodo alla traslazione orizzontale e verticale, ed alla rotazione, detta:

$$\begin{aligned} -n^{KC} \cos(\alpha) - t^{KC}(L_1) \sin(\alpha) + n^{BC} \cos(\alpha) - t^{BC}(2L_1) \sin(\alpha) &= 0 \\ n^{KC} \sin(\alpha) - t^{KC}(L_1) \cos(\alpha) + n^{BC} \sin(\alpha) + t^{BC}(2L_1) \cos(\alpha) &= 0 \\ -m^{KC}(L_1) - m^{BC}(2L_1) &= 0 \end{aligned} \quad (14.26)$$

— nel punto K , dove agisce la forza, si deve imporre la congruenza degli spostamenti e delle rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{AK}(L_1) &= u_2^{KC}(0) \\ \phi^{AK}(L_1) &= \phi^{KC}(0) \end{aligned} \quad (14.27)$$

mentre l'equilibrio del nodo permette di scrivere tre equazioni:

$$\begin{aligned} -m^{AK}(L_1) + m^{KC}(0) &= 0 \\ -n^{AK} + n^{KC} + F_t &= 0 \\ -t^{AK}(L_1) + t^{KC}(0) + F_n &= 0 \end{aligned} \quad (14.28)$$

dove si sono introdotte le componenti tangenziali e normali della forza:

$$\begin{aligned} F_t &= F \cos(\alpha) \\ F_n &= F \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (14.29)$$

e si sono imposte le condizioni di equilibrio rispetto alle direzioni assiali e tangenziali.

Si hanno quindi venti equazioni, che risolte forniscono le costanti di integrazione ed i quattro sforzi assiali. Gli spostamenti trasversali sono pari a:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{F_n L_1^2}{16EILD} ((L - x_3) x_3 (3L(L + 2L_1) - 4(L + L_1) x_3)) \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{F_n}{64EID} ((2L_1 - x_3) x_3 (2L(L - 2L_1)L_1 + (L^2 + 8LL_1 + 4L_1^2) x_3)) \\ u_2^{AK}(x_3) &= \frac{F_2 x_3}{192EID} (36LL_1^2(L + 2L_1) + 12L_1^2(7L + 10L_1) x_3 - \\ &\quad (13L^2 + 80LL_1 + 76L_1^2) x_3^2) \\ u_2^{KC}(x_3) &= \frac{F_n(L_1 - x_3)}{192EID} (L_1^2(23L^2 + 76LL_1 + 44L_1^2) + \\ &\quad 4L_1(5L^2 + 19LL_1 + 14L_1^2) x_3 - (19L^2 + 80LL_1 + 52L_1^2) x_3^2) \end{aligned} \quad (14.30)$$

con:

$$D = (L + L_1)(L + 4L_1) \quad (14.31)$$

Gli sforzi assiali sono calcolati insieme alle costanti di integrazione, e valgono:

$$\begin{aligned} n^{AB} &= -\frac{3F}{32} \frac{7L + 8L_1}{L + L_1} \\ n^{AK} &= \frac{3F_t}{32D} (7L^2 + 36LL_1 + 32L_1^2) + \frac{F_n \tan(\alpha)}{8D} (2L^2 + 7LL_1 + 5L_1^2) \\ n^{KC} &= -\frac{F_t}{32D} (11L^2 + 52LL_1 + 32L_1^2) + \frac{F_n \tan(\alpha)}{8D} (2L^2 + 7LL_1 + 5L_1^2) \\ n^{BC} &= -\frac{F_t}{32D} (11L^2 + 52LL_1 + 32L_1^2) - \frac{F_n \tan(\alpha)}{8D} (2L^2 + 7LL_1 + 5L_1^2) \end{aligned} \quad (14.32)$$

La deformata si presenta come in Figura 14.5.

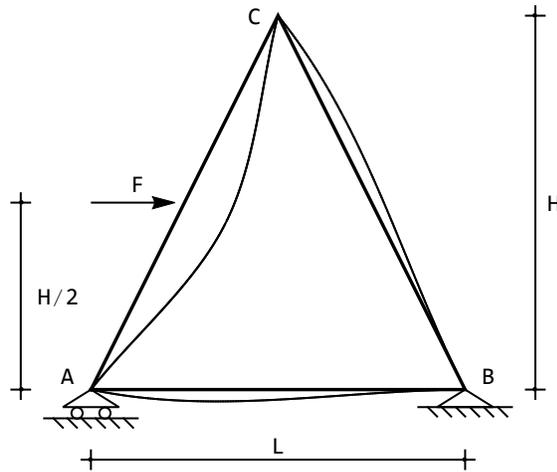


Figura 14.5: La deformata della maglia chiusa triangolare con carico non simmetrico

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= \frac{F_n L_1^2}{8LD} (L(7L + 10L_1) - 12(L + L_1)x_3) \\ m^{BC}(x_3) &= \frac{F_n}{32D} (-4L_1^2(5L + 2L_1) + 3(L^2 + 8LL_1 + 4L_1^2)x_3) \\ m^{AK}(x_3) &= \frac{F_n}{32D} (-4L_1^2(7L + 10L_1) + (13L^2 + 80LL_1 + 76L_1^2)x_3) \\ m^{KC}(x_3) &= \frac{F_n}{32D} (L_1(13L^2 + 52LL_1 + 36L_1^2) - \\ &\quad (19L^2 + 80LL_1 + 52L_1^2)x_3) \end{aligned} \quad (14.33)$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 14.6.

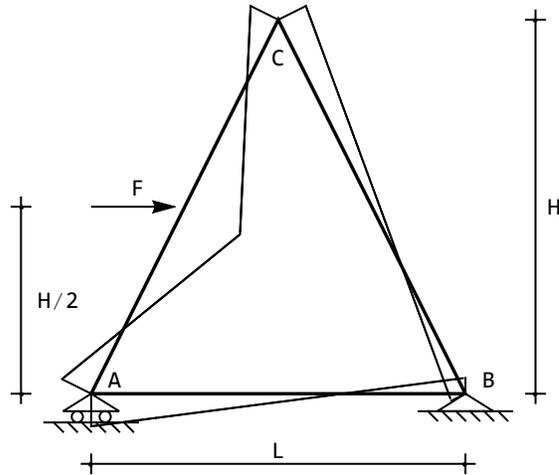


Figura 14.6: Il momento sulla maglia chiusa triangolare con carico non simmetrico

Gli sforzi di taglio si ottengono derivando i momenti:

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= -\frac{3F_n L_1^2}{2L^2 + 8LL_1} \\
 t^{BC}(x_3) &= \frac{3F_n}{32D} (L^2 + 8LL_1 + 4L_1^2) \\
 t^{AK}(x_3) &= \frac{F_n}{32D} (13L^2 + 80LL_1 + 76L_1^2) \\
 t^{KC}(x_3) &= -\frac{F_n}{32D} (19L^2 + 80LL_1 + 52L_1^2)
 \end{aligned} \tag{14.34}$$

Infine, le reazioni dei vincoli esterni possono calcolarsi immediatamente, in quanto la struttura è esternamente isostatica. Si ha comunque:

$$\begin{aligned}
 R_{Av} &= n^{AK} \sin(\alpha) - t^{AK} \cos(\alpha) - t^{AB} = \frac{FH}{2L} \\
 R_{Bv} &= n^{BC} \sin(\alpha) + t^{BC} \cos(\alpha) + t^{AB} = -\frac{FH}{2L} \\
 R_{Bh} &= n^{BC} \cos(\alpha) - t^{BC} \sin(\alpha) + n^{AB} = -F
 \end{aligned} \tag{14.35}$$

14.1 L'utilizzo del principio dei lavori virtuali

La struttura in esame è una maglia chiusa senza sconnessioni, quindi tre volte iperstatica. Inserendo tre cerniere nei tre nodi, si giunge quindi al sistema isostatico equivalente di Figura 14.7.

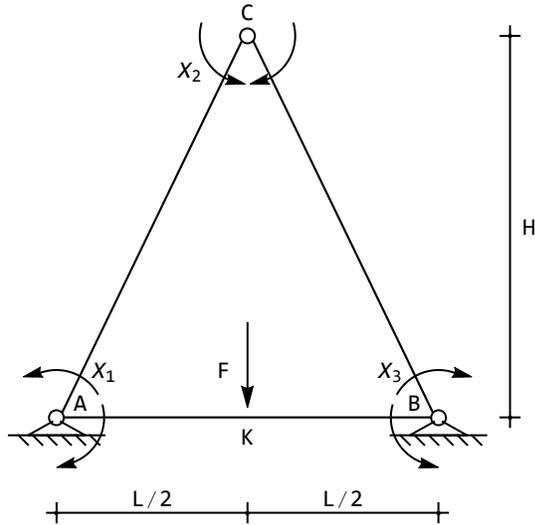


Figura 14.7: Il sistema isostatico equivalente

Su di esso, si scriveranno tre espressioni del principio dei lavori virtuali, utilizzando come sistemi di forze virtuali i tre schemi di Figura 14.9:

$$\int_s M_i \frac{M}{EI} ds = 0 \quad i=1,2,3 \quad (14.36)$$

I momenti M_i sono riportati nella stessa Figura 14.9, mentre M può calcolarsi, sul sistema isostatico equivalente, attraverso il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3 \quad (14.37)$$

Ne seguono le tre equazioni nelle tre incognite iperstatiche:

$$\begin{aligned} \left(\int_s M_1^2 ds \right) X_1 + \left(\int_s M_1 M_2 ds \right) X_2 + \left(\int_s M_1 M_3 ds \right) X_3 &= - \left(\int_s M_1 M_0 ds \right) \\ \left(\int_s M_2 M_1 ds \right) X_1 + \left(\int_s M_2^2 ds \right) X_2 + \left(\int_s M_2 M_3 ds \right) X_3 &= - \left(\int_s M_2 M_0 ds \right) \\ \left(\int_s M_3 M_1 ds \right) X_1 + \left(\int_s M_3 M_2 ds \right) X_2 + \left(\int_s M_3^2 ds \right) X_3 &= - \left(\int_s M_3 M_0 ds \right) \end{aligned} \quad (14.38)$$

Non resta che tracciare il diagramma del momento M_0 sulla struttura isostatica caricata dalla sola forza F , come riportato in Figura 14.8, ed esprimere i momenti in modo analitico. Sarà quindi, facilmente, sullo schema di trave appoggiata:

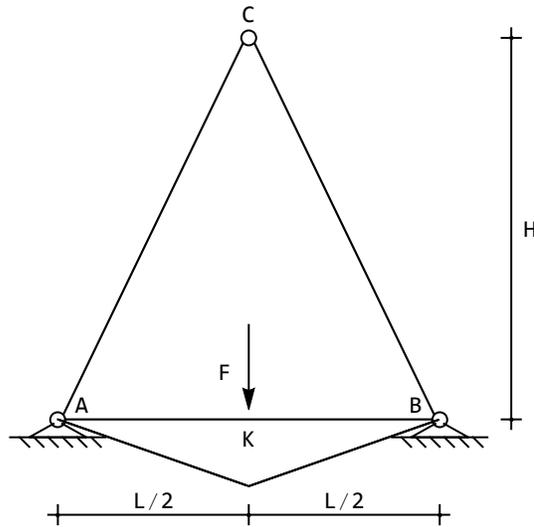


Figura 14.8: Il sistema isostatico caricato dalla forza

$$\begin{aligned} m_0^{AK}(x_3) &= \frac{F}{2}x_3 \\ m_0^{KB}(x_3) &= \frac{FL}{4} \left(1 - 2\frac{x_3}{L}\right) \end{aligned} \quad (14.39)$$

mentre il diagramma M_1 è scrivibile come:

$$\begin{aligned} m_1^{AK}(x_3) &= 1 - \frac{x_3}{L} \\ m_1^{KB}(x_3) &= \frac{1}{2} - 2\frac{x_3}{L} \\ m_1^{AC}(x_3) &= -\left(1 - \frac{x_3}{L_1}\right) \end{aligned} \quad (14.40)$$

Si noti che, ai fini della successiva integrazione, si è espresso il momento M_1 per i due tratti separati AK e KB . Analogamente, si avrà, per gli altri due diagrammi:

$$\begin{aligned} m_3^{AK}(x_3) &= \frac{x_3}{L} \\ m_3^{KB}(x_3) &= \frac{1}{2} + \frac{x_3}{L} \\ m_3^{CB}(x_3) &= -\frac{x_3}{L_1} \end{aligned} \quad (14.41)$$

$$\begin{aligned} m_2^{AC}(x_3) &= \frac{x_3}{L_1} \\ m_2^{CB}(x_3) &= \left(1 - \frac{x_3}{L_1}\right) \end{aligned} \quad (14.42)$$

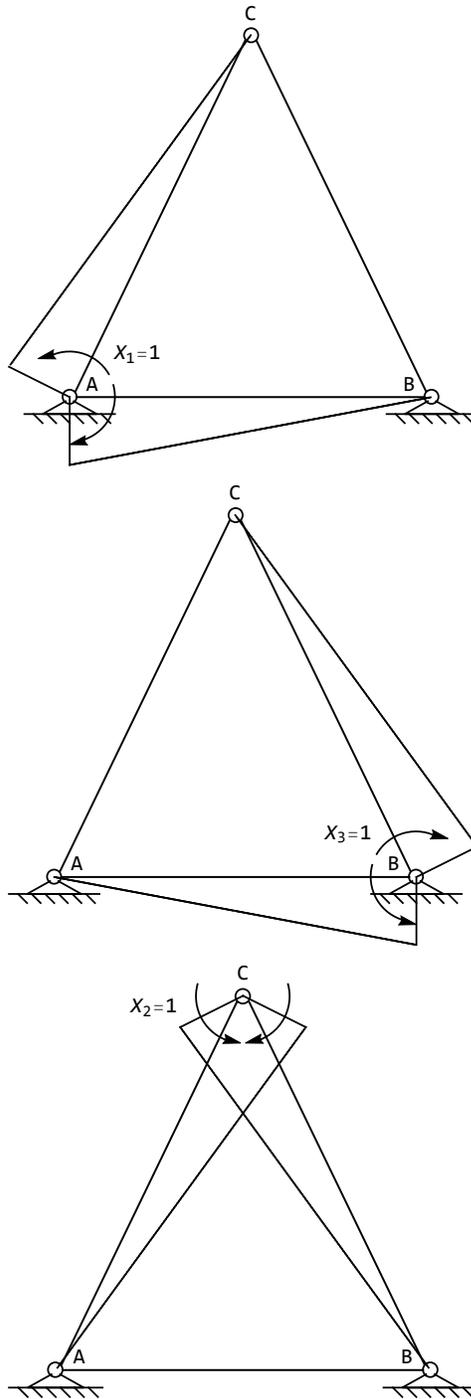


Figura 14.9: I tre sistemi di forze virtuali

Come sempre, il segno del momento è positivo se riportato dalla parte delle x_2 positive, ed il verso dell'asse x_2 è determinato dall'orientamento dell'asse x_3 . Gli integrali non offrono alcun tipo di difficoltà, e si potrà scrivere il sistema:

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{3} + \frac{L_1}{3}\right) X_1 - \frac{L_1}{6} X_2 + \frac{L}{6} X_3 &= \frac{FL^2}{16} \\ -\frac{L_1}{6} X_1 + \frac{2}{3} L_1 X_2 - \frac{L}{6} X_3 &= 0 \\ \frac{L}{6} X_1 - \frac{L}{6} X_2 + \left(\frac{L}{3} + \frac{L_1}{3}\right) X_3 &= \frac{FL^2}{16} \end{aligned} \quad (14.43)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{FL^2}{8L + 4L_1} \\ X_2 &= \frac{FL^2}{8(2L + L_1)} \\ X_3 &= \frac{FL^2}{8L + 4L_1} \end{aligned} \quad (14.44)$$

confermando quindi i momenti (14.13).

Capitolo 15

Un telaio a croce

Si vuole studiare la struttura in Figura 15.1, determinandone la deformata ed i diagrammi delle caratteristiche. L'esempio è ripreso da A. Carpinteri, G. Lacidogna, C. Surace, *Calcolo dei telai piani*, Pitagora Editore.

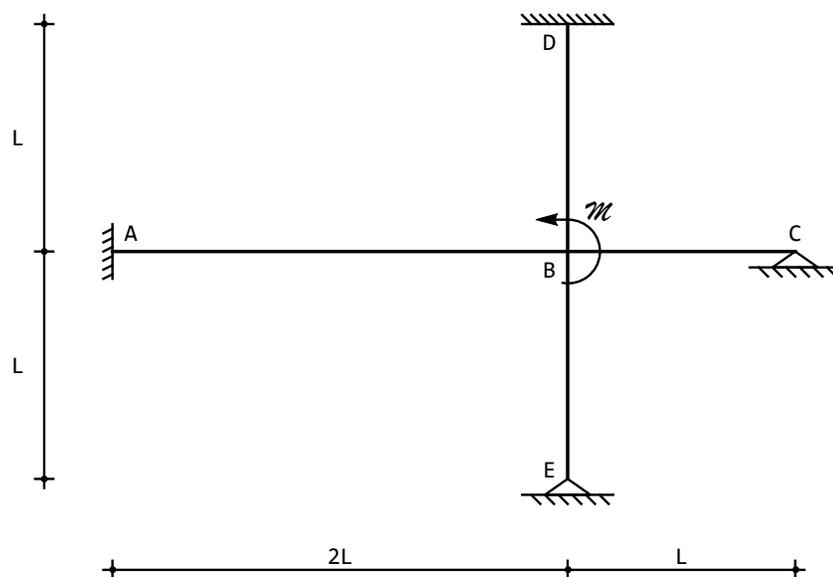


Figura 15.1: Un telaio a croce

Il telaio non è soggetto a carichi distribuiti, e quindi le linee elastiche fles-

sionali degli elementi di trave saranno esprimibili come polinomi cubici:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_2^{EB}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
 u_2^{BD}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3
 \end{aligned}
 \tag{15.1}$$

Ipotizzando che le aste siano assialmente indeformabili, le linee elastiche assiali saranno identicamente nulle.

Le condizioni ai limiti da imporre saranno banali nei quattro nodi periferici:

— nell'incastro in A ed in B si annullano sia lo spostamento trasversale che la rotazione:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 \phi^{AB}(0) &= 0 \\
 u_2^{BD}(L) &= 0 \\
 \phi^{BD}(L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{15.2}$$

— nell'appoggio in C ed in E , si annullano lo spostamento trasversale ed il momento flettente:

$$\begin{aligned}
 u_2^{BC}(L) &= 0 \\
 m^{BC}(L) &= 0 \\
 u_2^{EB}(0) &= 0 \\
 m^{EB}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{15.3}$$

Le restanti otto condizioni vanno poi scritte nel nodo centrale B , dove occorrerà imporre la congruenza di spostamenti e di rotazioni tra le due aste orizzontali AB e BC , tra l'asta orizzontale AB e l'asta verticale EB , e tra l'asta AB e l'asta verticale BD . Le altre possibili combinazioni sono automaticamente soddisfatte:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(2L) &= u_2^{BC}(0) \\
 \phi^{AB}(2L) &= \phi^{BC}(0) \\
 u_2^{AB}(2L) &= 0 \\
 u_2^{EB}(L) &= 0 \\
 \phi^{AB}(2L) &= \phi^{EB}(L) \\
 u_2^{BD}(0) &= 0 \\
 \phi^{AB}(2L) &= \phi^{BD}(0)
 \end{aligned}
 \tag{15.4}$$

Infine, si dovrà scrivere la condizione di equilibrio del nodo:

$$-m^{AB}(2L) + m^{BC}(0) + m^{BD}(0) - m^{EB}(L) + \mathcal{M} = 0
 \tag{15.5}$$

Le altre due equazioni di equilibrio, alla traslazione verticale ed orizzontale, tornano utili ai fini del calcolo dello sforzo normale:

$$\begin{aligned} -n^{AB}(2L) + n^{BC}(0) + t^{BD}(0) - t^{EB}(L) &= 0 \\ -n^{BD}(0) + n^{EB}(L) - t^{AB}(2L) + t^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (15.6)$$

La soluzione di queste sedici equazioni permette di dedurre le linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(2L - x_3)x_3^2}{48EIL} \\ u_2^{BC}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3(2L^2 - 3Lx_3 + x_3^2)}{24EIL} \\ u_2^{BD}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}(L - x_3)^2x_3}{12EIL} \\ u_2^{EB}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}x_3(L^2 - x_3^2)}{24EIL} \end{aligned} \quad (15.7)$$

La deformata è riportata in Figura 15.2. I momenti si ottengono per deriva-

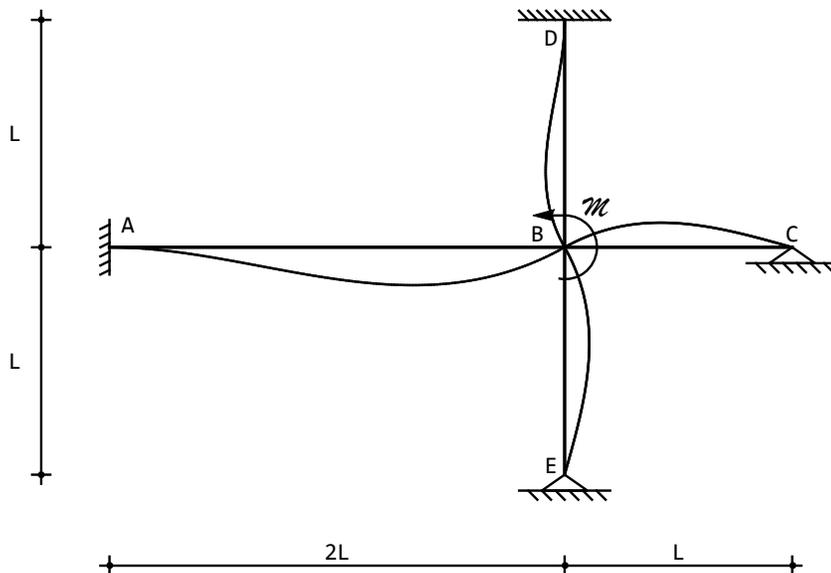


Figura 15.2: La deformata del telaio a croce

zione successiva a partire dagli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{24} \left(-2 + \frac{3x_3}{L} \right) \\
 m^{BC}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(-L + x_3)}{4L} \\
 m^{BD}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{6} \left(-2 + \frac{3x_3}{L} \right) \\
 m^{EB}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}x_3}{4L}
 \end{aligned}
 \tag{15.8}$$

con diagramma riportato in Figura 15.3. Nel nodo B , si ha quindi, la coppia

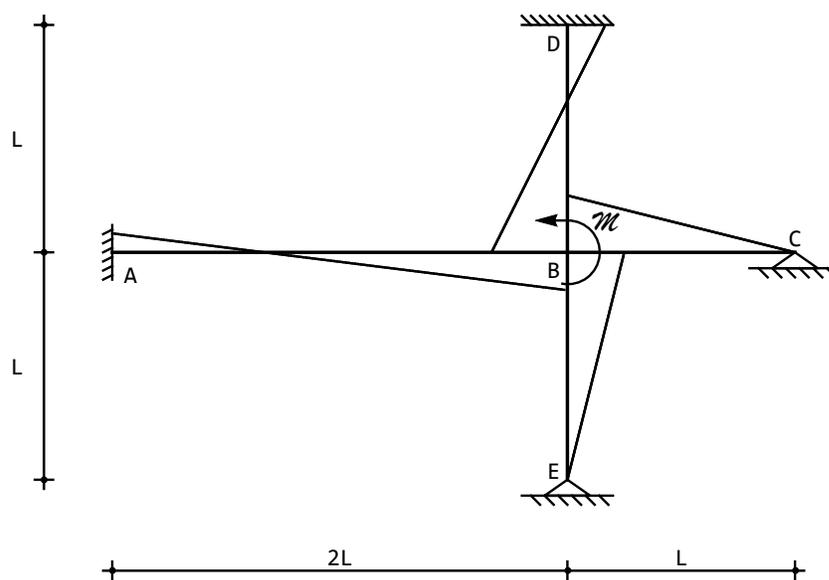


Figura 15.3: I momenti flettenti sul telaio a croce

applicata viene ripartita tra le aste nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(2L) &= \frac{\mathcal{M}}{6} \\
 m^{BC}(0) &= -\frac{\mathcal{M}}{4} \\
 m^{BD}(0) &= -\frac{\mathcal{M}}{3} \\
 m^{EB}(L) &= \frac{\mathcal{M}}{4}
 \end{aligned}
 \tag{15.9}$$

15.1 Il metodo misto

La struttura presenta un elevato grado di iperstaticità, e di conseguenza il metodo delle forze non si presta ad uno studio agevole. Più appropriato, per tali strutture, è il cosiddetto *metodo misto*, che riduce il telaio ad un insieme di aste incernierate agli estremi, caricate dai carichi originari e dalle coppie iperstatiche incognite.

Nel caso in esame, si degradano i due incastrati ad appoggi, e si inserisce una cerniera nel nodo centrale B , giungendo alla struttura di Figura 15.4, in cui le coppie sono positive se antiorarie. Per l'equilibrio del nodo B dovrà essere:

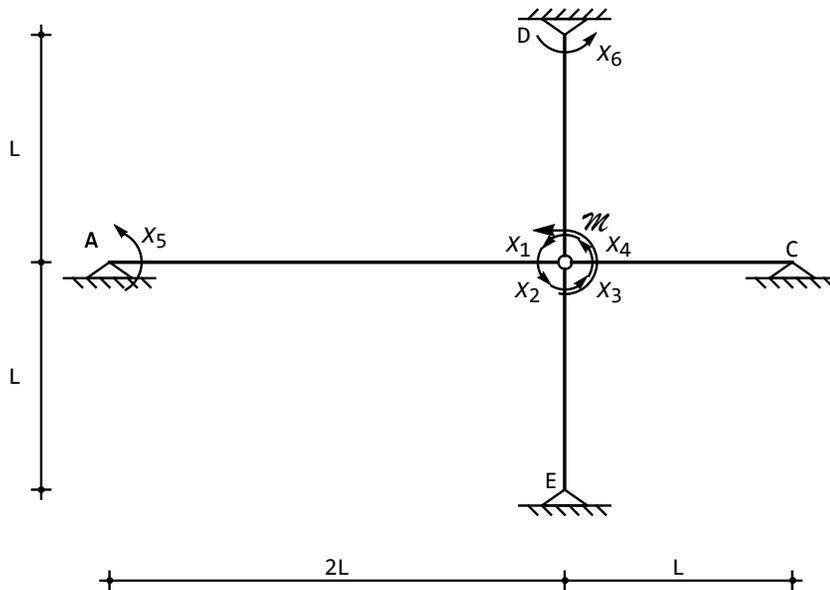


Figura 15.4: La struttura reticolare associata secondo il metodo misto

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + M = 0 \quad (15.10)$$

Si possono poi scrivere le equazioni di congruenza nei nodi A , B e D :

$$\begin{aligned} \phi^{AB}(0) &= 0 \\ \phi^{AB}(2L) &= \phi^{BC}(0) \\ \phi^{AB}(2L) &= \phi^{BD}(0) \\ \phi^{AB}(2L) &= \phi^{EB}(L) \\ \phi^{BD}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (15.11)$$

ed operando su semplici schemi di trave appoggiata caricata da coppie agli estremi può scriversi:

$$\begin{aligned}
 X_5 \frac{2L}{3EI} - X_1 \frac{2L}{6EI} &= 0 \\
 -X_5 \frac{2L}{6EI} + X_1 \frac{2L}{3EI} &= X_3 \frac{L}{3EI} \\
 -X_5 \frac{2L}{6EI} + X_1 \frac{2L}{3EI} &= X_2 \frac{L}{3EI} \\
 -X_5 \frac{2L}{6EI} + X_1 \frac{2L}{3EI} &= X_4 \frac{L}{3EI} - X_6 \frac{L}{6EI} \\
 -X_4 \frac{L}{6EI} + X_6 \frac{L}{3EI} &= 0
 \end{aligned} \tag{15.12}$$

Risolvendo le sei equazioni precedenti si ottiene:

$$\begin{aligned}
 X_1 = X_6 &= -\frac{\mathcal{M}}{6} \\
 X_2 = X_3 &= -\frac{\mathcal{M}}{4} \\
 X_4 &= -\frac{\mathcal{M}}{3} \\
 X_5 &= -\frac{\mathcal{M}}{12}
 \end{aligned} \tag{15.13}$$

Dalle coppie X_i è possibile dedurre i valori dei momenti in A , B e D , considerando che le coppie sono applicate nel nodo, e quindi le coppie applicate sui tratti saranno uguali e contrarie, ossia orarie. Sarà quindi, per l'equilibrio:

$$m^{AB}(0) - X_5 = 0 \tag{15.14}$$

da cui:

$$m^{AB}(0) = -\frac{\mathcal{M}}{12} \tag{15.15}$$

ed analogamente:

$$-m^{BD}(L) - X_6 = 0 \longrightarrow m^{BD}(L) = \frac{\mathcal{M}}{6} \tag{15.16}$$

mentre nel nodo B si ha:

$$\begin{aligned}
 m^{BC}(0) - X_3 &= 0 \longrightarrow m^{BC}(0) = -\frac{\mathcal{M}}{4} \\
 -m^{AB}(2L) - X_1 &= 0 \longrightarrow m^{AB}(2L) = \frac{\mathcal{M}}{6} \\
 m^{BD}(0) - X_4 &= 0 \longrightarrow m^{BD}(0) = -\frac{\mathcal{M}}{3} \\
 -m^{EB}(L) - X_2 &= 0 \longrightarrow m^{EB}(L) = \frac{\mathcal{M}}{4}
 \end{aligned} \tag{15.17}$$

Con questi valori dei momenti, il tracciamento del diagramma è ovviamente immediato, e coincide con quello già riportato.

15.2 Un secondo esempio di telaio a croce

Un telaio simile al precedente è riportato in Figura 15.5, ed è ripreso da Erasmo Viola, *Esercitazioni di Scienza delle Costruzioni*, Vol.II, dove è risolto attraverso il classico metodo delle deformazioni.

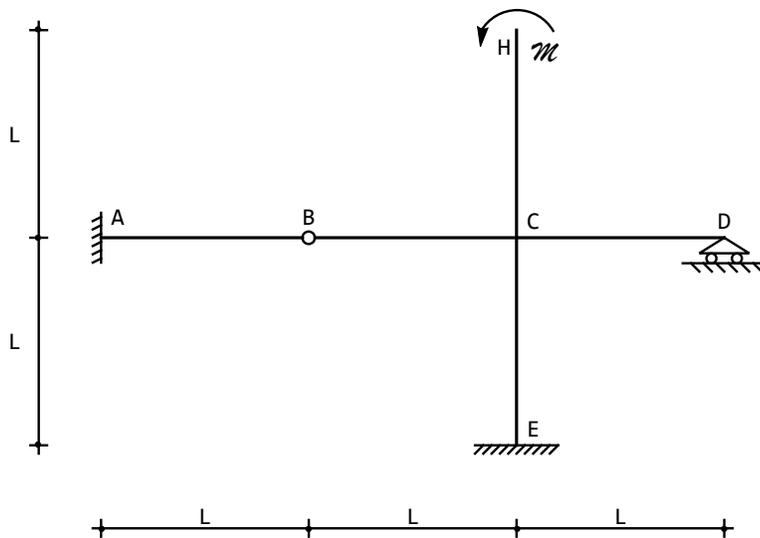


Figura 15.5: Un secondo esempio di telaio a croce

In ipotesi di inestensibilità assiale, è immediato realizzare che le corrispondenti linee elastiche si annullano identicamente (telaio a nodi fissi). Limitandosi a questo caso, si potranno identificare cinque tratti, le cui linee elastiche flessionali saranno polinomi cubici:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 + b_2x_3^2 + b_3x_3^3 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_2^{CE}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 + d_2x_3^2 + d_3x_3^3 \\
 u_2^{CH}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3
 \end{aligned} \tag{15.18}$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno facilmente individuabili in tutti i punti estremi. Nei due incastri si annullano spostamenti trasversali e rotazioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 \phi^{AB}(0) &= 0 \\
 u_2^{CE}(L) &= 0 \\
 \phi^{CE}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{15.19}$$

— nel carrello saranno nulli gli spostamenti verticali ed il momento flettente (e quindi il carrello diviene a tutti gli effetti un appoggio):

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(L) &= 0 \\ m^{CD}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (15.20)$$

— nell'estremo libero, e caricato dalla coppia \mathcal{M} , il taglio è nullo, ed il momento è uguale alla coppia:

$$\begin{aligned} t^{CH}(L) &= 0 \\ m^{CH}(L) &= \mathcal{M} \end{aligned} \quad (15.21)$$

In corrispondenza del nodo quadruplo occorre imporre la congruenza tra le quattro aste in esso concorrenti, e l'equilibrio alla rotazione del nodo. Per l'ipotesi di inestensibilità assiale si potrà scrivere subito:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(L) &= 0 \\ u_2^{CD}(0) &= 0 \\ u_2^{CE}(0) &= 0 \\ u_2^{CH}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (15.22)$$

La congruenza imporrà poi l'uguaglianza delle rotazioni, sicchè dovrà essere:

$$\begin{aligned} \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0) \\ \phi^{BC}(L) &= \phi^{DE}(0) \\ \phi^{BC}(L) &= \phi^{CH}(0) \end{aligned} \quad (15.23)$$

Infine, l'equilibrio alla rotazione è garantito dallo scrivere:

$$-m^{BC}(L) + m^{CD}(0) + m^{CE}(0) + m^{CH}(0) = 0 \quad (15.24)$$

La soluzione di queste sedici equazioni permette di dedurre le linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(3L - x_3)x_3^2}{34EIL} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(2L^3 - L^2x_3 - x_3^3)}{34EIL} \\ u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3(2L^2 - 3Lx_3 + x_3^2)}{17EIL} \\ u_2^{CE}(x_3) &= -\frac{2\mathcal{M}(L - x_3)^2x_3}{17EIL} \\ u_2^{CH}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3(4L + 17x_3)}{34EI} \end{aligned} \quad (15.25)$$

La deformata è riportata in Figura 15.6. La rotazione del nodo centrale è calcolabile come:

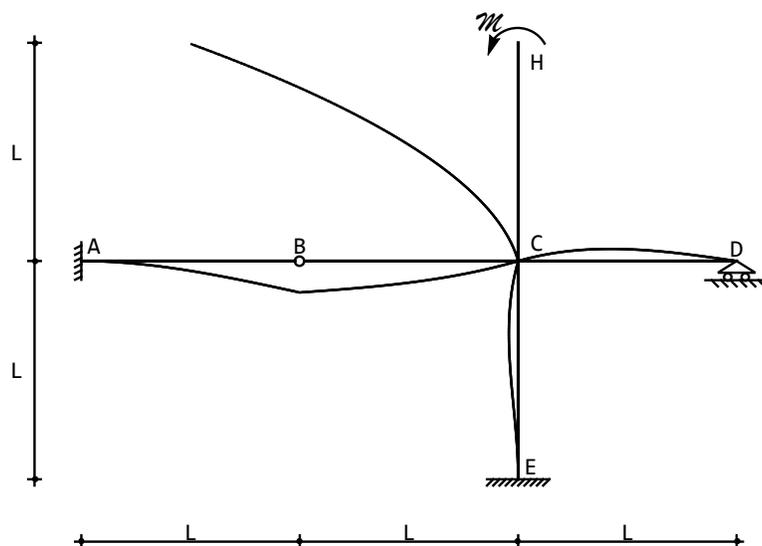


Figura 15.6: La deformata del telaio a croce

$$\phi_C = \frac{2}{17} \frac{ML}{EI} \quad (15.26)$$

mentre lo spostamento e la rotazione in sommità della mensola sono forniti da:

$$\begin{aligned} u_{2H} &= -\frac{21}{34} \frac{ML^2}{EI} \\ \phi_H &= \frac{19}{17} \frac{ML}{EI} \end{aligned} \quad (15.27)$$

Le caratteristiche della sollecitazione interna

I momenti si ottengono per derivazione successiva a partire dagli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= \frac{3\mathcal{M}(-L + x_3)}{17L} \\ m^{BC}(x_3) &= \frac{3\mathcal{M}x_3}{17L} \\ m^{CD}(x_3) &= \frac{6\mathcal{M}(-L + x_3)}{17L} \\ m^{CE}(x_3) &= -\frac{4\mathcal{M}(2L - 3x_3)}{17L} \\ m^{CH}(x_3) &= \mathcal{M} \end{aligned} \quad (15.28)$$

con diagramma riportato in Figura 15.7. Nel nodo C , si ha quindi:

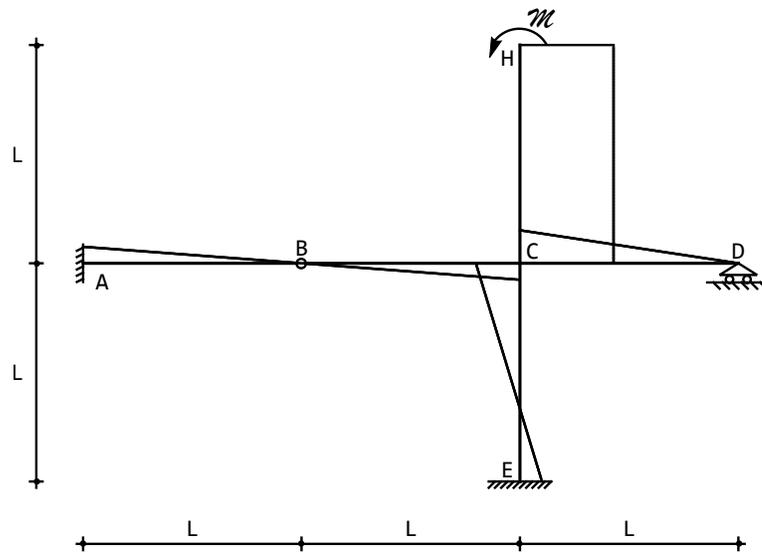


Figura 15.7: I momenti flettenti sul telaio a croce

$$\begin{aligned}
 m^{BC}(L) &= \frac{3}{17}\mathcal{M} \\
 m^{CD}(0) &= -\frac{6}{17}\mathcal{M} \\
 m^{CE}(0) &= -\frac{8}{17}\mathcal{M} \\
 m^{CH}(0) &= \mathcal{M}
 \end{aligned}
 \tag{15.29}$$

Capitolo 16

Un Telaio con coppia al piede

Si vuole studiare la struttura in Figura 16.1, determinandone la deformata e le caratteristiche. L'esempio è ripreso da A.Carpinteri, G.Lacidogna, C.Surace, *Calcolo dei telai piani*, Pitagora Editore.

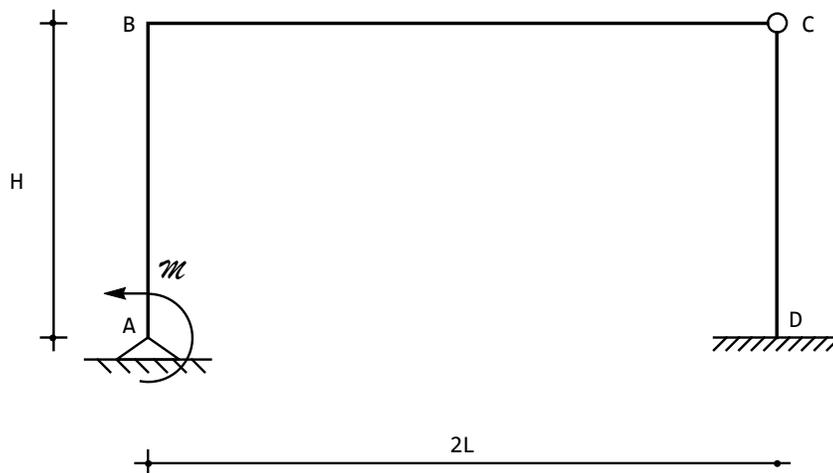


Figura 16.1: Un portale con cerniera interna

La struttura è costituita da due tratti, collegati tra loro da una cerniera, ed è vincolata al suolo da un appoggio ed un incastro. Essa quindi risulta una volta ipertatica.

16.1 Il metodo della linea elastica

Il telaio non è soggetto a carichi distribuiti, e quindi le linee elastiche flessionali degli elementi di trave saranno esprimibili come:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\ u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\ u_2^{DC}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \end{aligned} \quad (16.1)$$

Ipotizzando che le aste siano assialmente indeformabili, le linee elastiche assiali saranno costanti, ed a causa dei vincoli esse saranno identicamente nulle lungo i due tratti verticali AB e DC . Viceversa, lo spostamento assiale del traverso sarà denotato con δ (*telaio ad un nodo spostabile*):

$$\begin{aligned} u_3^{AB}(x_3) &= 0 \\ u_3^{BC}(x_3) &= \delta \\ u_3^{DC}(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (16.2)$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno:

— nel carrello in A si annulla lo spostamento trasversale, mentre il momento flettente sarà pari all'inverso della coppia applicata:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(0) &= 0 \\ m^{AB}(0) + \mathcal{M} &= 0 \end{aligned} \quad (16.3)$$

— nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(L) &= \delta \\ u_2^{BC}(0) &= 0 \\ \phi^{AB}(L) &= \phi^{BC}(0) \end{aligned} \quad (16.4)$$

e la condizione di equilibrio:

$$-m^{AB}(L) + m^{BC}(0) = 0 \quad (16.5)$$

— nella cerniera in C , si hanno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(2L) &= 0 \\ u_2^{DC}(L) &= \delta \end{aligned} \quad (16.6)$$

e le condizioni di momento nullo:

$$\begin{aligned} m^{BC}(2L) &= 0 \\ m^{DC}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (16.7)$$

Infine, in corrispondenza dell'incastro in D dovrà aversi:

$$\begin{aligned} u_2^{DC}(0) &= 0 \\ \phi^{DC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (16.8)$$

A queste dodici equazioni scritte nei nodi occorre affiancare l'equazione di equilibrio del traverso alla traslazione orizzontale (*equazione di piano*):

$$-t^{AB}(L) - t^{DC}(L) = 0 \quad (16.9)$$

La soluzione di queste equazioni è agevole, e porta alle linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3(31L^2 - 24Lx_3 + 7x_3^2)}{48EIL} \\ u_2^{BC}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3(8L^2 - 6Lx_3 + x_3^2)}{96EIL} \\ u_2^{DC}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3(8L^2 - 6Lx_3 + x_3^2)}{96EIL} \end{aligned} \quad (16.10)$$

ed allo spostamento assiale del traverso:

$$\delta = -\frac{7\mathcal{M}L^2}{24EI} \quad (16.11)$$

La deformata è riportata in Figura 16.2.

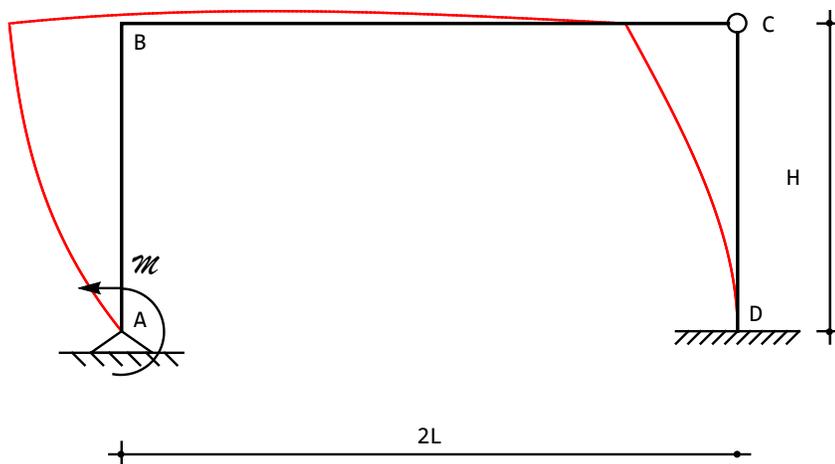


Figura 16.2: La deformata del portale con cerniera interna

I momenti si ottengono per derivazione successiva a partire dagli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= -\mathcal{M} \left(1 - \frac{7x_3}{8L} \right) \\ m^{BC}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(-2L + x_3)}{16L} \\ m^{DC}(x_3) &= \frac{7\mathcal{M}(L - x_3)}{8L} \end{aligned} \quad (16.12)$$

con diagramma riportato in Figura 16.3.

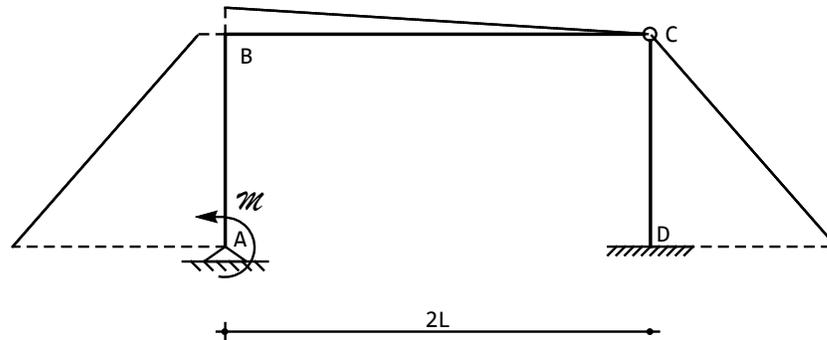


Figura 16.3: I momenti sul portale con cerniera interna

16.2 Il metodo misto

Si inseriscano due cerniere nei due nodi B e D , rendendo la struttura una volta labile. Si hanno quindi quattro incognite, ossia le due coppie in B , la coppia in D , e lo spostamento δ del traverso. Si giunge quindi alla struttura di Figura 16.4 in cui le coppie sono positive se antiorarie, ed inoltre:

$$X_1 + X_2 = 0 \quad (16.13)$$

Si possono scrivere le due equazioni di congruenza nei due nodi:

$$\begin{aligned} \phi_{AB} &= \phi_{BC} \\ \phi_D &= 0 \end{aligned} \quad (16.14)$$

e l'equazione di equilibrio per la struttura labile (principio dei lavori virtuali). Scegliendo lo spostamento δ del traverso come coordinata lagrangiana, si ha il cinematismo di Figura 16.5, per cui potrà scriversi:

$$-\mathcal{M}\phi - X_1\phi - X_3\phi = 0 \quad (16.15)$$

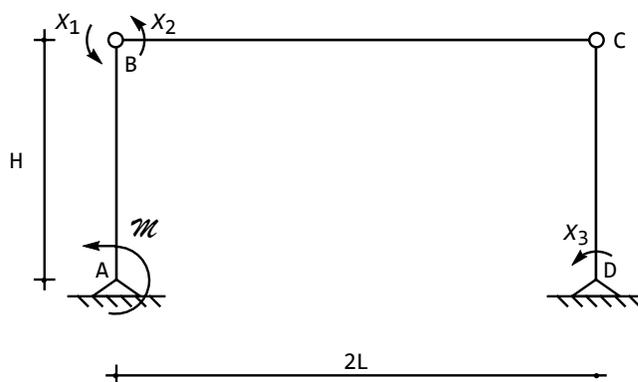


Figura 16.4: La struttura reticolare associata al portale con cerniera interna

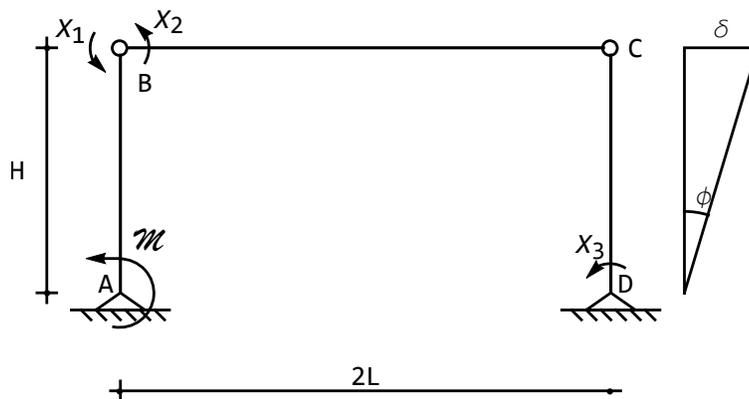


Figura 16.5: Il cinematismo sulla struttura reticolare

ossia:

$$\mathcal{M} + X_1 + X_3 = 0 \quad (16.16)$$

Le due equazioni di congruenza si esplicitano immediatamente in funzione delle incognite X_i :

$$\begin{aligned} X_1 \frac{L}{3EI} - \mathcal{M} \frac{L}{6EI} - \frac{\delta}{L} &= X_2 \frac{2L}{3EI} \\ X_3 \frac{L}{3EI} - \frac{\delta}{L} &= 0 \end{aligned} \quad (16.17)$$

e risolvendo le quattro equazioni si ottengono le coppie incognite:

$$X_1 = -\frac{\mathcal{M}}{8}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{\mathcal{M}}{8} \\ X_3 &= -\frac{7\mathcal{M}}{8} \end{aligned} \quad (16.18)$$

e lo spostamento del traverso:

$$\delta = -\frac{7}{24} \frac{\mathcal{M}L^2}{EI} \quad (16.19)$$

Dalle coppie X_i è possibile dedurre i valori dei momenti in B ed in D lungo le aste. Sarà infatti, per l'equilibrio:

$$-m^{AB}(L) + X_1 = 0 \quad (16.20)$$

da cui :

$$m^{AB}(L) = -\frac{\mathcal{M}}{8} \quad (16.21)$$

ed analogamente:

$$m^{BC}(0) + X_2 = 0 \longrightarrow m^{BC}(0) = -\frac{\mathcal{M}}{8} \quad (16.22)$$

mentre nel nodo D si ha:

$$m^{DC}(0) + X_3 = 0 \longrightarrow m^{DC}(0) = \frac{7\mathcal{M}}{8} \quad (16.23)$$

Con questi valori dei momenti, il tracciamento del diagramma è ovviamente immediato, e riproduce quello già ottenuto col metodo della linea elastica.

Capitolo 17

Doppia Trave con pendolo di collegamento

Si vuole studiare la struttura in Figura 17.1, determinandone la deformata ed i diagrammi delle caratteristiche.

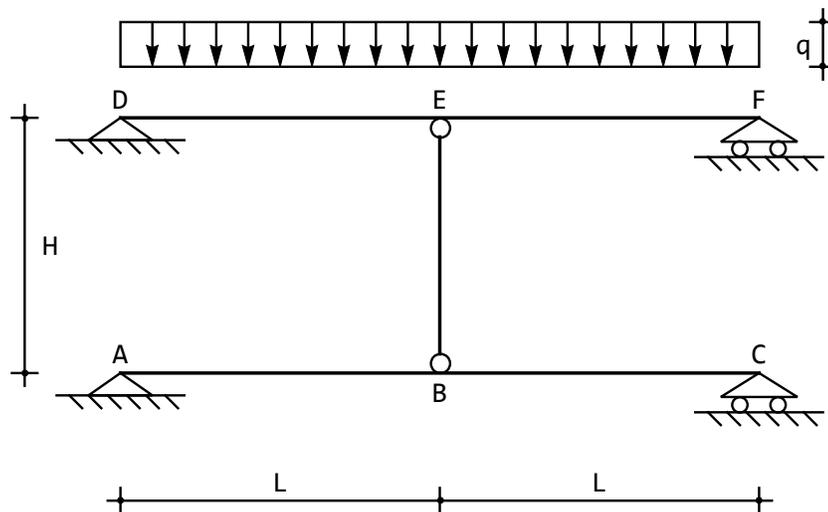


Figura 17.1: Una doppia trave appoggiata con pendolo di collegamento

Si assume *a priori* che la rigidezza assiale delle travi sia infinita, e la presenza degli appoggi in A e D garantisce che le linee elastiche assiali siano identicamente nulle. Viceversa, il pendolo ha rigidezza assiale EA_p , la sua linea elastica assiale è diversa da zero, mentre quella flessionale è identicamente nulla. Infine, il telaio è soggetto a carichi distribuiti lungo il tratto superiore, e quindi le linee elastiche

flessionali degli elementi di trave saranno esprimibili come:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_2^{DE}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{24EI} \\
 u_2^{EF}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{24EI}
 \end{aligned} \tag{17.1}$$

La linea elastica assiale del pendolo sarà invece:

$$u_3^{BE}(x_3) = m_0 + m_1x_3 \tag{17.2}$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno banali nei due appoggi e nei due carrelli, dove si annullano spostamenti trasversali e momenti. Si noti infatti che con le assunzioni appena fatte la differenza tra carrello ed appoggio scompare, e quindi:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) = 0 & \quad m^{AB}(0) = 0 \\
 u_2^{BC}(L) = 0 & \quad m^{BC}(L) = 0 \\
 u_2^{DE}(0) = 0 & \quad m^{DE}(0) = 0 \\
 u_2^{EF}(L) = 0 & \quad m^{EF}(L) = 0
 \end{aligned} \tag{17.3}$$

Nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza tra le due aste orizzontali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(L) &= u_2^{BC}(0) \\
 \phi^{AB}(L) &= \phi^{BC}(0)
 \end{aligned} \tag{17.4}$$

la condizione di congruenza tra il pendolo ed uno dei tratti orizzontali:

$$u_2^{AB}(L) = -u_3^{BE}(0) \tag{17.5}$$

e le condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 -t^{AB}(L) + t^{BC}(0) - n^{BE}(0) &= 0 \\
 -m^{AB}(L) + m^{BC}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{17.6}$$

Nel nodo superiore E , del tutto analogamente:

$$\begin{aligned}
 u_2^{DE}(L) &= u_2^{EF}(0) \\
 \phi^{DE}(L) &= \phi^{EF}(0) \\
 u_2^{DE}(L) &= -u_3^{BE}(H) \\
 -t^{DE}(L) + t^{EF}(0) + n^{BE}(H) &= 0 \\
 -m^{DE}(L) + m^{EF}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{17.7}$$

La soluzione di queste diciotto equazioni è agevole, e porta alle linee elastiche:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{q}{2D} (5EA_p L^4 x_3 (3L^2 - x_3^2)) \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{q}{2D} (5EA_p L^4 (2L^3 - 3Lx_3^2 + x_3^3)) \\
 u_2^{DE}(x_3) &= \frac{q}{2D} (x_3 (96EIHL^3 + 17EA_p L^6 - (48EIHL + 11EA_p L^4) x_3^2 + \\
 &\quad 4(3EIH + EA_p L^3) x_3^3)) \\
 u_2^{EF}(x_3) &= \frac{q}{2D} ((10L^4 (6EIH + EA_p L^3) - 9(8EIHL^2 + EA_p L^5) x_3^2 - \\
 &\quad 5EA_p L^4 x_3^3 + 4(3EIH + EA_p L^3) x_3^4)) \\
 u_3^{BE}(x_3) &= -\frac{q}{D} (5L^4 (EA_p L^3 + 6EI x_3))
 \end{aligned} \tag{17.8}$$

con:

$$D = 48EI (3EIH + EA_p L^3) \tag{17.9}$$

mentre le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{5EA_p q L^4 x_3}{2D_1} \\
 m^{BC}(x_3) &= \frac{5EA_p q L^4 (L - x_3)}{2D_1} \\
 m^{DE}(x_3) &= \frac{q x_3 (48EIHL + 11EA_p L^4 - 8(3EIH + EA_p L^3) x_3)}{2D_1} \\
 m^{EF}(x_3) &= \frac{q(L - x_3)(3L(8EIH + EA_p L^3) + 8(3EIH + EA_p L^3) x_3)}{2D_1} \\
 n^{BE}(x_3) &= -\frac{5EA_p q L^4}{D_1}
 \end{aligned} \tag{17.10}$$

con:

$$D_1 = 8(3EIH + EA_p L^3) \tag{17.11}$$

Portando ad infinito la rigidezza assiale EA_p si ottengono le deformate per pendolo rigido:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{5Lq x_3 (3L^2 - x_3^2)}{96EI} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{5Lq (2L^3 - 3Lx_3^2 + x_3^3)}{96EI} \\
 u_2^{DE}(x_3) &= \frac{q x_3 (17L^3 - 11Lx_3^2 + 4x_3^3)}{96EI} \\
 u_2^{EF}(x_3) &= \frac{q (10L^4 - 9L^2 x_3^2 - 5Lx_3^3 + 4x_3^4)}{96EI} \\
 u_3^{BE}(x_3) &= -\frac{5}{48} \frac{qL^4}{EI}
 \end{aligned} \tag{17.12}$$

mentre le caratteristiche si semplificano in:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{5}{16}qLx_3 \\
 m^{BC}(x_3) &= \frac{5}{16}qL(L - x_3) \\
 m^{DE}(x_3) &= \frac{11}{16}qLx_3 - q\frac{x_3^2}{2} \\
 m^{EF}(x_3) &= \frac{q}{16}(3L^2 + 5Lx_3 - 8x_3^2) \\
 n^{BE}(x_3) &= -\frac{5qL}{8}
 \end{aligned}
 \tag{17.13}$$

La deformata si presenta come in Figura 17.2, mentre il diagramma del momento è riportato in Figura 17.3. Si noti che la discontinuità angolare in B è uguale e contraria alla discontinuità angolare in E .

17.1 La scrittura diretta dell'equazione di congruenza

La struttura è una volta iperstatica, ed una opportuna struttura isostatica equivalente (S.I.E.) si ottiene rimuovendo il pendolo centrale, e sostituendolo con lo sforzo normale incognito X , come illustrato in Figura 17.4.

Se il pendolo può considerarsi inestensibile, l'equazione di congruenza deve esprimere l'uguaglianza degli spostamenti verticali delle mezzerie delle travi superiore ed inferiore:

$$\Delta u_{2EB} = 0 \tag{17.14}$$

ossia:

$$X \frac{(2L)^3}{48EI} + \frac{5}{384}q \frac{(2L)^4}{EI} = -X \frac{(2L)^3}{48EI} \tag{17.15}$$

da cui subito si ottiene lo sforzo normale nel pendolo :

$$X = -\frac{5}{8}qL \tag{17.16}$$

Se invece il pendolo ha rigidezza assiale finita EA_p , bisognerà scrivere:

$$\Delta u_{2EB} = -X \frac{H}{EA_p} \tag{17.17}$$

Il segno meno si giustifica in quanto Δu_{2EB} è positivo se i punti E ed B si avvicinano, mentre lo sforzo normale positivo provoca un allontanamento tra i due punti E e B intesi come punti estremi del pendolo. Sarà quindi:

$$X \frac{(2L)^3}{48EI} + \frac{5}{384}q \frac{(2L)^4}{EI} = -X \frac{(2L)^3}{48EI} + X \frac{H}{EA_p} \tag{17.18}$$

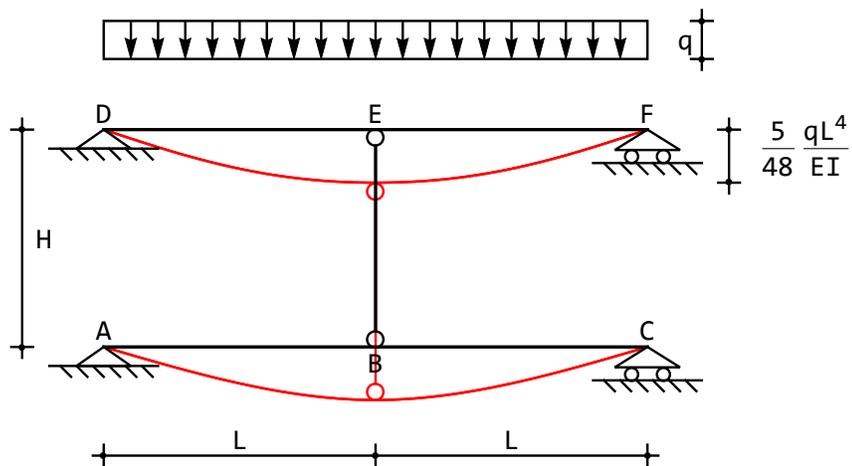


Figura 17.2: La deformata per la doppia trave appoggiata con pendolo di collegamento

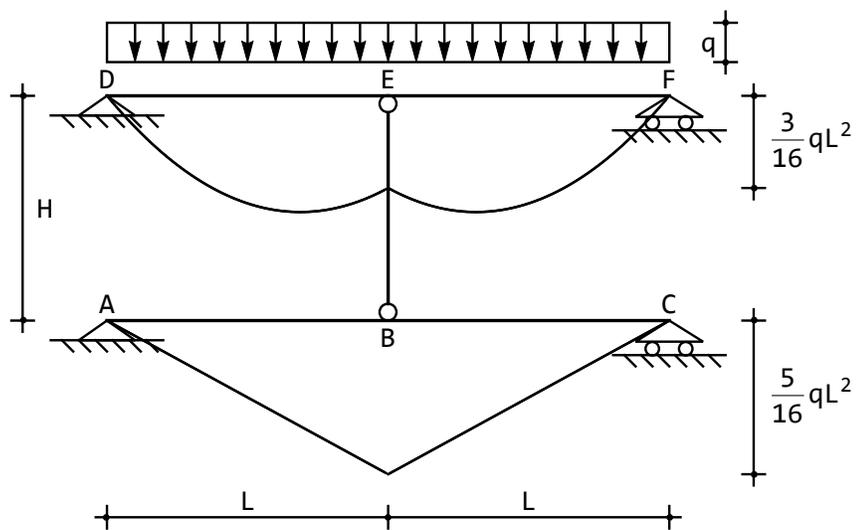


Figura 17.3: I momenti sulla doppia trave appoggiata con pendolo di collegamento

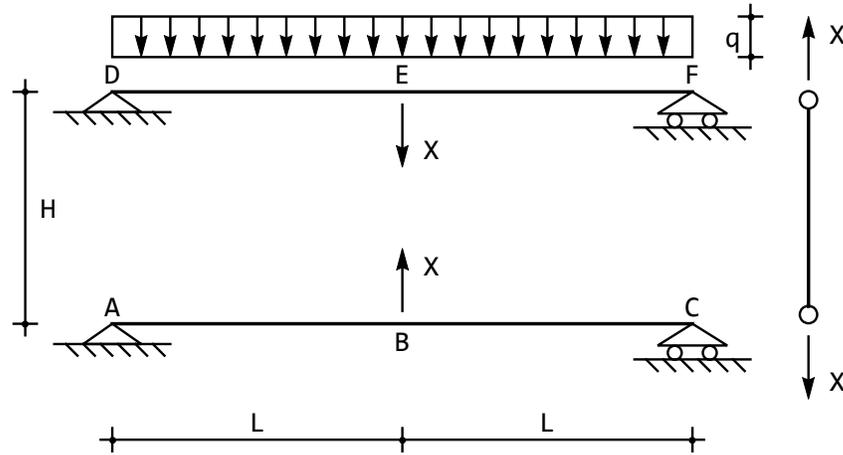


Figura 17.4: Il sistema isostatico equivalente per il calcolo dello sforzo normale nel pendolo

da cui lo sforzo normale:

$$X = -\frac{5}{8}qL \left(\frac{A_p L^3}{3IH + A_p L^3} \right) \quad (17.19)$$

Conosciuto lo sforzo normale nel pendolo, il tracciamento del diagramma del momento si riduce all'esame di due travi appoggiate soggette rispettivamente al carico q ed alla forza X in mezzeria (per il tratto superiore) ed alla forza X in mezzeria (per il tratto inferiore). Si ha quindi, sul tratto superiore:

$$\begin{aligned} m^{DE}(x_3) &= qLx_3 - q\frac{x_3^2}{2} + X\frac{x_3}{2} = \frac{11}{16}qLx_3 - q\frac{x_3^2}{2} \\ m^{EF}(x_3) &= \frac{X}{2}(L - x_3) + qL(L - x_3) - q\frac{(L - x_3)^2}{2} = \frac{1}{16}q(3L^2 + 5Lx_3 - 8x_3^2) \end{aligned} \quad (17.20)$$

mentre sul tratto inferiore, più semplicemente:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= -X\frac{x_3}{2} = -\frac{5}{16}qLx_3 \\ m^{BC}(x_3) &= -\frac{X}{2}(L - x_3) = \frac{5}{16}qL(L - x_3) \end{aligned} \quad (17.21)$$

17.2 Il caso della variazione termica uniforme

Si vuole studiare la struttura in Figura 17.5, in cui il pendolo è soggetto ad una variazione termica uniforme ΔT .

Non essendovi carichi distribuiti, le linee elastiche flessionali sono semplici polinomi cubici:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_2^{DE}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
 u_2^{EF}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3
 \end{aligned}
 \tag{17.22}$$

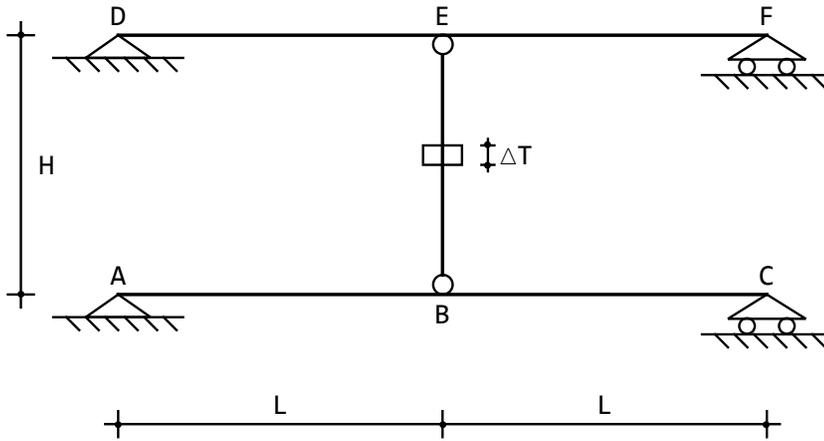


Figura 17.5: La trave doppia soggetta a variazione termica nel pendolo

La linea elastica assiale del pendolo sarà la (17.2), mentre il suo sforzo normale sarà calcolabile come:

$$n^{BE}(x_3) = EA_p \frac{du_3^{BE}}{dx_3} - EA_p \alpha \Delta T
 \tag{17.23}$$

Le condizioni ai limiti restano le (17.4-17.7), e la loro soluzione porta agli spostamenti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{EA_p H \alpha \Delta T x_3 (-3L^2 + x_3^2)}{4(3EIH + EA_p L^3)} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{EA_p H \alpha \Delta T (2L^3 - 3Lx_3^2 + x_3^3)}{4(3EIH + EA_p L^3)} \\
 u_2^{DE}(x_3) &= -u_2^{AB}(x_3) \\
 u_2^{EF}(x_3) &= -u_2^{BC}(x_3) \\
 u_3^{BE}(x_3) &= -\frac{EA_p L^3 \alpha \Delta T (H - 2x_3)}{6EIH + 2EA_p L^3}
 \end{aligned}
 \tag{17.24}$$

mentre le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva :

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{3EA_p EIH \alpha \Delta T x_3}{6EIH + 2EA_p L^3} \\
 m^{BC}(x_3) &= \frac{3EA_p EIH \alpha \Delta T (L - x_3)}{6EIH + 2EA_p L^3} \\
 m^{DE}(x_3) &= -m^{AB}(x_3) \\
 m^{EF}(x_3) &= -m^{BC}(x_3) \\
 n^{BE}(x_3) &= -\frac{3EA_p EIH \alpha \Delta T}{3EIH + EA_p L^3}
 \end{aligned} \tag{17.25}$$

Portando ad infinito la rigidezza assiale EA_p si ottengono le deformate per pendolo rigido:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{H\alpha\Delta T x_3 (-3L^2 + x_3^2)}{4L^3} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{H\alpha\Delta T (2L^3 - 3Lx_3^2 + x_3^3)}{4L^3} \\
 u_2^{DE}(x_3) &= -u_2^{AB}(x_3) \\
 u_2^{EF}(x_3) &= -u_2^{BC}(x_3) \\
 u_3^{BE}(x_3) &= -\frac{1}{2}\alpha\Delta T (H - 2x_3)
 \end{aligned} \tag{17.26}$$

La deformata si presenta come in Figura 17.6, mentre i momenti sono riportati in Figura 17.7.

La scrittura diretta dell'equazione di congruenza

La struttura è una volta iperstatica, ed una opportuna struttura isostatica equivalente (S.I.E.) si ottiene rimuovendo il pendolo centrale, e sostituendolo con lo sforzo normale incognito X , come illustrato in Figura 17.8. Il pendolo, soggetto alla variazione termica uniforme ΔT , subisce una variazione di lunghezza pari ad $\alpha\Delta TH$.

Se il pendolo può considerarsi inestensibile, la variazione di spostamento verticale tra i punti E e B deve essere pari a questa quantità:

$$\Delta u_{2EB} = \alpha\Delta TH \tag{17.27}$$

ossia:

$$u_{2E} - u_{2B} = \alpha\Delta TH \tag{17.28}$$

ed ancora:

$$X \frac{(2L)^3}{48EI} + X \frac{(2L)^3}{48EI} = \alpha\Delta TH \tag{17.29}$$

da cui subito si ottiene lo sforzo normale nel pendolo:

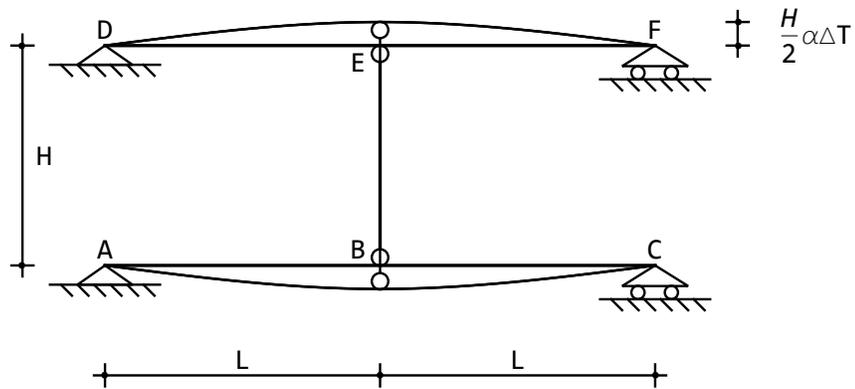


Figura 17.6: La deformata per la doppia trave appoggiata con pendolo di collegamento

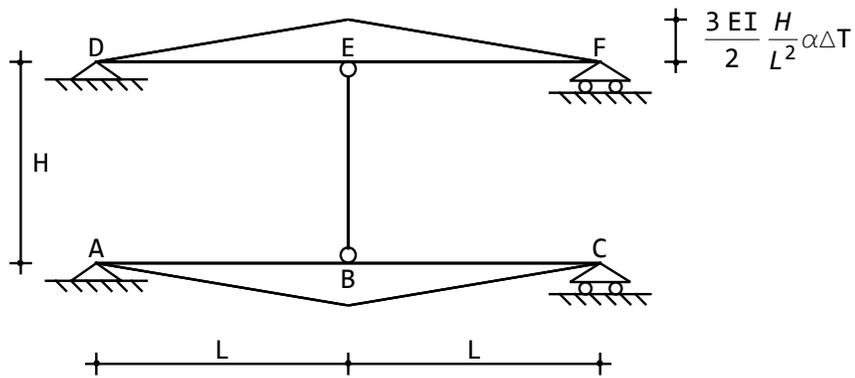


Figura 17.7: I momenti sulla doppia trave appoggiata con pendolo di collegamento

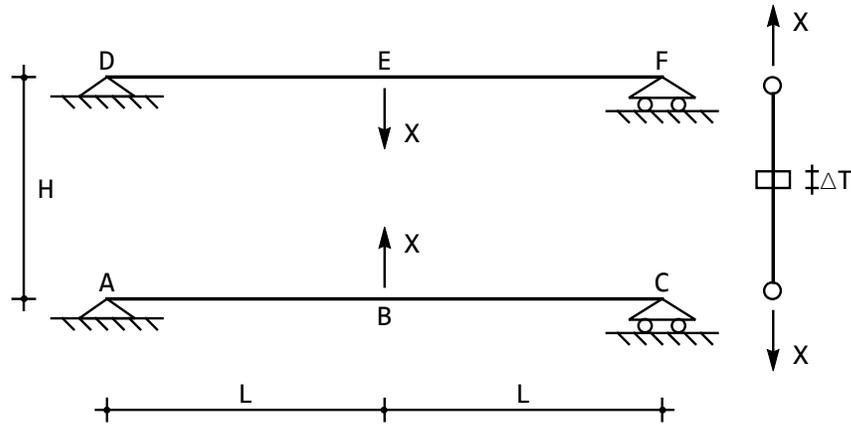


Figura 17.8: Il sistema isostatico equivalente per il calcolo dello sforzo normale nel pendolo

$$X = 3EI\alpha\Delta T \frac{H}{L^3} \quad (17.30)$$

Se invece il pendolo ha rigidezza assiale finita EA_p , bisognerà scrivere:

$$\Delta u_{2EB} = -X \frac{H}{EA_p} - \alpha\Delta TH \quad (17.31)$$

Il segno meno si giustifica in quanto Δu_{2EB} è positivo se i punti E ed B si avvicinano, mentre lo sforzo normale positivo provoca un allontanamento tra i due punti E e B intesi come punti estremi del pendolo, così come una variazione termica positiva provoca un allungamento del pendolo, e quindi un allontanamento tra i due estremi B ed E . Sarà quindi:

$$X \frac{(2L)^3}{48EI} + X \frac{(2L)^3}{48EI} = -X \frac{H}{EA_p} - \alpha\Delta TH \quad (17.32)$$

da cui lo sforzo normale:

$$X = -\frac{3IHA_p}{3IH + L^3A_p} \alpha\Delta T \quad (17.33)$$

Conosciuto lo sforzo normale nel pendolo, il tracciamento del diagramma del momento si riduce all'esame di due travi appoggiate soggette rispettivamente al carico q ed alla forza X in mezzeria (per il tratto superiore) ed alla forza X in mezzeria (per il tratto inferiore). Si ha quindi, sul tratto superiore:

$$\begin{aligned} m^{DE}(x_3) &= X \frac{x_3}{2} = -3EI\alpha\Delta T \frac{H}{L^3} \frac{x_3}{2} \\ m^{EF}(x_3) &= \frac{X}{2} (L - x_3) = -\frac{3}{2} EI\alpha\Delta T \frac{H}{L^3} (L - x_3) \end{aligned} \quad (17.34)$$

mentre sul tratto inferiore:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= -X \frac{x_3}{2} = 3EI\alpha\Delta T \frac{H}{L^3} \frac{x_3}{2} \\ m^{BC}(x_3) &= -\frac{X}{2}(L-x_3) = \frac{3}{2}EI\alpha\Delta T \frac{H}{L^3}(L-x_3) \end{aligned} \quad (17.35)$$

ritrovando i valori ottenuti col metodo della linea elastica.

17.3 Un secondo esempio di doppia trave

Si vuole studiare ora la struttura in Figura 17.9, ripresa da E.Viola, *Esercitazioni di Scienza delle Costruzioni*, Vol.II, al fine di determinare la deformata e le caratteristiche della sollecitazione interna.

La struttura è costituita da una mensola di luce L , caricata da un carico distribuito di intensità q , collegata nell'estremo libero, tramite un pendolo di lunghezza H , ad una trave doppiamente appoggiata, anch'essa di luce L . Il carrello in E è soggetto al cedimento anelastico v_0 , il pendolo ha rigidezza assiale EA_p , mentre la restante struttura è assialmente rigida.

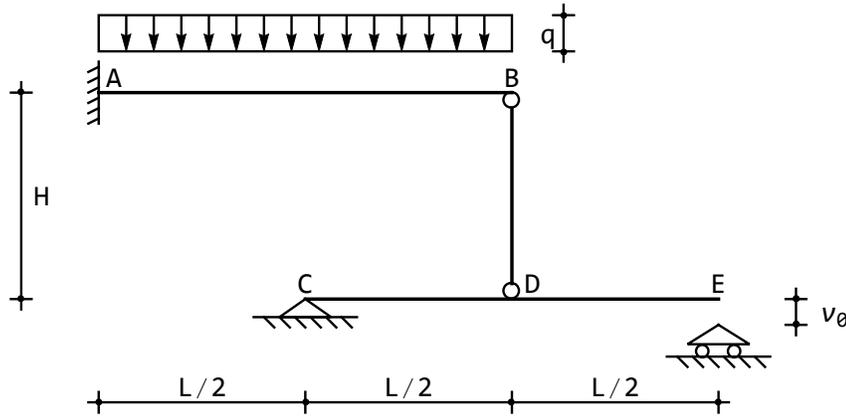


Figura 17.9: Una mensola collegata con un pendolo ad una trave appoggiata

Segue da queste ipotesi che le linee elastiche assiali delle travi sono identicamente nulle, così come identicamente nulli sono gli spostamenti trasversali del pendolo. Potrà quindi porsi::

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{24EI} \\ u_2^{CD}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\ u_2^{DE}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\ u_3^{BD}(x_3) &= m_0 + m_1x_3 \end{aligned} \quad (17.36)$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno banali nell'incastro e nell'appoggio:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(0) &= 0 \\ \phi^{AB}(0) &= 0 \\ u_2^{CD}(0) &= 0 \\ m^{CD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (17.37)$$

Nel carrello in E , bisognerà imporre che lo spostamento sia pari al cedimento anelastico, e che il momento sia nullo:

$$\begin{aligned} u_2^{DE}\left(\frac{L}{2}\right) &= v_0 \\ m^{DE}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (17.38)$$

Nel nodo in B si ha la condizione di congruenza tra lo spostamento trasversale della trave e lo spostamento assiale del pendolo:

$$u_2^{AB}(L) = u_3^{BD}(0) \quad (17.39)$$

e le condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} t^{AB}(L) - n^{BD}(0) &= 0 \\ m^{AB}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (17.40)$$

Nel nodo D , infine, va rispettata la congruenza di spostamenti e rotazioni tra i due tratti orizzontali:

$$\begin{aligned} u_2^{CD}\left(\frac{L}{2}\right) &= u_2^{DE}(0) \\ \phi^{CD}\left(\frac{L}{2}\right) &= \phi^{DE}(0) \end{aligned} \quad (17.41)$$

nonchè la condizione di congruenza tra lo spostamento trasversale della trave e lo spostamento assiale del pendolo:

$$u_2^{CD}\left(\frac{L}{2}\right) = u_3^{BD}(H) \quad (17.42)$$

Infine, l'equilibrio impone:

$$\begin{aligned} -t^{CD}\left(\frac{L}{2}\right) + t^{DE}(0) - n^{BD}(H) &= 0 \\ -m^{CD}\left(\frac{L}{2}\right) + m^{DE}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (17.43)$$

La soluzione di queste quattordici equazioni è agevole, e porta alle linee elastiche:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{(48EIHL^2q + 5EA_pL^5q + 48EA_pEILv_0)x_3^2}{192EI^2H + 68EA_pEIL^3} - \\
 &\quad \frac{(48EIHLq + 11EA_pL^4q + 24EA_pEIv_0)x_3^3}{288EI^2H + 102EA_pEIL^3} + \frac{qx_3^4}{24EI} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \left(\frac{v_0}{L} + \frac{3EA_pL^2(L^4q - 4EIv_0)}{8EI(48EIH + 17EA_pL^3)} \right) x_3 - \\
 &\quad \frac{(EAL^4q - 4EA_pEIv_0)x_3^3}{96EI^2H + 34EA_pEIL^3} \\
 u_2^{DE}(x_3) &= \frac{EAL^7q + 64EI(3EIH + EA_pL^3)v_0}{8EI(48EIH + 17EA_pL^3)} + \\
 &\quad \frac{v_0x_3}{L} + \frac{3EA_pL(-L^4q + 4EIv_0)x_3^2}{4EI(48EIH + 17EA_pL^3)} + \frac{(EA_pL^4q - 4EA_pEIv_0)x_3^3}{96EI^2H + 34EA_pEIL^3} \\
 u_3^{BD}(x_3) &= \frac{48EIHL^4q + EA_pL^7q + 64EA_pEIL^3v_0}{384EI^2H + 136EA_pEIL^3} + \frac{6(-L^4q + 4EIv_0)x_3}{48EIH + 17EA_pL^3}
 \end{aligned} \tag{17.44}$$

mentre le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{(L - x_3)}{96EIH + 34EA_pL^3} (48EA_pEIv_0 + q(48EIHL + 5EA_pL^4 - \\
 &\quad (48EIH + 17EA_pL^3)x_3)) \\
 m^{CD}(x_3) &= \frac{3EA_p(qL^4 - 4EIv_0)x_3}{48EIH + 17EA_pL^3} \\
 m^{DE}(x_3) &= \frac{3EA_p(qL^4 - 4EIv_0)(L - 2x_3)}{96EIH + 34EA_pL^3} \\
 n^{BD}(x_3) &= -\frac{6EA_p(qL^4 - 4EIv_0)}{48EIH + 17EA_pL^3}
 \end{aligned} \tag{17.45}$$

Portando ad infinito la rigidezza assiale EA_p si ottengono le deformate per pendolo rigido:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{x_3^2(96EIv_0(3L - x_3) + qL^3(30L^2 - 44Lx_3 + 17x_3^2))}{408EIL^3} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{x_3(qL^4(3L^2 - 4x_3^2) + 4EIv_0(31L^2 + 4x_3^2))}{136EIL^3} \\
 u_2^{DE}(x_3) &= \frac{8EIv_0(8L^3 + 17L^2x_3 + 3Lx_3^2 - 2x_3^3) + qL^4(L^3 - 6Lx_3^2 + 4x_3^3)}{136EIL^3}
 \end{aligned} \tag{17.46}$$

mentre i due valori più significativi sono :

$$\begin{aligned} M_A &= -\frac{5qL^2}{34} - \frac{24EIv_0}{17L^2} \\ M_D &= \frac{3qL^2}{34} - \frac{6EIv_0}{17L^2} \end{aligned} \quad (17.50)$$

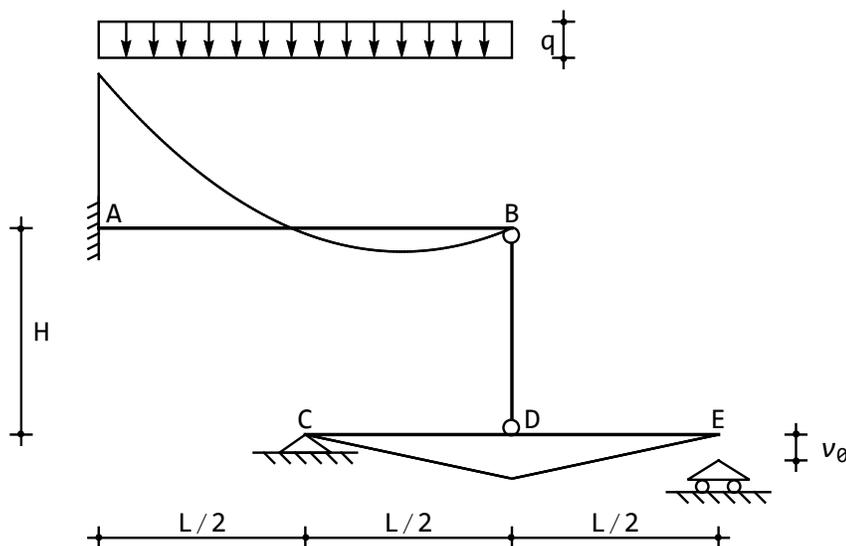


Figura 17.11: Il momento sulla trave doppia

17.4 La scrittura diretta dell'equazione di congruenza

La struttura è una volta iperstatica, ed una opportuna struttura isostatica equivalente (S.I.E.) si ottiene rimuovendo il pendolo centrale, e sostituendolo con lo sforzo normale incognito X , come illustrato in Figura 17.12

Se il pendolo può considerarsi inestensibile, l'equazione di congruenza deve esprimere l'uguaglianza degli spostamenti verticali dell'estremo libero della mensola, e della mezzera della trave inferiore:

$$\Delta u_{2BD} = 0 \quad (17.51)$$

ossia :

$$X \frac{L^3}{3EI} + \frac{qL^4}{8EI} = -X \frac{L^3}{48EI} + \frac{v_0}{2} \quad (17.52)$$

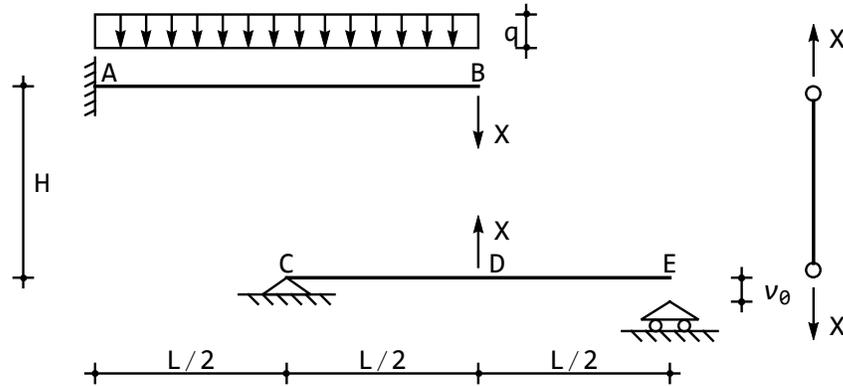


Figura 17.12: Il S.I.E. per il calcolo dello sforzo normale nel pendolo

da cui subito si ottiene lo sforzo normale nel pendolo:

$$X = \frac{24EI}{17L^3} \left(-\frac{qL^4}{4EI} + v_0 \right) = -\frac{6qL}{17} + \frac{24EIv_0}{17L^3} \quad (17.53)$$

Se invece il pendolo ha rigidezza assiale finita EA_p , bisognerà scrivere:

$$\Delta u_{2BD} = -X \frac{H}{EA_p} \quad (17.54)$$

Il segno meno si giustifica in quanto Δu_{2BD} è positivo se i punti B e D si avvicinano, mentre lo sforzo normale positivo provoca un allontanamento tra i due punti B e D intesi come punti estremi del pendolo. Sarà quindi:

$$X \frac{L^3}{3EI} + \frac{qL^4}{8EI} = -X \frac{L^3}{48EI} + \frac{v_0}{2} + X \frac{H}{EA_p} \quad (17.55)$$

da cui lo sforzo normale (17.45):

$$X = -\frac{6EA_p (qL^4 - 4EIv_0)}{48EIH + 17EA_pL^3} \quad (17.56)$$

Conosciuto lo sforzo normale nel pendolo, il tracciamento del diagramma del momento si riduce all'esame di una mensola soggetta ad un carico uniformemente distribuito q ed alla forza X nell'estremo libero, e ad una trave appoggiata

soggetta alla forza X in mezzeria. Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -q \frac{L^2}{2} + qx_3 \left(L - \frac{x_3}{2} \right) - X(L - x_3) = \\
 &\quad - \frac{(48EIv_0 + L^3q(5L - 17x_3))(L - x_3)}{34L^3} \\
 m^{CD}(x_3) &= -\frac{X}{2}x_3 = \frac{3(L^4q - 4EIv_0)x_3}{17L^3} \\
 m^{DE}(x_3) &= -\frac{X}{2} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right) = \frac{3(L^4q - 4EIv_0)(L - 2x_3)}{34L^3}
 \end{aligned} \tag{17.57}$$

confermando quanto ottenuto con il metodo della linea elastica.

Capitolo 18

Travi triple collegate con pendoli

Si consideri ora l'assemblaggio di tre mensole, collegate da due pendoli inestensibili, come illustrato in Figura 18.1. La mensola superiore è soggetta ad una distribuzione di carico uniforme di intensità q . Si vuol conoscere il momento lungo le tre mensole, gli sforzi normali nei due pendoli, e la deformata del sistema.

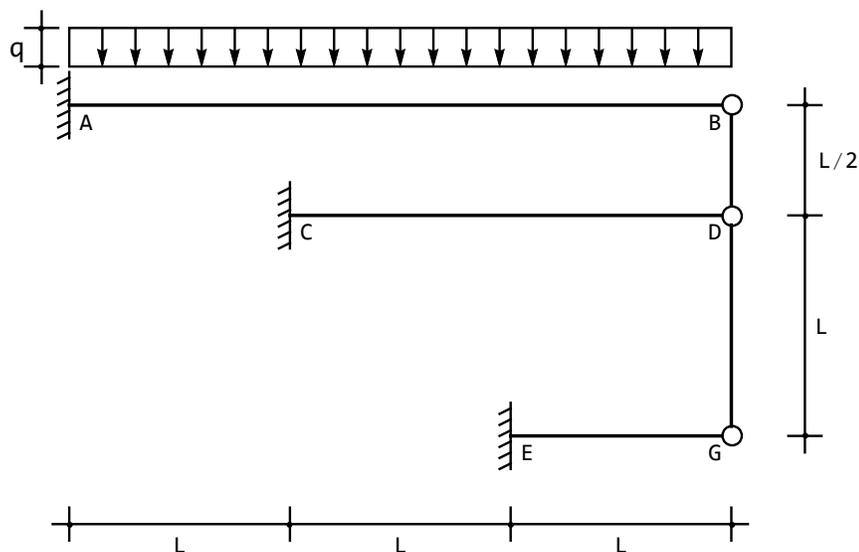


Figura 18.1: Un insieme di tre mensole collegate da pendoli

La struttura è costituita da tre tratti e due pendoli di collegamento. Le linee

elastiche dei tre tratti AB , CD ed EG sono facilmente scrivibili come:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{24EI} \\ u_2^{CD}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 + b_2x_3^2 + b_3x_3^3 \\ u_2^{EG}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \end{aligned} \quad (18.1)$$

Si assumerà poi, come usuale, di poter trascurare la deformabilità assiale dei tre tratti, per cui le relative linee elastiche assiali si annulleranno. In questa stessa ipotesi, gli spostamenti trasversali dei due pendoli saranno anch'essi nulli. Infine, poichè i pendoli sono inestensibili, essi subiranno lo stesso spostamento assiale, costante, e potrà quindi scriversi:

$$\begin{aligned} u_3^{DB}(x_3) &= \delta \\ u_3^{GD}(x_3) &= \delta \end{aligned} \quad (18.2)$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno banali:

— nei tre incastri, in A , C ed E si annullano gli spostamenti e le rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(0) &= 0 \\ \phi^{AB}(0) &= 0 \\ u_2^{CD}(0) &= 0 \\ \phi^{CD}(0) &= 0 \\ u_2^{EG}(0) &= 0 \\ \phi^{EG}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (18.3)$$

— nelle cerniere in B e D la congruenza impone che lo spostamento trasversale del tratto verticale sia uguale e contrario allo spostamento assiale del pendolo DB , mentre la presenza della cerniera impone che il momento sul tratto orizzontale sia nullo:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(3L) &= -\delta \\ m^{AB}(3L) &= 0 \\ u_2^{CD}(2L) &= -\delta \\ m^{CD}(2L) &= 0 \end{aligned} \quad (18.4)$$

— nella cerniera in G la congruenza impone che lo spostamento trasversale del tratto verticale sia uguale e contrario allo spostamento assiale del pendolo GD , mentre il vincolo impone che il momento sul tratto orizzontale sia nullo:

$$\begin{aligned} u_2^{EG}(L) &= -\delta \\ m^{EG}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (18.5)$$

Si hanno quindi dodici equazioni, cui va aggiunta l'equazione di piano, che impone l'equilibrio del tratto verticale:

$$-t^{AB}(3L) - t^{CD}(2L) - t^{EG}(L) = 0 \quad (18.6)$$

Risolte queste equazioni, e quindi dedotti gli spostamenti trasversali delle tre aste orizzontali, nonché l'abbassamento δ dei due pendoli, si possono dedurre momenti e tagli. Infine, gli sforzi normali nei pendoli si calcolano dalle equazioni di equilibrio non utilizzate in precedenza:

$$\begin{aligned} -t^{AB}(3L) + n^{DB}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\ -t^{EG}(L) - n^{GD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (18.7)$$

Gli spostamenti delle tre aste sono forniti da:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{qx_3^2(7425L^2 - 3837Lx_3 + 502x_3^2)}{12048EI} \\ u_2^{CD}(x_3) &= \frac{81qL(6L - x_3)x_3^2}{4016EI} \\ u_2^{EG}(x_3) &= \frac{81qL(3L - x_3)x_3^2}{502EI} \end{aligned} \quad (18.8)$$

mentre l'abbassamento δ dei due pendoli è fornito da:

$$\delta = -\frac{81qL^4}{251EI} \quad (18.9)$$

La relativa deformata è presentata in Figura 18.2.

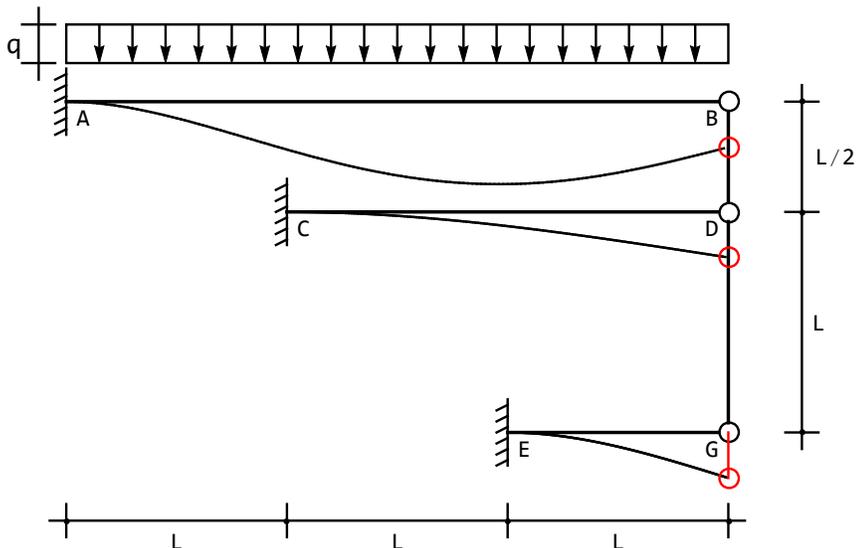


Figura 18.2: La deformata della struttura in Figura 18.1

I momenti si ottengono per doppia derivazione:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{q(2475L^2 - 3837Lx_3 + 1004x_3^2)}{2008} \\
 m^{CD}(x_3) &= -\frac{243qL(2L - x_3)}{2008} \\
 m^{EG}(x_3) &= -\frac{243}{251}qL(L - x_3)
 \end{aligned}
 \tag{18.10}$$

e si presentano come in Figura 18.3.

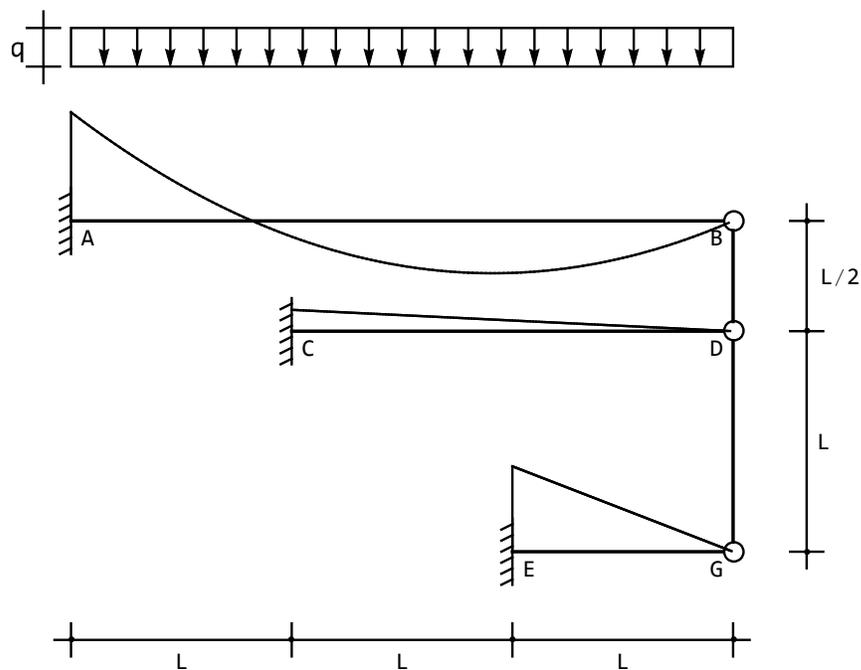


Figura 18.3: I momenti sulla struttura in Figura 18.1

In corrispondenza dei tre incastrati si hanno i valori:

$$\begin{aligned}
 m_A &= -\frac{2475}{2008}qL^2 \\
 m_B &= -\frac{243}{1004}qL^2 \\
 m_C &= -\frac{243}{251}qL^2
 \end{aligned}
 \tag{18.11}$$

Infine, gli sforzi normali nei due pendoli si ottengono a partire dalle (18.7):

$$\begin{aligned} n^{DB}(x_3) &= -\frac{2187}{2008}qL \\ n^{GD}(x_3) &= -\frac{243}{251}qL \end{aligned} \quad (18.12)$$

La scrittura diretta delle equazioni di congruenza

Si eliminino i due pendoli, sostituendoli con gli sforzi assiali incogniti X_1 ed X_2 , giungendo quindi al sistema isostatico equivalente di Figura 18.4. Su di esso si scrivano le equazioni di congruenza, imponendo che gli spostamenti verticali del punto B e del punto D siano uguali, così come uguali dovranno essere gli spostamenti verticali del punto D e del punto G :

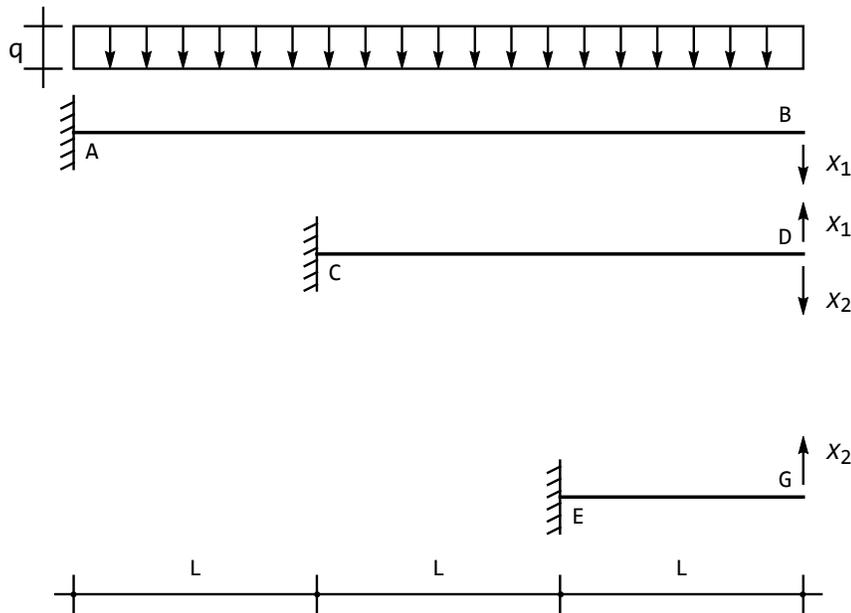


Figura 18.4: Un sistema isostatico equivalente alla struttura in Figura 18.1

$$\begin{aligned} u_2^B &= u_2^D \\ u_2^D &= u_2^G \end{aligned} \quad (18.13)$$

ossia, esplicitando i contributi sugli schemi a mensola:

$$\begin{aligned} X_1 \frac{(3L)^3}{3EI} + q \frac{(3L)^4}{8EI} &= -X_1 \frac{(2L)^3}{3EI} + X_2 \frac{(2L)^3}{3EI} \\ -X_1 \frac{(2L)^3}{3EI} + X_2 \frac{(2L)^3}{3EI} &= -X_2 \frac{L^3}{3EI} \end{aligned} \quad (18.14)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{2187}{2008}qL \\ X_2 &= -\frac{243}{251}qL \end{aligned} \quad (18.15)$$

coincidente con le (18.12). Da essi è immediato risalire ai momenti negli incastri.

18.1 La presenza di variazioni termiche flessionali

Si immagini ora che le tre travi siano soggette ad una variazione termica flessionale $\mu = -\frac{\alpha\Delta T}{h}$, come riportato in Figura 18.5.

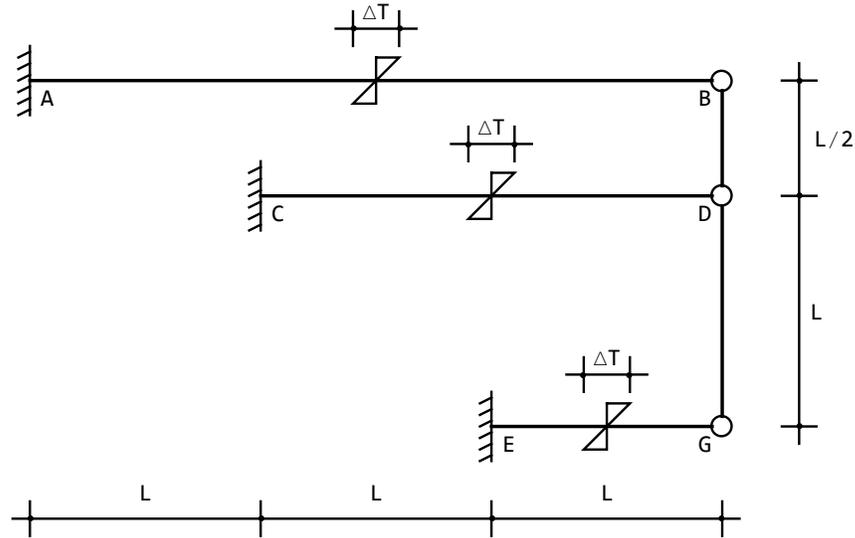


Figura 18.5: Tre mensole collegate da pendoli e soggette a variazione termica

Le linee elastiche dei tre tratti AB , CD ed EG saranno ora polinomi cubici, le condizioni ai limiti non cambieranno, ma i momenti lungo le aste soggette alla distorsione saranno pari a:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= -EI \left(\frac{d^2 u_2^{AB}}{dx_3^2} \right) + EI\mu \\ m^{CD}(x_3) &= -EI \left(\frac{d^2 u_2^{CD}}{dx_3^2} \right) + EI\mu \\ m^{EG}(x_3) &= -EI \left(\frac{d^2 u_2^{EG}}{dx_3^2} \right) + EI\mu \end{aligned} \quad (18.16)$$

Ne seguono gli spostamenti trasversali dei tre tratti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{x_3^2(-119L + 69x_3)}{1004L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{x_3^2(23L + 38x_3)}{502L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\
 u_2^{EG}(x_3) &= -\frac{(937L - 145x_3)x_3^2}{1004L} \alpha \frac{\Delta T}{h}
 \end{aligned} \tag{18.17}$$

mentre l'innalzamento δ dei due pendoli è fornito da:

$$\delta = \frac{198L^2}{251} \alpha \frac{\Delta T}{h} \tag{18.18}$$

La relativa deformata è presentata in Figura 18.6. I momenti si ottengono

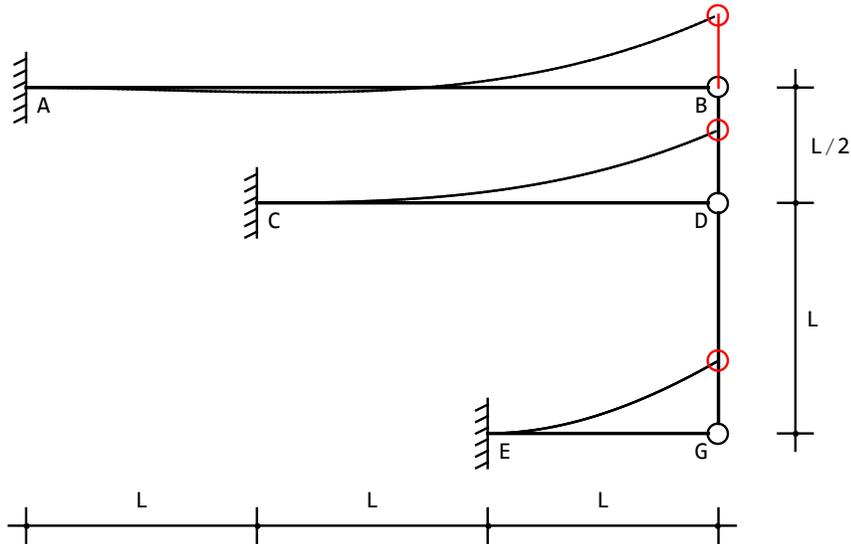


Figura 18.6: La deformata della struttura in Figura 18.5

in base alle (18.16):

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{207EI(3L - x_3)}{502L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\
 m^{CD}(x_3) &= -\frac{114EI(2L - x_3)}{251L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\
 m^{EG}(x_3) &= \frac{435EI(L - x_3)}{502L} \alpha \frac{\Delta T}{h}
 \end{aligned} \tag{18.19}$$

e si presentano come in Figura 18.7.

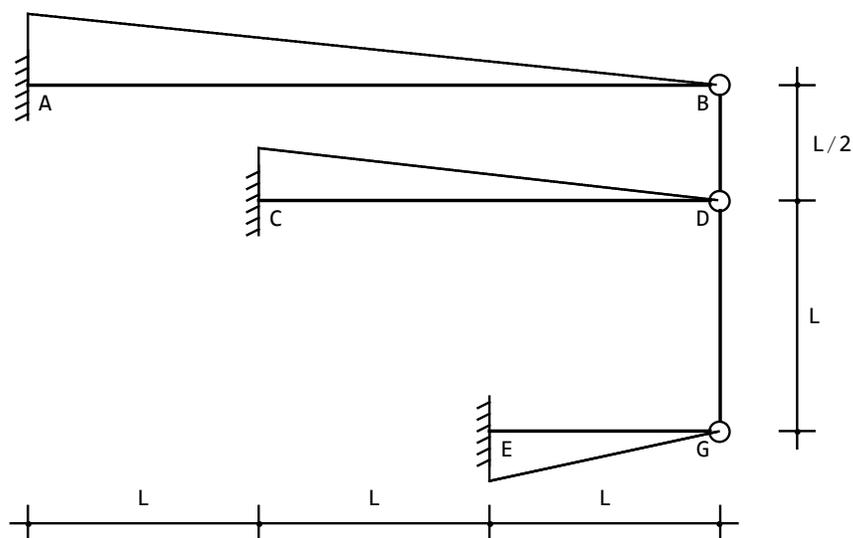


Figura 18.7: I momenti flettenti sulla struttura in Figura 18.5

In corrispondenza dei tre incastri si hanno i valori:

$$\begin{aligned} m_A &= -\frac{621EI}{502} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\ m_B &= -\frac{228EI}{251} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\ m_C &= \frac{435EI}{502} \alpha \frac{\Delta T}{h} \end{aligned} \quad (18.20)$$

Infine, gli sforzi normali nei due pendoli si ottengono a partire dalle (18.7):

$$\begin{aligned} n^{DB}(x_3) &= \frac{207EI}{502L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\ n^{GD}(x_3) &= \frac{435EI}{502L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \end{aligned} \quad (18.21)$$

La scrittura diretta delle equazioni di congruenza

Si eliminino i due pendoli, sostituendoli con gli sforzi assiali incogniti X_1 ed X_2 , stabilendo quindi la struttura isostatica equivalente di Figura . Su di essa, si scrivano le equazioni di congruenza, imponendo che gli spostamenti verticali del punto B e del punto D siano uguali, così come uguali dovranno essere gli spostamenti verticali del punto D e del punto G :

$$\begin{aligned} u_2^B &= u_2^D \\ u_2^D &= u_2^G \end{aligned} \quad (18.22)$$

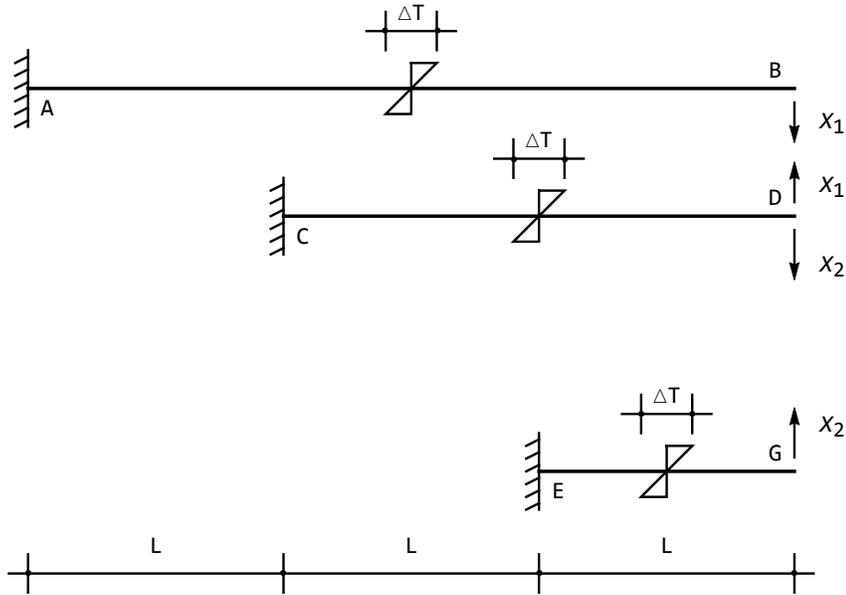


Figura 18.8: Un sistema isostatico equivalente alla struttura in Figura 18.5

ossia, esplicitando i contributi sugli schemi a mensola:

$$\begin{aligned} X_1 \frac{(3L)^3}{3EI} + \frac{\mu}{2}(3L)^2 &= -X_1 \frac{(2L)^3}{3EI} + X_2 \frac{(2L)^3}{3EI} + \frac{\mu}{2}(2L)^2 \\ -X_1 \frac{(2L)^3}{3EI} + X_2 \frac{(2L)^3}{3EI} + \frac{\mu}{2}(2L)^2 &= -X_2 \frac{L^3}{3EI} + \frac{\mu}{2}L^2 \end{aligned} \quad (18.23)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{207EI}{502L} \mu \\ X_2 &= -\frac{435EI\mu}{502L} \end{aligned} \quad (18.24)$$

coincidenti con le (18.21). Da essi è immediato risalire ai momenti negli incastri.

L'unico contributo nelle (18.23) che forse merita un approfondimento è quello delle variazioni termiche, da calcolare sullo schema a mensola. Utilizzando le analogie di Mohr, si ha un carico fittizio pari alla distorsione, e quindi il momento fittizio sullo schema ausiliario libero-incastato è fornito da $\mu L^2/2$.

Se si vuol considerare la deformabilità assiale dei pendoli, le equazioni di congruenza si dovranno modificare in:

$$\begin{aligned} u_2^B - u_2^D &= -X_1 \frac{L}{2EA} \\ u_2^D - u_2^G &= -X_2 \frac{L}{EA} \end{aligned} \quad (18.25)$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{9EAEIL(5EI + 23EAL^2)\mu}{9EI^2 + 237EAEIL^2 + 502EA^2L^4} \\ X_2 &= -\frac{3EAEIL(9EI + 290EAL^2)\mu}{2(9EI^2 + 237EAEIL^2 + 502EA^2L^4)} \end{aligned} \quad (18.26)$$

Il segno meno a secondo membro è dovuto al fatto che lo spostamento relativo tra i punti B e D risulta positivo se corrisponde ad un accorciamento del pendolo ($u_2^B > u_2^D$) mentre gli sforzi normali nei pendoli sono di trazione, e quindi allungano il pendolo.

18.2 La presenza delle variazioni termiche assiali nei pendoli

Si immagini infine che i pendoli siano soggetti ad una variazione termica uniforme $\lambda = -\alpha\Delta T$, come riportato in Figura 18.9.

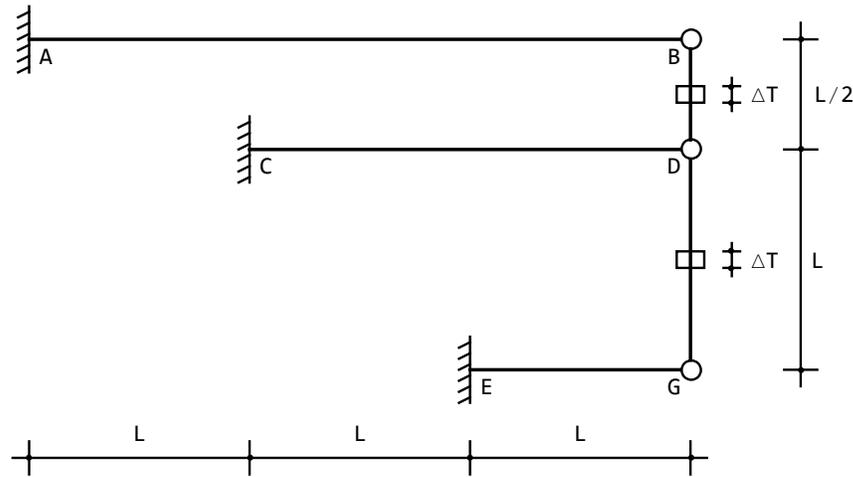


Figura 18.9: Tre mensole collegate da pendoli soggetti a variazione termica

In ipotesi di indeformabilità assiale dei pendoli si avrà:

$$\begin{aligned} u_3^{DB}(x_3) &= -\lambda x_3 + d_0 \\ u_3^{GD}(x_3) &= -\lambda x_3 + e_0 \end{aligned} \quad (18.27)$$

in quanto la deformazione assiale nei pendoli é limitata alla parte non elastica, e quindi $e_{33} = -\lambda$.

Le condizioni ai limiti da imporre saranno ora leggermente modificate; ed infatti le condizioni nei tre incastri restano valide, mentre in B bisognerà scrivere:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(3L) &= -u_3^{DB}\left(\frac{L}{2}\right) \\ m^{AB}(3L) &= 0 \end{aligned} \quad (18.28)$$

— nella cerniera in C la congruenza impone che lo spostamento trasversale del tratto verticale sia uguale e contrario allo spostamento assiale del pendolo DB , e che gli spostamenti assiali dei due pendoli siano uguali, mentre il vincolo impone che il momento sul tratto orizzontale sia nullo:

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(2L) &= -u_3^{DB}(0) \\ u_3^{DB}(0) &= u_3^{GD}(L) \\ m^{CD}(2L) &= 0 \end{aligned} \quad (18.29)$$

— nella cerniera in G la congruenza impone che lo spostamento trasversale del tratto verticale sia uguale e contrario allo spostamento assiale del pendolo GD , il vincolo impone che il momento sul tratto orizzontale sia nullo:

$$\begin{aligned} u_2^{EG}(L) &= -u_3^{GD}(0) \\ m^{EG}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (18.30)$$

Si hanno quindi tredici equazioni, cui va aggiunta la solita equazione di piano, che impone l'equilibrio del tratto verticale:

$$-t^{AB}(3L) - t^{CD}(2L) - t^{EG}(L) = 0 \quad (18.31)$$

Gli spostamenti delle tre aste sono forniti da:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{25(9L-x_3)x_3^2}{1004L^2}\alpha\Delta T \\ u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{53(6L-x_3)x_3^2}{1004L^2}\alpha\Delta T \\ u_2^{EG}(x_3) &= \frac{39(3L-x_3)x_3^2}{502L^2}\alpha\Delta T \end{aligned} \quad (18.32)$$

mentre gli spostamenti assiali dei due pendoli si calcolano come:

$$\begin{aligned} u_3^{DB}(x_3) &= -\left(\frac{212L}{251} + x_3\right)\alpha\Delta T \\ u_3^{GD}(x_3) &= \left(\frac{39L}{251} - x_3\right)\alpha\Delta T \end{aligned} \quad (18.33)$$

La relativa deformata è presentata in Figura 18.10,

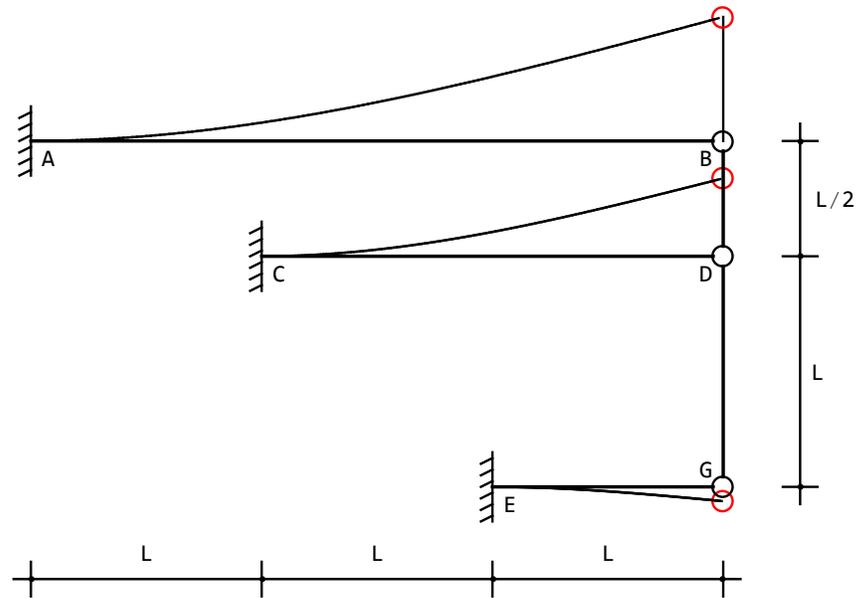


Figura 18.10: La deformata della struttura in Figura 18.9

I momenti si ottengono tramite doppia derivazione:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{75EI(3L - x_3)}{502L^2} \alpha \Delta T \\
 m^{CD}(x_3) &= \frac{159EI(2L - x_3)}{502L^2} \alpha \Delta T \\
 m^{EG}(x_3) &= -\frac{117EI(L - x_3)}{251L^2} \alpha \Delta T
 \end{aligned} \tag{18.34}$$

e si presentano come in Figura .

In corrispondenza dei tre incastri si hanno i valori:

$$\begin{aligned}
 m_A &= \frac{225EI}{502L^2} \alpha \Delta T \\
 m_B &= \frac{159EI}{251L^2} \alpha \Delta T \\
 m_C &= -\frac{117EI}{251L^2} \alpha \Delta T
 \end{aligned} \tag{18.35}$$

Infine, gli sforzi normali nei due pendoli si ottengono a partire dalle (18.7):

$$\begin{aligned}
 n^{DB}(x_3) &= -\frac{75EI}{502L^2} \alpha \Delta T \\
 n^{GD}(x_3) &= -\frac{117EI}{251L^2} \alpha \Delta T
 \end{aligned} \tag{18.36}$$

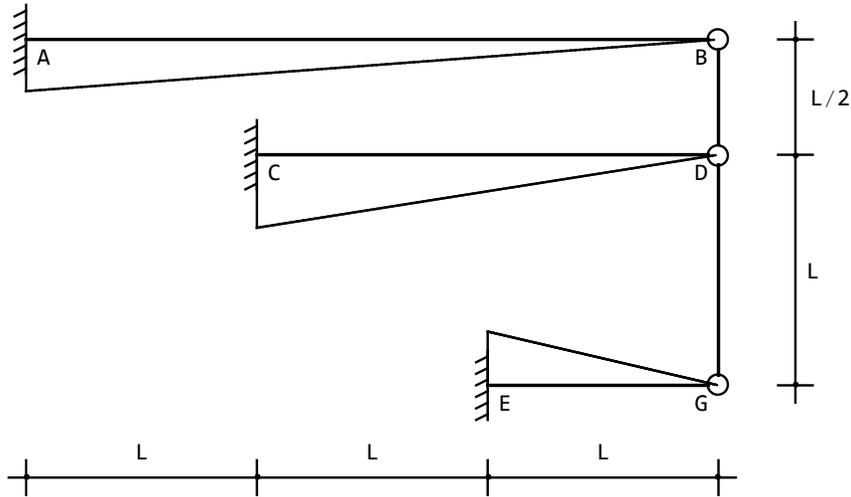


Figura 18.11: I momenti flettenti sulla struttura in Figura 18.9

Il caso dei pendoli estensibili

In ipotesi di deformabilità assiale dei pendoli si avranno le linee elastiche assiali:

$$\begin{aligned} u_3^{DB}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\ u_3^{GD}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 \end{aligned} \quad (18.37)$$

e gli sforzi normali si potranno ottenere tramite la formula generale:

$$\begin{aligned} n^{DB}(x_3) &= EA \left(\frac{du_3^{DB}}{dx_3} \right) + EA\lambda \\ n^{GD}(x_3) &= EA \left(\frac{du_3^{GD}}{dx_3} \right) + EA\lambda \end{aligned} \quad (18.38)$$

Occorrerà ora scrivere sedici equazioni di equilibrio e congruenza:

— nei tre incastri, in A , C ed E si annullano gli spostamenti trasversali e le rotazioni, ripetendo le condizioni (18.3).

— nella cerniera in B la congruenza impone che lo spostamento trasversale del tratto verticale sia uguale e contrario allo spostamento assiale del pendolo DB , il vincolo impone che il momento sul tratto orizzontale sia nullo, e l'equilibrio alla traslazione verticale rende uguali il taglio sul tratto orizzontale e lo sforzo normale nel pendolo:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(3L) &= -u_3^{DB}\left(\frac{L}{2}\right) \\
 m^{AB}(3L) &= 0 \\
 -t^{AB}(3L) + n^{DB}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0
 \end{aligned} \tag{18.39}$$

— nella cerniera tripla in C la congruenza impone che lo spostamento trasversale del tratto verticale sia uguale e contrario allo spostamento assiale del pendolo DB , e che gli spostamenti assiali dei due pendoli siano uguali. Il vincolo impone che il momento sul tratto orizzontale sia nullo, e l'equilibrio alla traslazione verticale rende uguali il taglio sul tratto orizzontale e lo sforzo normale nel pendolo:

$$\begin{aligned}
 u_2^{CD}(2L) &= -u_3^{DB}(0) \\
 u_3^{DB}(0) &= u_3^{GD}(L) \\
 m^{CD}(2L) &= 0 \\
 -t^{CD}(2L) - n^{DB}(0) + n^{GD}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{18.40}$$

— nella cerniera in G la congruenza impone che lo spostamento trasversale del tratto verticale sia uguale e contrario allo spostamento assiale del pendolo GD , il vincolo impone che il momento sul tratto orizzontale sia nullo, e l'equilibrio alla traslazione verticale rende il taglio sul tratto orizzontale uguale e contrario allo sforzo normale nel pendolo:

$$\begin{aligned}
 u_2^{EG}(L) &= -u_3^{GD}(0) \\
 m^{EG}(L) &= 0 \\
 -t^{EG}(L) - n^{GD}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{18.41}$$

Si giunge così ad un sistema di sedici equazioni, che permette la deduzione delle costanti di integrazione. Ne seguono gli spostamenti trasversali dei tre tratti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{A(3I + 25AL^2)\lambda(9L - x_3)x_3^2}{2(9I^2 + 237AIL^2 + 502A^2L^4)} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{53A^2L^2\lambda(6L - x_3)x_3^2}{2(9I^2 + 237AIL^2 + 502A^2L^4)} \\
 u_2^{EG}(x_3) &= -\frac{3A(I + 26AL^2)\lambda(3L - x_3)x_3^2}{2(9I^2 + 237AIL^2 + 502A^2L^4)}
 \end{aligned} \tag{18.42}$$

e gli spostamenti assiali dei due pendoli:

$$\begin{aligned}
 u_3^{DB}(x_3) &= -\frac{2AL^2\lambda(212AL^3 + (81I + 251AL^2)x_3)}{9I^2 + 237AIL^2 + 502A^2L^4} \\
 u_3^{GD}(x_3) &= \frac{AL^2\lambda(3L(I + 26AL^2) - (3I + 502AL^2)x_3)}{9I^2 + 237AIL^2 + 502A^2L^4}
 \end{aligned} \tag{18.43}$$

I momenti sono forniti da:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{3EAI(3I + 25AL^2)\lambda(3L - x_3)}{9I^2 + 237AIL^2 + 502A^2L^4} \\
 m^{CD}(x_3) &= -\frac{159EA^2EIL^2\lambda(2L - x_3)}{9I^2 + 237AIL^2 + 502A^2L^4} \\
 m^{EG}(x_3) &= \frac{9EAI(I + 26AL^2)\lambda(L - x_3)}{9I^2 + 237AIL^2 + 502A^2L^4}
 \end{aligned} \tag{18.44}$$

Infine, gli sforzi assiali nei pendoli sono forniti dalle (18.38):

$$\begin{aligned}
 n^{DB}(x_3) &= \frac{3EAI(3I + 25AL^2)\lambda}{9I^2 + 237AIL^2 + 502A^2L^4} \\
 n^{GD}(x_3) &= \frac{9EAI(I + 26AL^2)\lambda}{9I^2 + 237AIL^2 + 502A^2L^4}
 \end{aligned} \tag{18.45}$$

La scrittura diretta delle equazioni di congruenza

Si eliminino i due pendoli, sostituendoli con gli sforzi assiali incogniti X_1 ed X_2 , e si scrivano le equazioni di congruenza, imponendo ora che lo spostamento verticale relativo tra i punti B e D sia pari all'allungamento del pendolo dovuto alla distorsione assiale λ :

$$\begin{aligned}
 u_2^B - u_2^D &= \lambda \frac{L}{2} \\
 u_2^D - u_2^G &= \lambda L
 \end{aligned} \tag{18.46}$$

ossia, esplicitando i contributi sugli schemi a mensola:

$$\begin{aligned}
 X_1 \frac{(3L)^3}{3EI} + X_1 \frac{(2L)^3}{3EI} - X_2 \frac{(2L)^3}{3EI} &= \lambda \frac{L}{2} \\
 -X_1 \frac{(2L)^3}{3EI} + X_2 \frac{(2L)^3}{3EI} + X_2 \frac{L^3}{3EI} &= \lambda L
 \end{aligned} \tag{18.47}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{75EI\lambda}{502L^2} \\
 X_2 &= \frac{117EI\lambda}{251L^2}
 \end{aligned} \tag{18.48}$$

coincidente con le (18.36). Da essi è immediato risalire ai momenti negli incastri.

Il segno positivo a secondo membro delle (18.46) è dovuto al fatto che lo spostamento relativo tra i punti B e D risulta positivo se corrisponde ad un accorciamento del pendolo ($u_2^B > u_2^D$) ed anche la distorsione λ rappresenta un accorciamento percentuale.

Se si vuol considerare la deformabilità assiale dei pendoli, le equazioni di congruenza si dovranno modificare in:

$$\begin{aligned} X_1 \frac{(3L)^3}{3EI} + X_1 \frac{(2L)^3}{3EI} - X_2 \frac{(2L)^3}{3EI} &= \lambda \frac{L}{2} - X_1 \frac{L}{2EA} \\ -X_1 \frac{(2L)^3}{3EI} + X_2 \frac{(2L)^3}{3EI} + X_2 \frac{L^3}{3EI} &= \lambda L - X_2 \frac{L}{EA} \end{aligned} \quad (18.49)$$

ottenendo le (18.45)

Capitolo 19

Una mensola con sostegno

Si deduca il diagramma degli spostamenti e dei momenti per la struttura di Figura 19.1. In particolare, si calcoli lo spostamento nell'estremo libero C .

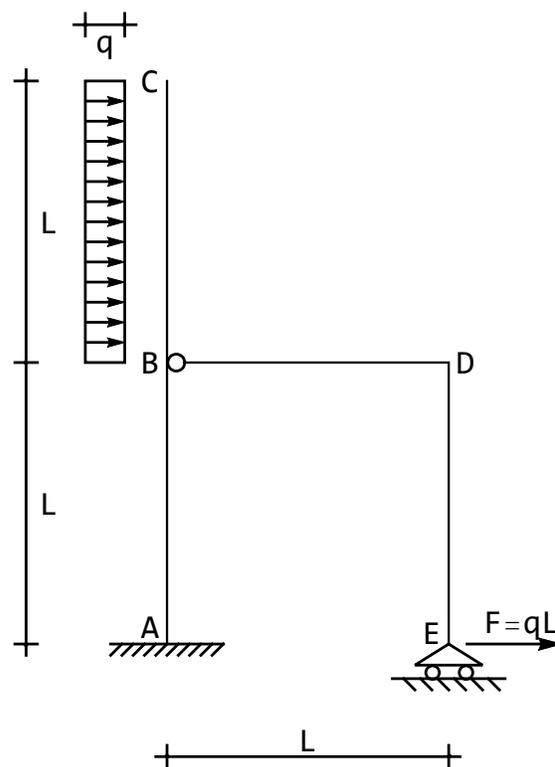


Figura 19.1: Una mensola verticale con sostegno

Con le usuali convenzioni, si definiscono le quattro linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\ u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{24EI} \end{aligned} \quad (19.1)$$

$$\begin{aligned} u_2^{BD}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\ u_2^{ED}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \end{aligned}$$

Assumando rigidità assiale infinita, le linee elastiche assiali sono costanti:

$$\begin{aligned} u_3^{AB}(x_3) &= b_0 \\ u_3^{BC}(x_3) &= d_0 \\ u_3^{BD}(x_3) &= f_0 \\ u_3^{ED}(x_3) &= h_0 \end{aligned} \quad (19.2)$$

Tuttavia, la presenza dell'incastro in A implica $u_3^{AB}(0) = 0$, e quindi la linea elastica assiale del tratto AB è identicamente nulla. Inoltre, poichè in B dovrà aversi $u_3^{AB}(L) = u_3^{BC}(0)$ potrà concludersi che anche la linea elastica assiale del tratto BC è identicamente nulla. Infine, la presenza del carrello a piano di scorrimento orizzontale in E implica che la linea elastica assiale del tratto ED sarà nulla. In definitiva, l'unica linea elastica assiale non banale è relativa al tratto orizzontale BD , il telaio è ad un nodo spostabile, e si potrà scrivere:

$$u_3^{BD}(x_3) = \delta \quad (19.3)$$

Ciò premesso, le condizioni ai limiti dovranno riguardare solo spostamenti trasversali, rotazioni, momenti e tagli. In A , quindi si scriveranno le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(0) &= 0 \\ \phi^{AB}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (19.4)$$

mentre la terza condizione sullo spostamento assiale è già stata utilizzata. Nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza tra le due aste verticali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(L) &= u_2^{BC}(0) \\ \phi^{AB}(L) &= \phi^{BC}(0) \end{aligned} \quad (19.5)$$

la condizione di congruenza tra una delle due aste verticali ed il tratto orizzontale:

$$u_2^{AB}(L) = \delta \quad (19.6)$$

e le condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} -t^{AB}(L) + t^{BC}(0) &= 0 \\ -m^{AB}(L) + m^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (19.7)$$

La presenza della cerniera in B implica poi l'annullarsi del momento lungo BD :

$$m^{BD}(0) = 0 \quad (19.8)$$

In corrispondenza dell'estremo libero in C si annulleranno sia taglio che momento:

$$\begin{aligned} t^{BC}(L) &= 0 \\ m^{BC}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (19.9)$$

Nel nodo D si hanno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{BD}(L) &= 0 \\ u_2^{ED}(L) &= \delta \\ \phi^{BD}(L) &= \phi^{DE}(L) \end{aligned} \quad (19.10)$$

e la condizione di equilibrio:

$$-m^{BD}(L) - m^{ED}(L) = 0 \quad (19.11)$$

In corrispondenza del carrello in E si potranno poi scrivere le due condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} m^{ED}(0) &= 0 \\ t^{ED}(0) + qL &= 0 \end{aligned} \quad (19.12)$$

Infine, l'equazione di piano impone l'equilibrio del tratto superiore:

$$-t^{AB}(L) - t^{ED}(L) + qL = 0 \quad (19.13)$$

La soluzione di queste diciassette equazioni è agevole, e porta alle linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{qL(15L - 4x_3)x_3^2}{12EI} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{q(22L^4 + 36L^3x_3 + 6L^2x_3^2 - 4Lx_3^3 + x_3^4)}{24EI} \\ u_2^{BD}(x_3) &= \frac{qLx_3(L^2 - x_3^2)}{6EI} \\ u_2^{ED}(x_3) &= \frac{qL(19L^3 - 10L^2x_3 + 2x_3^3)}{12EI} \end{aligned} \quad (19.14)$$

mentre le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= \frac{qL}{2}(-5L + 4x_3) \\ m^{BC}(x_3) &= -\frac{q}{2}(L - x_3)^2 \\ m^{BD}(x_3) &= qLx_3 \\ m^{ED}(x_3) &= -qLx_3 \end{aligned} \quad (19.15)$$

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= 2qL \\
 t^{BC}(x_3) &= q(L - x_3) \\
 t^{BD}(x_3) &= qL \\
 t^{ED}(x_3) &= -qL
 \end{aligned}
 \tag{19.16}$$

Lo spostamento assiale del traverso risulta pari a:

$$\delta = \frac{11 qL^4}{12 EI}
 \tag{19.17}$$

mentre gli sforzi normali si ottengono tramite considerazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= -qL \\
 n^{BC}(x_3) &= 0 \\
 n^{BD}(x_3) &= qL \\
 n^{ED}(x_3) &= qL
 \end{aligned}
 \tag{19.18}$$

La deformata si presenta come in Figura 19.2, e da essa risulta evidente che i due valori notevoli sono gli spostamenti orizzontali del carrello e dell'estremo libero.

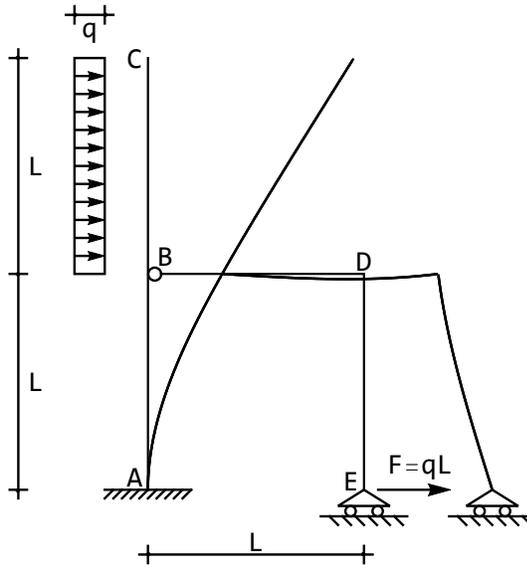


Figura 19.2: Una mensola verticale con sostegno

Lo spostamento orizzontale del carrello è pari a:

$$w_E = u_2^{ED}(0) = \frac{19 qL^4}{12 EI}
 \tag{19.19}$$

mentre l'estremo libero subisce uno spostamento orizzontale pari a:

$$w_C = u_2^{BC}(L) = \frac{61}{24} \frac{qL^4}{EI} \quad (19.20)$$

19.1 La linea elastica di Timoshenko

Con le usuali convenzioni, si definiscono le quattro funzioni ausiliarie:

$$\begin{aligned} \eta_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ \eta_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 + q \frac{x_3^4}{24EI} \\ \eta_2^{BD}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 \\ \eta_2^{ED}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (19.21)$$

per cui gli abbassamenti sono forniti da:

$$u_2 = \eta - \frac{EI}{GA_s} \eta'' \quad (19.22)$$

e le rotazioni, i momenti ed i tagli, da:

$$\begin{aligned} \phi &= -\eta' \\ m &= -EI\eta'' \\ t &= -EI\eta''' \end{aligned} \quad (19.23)$$

Ciò premesso, l'imposizione delle condizioni ai limiti porta alle linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{qLx_3(24EI + 15GA_sLx_3 - 4GA_sx_3^2)}{12EIGA_s} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{q}{24EIGA_s} (48EIL^2 + 22GA_sL^4 + 12(2EIL + 3GA_sL^3)x_3 + \\ &\quad (-12EI + 6GA_sL^2)x_3^2 - 4GA_sLx_3^3 + GA_sx_3^4) \\ u_2^{BD}(x_3) &= \frac{qLx_3(L^2 - x_3^2)}{6EI} \\ u_2^{ED}(x_3) &= \frac{qL(48EIL + 19GA_sL^3 - 2(12EI + 5GA_sL^2)x_3 + 2GA_sx_3^3)}{12EIGA_s} \end{aligned} \quad (19.24)$$

mentre le caratteristiche non dipendono dalle deformazioni da taglio.

Lo spostamento assiale del traverso risulta pari a:

$$\delta = \frac{11}{12} \frac{qL^4}{EI} + 2 \frac{qL^2}{GA_s} \quad (19.25)$$

Lo spostamento orizzontale del carrello è pari a:

$$w_E = u_2^{ED}(0) = \frac{19}{12} \frac{qL^4}{EI} + 4 \frac{qL^2}{GA_s} \quad (19.26)$$

mentre l'estremo libero subisce uno spostamento orizzontale pari a:

$$w_C = u_2^{BC}(L) = \frac{61}{24} \frac{qL^4}{EI} + \frac{5}{2} \frac{qL^2}{GA_s} \quad (19.27)$$

19.2 Il principio dei lavori virtuali

La struttura è isostatica (sei possibili equazioni di equilibrio nelle sei incognite statiche R_{Ah} , R_{Av} , M_{rA} , T_{BD} , N_{BD} , R_{Ev}), e per il calcolo del richiesto spostamento può farsi ricorso al principio dei lavori virtuali.

Come usuale, si assume come insieme di spostamenti geometricamente ammissibile quello calcolabile sullo schema (reale) di Figura 19.1, laddove l'insieme di forze staticamente ammissibile sarà quello (virtuale) di Figura 19.3.

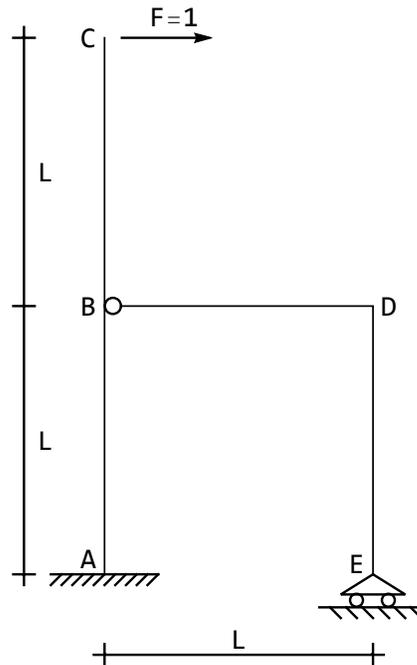


Figura 19.3: Il sistema S_1 virtuale delle forze

Il principio dei lavori virtuali assume l'aspetto:

$$\int_s M_1 \frac{M ds}{EI} = u_{3C} \quad (19.28)$$

dove si è trascurato il contributo di taglio e sforzo normale, M_1 è il momento calcolato sullo schema S_1 , M è il momento calcolato sullo schema di Figura 19.1.

I momenti

Il momento M deve essere calcolato sullo schema degli spostamenti.

La presenza della cerniera in B permette di asserire che il momento sul tratto BE è dovuto alla sola forza $F = qL$, mentre sul tratto AC il momento è causato dal solo carico distribuito q . Ne segue immediatamente il diagramma di Figura 19.4, con l'espressione analitica (19.15).

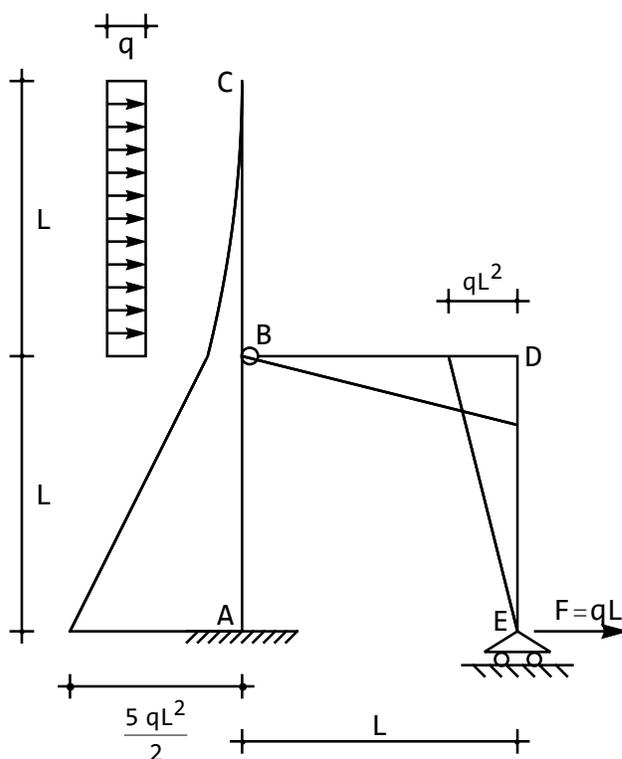


Figura 19.4: Il diagramma del momento sullo schema reale

Il momento M_1 deve essere invece calcolato sullo schema delle forze, ossia sullo schema di Figura 19.3, è diverso da zero solo lungo la mensola AC , dove varia linearmente tra 0, in sommità, e $2L$ alla base:

$$\begin{aligned} m_1^{BC}(x_3) &= -L + x_3 \\ m_1^{AB}(x_3) &= -2L + x_3 \end{aligned} \quad (19.29)$$

Lo spostamento

Il richiesto spostamento non dipende quindi dalla forza agente in E , ed è calcolabile come

$$\begin{aligned} u_{3C} &= \int_0^L (-2L + x_3) \frac{1}{2} q L \frac{(-5L + 4x_3)}{EI} dx_3 - \int_0^L (-L + x_3) \frac{1}{2} q \frac{(L - x_3)^2}{EI} dx_3 \\ &= \frac{61}{24} \frac{qL^4}{EI} \end{aligned} \quad (19.30)$$

L'influenza del taglio

Se le deformazioni da taglio non sono trascurabili, occorre modificare l'espressione del lavoro interno, scrivendo:

$$\int_s M_1 \frac{M ds}{EI} + \int_s T_1 \frac{T ds}{GA_s} = u_{3C} \quad (19.31)$$

Risulta immediato, tramite derivazione, scrivere le espressioni analitiche del taglio:

$$\begin{aligned} t^{BC}(x_3) &= q(L - x_3) \\ t^{AB}(x_3) &= 2qL \\ t^{BD}(x_3) &= qL \\ t^{ED}(x_3) &= -qL \\ t_1^{BC}(x_3) &= 1 \\ t_1^{AB}(x_3) &= 1 \end{aligned} \quad (19.32)$$

Lo spostamento addizionale dovuto al taglio è pertanto pari a :

$$\int_s T_1 \frac{T ds}{GA_s} = \int_0^L \frac{2qL}{GA_s} dx_3 + \int_0^L q \frac{(L - x_3)}{GA_s} dx_3 = \frac{5}{2} \frac{qL^2}{GA_s} \quad (19.33)$$

Capitolo 20

Un telaio a bandiera

Si vuole conoscere la deformata della struttura in Figura 20.1, insieme alle caratteristiche della sollecitazione interna.

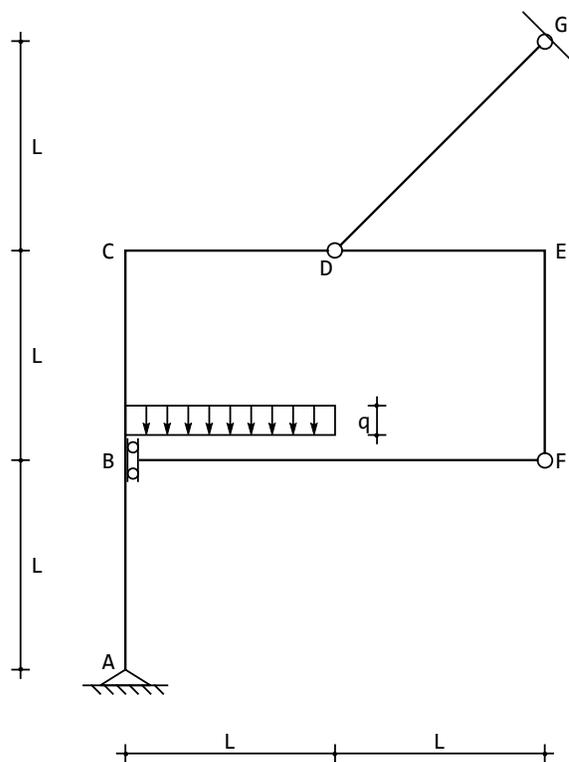


Figura 20.1: Un telaio a bandiera con bipendolo

Si divide il telaio in sei tratti ed un pendolo, e per ciascuno di essi si definisce

una linea elastica flessionale ed assiale, in funzione del modello strutturale che si vuole adottare. Ipotizzando di poter utilizzare la teoria di Eulero–Bernoulli per travi snelle, supponendo in un primo momento che le aste siano assialmente deformabili, le linee elastiche flessionali dei sei tratti saranno polinomi cubici, mentre le linee elastiche assiali saranno lineari. Per il pendolo DG, invece, la linea elastica flessionale sarà lineare, in quanto esso non sarà soggetto a momenti o tagli. Considerando infine che il tratto BH è soggetto ad un carico uniformemente distribuito, la sua linea elastica vedrà anche un termine quartico:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\
u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 \\
u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
u_3^{CD}(x_3) &= f_0 + f_1x_3 \\
u_2^{DE}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \\
u_3^{DE}(x_3) &= h_0 + h_1x_3 \\
u_2^{EF}(x_3) &= m_0 + m_1x_3 + m_2x_3^2 + m_3x_3^3 \\
u_3^{EF}(x_3) &= n_0 + n_1x_3 \\
u_2^{BH}(x_3) &= p_0 + p_1x_3 + p_2x_3^2 + p_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{24EI} \\
u_3^{BH}(x_3) &= q_0 + q_1x_3 \\
u_2^{HF}(x_3) &= r_0 + r_1x_3 + r_2x_3^2 + r_3x_3^3 \\
u_3^{HF}(x_3) &= s_0 + s_1x_3 \\
u_2^{DG}(x_3) &= v_0 + v_1x_3 \\
u_3^{DG}(x_3) &= w_0 + w_1x_3
\end{aligned} \tag{20.1}$$

Si ipotizza inoltre che il pendolo abbia rigidezza assiale EA_p , diversa dalla rigidezza assiale EA dei sei tratti.

Si scriveranno le seguenti condizioni ai limiti:

— nell'appoggio in A , si annulleranno ambedue le componenti di spostamento ed il momento flettente:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(0) &= 0 \\
u_3^{AB}(0) &= 0 \\
m^{AB}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{20.2}$$

— nel nodo in B si hanno le condizioni di congruenza tra i tratti AB e BC :

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(L) &= u_2^{BC}(0) \\
u_3^{AB}(L) &= u_3^{BC}(0) \\
\phi^{AB}(L) &= \phi^{BC}(0)
\end{aligned} \tag{20.3}$$

mentre le condizioni di congruenza tra l'asta AB e l'asta BH devono riguardare solo lo spostamento orizzontale e le rotazioni. La presenza del bipendolo, infatti, permette gli spostamenti verticali relativi:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(L) &= u_3^{BH}(0) \\ \phi^{AB}(L) &= \phi^{BH}(0) \end{aligned} \quad (20.4)$$

Le condizioni di equilibrio alla traslazione orizzontale ed alla rotazione portano a scrivere:

$$\begin{aligned} -t^{AB}(L) + t^{BC}(0) + n^{BH}(0) &= 0 \\ -m^{AB}(L) + m^{BC}(0) + m^{BH}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (20.5)$$

mentre il taglio $t^{BH}(0)$ dovrà essere nullo, per la presenza del bipendolo, e quindi:

$$\begin{aligned} n^{AB}(L) - n^{BC}(0) &= 0 \\ t^{BH}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (20.6)$$

— nel nodo C , le condizioni di congruenza e di equilibrio dettano le sei condizioni:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(L) &= u_3^{CD}(0) \\ u_3^{BC}(L) &= -u_2^{CD}(0) \\ \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0) \end{aligned} \quad (20.7)$$

$$\begin{aligned} -t^{BC}(L) + n^{CD}(0) &= 0 \\ n^{BC}(L) + t^{CD}(0) &= 0 \\ -m^{BC}(L) + m^{CD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (20.8)$$

— il nodo D è una cerniera in cui convergono due tratti ed il pendolo. La congruenza tra i due tratti orizzontali riguarda gli spostamenti orizzontali e verticali:

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(L) &= u_2^{DE}(0) \\ u_3^{CD}(L) &= u_3^{DE}(0) \end{aligned} \quad (20.9)$$

mentre sono permesse le rotazioni relative. Analogamente, la congruenza tra il tratto CD ed il pendolo DG si scriverà, considerando che il pendolo è inclinato di quarantacinque gradi:

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(L) &= -\frac{u_3^{DG}(0)}{\sqrt{2}} + \frac{u_2^{DG}(0)}{\sqrt{2}} \\ u_3^{CD}(L) &= \frac{u_3^{DG}(0)}{\sqrt{2}} + \frac{u_2^{DG}(0)}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (20.10)$$

L'equilibrio del nodo alla traslazione orizzontale e verticale detta le due equazioni:

$$\begin{aligned} -n^{CD}(L) + n^{DE}(0) + \frac{n^{DG}(0)}{\sqrt{2}} &= 0 \\ -t^{CD}(L) + t^{DE}(0) - \frac{n^{DG}(0)}{\sqrt{2}} &= 0 \end{aligned} \quad (20.11)$$

Infine, i momenti sui tratti orizzontali devono annullarsi:

$$\begin{aligned} m^{CD}(L) &= 0 \\ m^{DE}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (20.12)$$

— nel nodo E , le condizioni di congruenza e di equilibrio dettano le sei condizioni:

$$\begin{aligned} u_2^{DE}(L) &= u_3^{EF}(0) \\ u_3^{DE}(L) &= -u_2^{EF}(0) \\ \phi^{DE}(L) &= \phi^{EF}(0) \end{aligned} \quad (20.13)$$

$$\begin{aligned} -t^{DE}(L) + n^{EF}(0) &= 0 \\ -n^{DE}(L) - t^{EF}(0) &= 0 \\ -m^{DE}(L) + m^{EF}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (20.14)$$

— il nodo F è una cerniera d'angolo, in cui possono scriversi le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{HF}(L) &= u_3^{EF}(L) \\ u_3^{HF}(L) &= -u_2^{EF}(L) \end{aligned} \quad (20.15)$$

le due condizioni di equilibrio alla traslazione:

$$\begin{aligned} -t^{HF}(L) - n^{EF}(L) &= 0 \\ -n^{HF}(L) + t^{EF}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (20.16)$$

e le due condizioni di vincolo:

$$\begin{aligned} m^{HF}(L) &= 0 \\ m^{EF}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (20.17)$$

— il nodo H è stato introdotto solo perchè il tratto orizzontale è parzialmente caricato, ma in esso non vi sono discontinuità di sorta, e quindi si potranno

scrivere le sei condizioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{BH}(L) &= u_2^{HF}(0) \\
 u_3^{BH}(L) &= u_3^{HF}(0) \\
 \phi^{BH}(L) &= \phi^{HF}(0) \\
 -t^{BH}(L) + t^{HF}(0) &= 0 \\
 -n^{BH}(L) + n^{HF}(0) &= 0 \\
 -m^{BH}(L) + m^{HF}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{20.18}$$

— infine, il nodo G è fisso, e quindi sono nulle le due componenti di spostamento:

$$\begin{aligned}
 u_2^{DG}(\sqrt{2}L) &= 0 \\
 u_3^{DG}(\sqrt{2}L) &= 0
 \end{aligned} \tag{20.19}$$

Si ottengono le costanti di integrazione, da cui gli spostamenti assiali e trasversali, e per derivazione le caratteristiche della sollecitazione interna. Per gli spostamenti trasversali si avrà:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{L}{4} \left(\frac{10}{EA} + \frac{4\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{5L^2}{EI} \right) qx_3 + \frac{Lqx_3^3}{12EI} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{qL^2}{6} \left(\frac{15}{EA} + \frac{6\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{8L^2}{EI} \right) + \frac{qL}{2} \left(\frac{5}{EA} + \frac{2\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{3L^2}{EI} \right) x_3 + \\
 &\quad \frac{L^2qx_3^2}{EI} - \frac{Lqx_3^3}{12EI} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{3L^2q}{EA} + \frac{1}{4}L \left(\frac{10}{EA} + \frac{4\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{13L^2}{EI} \right) qx_3 + \frac{3L^2qx_3^2}{4EI} - \frac{Lqx_3^3}{4EI} \\
 u_2^{DE}(x_3) &= \frac{qL^2}{4} \left(\frac{22}{EA} + \frac{4\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{15L^2}{EI} \right) + \left(\frac{6Lq}{EA} + \frac{\sqrt{2}Lq}{EA_p} + \frac{13L^3q}{4EI} \right) x_3 - \\
 &\quad \frac{Lqx_3^3}{6EI} \\
 u_2^{EF}(x_3) &= -\frac{L^2(8\sqrt{2}AI + 26A_pI + 15AA_pL^2)q}{4EAA_pI} + \\
 &\quad \left(\frac{6Lq}{EA} + \frac{\sqrt{2}Lq}{EA_p} + \frac{11L^3q}{4EI} \right) x_3 - \frac{L^2qx_3^2}{2EI} + \frac{Lqx_3^3}{6EI}
 \end{aligned} \tag{20.20}$$

$$\begin{aligned}
u_2^{BH}(x_3) &= \frac{15L^2q}{2EA} + \frac{149L^4q}{24EI} + \frac{1}{2}L \left(\frac{5}{EA} + \frac{2\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{3L^2}{EI} \right) qx_3 - \\
&\quad \frac{3L^2qx_3^2}{4EI} + \frac{qx_3^4}{24EI} \\
u_2^{HF}(x_3) &= L^2 \left(\frac{10}{EA} + \frac{\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{7L^2}{EI} \right) q + \frac{1}{6}L \left(\frac{15}{EA} + \frac{6\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{L^2}{EI} \right) qx_3 - \\
&\quad \frac{L^2qx_3^2}{2EI} + \frac{Lqx_3^3}{6EI} \\
u_2^{DG}(x_3) &= \frac{1}{4}L^2 \left(\frac{22\sqrt{2}}{EA} + \frac{12}{EA_p} + \frac{15\sqrt{2}L^2}{EI} \right) q - \\
&\quad \frac{L(6\sqrt{2}AI + 22A_pI + 15AA_pL^2)qx_3}{4EAA_pI}
\end{aligned}$$

I momenti ed i tagli non sono invece influenzati dalla deformabilità assiale delle aste:

$$\begin{aligned}
m^{AB}(x_3) &= -\frac{qL}{2}x_3 \\
m^{BC}(x_3) &= \frac{qL}{2}(-4L + x_3) \\
m^{CD}(x_3) &= -\frac{3}{2}qL(L - x_3) \\
m^{DE}(x_3) &= qLx_3 \\
m^{EF}(x_3) &= qL(L - x_3) \\
m^{BH}(x_3) &= \frac{q}{2}(3L^2 - x_3^2) \\
m^{HF}(x_3) &= qL(L - x_3)
\end{aligned} \tag{20.21}$$

Gli sforzi di taglio si ottengono derivando i momenti:

$$\begin{aligned}
t^{AB}(x_3) &= -t^{BC}(x_3) = -\frac{qL}{2} \\
t^{CD}(x_3) &= \frac{3qL}{2} \\
t^{DE}(x_3) &= -t^{EF}(x_3) = t^{HF}(x_3) = qL \\
t^{BH}(x_3) &= -qx_3
\end{aligned} \tag{20.22}$$

Gli spostamenti assiali sono esprimibili come:

$$\begin{aligned}
u_3^{AB}(x_3) &= -\frac{3qLx_3}{2EA} \\
u_3^{BC}(x_3) &= -\frac{3L^2q}{2EA} - \frac{3Lqx_3}{2EA} \\
u_3^{CD}(x_3) &= \frac{1}{4}L^2 \left(\frac{20}{EA} + \frac{8\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{15L^2}{EI} \right) q + \frac{Lqx_3}{2EA}
\end{aligned} \tag{20.23}$$

$$\begin{aligned}
 u_3^{DE}(x_3) &= \frac{1}{4}L^2 \left(\frac{22}{EA} + \frac{8\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{15L^2}{EI} \right) q + \frac{Lqx_3}{EA} \\
 u_3^{EF}(x_3) &= \frac{1}{6}L^2 \left(\frac{69}{EA} + \frac{12\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{41L^2}{EI} \right) q + \frac{Lqx_3}{EA} \\
 u_3^{BH}(x_3) &= \frac{1}{6}L^2 \left(\frac{15}{EA} + \frac{6\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{8L^2}{EI} \right) q - \frac{Lqx_3}{EA} \\
 u_3^{HF}(x_3) &= \frac{1}{6}L^2 \left(\frac{9}{EA} + \frac{6\sqrt{2}}{EA_p} + \frac{8L^2}{EI} \right) q - \frac{Lqx_3}{EA} \\
 u_3^{DG}(x_3) &= \frac{L^2q}{EA_p} - \frac{Lqx_3}{\sqrt{2}EA_p}
 \end{aligned} \tag{20.24}$$

con i conseguenti sforzi assiali, anch'essi non influenzati dalle deformabilità assiali:

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= n^{BC}(x_3) = -\frac{3qL}{2} \\
 n^{CD}(x_3) &= \frac{qL}{2} \\
 n^{DE}(x_3) &= n^{EF}(x_3) = qL \\
 n^{BH}(x_3) &= n^{HF}(x_3) = -qL \\
 n^{DG}(x_3) &= -\frac{qL}{\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{20.25}$$

Le aliquote di spostamento dovute alla rigidità flessionale EI delle aste, alla rigidità assiale EA delle aste, ed alla rigidità EA_p del pendolo sono chiaramente individuabili. Portando EA ad infinito si giunge al modello di telaio assialmente rigido e pendolo estensibile, mentre portare anche EA_p ad infinito riproduce il caso di vincolo perfetto. In quest'ultimo caso si hanno gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{qL}{12EI} x_3 (15L^2 + x_3^2) \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{qL}{12EI} (16L^3 + 18L^2x_3 + 12Lx_3^2 - x_3^3) \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{qL}{4EI} x_3 (13L^2 + 3Lx_3 - x_3^2) \\
 u_2^{DE}(x_3) &= \frac{qL}{12EI} (45L^3 + 39L^2x_3 - 2x_3^3) \\
 u_2^{EF}(x_3) &= -\frac{qL}{12EI} (45L^3 - 33L^2x_3 + 6Lx_3^2 - 2x_3^3) \\
 u_2^{BH}(x_3) &= \frac{q}{24EI} (149L^4 + 36L^3x_3 - 18L^2x_3^2 + x_3^4)
 \end{aligned} \tag{20.26}$$

$$u_2^{HF}(x_3) = \frac{qL}{6EI} (42L^3 + L^2x_3 - 3Lx_3^2 + x_3^3)$$

$$u_2^{DG}(x_3) = \frac{15qL^3}{4EI} (\sqrt{2}L - x_3)$$

Gli spostamenti assiali in ipotesi di pendolo estensibile sono forniti da:

$$\begin{aligned}
 u_3^{AB}(x_3) &= 0 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= 0 \\
 u_3^{CD}(x_3) &= \frac{2\sqrt{2}qL^2}{EA_p} + \frac{15qL^4}{4EI} \\
 u_3^{DE}(x_3) &= \frac{2\sqrt{2}qL^2}{EA_p} + \frac{15qL^4}{4EI} \\
 u_3^{EF}(x_3) &= \frac{2\sqrt{2}qL^2}{EA_p} + \frac{41qL^4}{6EI} \\
 u_3^{BH}(x_3) &= \frac{\sqrt{2}qL^2}{EA_p} + \frac{4qL^4}{3EI} \\
 u_3^{HF}(x_3) &= \frac{\sqrt{2}qL^2}{EA_p} + \frac{4qL^4}{3EI} \\
 u_3^{DG}(x_3) &= \frac{qL(2L - \sqrt{2}x_3)}{2EA_p}
 \end{aligned} \tag{20.27}$$

con le ovvie semplificazioni se il pendolo diviene rigido:

$$\begin{aligned}
 u_3^{CD}(x_3) &= u_3^{DE}(x_3) = \frac{15}{4} \frac{qL^4}{EI} \\
 u_3^{BH}(x_3) &= u_3^{HF}(x_3) = \frac{4}{3} \frac{qL^4}{EI} \\
 u_3^{EF}(x_3) &= \frac{41}{6} \frac{qL^4}{EI}
 \end{aligned} \tag{20.28}$$

In ipotesi di rigidezze assiali infinite, la deformata si presenta come in Figura 20.2, mentre il diagramma del momento si presenta come in Figura 20.3. Come visivamente chiaro, il tratto orizzontale BH è slittato lungo il ritto della quantità:

$$\Delta v_B = u_2^{BH}(x_3 = 0) = \frac{149}{24} \frac{qL^4}{EI} \tag{20.29}$$

Problema: Sostituire l'appoggio in A con un incastro. In questo caso, le caratteristiche sono influenzate dalle rigidezze assiali dei tratti? e dalla rigidezza assiale del pendolo?

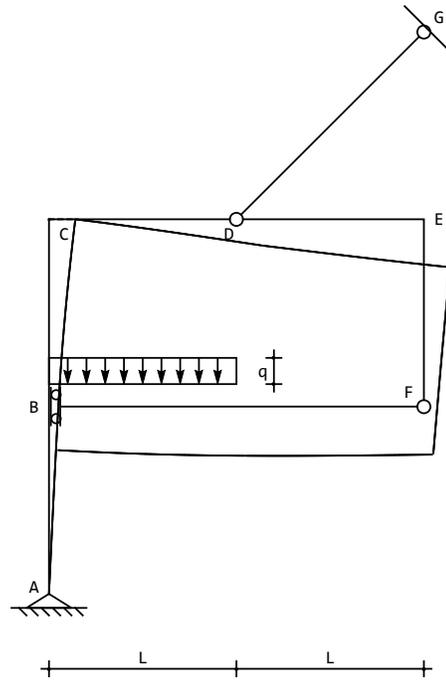


Figura 20.2: La deformata del telaio a bandiera con bipendolo

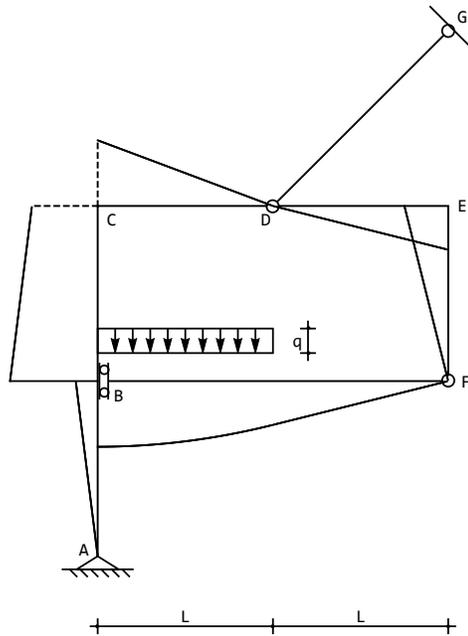


Figura 20.3: I momenti sul telaio a bandiera con bipendolo

20.1 La deduzione del diagramma dei momenti

Il telaio è costituito dai tre tratti AD , DF e BF , collegati a suolo mediante un appoggio ed un pendolo, e tra loro con una cerniera in D ed una cerniera in F . Inoltre, il tratto BF è collegato al tratto AD tramite un bipendolo ad asse di scorrimento verticale. Si possono scrivere nove equazioni di equilibrio, mentre le incognite statiche sono le due reazioni dell'appoggio in A , la reazione orizzontale e la coppia reattiva del bipendolo, gli sforzi normali ed i tagli nelle due cerniere, e lo sforzo normale nel pendolo DG . Sarà pertanto $3t - s = 9 - 9 = 0$, e la struttura è potenzialmente isostatica.

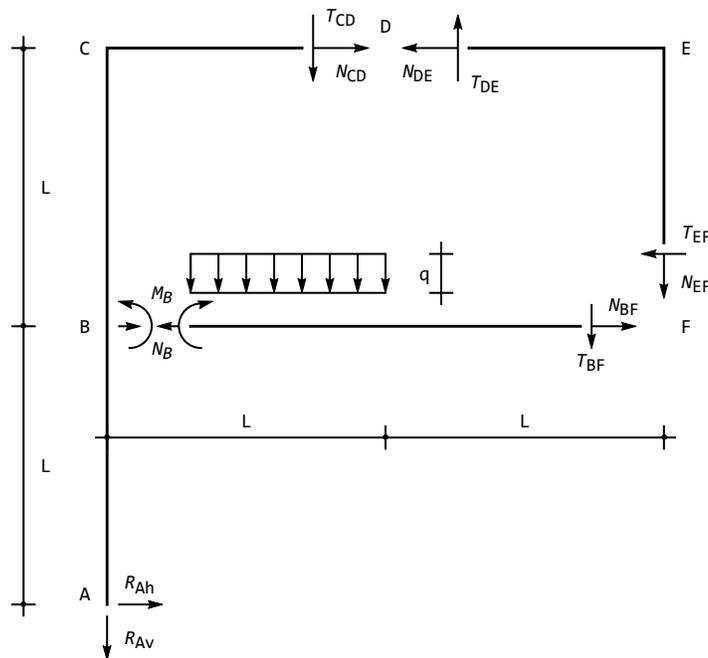


Figura 20.4: Lo schema per il calcolo delle equazioni di equilibrio

Per calcolare le reazioni, occorre considerare che la cerniera in D è anche soggetta alla reazione R_{DG} del pendolo, e che la cerniera in F è situata nell'angolo. Conviene quindi introdurre gli sforzi normali N_{CD} ed N_{DE} in D , rispettivamente sul primo e sul secondo tratto, gli sforzi di taglio T_{CD} e T_{DE} in D , rispettivamente sul primo e sul secondo tratto, gli sforzi normali N_{EF} ed N_{BF} in F , rispettivamente sul tratto EF e BF , e gli sforzi di taglio T_{EF} e T_{BF} in F , sugli stessi tratti. In tal modo le incognite salgono a tredici, e si potranno scrivere le nove equazioni di equilibrio dei tre tratti, da leggersi sullo schema di

Figura 20.4:

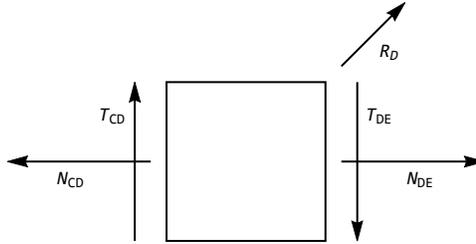
$$\begin{aligned} R_{Ah} + N_B + N_{CD} &= 0 \\ R_{Av} + T_{CD} &= 0 \end{aligned} \quad (20.30)$$

$$\begin{aligned} M_B + N_B L + 2R_{Ah} L + R_{Av} L &= 0 \\ N_{EF} - T_{DE} &= 0 \\ T_{EF} + N_{DE} &= 0 \\ -T_{EF} L - N_{EF} L &= 0 \\ -N_B + N_{BF} &= 0 \\ T_{BF} + qL &= 0 \\ -M_B + \frac{3}{2} qL^2 &= 0 \end{aligned} \quad (20.31)$$

avendo assunto i poli nei punti D , D ed F .

Le equazioni di equilibrio della cerniera in D possono leggersi dalla Figura 20.5:

$$\begin{aligned} -T_{CD} + T_{DE} - R_D \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \\ -N_{DCD} + N_{DE} + R_D \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (20.32)$$



mentre le equazioni di equilibrio della cerniera in F sono banali:

$$\begin{aligned} -N_{BF} + T_{EF} &= 0 \\ -T_{BF} - N_{EF} &= 0 \end{aligned} \quad (20.33)$$

Figura 20.5: Lo schema per l'equilibrio della cerniera in D)

La soluzione è abbastanza agevole, e porta alle reazioni:

$$\begin{aligned} R_{Ah} &= \frac{qL}{2} \\ R_{Av} &= -\frac{3}{2} qL \\ R_D &= -\frac{qL}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (20.34)$$

agli sforzi normali:

$$\begin{aligned} N_{CD} &= \frac{qL}{2} \\ N_{DE} &= qL \\ N_B &= -qL \\ N_{BF} &= -qL \\ N_{EF} &= qL \end{aligned} \quad (20.35)$$

agli sforzi di taglio:

$$\begin{aligned}T_{CD} &= \frac{3}{2}qL \\T_{DE} &= qL \\T_{BF} &= qL \\T_{EF} &= -qL\end{aligned}\tag{20.36}$$

ed al momento flettente:

$$M_B = \frac{3}{2}qL^2\tag{20.37}$$

Tutti questi valori sono ovviamente coincidenti con quanto dedotto in precedenza, e permettono di dedurre il diagramma dei momenti di Figura 20.3.

Capitolo 21

Maglia chiusa con variazione termica

La maglia chiusa quadrata di Figura 21.1 è soggetta ad una variazione termica uniforme ΔT lungo il tratto superiore. Si vuole conoscere la deformata e le caratteristiche della sollecitazione interna.

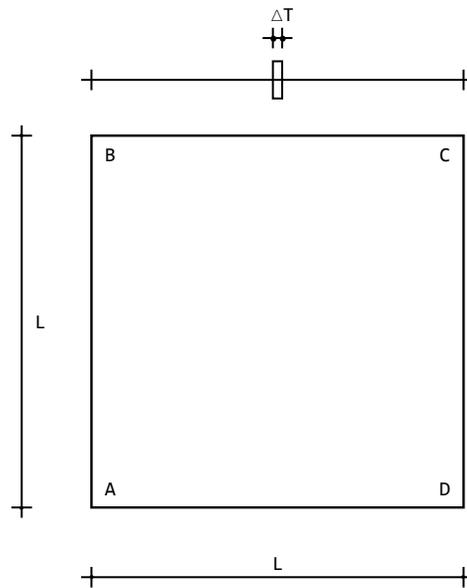


Figura 21.1: Una maglia chiusa con variazione termica

Il telaio non è soggetto a carichi distribuiti, e quindi le linee elastiche flessionali saranno polinomi cubici, mentre le linee elastiche assiali verranno inizial-

mente ipotizzate lineari, tenendo conto di una deformabilità assiale finita:

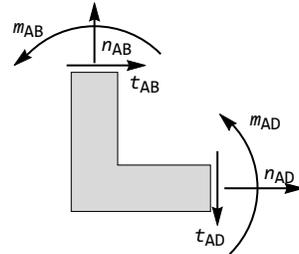
$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
 u_3^{CD}(x_3) &= f_0 + f_1x_3 \\
 u_2^{AD}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \\
 u_3^{AD}(x_3) &= h_0 + h_1x_3
 \end{aligned} \tag{21.1}$$

Poichè l'asta superiore è soggetta alla variazione termica uniforme ΔT , per essa lo sforzo normale si scriverà:

$$n^{BC}(x_3) = EA \frac{du_3(x_3)}{dx_3} - EA\alpha\Delta T \tag{21.2}$$

Si scriveranno sei condizioni ai limiti in ciascuno dei quattro nodi: — nel nodo in A lo spostamento trasversale del tratto verticale AB (positivo se verso destra) dovrà essere uguale allo spostamento assiale del tratto orizzontale AD (anch'esso positivo verso destra), mentre lo spostamento assiale del tratto verticale AB (positivo se verso l'alto) risulterà uguale e contrario allo spostamento trasversale del tratto orizzontale AD (positivo verso il basso). Le rotazioni dovranno essere uguali, mentre le tre condizioni di equilibrio possono leggersi dal diagramma di Figura 21.2:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= u_3^{AD}(0) \\
 u_3^{AB}(0) &= -u_2^{AD}(0) \\
 \phi^{AB}(0) &= \phi^{AD}(0) \\
 t^{AB}(0) + n^{AD}(0) &= 0 \\
 -n^{AB}(0) + t^{AD}(0) &= 0 \\
 m^{AB}(0) + m^{AD}(0) &= 0
 \end{aligned}$$

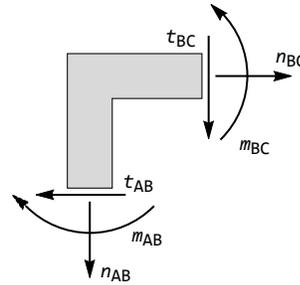


(21.3) Figura 21.2: Le forze agenti sul nodo A

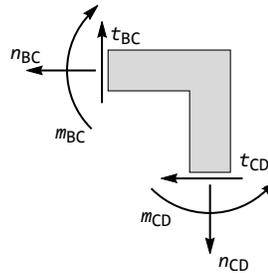
— nel nodo in B lo spostamento trasversale del tratto verticale AB (positivo se verso destra) dovrà essere uguale allo spostamento assiale del tratto orizzontale BC (anch'esso positivo verso destra), mentre lo spostamento assiale del tratto verticale AB (positivo se verso l'alto) risulterà uguale e contrario allo spostamento trasversale del tratto orizzontale BC (positivo verso il basso). Le rotazioni dovranno essere uguali, mentre le tre condizioni di equilibrio possono leggersi dal secondo diagramma di Figura 21.3:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(L) &= u_3^{BC}(0) \\
 u_3^{AB}(L) &= -u_2^{BC}(0) \\
 \phi^{AB}(L) &= \phi^{BC}(0) \\
 -t^{AB}(L) + n^{BC}(0) &= 0 \\
 n^{AB}(L) + t^{BC}(0) &= 0 \\
 -m^{AB}(L) + m^{BC}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{21.4}$$

— nel nodo in C lo spostamento trasversale del tratto orizzontale BC (positivo se verso il basso) dovrà essere uguale allo spostamento assiale del tratto verticale CD (anch'esso positivo verso il basso), mentre lo spostamento assiale del tratto orizzontale BC (positivo se verso destra) risulterà uguale e contrario allo spostamento trasversale del tratto verticale CD (positivo verso sinistra). Le rotazioni dovranno essere uguali, mentre le tre condizioni di equilibrio possono leggersi dal diagramma di Figura 21.4:


 Figura 21.3: Le forze agenti sul nodo B

$$\begin{aligned}
 u_2^{BC}(L) &= u_3^{CD}(0) \\
 u_3^{BC}(L) &= -u_2^{CD}(0) \\
 \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0) \\
 -t^{BC}(L) + n^{CD}(0) &= 0 \\
 -n^{BC}(L) - t^{CD}(0) &= 0 \\
 -m^{BC}(L) + m^{CD}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{21.5}$$


 Figura 21.4: Le forze agenti sul nodo C

— infine, nel nodo in D lo spostamento trasversale del tratto verticale CD (positivo se verso sinistra) dovrà essere uguale e contrario allo spostamento assiale del tratto orizzontale AD (positivo se verso destra), mentre lo spostamento assiale del tratto verticale CD (positivo se verso il basso) risulterà uguale allo spostamento trasversale del tratto orizzontale AD (positivo verso il basso). Le rotazioni dovranno essere uguali, mentre le tre condizioni di equilibrio possono leggersi dal diagramma di Figura 21.5:

$$\begin{aligned}
u_2^{CD}(L) &= -u_3^{AD}(L) \\
u_3^{CD}(L) &= u_2^{AD}(L) \\
\phi^{CD}(L) &= \phi^{AD}(L) \\
t^{CD}(L) - n^{AD}(L) &= 0 \\
-n^{CD}(L) - t^{AD}(L) &= 0 \\
-m^{CD}(L) - m^{AD}(L) &= 0
\end{aligned} \tag{21.6}$$

Poichè la struttura non è esternamente vincolata, essa risulta tre volte labile, anche se in equilibrio per l'assenza di carichi applicati, e quindi il sistema di equazioni ha una matrice dei coefficienti singolare. Il sistema può comunque risolversi per la particolare condizione di carico illustrata, e la soluzione include anche i tre possibili moti rigidi di traslazione e rotazione, che andranno opportunamente individuati ed eliminati. Si ottiene infatti:

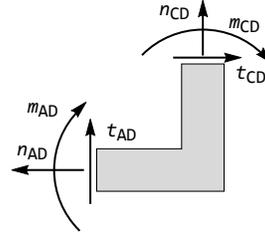


Figura 21.5: Le forze agenti sul nodo D)

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(x_3) &= h_0 + g_1 x_3 - \frac{3AL\alpha\Delta T x_3^2}{8(3I + AL^2)} + \frac{A\alpha\Delta T x_3^3}{12I + 4AL^2} \\
u_2^{CD}(x_3) &= -h_0 - g_1(L - x_3) - \frac{L(12I + 7AL^2)\alpha\Delta T}{8(3I + AL^2)} + \\
&\quad \left(\frac{3AL^2\alpha\Delta T}{4(3I + AL^2)} \right) x_3 + \frac{3AL\alpha\Delta T x_3^2}{8(3I + AL^2)} - \frac{EA\alpha\Delta T x_3^3}{4(3I + AL^2)} \\
u_2^{BC}(x_3) &= u_2^{AD}(x_3) = g_0 + g_1 x_3 + \frac{3AL\alpha\Delta T x_3^2}{8(3I + AL^2)} \\
u_3^{AB}(x_3) &= -g_0 \\
u_3^{CD}(x_3) &= g_0 + g_1 L + \frac{3AL^3\alpha\Delta T}{8(3I + AL^2)} \\
u_3^{BC}(x_3) &= h_0 + g_1 L - \frac{AL^3\alpha\Delta T}{8(3I + AL^2)} + \left(1 - \frac{3I}{6I + 2AL^2} \right) \alpha\Delta T x_3 \\
u_3^{AD}(x_3) &= h_0 + \frac{3I\alpha\Delta T x_3}{6I + 2AL^2}
\end{aligned} \tag{21.7}$$

Sono immediatamente evidenti i moti rigidi di traslazione orizzontale:

$$\begin{aligned}
u_2^{BC}(x_3) &= g_0 \\
u_2^{AD}(x_3) &= g_0 \\
u_3^{AB}(x_3) &= -g_0 \\
u_3^{CD}(x_3) &= g_0
\end{aligned} \tag{21.8}$$

e di traslazione verticale:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= h_0 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= -h_0 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= h_0 \\
 u_3^{AD}(x_3) &= h_0
 \end{aligned}
 \tag{21.9}$$

e sarà subito possibile porre $h_0 = 0$ e $g_0 = 0$. Il moto relativo alla costante g_1 è illustrato in Figura 21.6, ed è interpretabile come una rotazione intorno al punto A .

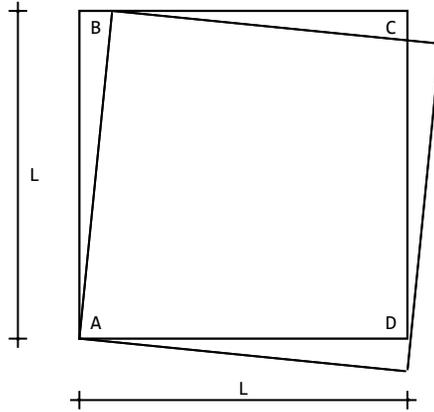


Figura 21.6: La deformata rigida dovuta a g_1

Il valore della costante g_1 può essere determinato sfruttando la simmetria della struttura e del carico rispetto alla verticale in mezzeria. Si imporrà quindi che sia:

$$u_3^{BC}\left(x_3 = \frac{L}{2}\right) = 0
 \tag{21.10}$$

e quindi subito:

$$g_1 = \frac{-6IL - 3AL^3}{8L(3I + AL^2)} \alpha \Delta T
 \tag{21.11}$$

In definitiva, il quadro deformativo è definibile come:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{\alpha \Delta T x_3 (6I + 3AL^2 + 3ALx_3 - 2Ax_3^2)}{8(3I + AL^2)} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{\alpha \Delta T (6IL + 4AL^3 + (6I - 3AL^2)x_3 - 3ALx_3^2 + 2Ax_3^3)}{8(3I + AL^2)} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= u_2^{AD}(x_3) = -\frac{3\alpha \Delta T x_3 (2I + AL^2 - ALx_3)}{8(3I + AL^2)}
 \end{aligned}
 \tag{21.12}$$

$$\begin{aligned}
u_3^{AB}(x_3) &= 0 \\
u_3^{CD}(x_3) &= -\frac{3IL}{12I + 4AL^2} \alpha \Delta T \\
u_3^{BC}(x_3) &= -\frac{(3I + 2AL^2)(L - 2x_3)}{4(3I + AL^2)} \alpha \Delta T \\
u_3^{AD}(x_3) &= \frac{3Ix_3}{6I + 2AL^2} \alpha \Delta T
\end{aligned} \tag{21.13}$$

In tal modo:

$$\begin{aligned}
u_3^{BC}(0) &= -\frac{(3I + 2AL^2)L}{4(3I + AL^2)} \alpha \Delta T \\
u_3^{BC}(L) &= \frac{(3I + 2AL^2)L}{4(3I + AL^2)} \alpha \Delta T
\end{aligned} \tag{21.14}$$

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned}
m^{AB}(x_3) &= -m^{CD}(x_3) = \frac{3EAI(L - 2x_3)}{4(3I + AL^2)} \alpha \Delta T \\
m^{BC}(x_3) &= m^{AD}(x_3) = -\frac{3EAIL}{4(3I + EAL^2)} \alpha \Delta T \\
n^{AB}(x_3) &= n^{CD}(x_3) = 0 \\
n^{BC}(x_3) &= -n^{AD}(x_3) = -\frac{3EAI}{6I + 2AL^2} \alpha \Delta T
\end{aligned} \tag{21.15}$$

In ipotesi di inestensibilità assiale l'unica asta che subisce spostamenti assiali è quella soggetta a variazione termica:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{x_3(3L^2 + 3Lx_3 - 2x_3^2)}{8L^2} \alpha \Delta T \\
u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{(4L^3 - 3L^2x_3 - 3Lx_3^2 + 2x_3^3)}{8L^2} \alpha \Delta T \\
u_2^{BC}(x_3) &= u_2^{AD}(x_3) = \frac{3x_3(-L + x_3)}{8L} \alpha \Delta T \\
u_3^{BC}(x_3) &= -\frac{1}{2}(L - 2x_3) \alpha \Delta T
\end{aligned} \tag{21.16}$$

La deformata è riportata in Figura 21.7.

Si osservi che, in ipotesi di inestensibilità assiale, si poteva stabilire a priori che le linee elastiche assiali dovessero essere identicamente nulle, a parte l'asta superiore, soggetta a variazione termica. Per l'asta BC , invece, poteva porsi:

$$u_3^{BC}(x_3) = d_0 + \alpha \Delta T x_3 \tag{21.17}$$

ed imponendo, per simmetria, che lo spostamento si annulli in mezzzeria si ottiene la costante d_0 :

$$d_0 = -\alpha \Delta T \frac{L}{2} \tag{21.18}$$

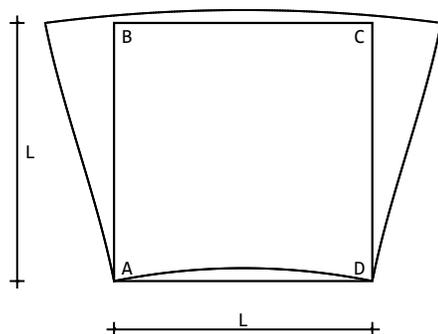


Figura 21.7: La deformata della maglia chiusa

ritrovando l'ultima delle (21.16).

Le caratteristiche, in ipotesi di inestensibilità assiale, si semplificano in:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -m^{CD}(x_3) = \frac{3EI(L-2x_3)}{4L^2} \alpha \Delta T \\
 m^{BC}(x_3) &= m^{AD}(x_3) = -\frac{3EI}{4L} \alpha \Delta T \\
 n^{AB}(x_3) &= n^{CD}(x_3) = 0 \\
 n^{BC}(x_3) &= -n^{AD}(x_3) = -\frac{3EI}{2L^2} \alpha \Delta T
 \end{aligned} \tag{21.19}$$

ed il relativo diagramma dei momenti è riportato in Figura 21.8.

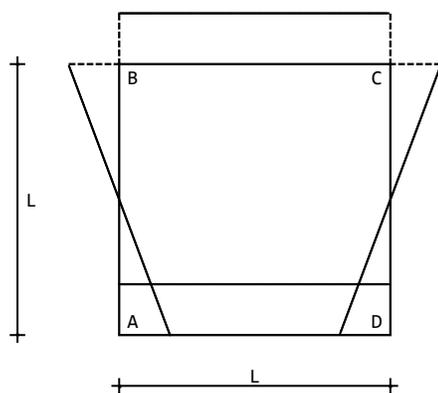


Figura 21.8: I momenti sulla maglia chiusa

21.1 La maglia vincolata

La stessa maglia chiusa quadrata di Figura 21.1, soggetta ad una variazione termica uniforme ΔT lungo il tratto superiore, si suppone ora vincolata con un appoggio nel nodo A e con un carrello in D , come illustrato in Figura 21.9.

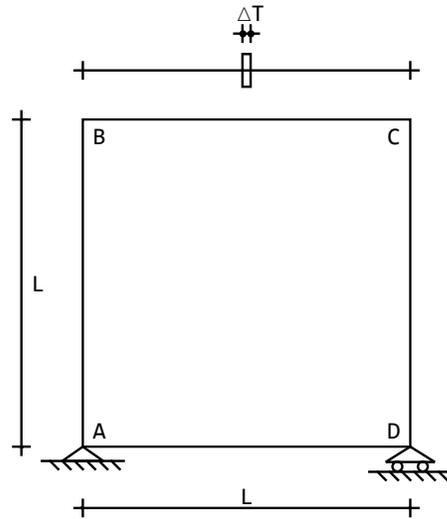


Figura 21.9: La maglia chiusa esternamente vincolata

In questi due nodi andranno quindi opportunamente modificate le condizioni ai limiti:

— nel nodo in A lo spostamento trasversale e lo spostamento assiale si dovranno annullare, sia per l'asta orizzontale che per l'asta verticale. Le rotazioni dovranno essere uguali, ed occorrerà imporre l'equilibrio dei momenti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 u_3^{AD}(0) &= 0 \\
 u_3^{AB}(0) &= 0 \\
 u_2^{AD}(0) &= 0 \\
 \phi^{AB}(0) &= \phi^{AD}(0) \\
 m^{AB}(0) + m^{AD}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{21.20}$$

— nel nodo in D si ha un carrello a piano di scorrimento orizzontale, sicchè lo spostamento assiale del tratto verticale CD risulterà nullo, così come lo spostamento trasversale del tratto orizzontale AD . Inoltre, lo spostamento trasversale del tratto verticale CD (positivo se verso sinistra) dovrà essere uguale e contrario allo spostamento assiale del tratto orizzontale AD (positivo se verso destra). Le rotazioni dovranno essere uguali, e bisognerà imporre l'equilibrio

alla traslazione orizzontale ed alla rotazione:

$$\begin{aligned}
 u_2^{CD}(L) &= -u_3^{AD}(L) \\
 u_3^{CD}(L) &= 0 \\
 u_2^{AD}(L) &= 0 \\
 \phi^{CD}(L) &= \phi^{AD}(L) \\
 t^{CD}(L) - n^{AD}(L) &= 0 \\
 -m^{CD}(L) - m^{AD}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{21.21}$$

Poichè ora la struttura è esternamente vincolata, la soluzione di questo sistema è immediato. Si ottiene infatti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{x_3(3L^2 + 3Lx_3 - 2x_3^2)}{8L^2} \alpha \Delta T \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{(12IL - 4AL^3 + 3AL^2x_3 + 3ALx_3^2 - 2Ax_3^3)}{8AL^2} \alpha \Delta T
 \end{aligned} \tag{21.22}$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{BC}(x_3) &= u_2^{AD}(x_3) = \frac{3x_3(-L + x_3)}{8L} \alpha \Delta T \\
 u_3^{AB}(x_3) &= 0 \\
 u_3^{CD}(x_3) &= 0 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= \left(-\frac{1}{2}L + \left(1 - \frac{3I}{2AL^2} \right) x_3 \right) \alpha \Delta T \\
 u_3^{AD}(x_3) &= \frac{3Ix_3}{2AL^2} \alpha \Delta T
 \end{aligned}$$

e quindi gli spostamenti agli estremi dell'asta BC sono forniti da:

$$\begin{aligned}
 u_3^{BC}(0) &= -\frac{L}{2} \alpha \Delta T \\
 u_3^{BC}(L) &= \left(\frac{L}{2} - \frac{3I}{2AL} \right) \alpha \Delta T
 \end{aligned} \tag{21.23}$$

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva, e non dipendono dalla deformabilità assiale:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -m^{CD}(x_3) = \frac{3EI(L - 2x_3)}{4L^2} \alpha \Delta T \\
 m^{BC}(x_3) &= m^{AD}(x_3) = -\frac{3EI}{4L} \alpha \Delta T \\
 n^{AB}(x_3) &= n^{CD}(x_3) = 0 \\
 n^{BC}(x_3) &= -n^{AD}(x_3) = -\frac{3EI\alpha\Delta T}{2L^2}
 \end{aligned} \tag{21.24}$$

In ipotesi di inestensibilità assiale si ritrovano gli stessi risultati ottenuti in precedenza, per l'asta non vincolata.

21.1.1 Verifica

Per uno studio della maglia con il principio dei lavori virtuali si veda L.Ascione, *Sulla Statica delle Travi e dei Sistemi di Travi* Vol.III, pagg. 73–77.

21.2 Il caso delle forze lungo la diagonale

La maglia chiusa quadrata di Figura 21.10 è soggetta a due forze uguali e contrarie agenti lungo una diagonale. Si vuole conoscere la deformata e le caratteristiche della sollecitazione interna.

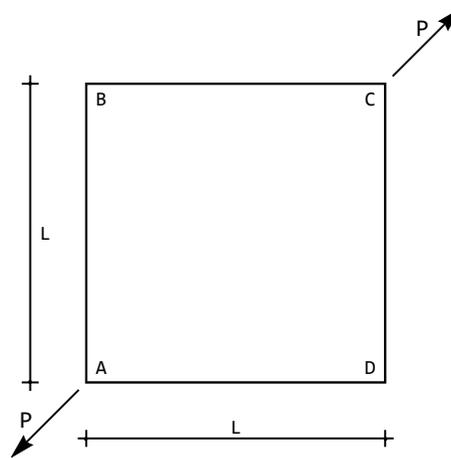


Figura 21.10: La maglia chiusa soggetta a due forze lungo la diagonale

Rispetto al caso precedente, quindi, occorre modificare le condizioni di equilibrio nei nodi caricati, scrivendo:

$$\begin{aligned} t^{AB}(0) + n^{AD}(0) - F &= 0 \\ -n^{AB}(0) + t^{AD}(0) + F &= 0 \end{aligned} \quad (21.25)$$

nel nodo in A, e:

$$\begin{aligned} -t^{BC}(L) + n^{CD}(0) - F &= 0 \\ -n^{BC}(L) - t^{CD}(0) + F &= 0 \end{aligned} \quad (21.26)$$

nel nodo in C. Inoltre, per semplicità si è posto $F = P \cos(\frac{\pi}{4}) = P \sin(\frac{\pi}{4})$.

Poichè la struttura non è esternamente vincolata, la soluzione di queste ventiquattro equazioni prevede anche i tre possibili moti rigidi di traslazione e rotazione. Si impone allora che lo spostamento dei punti A e C avvenga lungo la diagonale AC, mentre gli spostamenti dei punti B e D avvengano lungo la

diagonale BD , scrivendo le tre ulteriori equazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(0) - u_3^{AB}(0) &= 0 \\ u_2^{BC}(0) - u_3^{BC}(0) &= 0 \\ u_2^{CD}(0) - u_3^{CD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (21.27)$$

Si hanno quindi ora ventisette equazioni nelle ventiquattro costanti di integrazione, e la loro soluzione porta alle linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) = u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{FL(12I + AL^2)}{48EAI} + \frac{FLx_3^2}{8EI} - \frac{Fx_3^3}{12EI} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{FL}{48} \left(-\frac{12}{EA} + \frac{L^2}{EI} \right) - \frac{FLx_3^2}{8EI} + \frac{Fx_3^3}{12EI} \\ u_2^{AD}(x_3) &= \frac{FL}{48} \left(\frac{12}{EA} + \frac{L^2}{EI} \right) - \frac{FLx_3^2}{8EI} + \frac{Fx_3^3}{12EI} \\ u_3^{AB}(x_3) = u_3^{CD}(x_3) = u_3^{AD}(x_3) &= -\frac{FL(12I + AL^2)}{48EAI} + \frac{Fx_3}{2EA} \\ u_3^{BC}(x_3) &= \frac{1}{48}FL \left(-\frac{12}{EA} + \frac{L^2}{EI} \right) + \frac{Fx_3}{2EA} \end{aligned} \quad (21.28)$$

Si noti che la condizione sugli spostamenti del nodo D :

$$u_2^{AD}(L) - u_3^{AD}(L) = 0 \quad (21.29)$$

risulta automaticamente soddisfatta.

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) = m^{CD}(x_3) &= -\frac{F}{4}(L - 2x_3) \\ m^{BC}(x_3) = m^{AD}(x_3) &= \frac{F}{4}(L - 2x_3) \end{aligned} \quad (21.30)$$

$$n^{AB}(x_3) = n^{CD}(x_3) = n^{BC}(x_3) = n^{AD}(x_3) = \frac{F}{2} \quad (21.31)$$

In ipotesi di inestensibilità assiale si hanno le espressioni leggermente semplificate:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) = u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{F(L^3 - 6Lx_3^2 + 4x_3^3)}{48EI} \\ u_2^{BC}(x_3) = u_2^{AD}(x_3) &= \frac{F(L^3 - 6Lx_3^2 + 4x_3^3)}{48EI} \\ u_3^{AB}(x_3) = u_3^{CD}(x_3) = u_3^{AD}(x_3) &= -\frac{FL^3}{48EI} \\ u_3^{BC}(x_3) &= \frac{FL^3}{48EI} \end{aligned} \quad (21.32)$$

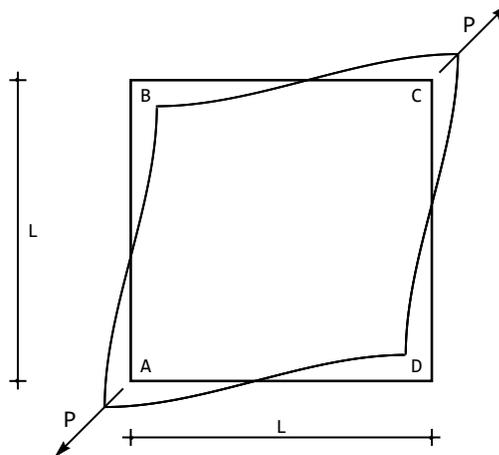


Figura 21.11: La deformata per la maglia chiusa soggetta a due forze lungo la diagonale

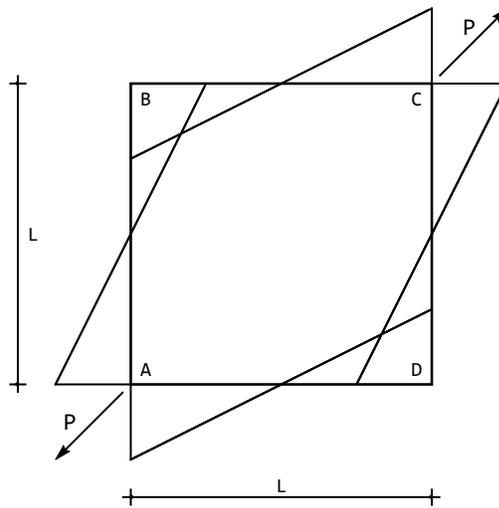


Figura 21.12: I momenti per la maglia chiusa soggetta a due forze lungo la diagonale

La deformata è riportata in Figura 21.11. Lo spostamento dei vertici avviene quindi lungo le diagonali, con ampiezza:

$$s = \frac{PL^3}{48EI} \quad (21.33)$$

Le caratteristiche non sono influenzate dalla deformabilità assiale, ed il momento flettente si presenta come in Figura 21.12

Nei vertici, quindi, il momento ha intensità:

$$M = \frac{PL\sqrt{2}}{8} \quad (21.34)$$

Verifica

Si confronti O. Magini, *Esercizi di Scienza delle Costruzioni*, Vol.II, dove il problema è affrontato, ai fini del solo calcolo dei momenti, con considerazioni di simmetria

Capitolo 22

Maglia chiusa con incastro al piede

Si vuole conoscere la deformata della struttura in Figura 22.1, insieme alle caratteristiche della sollecitazione interna.

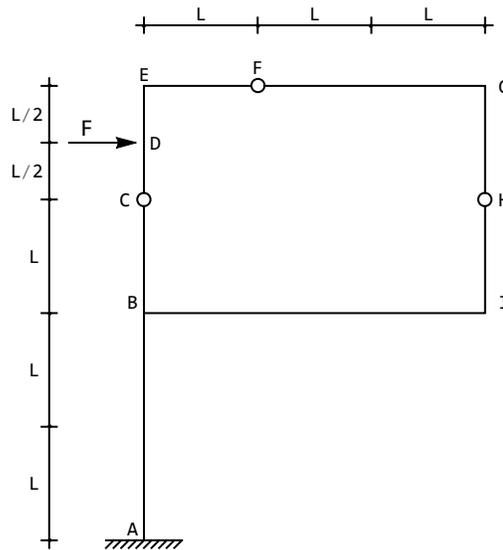


Figura 22.1: Una maglia chiusa con un incastro al piede

Il telaio è costituito da una classica maglia chiusa vincolata al suolo da un incastro, ed è quindi isostatico sia internamente che esternamente.

Si divide la struttura in nove tratti, e per ciascuno di essi si ipotizza una linea elastica flessionale ed assiale, in funzione del modello strutturale che si vuole adottare. Se non si ipotizza alcun comportamento particolare, le linee

elastiche flessionali saranno polinomi cubici, mentre le linee elastiche assiali saranno lineari:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
 u_3^{CD}(x_3) &= f_0 + f_1x_3 \\
 u_2^{DE}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \\
 u_3^{DE}(x_3) &= h_0 + h_1x_3 \\
 u_2^{EF}(x_3) &= m_0 + m_1x_3 + m_2x_3^2 + m_3x_3^3 \\
 u_3^{EF}(x_3) &= n_0 + n_1x_3 \\
 u_2^{FG}(x_3) &= p_0 + p_1x_3 + p_2x_3^2 + p_3x_3^3 \\
 u_3^{FG}(x_3) &= q_0 + q_1x_3 \\
 u_2^{GH}(x_3) &= r_0 + r_1x_3 + r_2x_3^2 + r_3x_3^3 \\
 u_3^{GH}(x_3) &= s_0 + s_1x_3 \\
 u_2^{HI}(x_3) &= t_0 + t_1x_3 + t_2x_3^2 + t_3x_3^3 \\
 u_3^{HI}(x_3) &= u_0 + u_1x_3 \\
 u_2^{BI}(x_3) &= v_0 + v_1x_3 + v_2x_3^2 + v_3x_3^3 \\
 u_3^{BI}(x_3) &= w_0 + w_1x_3
 \end{aligned} \tag{22.1}$$

Se si fosse adottata l'ipotesi di inestensibilità assiale, le linee elastiche assiali del ritto di sinistra sarebbero risultate identicamente nulle, mentre il traverso superiore si sarebbe spostato di δ_1 , il traverso inferiore di δ_2 , ed il ritto di destra di δ_3 (telaio a tre nodi spostabili). Si preferisce tenere in conto — almeno inizialmente — una rigidezza assiale finita, scrivendo le seguenti condizioni ai limiti:

— nell'incastro in A , si annulleranno ambedue le componenti di spostamento e la rotazione:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 u_3^{AB}(0) &= 0 \\
 \phi^{AB}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{22.2}$$

— nel nodo triplo in B si hanno le condizioni di congruenza tra i tratti

verticali AB e BC :

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(2L) &= u_2^{BC}(0) \\ u_3^{AB}(2L) &= u_3^{BC}(0) \\ \phi^{AB}(2L) &= \phi^{BC}(0) \end{aligned} \quad (22.3)$$

mentre le condizioni di congruenza tra l'asta verticale AB e l'asta orizzontale BI impongono:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(2L) &= u_3^{BI}(0) \\ u_3^{AB}(2L) &= -u_2^{BI}(0) \\ \phi^{AB}(2L) &= \phi^{BI}(0) \end{aligned} \quad (22.4)$$

Le tre condizioni di equilibrio del nodo portano a scrivere:

$$\begin{aligned} -t^{AB}(2L) + t^{BC}(0) + n^{BI}(0) &= 0 \\ n^{AB}(2L) - n^{BC}(0) + t^{BI}(0) &= 0 \\ -m^{AB}(2L) + m^{BC}(0) + m^{BI}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (22.5)$$

— Nel nodo C , le condizioni di congruenza dettano le tre equazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(L) &= u_2^{CD}(0) \\ u_3^{BC}(L) &= u_3^{CD}(0) \\ \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0) \end{aligned} \quad (22.6)$$

mentre la presenza della cerniera impone l'annullarsi dei momenti flettenti:

$$\begin{aligned} -t^{BC}(L) + t^{CD}(0) &= 0 \\ n^{BC}(L) + n^{CD}(0) &= 0 \\ m^{BC}(L) &= 0 \\ m^{CD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (22.7)$$

Il nodo D è un nodo caricato da una forza orizzontale F . Per esso la congruenza impone:

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(L/2) &= u_2^{DE}(0) \\ u_3^{CD}(L/2) &= u_3^{DE}(0) \\ \phi^{CD}(L/2) &= \phi^{DE}(0) \end{aligned} \quad (22.8)$$

mentre sforzi normali e momenti saranno continui, ed il taglio presenterà una discontinuità dovuta alla forza concentrata:

$$\begin{aligned} n^{CD}(L/2) &= n^{DE}(0) \\ m^{CD}(L/2) &= m^{DE}(0) \\ -t^{CD}(L/2) + t^{DE}(0) + F &= 0 \end{aligned} \quad (22.9)$$

— nel nodo E , le condizioni di congruenza e di equilibrio dettano le sei condizioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{DE}(L/2) &= u_3^{EF}(0) \\
 u_3^{DE}(L/2) &= -u_2^{EF}(0) \\
 \phi^{DE}(L/2) &= \phi^{EF}(0) \\
 -t^{DE}(L/2) + n^{EF}(0) &= 0 \\
 n^{DE}(L/2) + t^{EF}(0) &= 0 \\
 -m^{DE}(L/2) + m^{EF}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{22.10}$$

Il nodo F è una cerniera, in cui possono scriversi le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
 u_2^{EF}(L) &= u_2^{FG}(0) \\
 u_3^{EF}(L) &= u_3^{FG}(0)
 \end{aligned} \tag{22.11}$$

le due condizioni di equilibrio alla traslazione:

$$\begin{aligned}
 t^{EF}(L) - t^{FG}(0) &= 0 \\
 n^{EF}(L) - n^{FG}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{22.12}$$

e le due condizioni di vincolo:

$$\begin{aligned}
 m^{EF}(L) &= 0 \\
 m^{FG}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{22.13}$$

— nel nodo G , le condizioni di congruenza e di equilibrio dettano le sei condizioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{FG}(2L) &= u_3^{GH}(0) \\
 u_3^{FG}(2L) &= -u_2^{GH}(0) \\
 \phi^{FG}(2L) &= \phi^{GH}(0) \\
 -t^{FG}(2L) + n^{GH}(0) &= 0 \\
 -n^{FG}(2L) - t^{GH}(0) &= 0 \\
 -m^{FG}(2L) + m^{GH}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{22.14}$$

— la cerniera in H detta condizioni simili a quelle della cerniera in C :

$$\begin{aligned}
 u_2^{GH}(L) &= u_2^{HI}(0) \\
 u_3^{GH}(L) &= u_3^{HI}(0) \\
 \phi^{GH}(L) &= \phi^{HI}(0) \\
 -t^{GH}(L) + t^{HI}(0) &= 0 \\
 n^{GH}(L) + n^{HI}(0) &= 0 \\
 m^{GH}(L) &= 0 \\
 m^{HI}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{22.15}$$

— infine, nel nodo I , le condizioni di congruenza e di equilibrio dettano le sei condizioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{BI}(3L) &= u_3^{HI}(L) \\
 u_3^{BI}(3L) &= -u_2^{HI}(L) \\
 \phi^{BI}(3L) &= \phi^{HI}(L) \\
 -t^{BI}(3L) - n^{HI}(L) &= 0 \\
 -n^{BI}(3L) + t^{HI}(L) &= 0 \\
 -m^{BI}(3L) + m^{HI}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{22.16}$$

Pur con un numero di equazioni significativo, le costanti di integrazione si ottengono senza alcun problema, da cui poi possono ricavarsi gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{F(21L - 2x_3)x_3^2}{12EI} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{F(51L^3 + 45L^2x_3 + 3Lx_3^2 - x_3^3)}{9EI} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{98FL^3}{9EI} + \frac{F}{54} \left(\frac{84}{EA} + \frac{403L^2}{EI} \right) x_3 - \frac{Fx_3^3}{9EI} \\
 u_2^{DE}(x_3) &= \frac{7FL}{9EA} + \frac{3155FL^3}{216EI} + \left(\frac{14F}{9EA} + \frac{797FL^2}{108EI} \right) x_3 - \frac{FLx_3^2}{6EI} + \frac{Fx_3^3}{18EI} \\
 u_2^{EF}(x_3) &= -\frac{FL}{3EA} + \left(\frac{14F}{9EA} + \frac{1567FL^2}{216EI} \right) x_3 - \frac{FLx_3^2}{12EI} + \frac{Fx_3^3}{36EI} \\
 u_2^{FG}(x_3) &= \frac{11FL}{9EA} + \frac{1555FL^3}{216EI} + \left(-\frac{4F}{9EA} + \frac{2285FL^2}{432EI} \right) x_3 + \frac{Fx_3^3}{36EI} \\
 u_2^{GH}(x_3) &= -\frac{5FL}{9EA} - \frac{7889FL^3}{432EI} + \left(-\frac{4F}{9EA} + \frac{2429FL^2}{432EI} \right) x_3 + \frac{FLx_3^2}{6EI} - \frac{Fx_3^3}{18EI} \\
 u_2^{HI}(x_3) &= -\frac{FL}{EA} - \frac{451FL^3}{36EI} + \frac{83FL^2x_3}{12EI} - \frac{Fx_3^3}{18EI} \\
 u_2^{BI}(x_3) &= -\frac{Fx_3(-180L^2 - 15Lx_3 + x_3^2)}{36EI}
 \end{aligned} \tag{22.17}$$

Le linee elastiche assiali sono invece esprimibili come:

$$\begin{aligned}
 u_3^{AB}(x_3) &= 0 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= \frac{Fx_3}{6EA} \\
 u_3^{CD}(x_3) &= \frac{F(L + x_3)}{6EA} \\
 u_3^{DE}(x_3) &= \frac{F(3L + 2x_3)}{12EA}
 \end{aligned} \tag{22.18}$$

$$\begin{aligned}
u_3^{EF}(x_3) &= \frac{7}{432}FL \left(\frac{96}{EA} + \frac{1127L^2}{EI} \right) - \frac{Fx_3}{3EA} \\
u_3^{FG}(x_3) &= \frac{11FL}{9EA} + \frac{7889FL^3}{432EI} - \frac{Fx_3}{3EA} \\
u_3^{GH}(x_3) &= \frac{1}{3}FL \left(\frac{1}{EA} + \frac{54L^2}{EI} \right) - \frac{Fx_3}{6EA} \\
u_3^{HI}(x_3) &= \frac{FL}{6EA} + \frac{18FL^3}{EI} - \frac{Fx_3}{6EA} \\
u_3^{BI}(x_3) &= \frac{17FL^3}{3EI} + \frac{Fx_3}{3EA}
\end{aligned}$$

I termini dovuti alle rigidità assiali sono immediatamente riconoscibili, e vanno annullati per il caso di inestensibilità assiali. Come previsto, in questo caso le linee elastiche assiali sono identificate dallo spostamento orizzontale del traverso superiore:

$$\delta_s = \frac{7889FL^3}{432EI} \quad (22.19)$$

dallo spostamento orizzontale del traverso inferiore:

$$\delta_i = \frac{17FL^3}{3EI} \quad (22.20)$$

e dall'abbassamento del tratto di destra:

$$\delta_d = \frac{18FL^3}{EI} \quad (22.21)$$

La deformata si presenta come in Figura 22.2.

I momenti flettenti ed i tagli si ottengono per derivazione, e non dipendono dalla estensibilità assiale delle aste. I momenti sono distribuiti con legge lineare, e valgono:

$$\begin{aligned}
m^{AB}(x_3) &= -\frac{7FL}{2} + Fx_3 \\
m^{BC}(x_3) &= -\frac{2}{3}F(L - x_3) \\
m^{CD}(x_3) &= \frac{2Fx_3}{3} \\
m^{DE}(x_3) &= \frac{1}{3}F(L - x_3) \\
m^{EF}(x_3) &= \frac{1}{6}F(L - x_3) \\
m^{FG}(x_3) &= -\frac{Fx_3}{6} \\
m^{GH}(x_3) &= \frac{1}{3}F(-L + x_3) \\
m^{HI}(x_3) &= \frac{Fx_3}{3} \\
m^{BI}(x_3) &= \frac{1}{6}F(-5L + x_3)
\end{aligned} \quad (22.22)$$

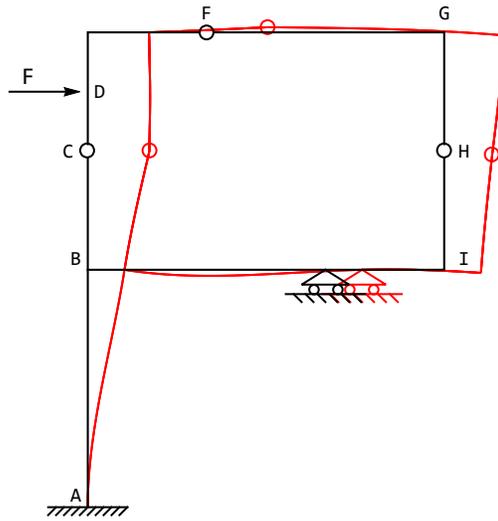


Figura 22.2: La deformata per la maglia chiusa con un incastro al piede

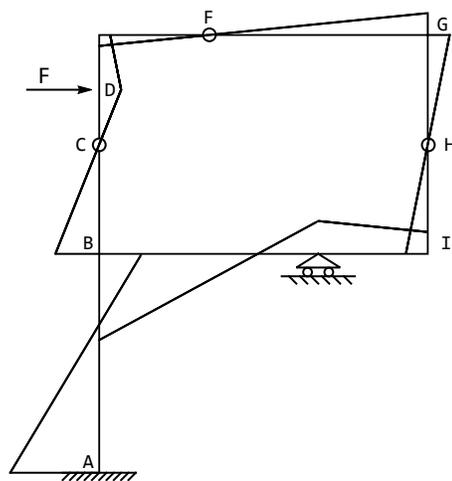


Figura 22.3: I momenti sulla maglia chiusa con un incastro al piede

Il relativo diagramma si presenta come in Figura 22.3.

Gli sforzi di taglio e gli sforzi normali sono costanti su ciascun tratto:

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= F \\
 t^{BC}(x_3) &= t^{CD}(x_3) = \frac{2}{3}F \\
 t^{DE}(x_3) &= -\frac{F}{3} \\
 t^{EF}(x_3) &= t^{FG}(x_3) = -\frac{F}{6} \\
 t^{GH}(x_3) &= t^{HI}(x_3) = \frac{F}{3} \\
 t^{BI}(x_3) &= \frac{F}{6}
 \end{aligned}
 \tag{22.23}$$

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= 0 \\
 n^{BC}(x_3) &= n^{CD}(x_3) = n^{DE}(x_3) = \frac{F}{6} \\
 n^{EF}(x_3) &= n^{FG}(x_3) = -\frac{F}{3} \\
 n^{GH}(x_3) &= n^{HI}(x_3) = -\frac{F}{6} \\
 n^{BI}(x_3) &= \frac{F}{3}
 \end{aligned}
 \tag{22.24}$$

22.1 Il tracciamento grafico del diagramma del momento

Per un tracciamento rapido del diagramma del momento, si può procedere a scrivere le equazioni simboliche di equilibrio dei tre tratti in cui è suddivisa la struttura, e l'equazione di equilibrio globale:

$$\begin{aligned}
 a + F &= 0 \\
 a + c + h &= 0 \\
 c + F + f &= 0 \\
 f + h &= 0
 \end{aligned}
 \tag{22.25}$$

La prima equazione — di equilibrio globale — permette di asserire che l'incastro reagisce con una forza orizzontale uguale e contraria alla forza applicata F , e diretta secondo la stessa retta d'azione. L'ultima equazione permette di calcolare le direzioni delle reazioni f ed h , come illustrato in Figura 22.4, mentre le altre due equazioni permettono di stabilire la direzione della reazione c , che comunque non è necessaria. Nella stessa Figura sono evidenziate le intersezioni P_1 e P_3 delle reazioni con il ritto di sinistra e con il traverso inferiore.

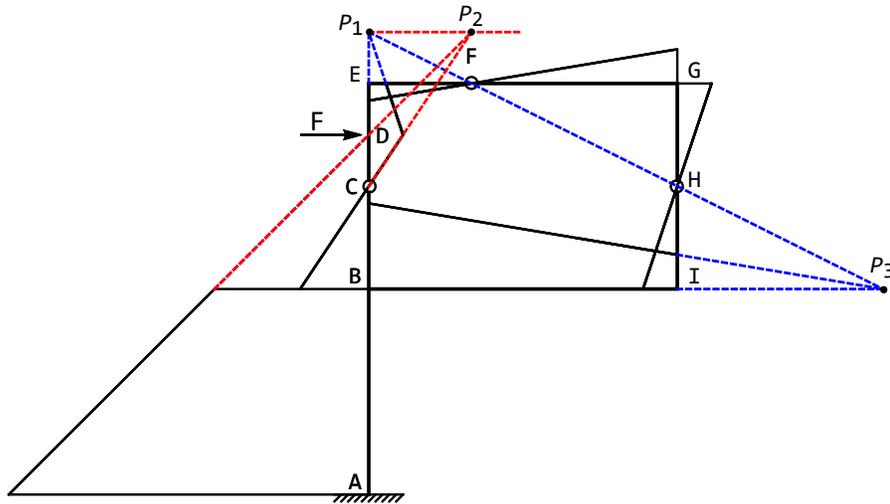


Figura 22.4: Il procedimento grafico per il tracciamento dei momenti

Iniziando a tracciare il diagramma dal punto di applicazione della forza, risulta immediato giungere in B , in quanto il momento, lineare, dovrà annullarsi in C . Lungo il tratto DE si può calcolare il diagramma considerando che esso è dovuto alla sola reazione f , e quindi si annulla in P_1 . Nel nodo E si ribalta il diagramma e si prosegue annullandolo in corrispondenza della cerniera F , poi si ribalta ancora in G , e si procede annullando in corrispondenza della cerniera in H . Si è così giunti in I , e dopo l'usuale ribaltamento si è in possesso del primo valore del momento lungo BI . Considerando che il momento lungo BI è dovuto alla sola reazione H , si trae che il momento sarà nullo in P_3 , e quindi si può completare il diagramma lungo BI .

Per tracciare anche il diagramma lungo AB si consideri che esso è dovuto alla sola reazione in A , e quindi dovrà annullarsi in D . D'altro canto, esso è anche dovuto alla somma di c ed h : di conseguenza in corrispondenza di P_1 esso sarà dovuto solo alla reazione c , e quindi l'ordinata P_1P_2 può essere utilizzata. Si hanno quindi due valori del diagramma ricercato, e di conseguenza può completarsi l'intero diagramma.

Ovviamente, l'equilibrio del nodo in B implica che il momento in B lungo AB è pari alla somma degli altri due momenti (lungo BC e lungo BI) agenti in B .

22.2 Telaio a bandiera iperstatico

Si vuole studiare ora lo stesso telaio a bandiera, reso esternamente iperstatico con l'aggiunta di un carrello a piano di scorrimento orizzontale lungo il traverso inferiore.

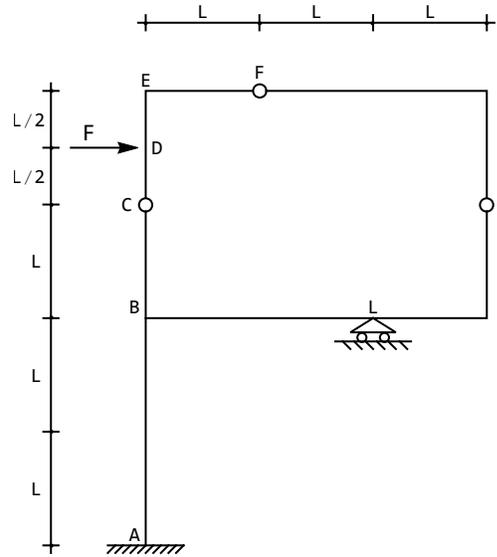


Figura 22.5: La maglia chiusa esternamente iperstatica

La struttura, riportata in Figura 22.5, può studiarsi modificando leggermente lo schema illustrato in precedenza: si aggiunge un nodo L in corrispondenza del carrello, e quindi le linee elastiche del tratto BI vengono sostituite dalle linee elastiche dei due tratti BL ed LI . Ferme restando le altre condizioni ai limiti, occorrerà modificare le equazioni relative ai nodi B ed I , ed aggiungere le condizioni in corrispondenza del nuovo nodo L :

— nel nodo triplo in B le condizioni di congruenza tra i tratti verticali AB e BC restano inalterate:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(2L) &= u_2^{BC}(0) \\ u_3^{AB}(2L) &= u_3^{BC}(0) \\ \phi^{AB}(2L) &= \phi^{BC}(0) \end{aligned} \quad (22.26)$$

mentre le condizioni di congruenza tra l'asta verticale AB e l'asta orizzontale riguarderanno ora la nuova asta BL :

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(2L) &= u_3^{BL}(0) \\ u_3^{AB}(2L) &= -u_2^{BL}(0) \\ \phi^{AB}(2L) &= \phi^{BL}(0) \end{aligned} \quad (22.27)$$

Le tre condizioni di equilibrio del nodo portano ora a scrivere:

$$\begin{aligned} -t^{AB}(2L) + t^{BC}(0) + n^{BL}(0) &= 0 \\ n^{AB}(2L) - n^{BC}(0) + t^{BL}(0) &= 0 \\ -m^{AB}(2L) + m^{BC}(0) + m^{BL}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (22.28)$$

— Nel nodo I , le condizioni di congruenza e di equilibrio riguarderanno l'asta HI e la nuova asta LI :

$$\begin{aligned}
 u_2^{LI}(L) &= u_3^{HI}(L) \\
 u_3^{LI}(L) &= -u_2^{HI}(L) \\
 \phi^{LI}(L) &= \phi^{HI}(L) \\
 -t^{LI}(L) - n^{HI}(L) &= 0 \\
 -n^{LI}(L) + t^{HI}(L) &= 0 \\
 -m^{LI}(L) + m^{HI}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{22.29}$$

Infine, nel nuovo nodo L le condizioni di congruenza imporranno la continuità di spostamenti orizzontali e rotazioni, e l'annullarsi degli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}
 u_3^{BI}(2L) &= u_3^{LI}(0) \\
 \phi^{BI}(2L) &= \phi^{LI}(0) \\
 u_2^{BI}(2L) &= 0 \\
 u_2^{LI}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{22.30}$$

Le equazioni di equilibrio saranno quindi solo due, imponendo la continuità dei forzi normali e momenti flettenti:

$$\begin{aligned}
 n^{BI}(2L) &= n^{LI}(0) \\
 m^{BI}(2L) &= m^{LI}(0)
 \end{aligned} \tag{22.31}$$

Anche in questo caso, si ottengono comodamente le costanti di integrazione, da cui gli spostamenti assiali e trasversali. Si riportano, per brevità, solo i risultati relativi al caso di indeformabilità assiale:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{F(65L - 16x_3)x_3^2}{96EI} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{F(99L^3 + 51L^2x_3 + 24Lx_3^2 - 8x_3^3)}{72EI} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{F(996L^3 + 31L^2x_3 - 48x_3^3)}{432EI} \\
 u_2^{DE}(x_3) &= \frac{F(2011L^3 - 10L^2x_3 - 144Lx_3^2 + 48x_3^3)}{864EI} \\
 u_2^{EF}(x_3) &= \frac{Fx_3(-59L^2 - 36Lx_3 + 12x_3^2)}{432EI} \\
 u_2^{FG}(x_3) &= \frac{F(-83L^3 + 19L^2x_3 + 12x_3^3)}{432EI} \\
 u_2^{GH}(x_3) &= \frac{F(-988L^3 + 163L^2x_3 + 72Lx_3^2 - 24x_3^3)}{432EI} \\
 u_2^{HI}(x_3) &= -\frac{F(259L^3 - 69L^2x_3 + 8x_3^3)}{144EI}
 \end{aligned} \tag{22.32}$$

$$u_2^{BL}(x_3) = \frac{Fx_3(136L^2 - 126Lx_3 + 29x_3^2)}{192EI}$$

$$u_2^{LI}(x_3) = -\frac{Fx_3(15L^2 - 36Lx_3 + 4x_3^2)}{144EI}$$

Anche in questo caso le linee elastiche assiali sono identificate dallo spostamento orizzontale del traverso superiore:

$$\delta_s = \frac{247FL^3}{108EI} \quad (22.33)$$

dallo spostamento orizzontale del traverso inferiore:

$$\delta_i = \frac{11FL^3}{8EI} \quad (22.34)$$

e dall'abbassamento del tratto di destra:

$$\delta_d = \frac{17FL^3}{144EI} \quad (22.35)$$

La deformata si presenta ora come in Figura 22.6.

I momenti flettenti ed i tagli si ottengono per derivazione, ed in generale dipendono dalla estensibilità assiale delle aste. I momenti sono distribuiti con legge lineare, e valgono, nell'ipotesi $EA = \infty$:

$$m^{AB}(x_3) = -\frac{65FL}{48} + Fx_3$$

$$m^{BC}(x_3) = -\frac{2}{3}F(L - x_3)$$

$$m^{CD}(x_3) = \frac{2Fx_3}{3}$$

$$m^{DE}(x_3) = \frac{1}{3}F(L - x_3)$$

$$m^{EF}(x_3) = \frac{1}{6}F(L - x_3)$$

$$m^{FG}(x_3) = -\frac{Fx_3}{6}$$

$$m^{GH}(x_3) = \frac{1}{3}F(-L + x_3)$$

$$m^{HI}(x_3) = \frac{Fx_3}{3}$$

$$m^{BL}(x_3) = \frac{1}{32}F(42L - 29x_3)$$

$$m^{LI}(x_3) = -\frac{1}{6}F(3L - x_3)$$
(22.36)

Si noti che il momento, rispetto al caso precedente, è modificato solo lungo il tratto AB e lungo il traverso inferiore. Il relativo diagramma si presenta infatti come in Figura 22.7.

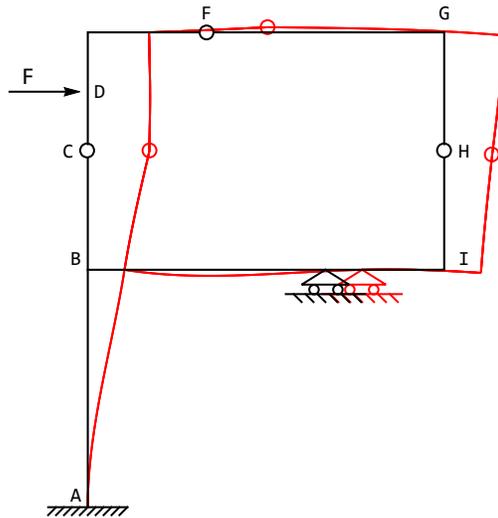


Figura 22.6: La deformata per la maglia chiusa iperstatica

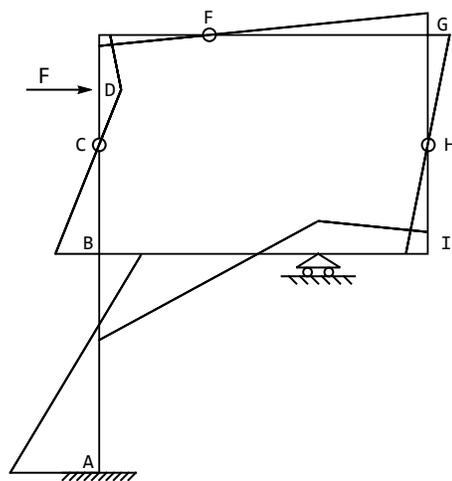


Figura 22.7: I momenti sulla maglia chiusa iperstatica

Gli sforzi di taglio non variano, se non nel traverso inferiore, dove sono sostituiti dai due valori:

$$\begin{aligned} t^{BL}(x_3) &= -\frac{29F}{32} \\ t^{LI}(x_3) &= \frac{F}{6} \end{aligned} \quad (22.37)$$

Per gli sforzi normali, la presenza del carrello a piano di scorrimento orizzontale implica la nascita di uno sforzo normale lungo AB , pari a:

$$n^{AB}(x_3) = \frac{103F}{96} \quad (22.38)$$

mentre il restante quadro risulta inalterato.

La reazione del carrello è facilmente deducibile come :

$$R_{Lv} = t_{BL}(2L) - t_{LI}(0) = -\frac{29F}{32} - \frac{F}{6} = -\frac{103}{96}F \quad (22.39)$$

22.3 Il plv per il calcolo della reazione in L

Si voglia ora calcolare la reazione dell'appoggio attraverso una applicazione del principio delle forze virtuali. La struttura reale di Figura 22.5 verrà assunta come insieme di spostamenti congruenti, mentre sulla struttura di Figura 22.8 si leggeranno le forze. Sarà quindi:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (22.40)$$

dove M è il diagramma dei momenti per la struttura di Figura 22.5, ed M_1 il diagramma dei momenti per la Figura 22.8. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, M potrà scriversi come:

$$M = M_0 + XM_1 \quad (22.41)$$

dove M_0 è da calcolare sul sistema di Figura 22.1, ossia sullo schema isostatico, con il carrello rimosso, e caricato dalle forze agenti sulla struttura. Ne segue:

$$X = -\frac{\int_s M_1 M_0 ds}{\int_s M_1^2 ds} \quad (22.42)$$

Il diagramma M_0 è stato calcolato in precedenza, mentre il diagramma M_1 si limita al tratto AB ed al tratto BL . Sarà, analiticamente:

$$\begin{aligned} m_1^{BL} &= -2F'L \left(1 - \frac{x_3}{2L}\right) \\ m_1^{AB} &= -2F'L \end{aligned} \quad (22.43)$$

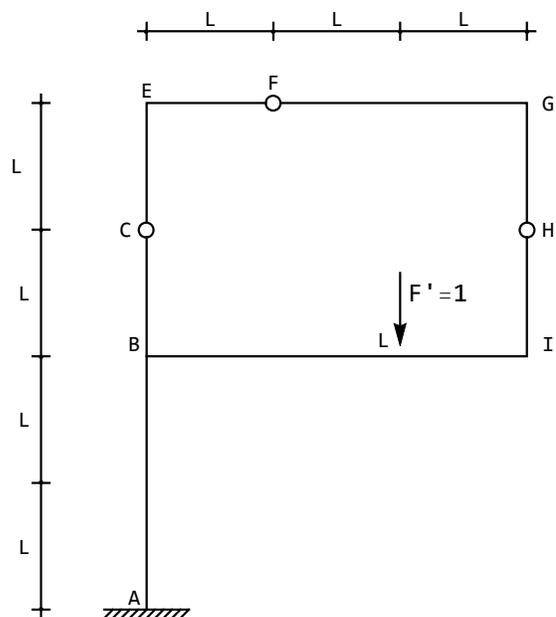


Figura 22.8: Il sistema di forze fittizio per il calcolo della reazione del carrello

e quindi, utilizzando le (22.22) si ha, con F' unitaria:

$$\int_s M_1 M_0 ds = -2L \int_0^{2L} \left(-\frac{7FL}{2} + Fx_3 \right) dx_3 - \frac{FL}{3} \int_0^{2L} \left(1 - \frac{x_3}{2L} \right) (-5L + x_3) dx_3 = 309F \quad (22.44)$$

$$\int_s M_1^2 ds = 4L^2 \int_0^{2L} dx_3 + 4L^2 \int_0^{2L} \left(1 - \frac{x_3}{2L} \right)^2 dx_3 = 288 \quad (22.45)$$

ritrovando la (22.39):

$$X = -\frac{309F}{288} = -\frac{103}{96}F \quad (22.46)$$

Capitolo 23

Maglia chiusa con bipendolo inclinato

Si vuole studiare la struttura in Figura 23.1, determinandone la deformata ed i diagrammi delle caratteristiche.

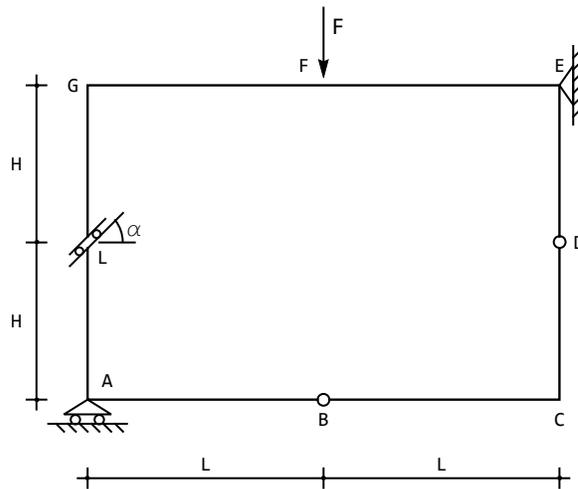


Figura 23.1: Una maglia chiusa con bipendolo inclinato

Si tratta di una maglia chiusa vincolata al suolo tramite un carrello a piano di scorrimento orizzontale in A , ed un appoggio in E , e poichè la reazione di A non passa per il punto E può concludersi che la maglia è esternamente isostatica. Inoltre, l'equilibrio globale della maglia ($a + F + e$) implica che la reazione e sia verticale.

Internamente, la maglia presenta tre sconessioni, due cerniere in B ed in D , ed un bipendolo a piano di scorrimento inclinato in L . La maglia è quindi internamente isostatica.

Si illustrerà preliminarmente il calcolo analitico e grafico delle reazioni, per poi procedere al tracciamento grafico del diagramma del momento. Poi si utilizzerà il metodo della doppia integrazione per ricavare analiticamente le caratteristiche e la deformata della struttura.

23.1 La scrittura delle equazioni di equilibrio

Le nove incognite statiche della struttura in esame sono le due reazioni R_{Eh} ed R_{Ev} (orizzontale e verticale) dell'appoggio e la reazione verticale R_{Av} del carrello, nonché il momento M_B ed M_D ed il taglio T_B e T_D nelle due cerniere. Infine, il bipendolo in L è inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, e quindi vede sorgere un momento M_L ed una forza reattiva R_L inclinata di α rispetto alla verticale. Le corrispondenti equazioni di equilibrio potranno essere scritte sui tre tratti in cui è suddivisa la struttura.

Per il primo tratto si scriverà:

$$\begin{aligned} N_B + R_{Lh} &= 0 \\ R_{Av} + T_B + R_{Lv} &= 0 \\ M_L + T_B L + N_B H &= 0 \end{aligned} \tag{23.1}$$

avendo scelto il polo in L , ed avendo indicato con R_{Lh} ed R_{Lv} le componenti orizzontali e verticali della reazione R_L del bipendolo. Scegliendo, arbitrariamente, il verso di Figura 23.2, sarà quindi:

$$\begin{aligned} R_{Lh} &= R_L \sin(\alpha) \\ R_{Lv} &= R_L \cos(\alpha) \end{aligned} \tag{23.2}$$

Per il secondo tratto si avrà :

$$\begin{aligned} -N_B - T_D &= 0 \\ T_B - N_D &= 0 \\ T_B L - N_B H &= 0 \end{aligned} \tag{23.3}$$

avendo scelto il polo in D . Per il terzo tratto, infine, scegliendo il polo in L , e tenendo conto che la reazione del bipendolo R_L è uguale e contraria a quella agente sul primo tratto:

$$\begin{aligned} -R_{Lh} + T_D + R_{Eh} &= 0 \\ -R_{Lv} + N_D + R_{Ev} + F &= 0 \\ M_L - FL - 2N_D L - R_{Eh} H - 2R_{Ev} L &= 0 \end{aligned} \tag{23.4}$$

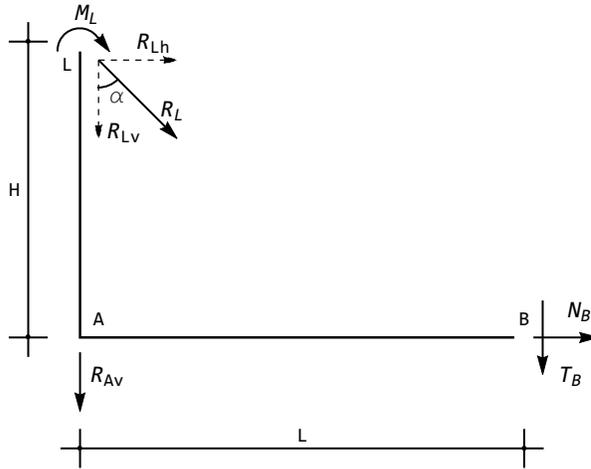


Figura 23.2: Il primo tratto, e le forze su di esso agenti

Risolvendo le nove equazioni si ottiene il valore delle incognite statiche:

$$\begin{aligned}
 R_{Eh} &= 0 \\
 R_{Ev} &= -\frac{F}{2} \\
 R_{Av} &= -\frac{F}{2} \\
 T_B &= -\frac{FH \sin(\alpha)}{2(L \cos(\alpha) + H \sin(\alpha))} \\
 N_B &= -\frac{FL \sin(\alpha)}{2(L \cos(\alpha) + H \sin(\alpha))} \\
 T_D &= -\frac{FL \sin(\alpha)}{2(L \cos(\alpha) + H \sin(\alpha))} \\
 N_D &= -\frac{FH \sin(\alpha)}{2(L \cos(\alpha) + H \sin(\alpha))} \\
 M_L &= -\frac{FHL \sin(\alpha)}{L \cos(\alpha) + H \sin(\alpha)} \\
 R_L &= \frac{FL}{2(L \cos(\alpha) + H \sin(\alpha))}
 \end{aligned} \tag{23.5}$$

Si noti che le reazioni esterne non dipendono dall'inclinazione del bipendolo, e possono ottenersi scrivendo le equazioni di equilibrio globale dell'intera maglia. Nel caso particolare in cui $\alpha = 0$ il bipendolo ha piano di scorrimento orizzontale e reagisce con una forza orizzontale pari a $-\frac{FL}{2}$, mentre la coppia reattiva è nulla, come nulli sono sforzi normali e tagli in corrispondenza delle cerniere B e D .

23.2 Calcolo grafico delle reazioni

Per calcolare graficamente le incognite statiche, si consideri che le due reazioni R_{Eh} ed R_{Ev} devono ora riguardarsi come un'unica forza reattiva e , passante per l'appoggio ed inclinata di angolo ignoto. Analogamente, il taglio e lo sforzo normale nelle cerniere B e D si combinano in un'unica reazione b e d passanti per le cerniere ed inclinate di un angolo ignoto. Infine, la coppia reattiva e la forza reattiva nel bipendolo possono combinarsi in una singola forza reattiva l , inclinata di un angolo α rispetto alla verticale, ma con punto di applicazione ignoto. Per identificare le rette d'azione di queste forze, si scrivano le equazioni simboliche di equilibrio dei tre tratti in cui è suddivisa la struttura, insieme all'equazione globale di equilibrio:

$$\begin{aligned} a + b + l &= 0 \\ b + d &= 0 \\ l + F + e + d &= 0 \\ a + F + e &= 0 \end{aligned} \tag{23.6}$$

Ne segue, dalla seconda equazione, che le rette d'azione di b e di d devono coincidere. Dalla prima equazione, quindi, si può concludere che la retta d'azione di l deve passare per l'intersezione N tra b ed a (che è verticale).

Infine, dalla equazione di equilibrio globale, può dedursi che la reazione e dell'appoggio E deve essere verticale. Si può quindi giungere al quadro reattivo di Figura 23.3

23.3 Il tracciamento grafico del momento

Conosciute le reazioni, si può tracciare il diagramma del momento, partendo da un segmento arbitrario assegnato al momento in corrispondenza della forza F (scala del diagramma). Procedendo verso il nodo G , il punto di nullo lungo il tratto orizzontale sarà dato dall'intersezione M tra il tratto orizzontale stesso e la reazione l del bipendolo. Collegando il valore del momento in F con tale punto di nullo, si traccia il diagramma del momento fino al nodo G . L'equilibrio del nodo G permette di ottenere il momento in G lungo il tratto verticale, e si può procedere verso A collegando tale valore con il punto di nullo N in corrispondenza dell'intersezione tra l ed il tratto verticale.

Giunti in A , si ruota il diagramma, e si prosegue verso C passando per la cerniera in B , in C si ribalta il diagramma e si prosegue verso E passando per D . Infine, in E si ribalta il diagramma e si prosegue chiudendo il diagramma in F .

Un'utile verifica si ottiene costruendo la retta ausiliaria indicata dalla terza equazione di equilibrio:

$$l + F = d + e \tag{23.7}$$

Il punto di nullo del diagramma del momento lungo il tratto orizzontale a destra della forza F deve situarsi in corrispondenza dell'intersezione Q di tale

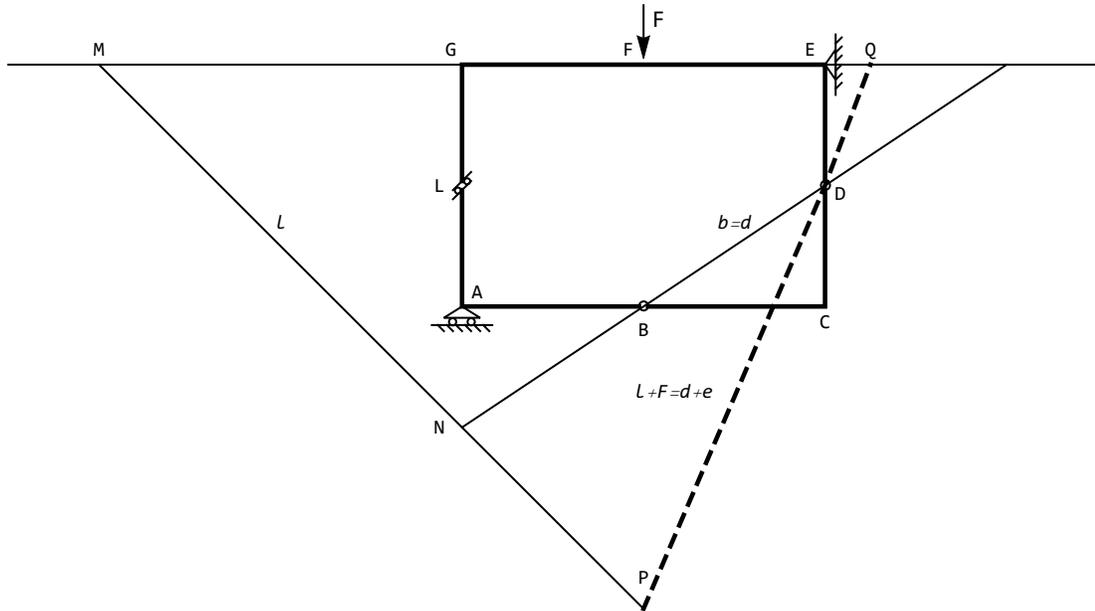


Figura 23.3: Le reazioni per la maglia chiusa

ausiliaria con l'orizzontale stessa. Si giunge quindi al diagramma di Figura 23.4

23.4 Doppia integrazione: calcolo delle c.s.i.

Il telaio non è soggetto a carichi distribuiti, e quindi i momenti flettenti lungo gli elementi di trave saranno esprimibili come funzioni lineari, mentre tagli e sforzi assiale saranno costanti:

$$\begin{aligned} m_2^{IJ}(x_3) &= a_0^{IJ} + a_1^{IJ} x_3 \\ t_3^{IJ}(x_3) &= a_1^{IJ} x_3 \\ n_3^{IJ}(x_3) &= b_1^{IJ} x_3 \end{aligned} \quad (23.8)$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno di solo equilibrio:

- in corrispondenza del carrello in A si impone l'equilibrio alla traslazione orizzontale ed alla rotazione. L'equilibrio alla traslazione verticale coinvolge la reazione del carrello, e quindi non può essere utilizzata in questa fase:

$$\begin{aligned} n^{AB}(0) + t^{AL}(0) &= 0 \\ m^{AB}(0) + m^{AL}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (23.9)$$

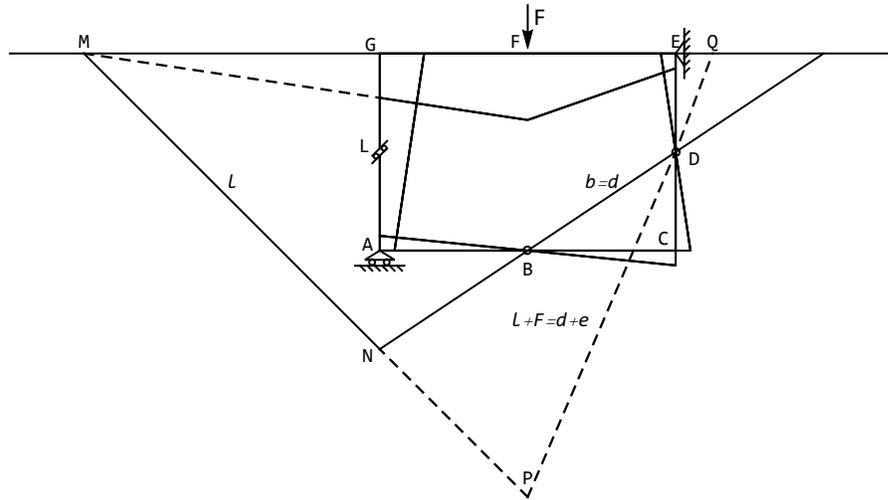


Figura 23.4: Il diagramma del moemnto per la maglia chiusa

- in corrispondenza della cerniera in B si impone la continuità di sforzi normali e tagli, e si annulla il momento:

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(L) - t^{BC}(0) &= 0 \\
 n^{AB}(L) - n^{BC}(0) &= 0 \\
 m^{AB}(L) &= 0 \\
 m^{BC}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{23.10}$$

- in corrispondenza del nodo in C l'equilibrio alla traslazione ed alla rotazione fornisce:

$$\begin{aligned}
 -n^{BC}(L) + t^{CD}(0) &= 0 \\
 -t^{BC}(L) - n^{CD}(0) &= 0 \\
 -m^{BC}(L) + m^{CD}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{23.11}$$

- in corrispondenza della cerniera in D si impone la continuità di sforzi normali e tagli, e si annulla il momento:

$$\begin{aligned}
 t^{CD}(H) - t^{DE}(0) &= 0 \\
 n^{CD}(H) - n^{DE}(0) &= 0 \\
 m^{CD}(H) &= 0 \\
 m^{DE}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{23.12}$$

- in corrispondenza dell'appoggio in E si impone l'equilibrio alla rotazione. Gli equilibri alla traslazione coinvolgono le reazioni dell'appoggio, e quindi non

possono essere utilizzate in questa fase:

$$-m^{DE}(H) - m^{FE}(L) = 0 \quad (23.13)$$

- in corrispondenza del nodo caricato dalla forza F si impone la continuità di sforzi normali e momenti flettenti, mentre l'equilibrio alla traslazione verticale impone una discontinuità del taglio:

$$\begin{aligned} -t^{GF}(L) + t^{FE}(0) + F &= 0 \\ -n^{GF}(L) - n^{FE}(0) &= 0 \\ -m^{GF}(L) + m^{FE}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (23.14)$$

- in corrispondenza del nodo in G l'equilibrio alla traslazione ed alla rotazione fornisce:

$$\begin{aligned} n^{GF}(0) - t^{LG}(H) &= 0 \\ t^{GF}(0) + n^{LG}(H) &= 0 \\ m^{GF}(0) - m^{LG}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (23.15)$$

- infine, in corrispondenza del bipendolo in L , inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, occorre imporre la continuità del momento flettente e della componente reattiva ortogonale al piano di scorrimento del bipendolo, mentre la componente reattiva parallela al piano di scorrimento del bipendolo dovrà annullarsi. Si calcolano allora per ambedue i tratti AL ed LG la componente parallela e normale al piano di scorrimento. A partire dalla Figura 23.5 potrà scriversi, per il tratto inferiore AL :

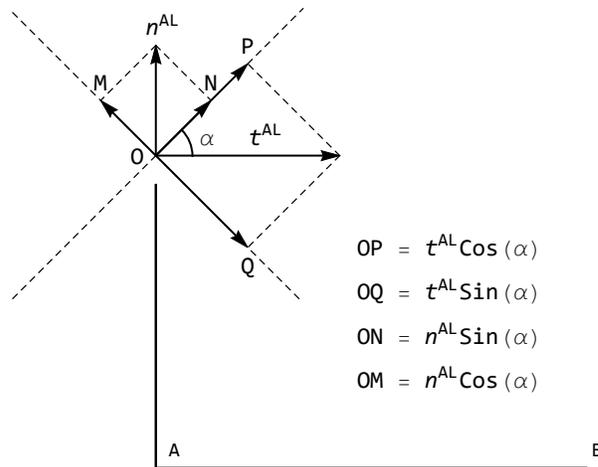


Figura 23.5: Le condizioni di equilibrio nel bipendolo

$$\begin{aligned} R_{ti} &= t^{AL}(H) \cos(\alpha) + n^{AL}(H) \sin(\alpha) \\ R_{ni} &= -t^{AL}(H) \sin(\alpha) + n^{AL}(H) \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (23.16)$$

mentre sul tratto superiore LG sarà:

$$\begin{aligned} R_{ts} &= t^{LG}(0) \cos(\alpha) + n^{LG}(0) \sin(\alpha) \\ R_{ns} &= -t^{LG}(0) \sin(\alpha) + n^{LG}(0) \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (23.17)$$

A questo punto, le condizioni da imporre nel bipendolo sono scrivibili come:

$$\begin{aligned} R_{ti} &= 0 \\ R_{ts} &= 0 \\ R_{ni} &= R_{ns} \\ -m^{AL}(H) + m^{LG}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (23.18)$$

Risolvendo le ventiquattro equazioni si ottengono i momenti:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= -\frac{FH \sin(\alpha)}{\Delta} (L - x_3) \\ m^{BC}(x_3) &= \frac{FH \sin(\alpha)}{\Delta} x_3 \\ m^{CD}(x_3) &= \frac{FL \sin(\alpha)}{\Delta} (H - x_3) \\ m^{DE}(x_3) &= -\frac{FL \sin(\alpha)}{\Delta} x_3 \\ m^{FE}(x_3) &= \frac{FL \cos(\alpha)}{\Delta} (L - x_3) + \frac{FH \sin(\alpha)}{\Delta} (3L - 2x_3) \\ m^{GF}(x_3) &= \frac{FL \sin(\alpha)}{\Delta} x_3 + \frac{3FLH \sin(\alpha)}{\Delta} \\ m^{LG}(x_3) &= \frac{FL \sin(\alpha)}{\Delta} (2H + x_3) \\ m^{AL}(x_3) &= \frac{FL \sin(\alpha)}{\Delta} (H + x_3) \end{aligned} \quad (23.19)$$

gli sforzi di taglio:

$$\begin{aligned} t^{AB} = t^{BC} &= \frac{FH \sin(\alpha)}{\Delta} \\ t^{CD} = t^{DE} &= -\frac{FL \sin(\alpha)}{\Delta} \\ t^{FE} &= -\frac{F(L \cos(\alpha) + 2H \sin(\alpha))}{\Delta} \\ t^{GF} &= \frac{FL \cos(\alpha)}{\Delta} \\ t^{LG} = t^{AL} &= \frac{FL \sin(\alpha)}{\Delta} \end{aligned} \quad (23.20)$$

nonchè gli sforzi normali :

$$\begin{aligned}
 n^{AB} = n^{BC} &= -\frac{FL \sin(\alpha)}{\Delta} \\
 n^{CD} = n^{DE} &= -\frac{FH \sin(\alpha)}{\Delta} \\
 n^{FE} = n^{GF} &= \frac{FL \sin(\alpha)}{\Delta} \\
 n^{LG} = n^{AL} &= -\frac{FL \cos(\alpha)}{\Delta}
 \end{aligned} \tag{23.21}$$

con:

$$\Delta = 2(L \cos(\alpha) + H \sin(\alpha)) \tag{23.22}$$

Il diagramma del momento è riportato in Figura 23.6 per $\alpha = \frac{\pi}{4}$, ed in Figura 23.7 per $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

Doppia integrazione: calcolo della deformata

A partire dall'espressione dei momenti si possono ottenere rotazioni e spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}
 \phi^{IJ}(x_3) &= \int \frac{m^{IJ}(x_3)}{EI} dx_3 + c_{IJ} \\
 u_2^{IJ}(x_3) &= - \int \phi^{IJ}(x_3) dx_3 + c_{IJ}x_3 + d_{IJ}
 \end{aligned} \tag{23.23}$$

mentre gli spostamenti assiali si ottengono a partire dagli sforzi normali :

$$u_3^{IJ}(x_3) = \int \frac{n^{IJ}(x_3)}{EA} dx_3 + e_{IJ} \tag{23.24}$$

Per ricavare le costanti di integrazione si va ora ad imporre le condizioni di congruenza:

- in corrispondenza del carrello in A lo spostamento trasversale dell'asta AB deve annullarsi, così come lo spostamento assiale dell'asta AL , a causa del vincolo. Inoltre, la congruenza impone che lo spostamento assiale dell'asta AB sia uguale allo spostamento trasversale dell'asta AL , ed ancora impone che le rotazioni siano uguali. Si hanno così le quattro condizioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 u_3^{AL}(0) &= 0 \\
 u_3^{AB}(0) &= u_2^{AL}(0) \\
 \phi^{AB}(0) &= \phi^{AL}(0)
 \end{aligned} \tag{23.25}$$

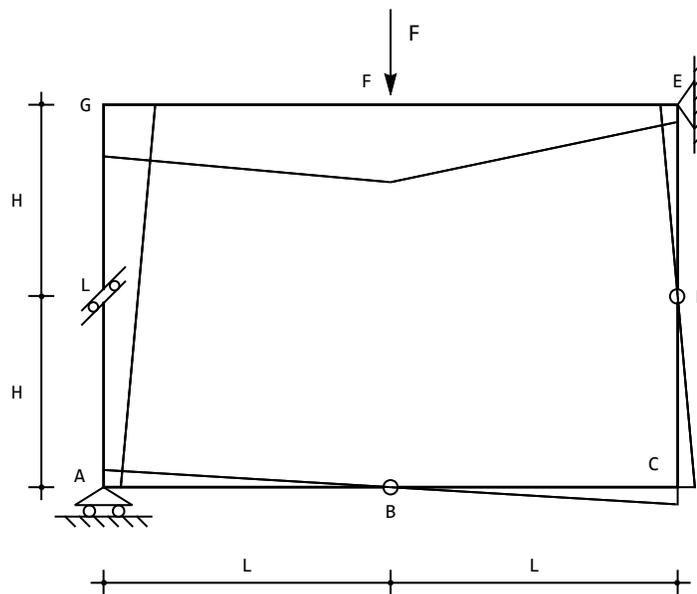


Figura 23.6: Il diagramma del momento per $\alpha = \pi/4$

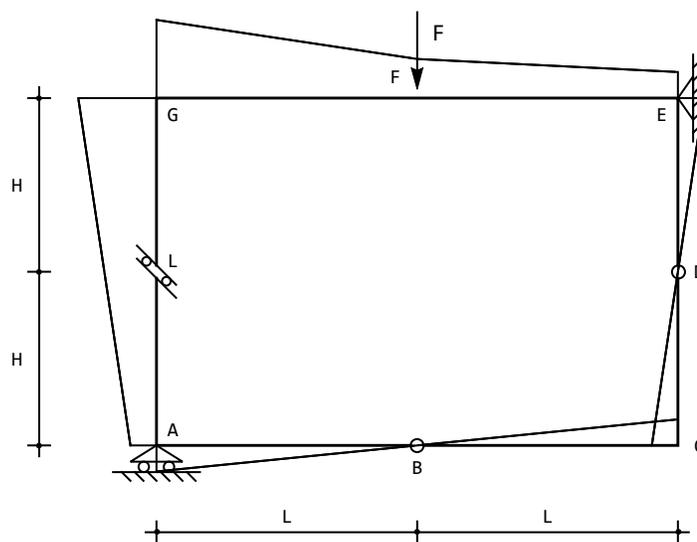


Figura 23.7: Il diagramma del momento per $\alpha = -\pi/4$

- in corrispondenza della cerniera in B sia gli spostamenti assiali che quelli trasversali delle due aste concorrenti devono essere uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(L) &= u_2^{BC}(0) \\ u_3^{AB}(L) &= u_3^{BC}(0) \end{aligned} \quad (23.26)$$

— in corrispondenza del nodo in C lo spostamento trasversale dell'asta orizzontale BC — positivo verso il basso — deve essere uguale e contrario allo spostamento assiale dell'asta verticale CD , che invece è positivo verso l'alto. Viceversa, lo spostamento assiale dell'asta BC e quello trasversale dell'asta CD sono ambedue positivi se verso destra, e quindi devono essere uguali. Infine, anche le rotazioni devono essere uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(L) &= -u_3^{CD}(0) \\ u_3^{BC}(L) &= u_2^{CD}(0) \\ \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0) \end{aligned} \quad (23.27)$$

— in corrispondenza della cerniera in D si impone, come in B , che gli spostamenti delle aste concorrenti siano uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(H) &= u_2^{DE}(0) \\ u_3^{CD}(H) &= u_3^{DE}(0) \end{aligned} \quad (23.28)$$

— in corrispondenza dell'appoggio in E il vincolo impone che gli spostamenti siano nulli, e la congruenza che le rotazioni siano uguali. Si hanno quindi le cinque condizioni:

$$\begin{aligned} u_2^{DE}(H) &= 0 \\ u_3^{DE}(H) &= 0 \\ u_3^{FE}(L) &= 0 \\ u_2^{FE}(L) &= 0 \\ \phi^{DE}(H) &= \phi^{FE}(L) \end{aligned} \quad (23.29)$$

— in corrispondenza del nodo caricato dalla forza F gli spostamenti e le rotazioni delle aste concorrenti devono essere uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{GF}(L) &= u_2^{FE}(0) \\ u_3^{GF}(L) &= u_3^{FE}(0) \\ \phi^{GF}(L) &= \phi^{FE}(0) \end{aligned} \quad (23.30)$$

— in corrispondenza del nodo in G lo spostamento trasversale dell'asta orizzontale GF — positivo verso il basso — deve essere uguale e contrario allo spostamento assiale dell'asta verticale LG , che invece è positivo verso l'alto. Viceversa, lo spostamento assiale dell'asta GF e quello trasversale dell'asta LG

sono ambedue positivi se verso destra, e quindi devono essere uguali. Infine, anche le rotazioni devono essere uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{GF}(0) &= -u_3^{LG}(H) \\ u_3^{GF}(0) &= u_2^{LG}(H) \\ \phi^{GF}(0) &= \phi^{LG}(H) \end{aligned} \quad (23.31)$$

— in corrispondenza del bipendolo inclinato, lo spostamento in direzione normale all'asse del bipendolo dovrà essere uguale per le due aste, così come uguale deve essere la rotazione. Indicando con u_n lo spostamento secondo la normale all'asse del bipendolo è possibile calcolare, per l'asta inferiore e superiore, rispettivamente:

$$\begin{aligned} u_n^{AL} &= u_3^{AL}(H) \cos(\alpha) - u_2^{AL}(H) \sin(\alpha) \\ u_n^{LG} &= u_3^{LG}(H) \cos(\alpha) - u_2^{LG}(H) \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (23.32)$$

A questo punto, le due condizioni da imporre nel bipendolo sono scrivibili come:

$$\begin{aligned} u_n^{AL} &= u_n^{LG} \\ \phi^{AL}(H) &= \phi^{LG}(0) \end{aligned} \quad (23.33)$$

Risolvendo le diciotto equazioni si ottengono le costanti di integrazione, che permettono la deduzione degli spostamenti trasversali ed assiali. In ipotesi di rigidità assiale infinita si ha:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= F \frac{x_3}{\Delta} (-4H^3L - 17H^2L^2 + 3L^4 + 3H^2Lx_3 - H^2x_3^2 + \\ &\quad (4H^3L + 3L^4 + H^2(17L^2 - 3Lx_3 + x_3^2)) \cos(2\alpha) + \\ &\quad HL(24HL + 14L^2 + 3Lx_3 - x_3^2) \sin(2\alpha)) \end{aligned} \quad (23.34)$$

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(x_3) &= F \frac{(L - x_3)}{\Delta} (-4H^3L - 15H^2L^2 + 3L^4 + H^2Lx_3 + H^2x_3^2 + \\ &\quad (4H^3L + 3L^4 + H^2(15L^2 - Lx_3 - x_3^2)) \cos(2\alpha) + \\ &\quad HL(24HL + 16L^2 + Lx_3 + x_3^2) \sin(2\alpha)) \end{aligned} \quad (23.35)$$

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(x_3) &= \frac{FL}{\Delta} (28H^4 + 34H^3L + 6HL^3 + 4H^3x_3 + \\ &\quad 13H^2Lx_3 - 3L^3x_3 - 3H^2x_3^2 + Hx_3^3 - \\ &\quad (28H^4 + 3L^3x_3 + H^2(13L - 3x_3)x_3 + \\ &\quad H^3(34L + 4x_3) + H(-6L^3 + x_3^3)) \cos(2\alpha) + \\ &\quad L(28H^3 + 8H^2(5L - 3x_3) + x_3^3 - 3Hx_3(6L + x_3)) \sin(2\alpha)) \end{aligned} \quad (23.36)$$

$$\begin{aligned} u_2^{DE}(x_3) &= \frac{FL(H - x_3)}{\Delta} (30H^3 + 47H^2L + 3L^3 - H^2x_3 - Hx_3^2 + \\ &\quad (-30H^3 + 3L^3 + Hx_3^2 + H^2(-47L + x_3)) \cos(2\alpha) + \\ &\quad L(2H^2 + 22HL - Hx_3 - x_3^2) \sin(2\alpha)) \end{aligned} \quad (23.37)$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{FE}(x_3) = F \frac{(L-x_3)}{\Delta} & (28H^3L + 42H^2L^2 + 2L^4 + \\
 & 7H^2Lx_3 + 2L^3x_3 - 2H^2x_3^2 - L^2x_3^2 - \\
 & (28H^3L + H^2(42L^2 + 7Lx_3 - 2x_3^2) + L^2(-2L^2 - 2Lx_3 + x_3^2)) \cos(2\alpha) + \\
 & HL(16L^2 + 9Lx_3 - 3x_3^2) \sin(2\alpha))
 \end{aligned} \quad (23.38)$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{GF}(x_3) = F \frac{L}{\Delta} & (56H^3L + 68H^2L^2 - 28H^3x_3 - \\
 & 17H^2Lx_3 + 3L^3x_3 - 9H^2x_3^2 - Lx_3^3 + \\
 & (3L^3x_3 - Lx_3^3 + 28H^3(-2L + x_3) + H^2(-68L^2 + 17Lx_3 + 9x_3^2)) \cos(2\alpha) + \\
 & H(12L^3 + 14L^2x_3 - 9Lx_3^2 - x_3^3) \sin(2\alpha))
 \end{aligned} \quad (23.39)$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{LG}(x_3) = -\frac{FL(H-x_3)}{\Delta} & (-20H^3 - 17H^2L + 3L^3 - 7H^2x_3 - Hx_3^2 + \\
 & (20H^3 + 3L^3 + Hx_3^2 + H^2(17L + 7x_3)) \cos(2\alpha) + \\
 & L(8H^2 + 14HL - 7Hx_3 - x_3^2) \sin(2\alpha))
 \end{aligned} \quad (23.40)$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{AL}(x_3) = \frac{FL}{\Delta} & (28H^4 + 34H^3L + 6HL^3 - 4H^3x_3 - \\
 & 17H^2Lx_3 + 3L^3x_3 - 3H^2x_3^2 - Hx_3^3 + \\
 & (-28H^4 + 3L^3x_3 + H^2x_3(17L + 3x_3) + H^3(-34L + 4x_3) + \\
 & H(6L^3 + x_3^3)) \cos(2\alpha) + \\
 & L(28H^3 + H(14L - 3x_3)x_3 - x_3^3 + 8H^2(5L + 3x_3)) \sin(2\alpha))
 \end{aligned} \quad (23.41)$$

mentre gli spostamenti assiali, in ipotesi di inestensibilità assiale, sono diversi da zero solo sul tratto inferiore e lungo l'asta verticale LG :

$$u_3^{AB}(x_3) = u_3^{BC}(x_3) = \frac{FHL(3L^2 \cos(\alpha) + H(14H + 17L) \sin(\alpha))}{6EI(L \cos(\alpha) + H \sin(\alpha))} \quad (23.42)$$

$$u_3^{LG}(x_3) = -\frac{FHL^2 \sin(\alpha)(3L^2 \cos(\alpha) + H(14H + 17L) \sin(\alpha))}{3EI(L \cos(\alpha) + H \sin(\alpha))^2} \quad (23.43)$$

La deformata è riportata in Figura 23.8 per un bipendolo inclinato di $\pi/4$, ed in Figura 23.9 per un bipendolo inclinato di $-\pi/4$.

23.5 Un caso iperstatico

Si consideri ora la maglia di Figura 23.10, facilmente classificabile come esternamente isostatica ed internamente doppiamente iperstatica. Per essa, si vogliono dedurre gli spostamenti e le caratteristiche della sollecitazione intrinseca.

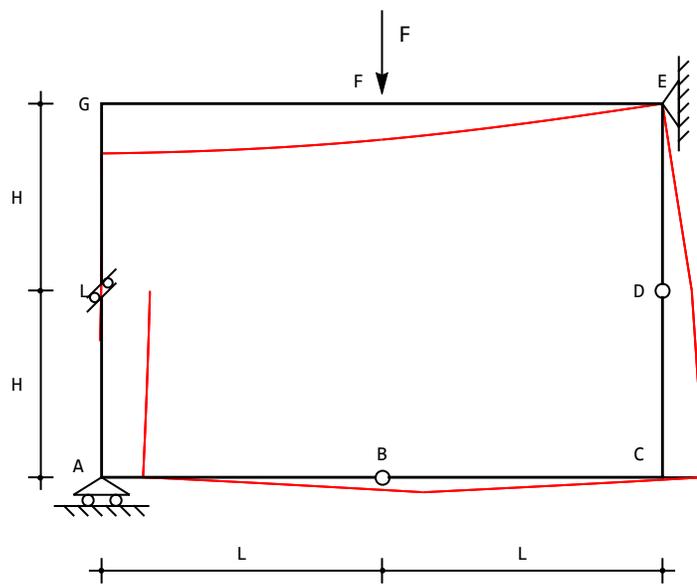


Figura 23.8: La deformata per $\alpha = \pi/4$

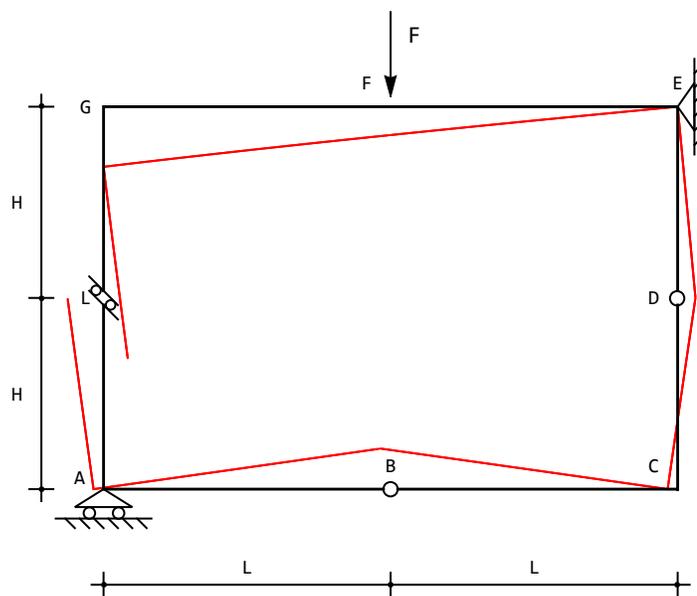


Figura 23.9: La deformata per $\alpha = -\pi/4$

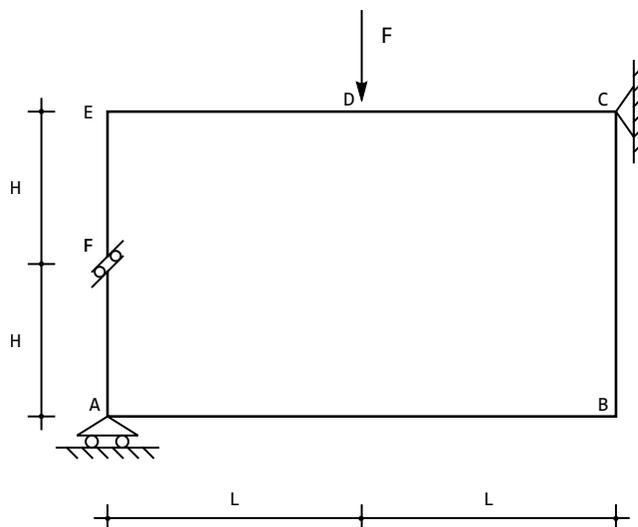


Figura 23.10: Una maglia chiusa doppiamente iperstatica con bipendolo inclinato

Si affronterà il problema scrivendo le linee elastiche dei sei tratti in cui è suddivisa la struttura, ipotizzando *a priori* che sia possibile trascurare le deformabilità assiali. Inoltre, i risultati saranno riportati per il solo caso di maglia quadrata, in cui $L = H$.

23.5.1 Il metodo della linea elastica

Gli spostamenti trasversali lungo gli elementi di trave saranno esprimibili come funzioni cubiche, in quanto non vi sono carichi distribuiti, e nemmeno è ipotizzabile un comportamento *a pendolo*. Di conseguenza si porrà:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 + b_2x_3^2 + b_3x_3^3 \\
 u_2^{DC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_2^{ED}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 + d_2x_3^2 + d_3x_3^3 \\
 u_2^{AF}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
 u_2^{FE}(x_3) &= f_0 + f_1x_3 + f_2x_3^2 + f_3x_3^3
 \end{aligned} \tag{23.44}$$

Per le linee elastiche assiali, esse verranno ipotizzate costanti, come già detto. Inoltre, la presenza dell'appoggio in C implica che gli spostamenti assiali lungo BC e lungo DC siano nulli, e quindi nulli dovranno essere anche gli spostamenti assiali del tratto ED . Infine, il carrello a piano di scorrimento orizzontale in A

annulla la linea elastica assiale lungo AF . Ne segue che potrà porsi:

$$\begin{aligned} u_3^{AB}(x_3) &= \delta_w \\ u_3^{FE}(x_3) &= \delta_v \end{aligned} \quad (23.45)$$

Inoltre, gli sforzi normali nei sei elementi verranno introdotti direttamente nelle condizioni ai limiti di equilibrio. Occorrerà quindi ora scrivere:

— in corrispondenza del carrello in A il vincolo esterno impone l'annullarsi dello spostamento trasversale dell'asta orizzontale AB . La congruenza degli spostamenti detta che lo spostamento assiale dell'asta orizzontale sia pari allo spostamento trasversale dell'asta verticale, dato che ambedue sono positive se dirette verso destra, e detta anche l'uguaglianza delle rotazioni.

Si impone poi l'equilibrio alla traslazione orizzontale ed alla rotazione. L'equilibrio alla traslazione verticale coinvolge la reazione del carrello, e quindi non può essere utilizzata in questa fase:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(0) &= 0 \\ u_2^{AF}(0) &= \delta_w \\ \phi^{AB}(0) &= \phi^{AF}(0) \\ n^{AB} + t^{AF}(0) &= 0 \\ m^{AB}(0) + m^{AF}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (23.46)$$

— in corrispondenza del nodo in B si hanno le usuali condizioni di congruenza e di equilibrio:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(2L) &= 0 \\ u_2^{BC}(0) &= \delta_w \\ \phi^{AB}(2L) &= \phi^{BC}(0) \\ -n^{AB} + t^{BC}(0) &= 0 \\ -t^{AB}(2L) - n^{BC} &= 0 \\ -m^{AB}(2L) + m^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (23.47)$$

— in corrispondenza dell'appoggio in C sono nulle ambedue le componenti di spostamento, sia per l'asta verticale che per l'asta orizzontale, mentre le rotazioni saranno continue. L'unica condizione utile di equilibrio è quella rotazionale. Gli equilibri alla traslazione coinvolgono le reazioni dell'appoggio, e quindi non possono essere utilizzate in questa fase:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(2H) &= 0 \\ u_2^{DC}(L) &= 0 \\ \phi^{BC}(2H) &= \phi^{DC}(L) \\ -m^{BC}(2H) - m^{DC}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (23.48)$$

— in corrispondenza del nodo caricato dalla forza F si impone la continuità di spostamenti, rotazioni, sforzi normali e momenti flettenti, mentre l'equilibrio alla traslazione verticale impone una discontinuità del taglio:

$$\begin{aligned}
 u_2^{ED}(L) &= u_2^{DC}(0) \\
 \phi^{ED}(L) &= \phi^{DC}(0) \\
 -t^{ED}(L) + t^{DC}(0) + F &= 0 \\
 -n^{ED} - n^{DC} &= 0 \\
 -m^{ED}(L) + m^{DC}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{23.49}$$

— in corrispondenza del nodo in E l'esame di congruenza ed equilibrio restituisce le usuali sei condizioni, semplificate a tener conto dell'ineestensibilità assiale.

$$\begin{aligned}
 u_2^{ED}(0) &= -\delta_v \\
 u_2^{FE}(H) &= 0 \\
 \phi^{ED}(0) &= \phi^{FE}(H) \\
 n^{ED} - t^{FE}(H) &= 0 \\
 t^{ED}(0) + n^{FE} &= 0 \\
 m^{ED}(0) - m^{FE}(H) &= 0
 \end{aligned} \tag{23.50}$$

— in corrispondenza del bipendolo inclinato, lo spostamento in direzione normale all'asse del bipendolo dovrà essere uguale per le due aste, così come uguale deve essere la rotazione. Indicando con u_n lo spostamento secondo la normale all'asse del bipendolo è possibile calcolare, per l'asta inferiore e superiore, rispettivamente:

$$\begin{aligned}
 u_n^{AL} &= -u_2^{AF}(H)\sin(\alpha) \\
 u_n^{FE} &= \delta_v\cos(\alpha) - u_2^{FE}(H)\sin(\alpha)
 \end{aligned} \tag{23.51}$$

A questo punto, le due condizioni di congruenza da imporre nel bipendolo sono scrivibili come:

$$\begin{aligned}
 u_n^{AF} &= u_n^{FE} \\
 \phi^{AF}(H) &= \phi^{FE}(0)
 \end{aligned} \tag{23.52}$$

— infine, le condizioni di equilibrio sono analoghe a quelle stabilite per l'esempio precedente. Si ha infatti, sul tratto inferiore AF :

$$\begin{aligned}
 R_{ti} &= t^{AF}(H)\cos(\alpha) + n^{AF}\sin(\alpha) \\
 R_{ni} &= -t^{AF}(H)\sin(\alpha) + n^{AF}\cos(\alpha)
 \end{aligned} \tag{23.53}$$

mentre sul tratto superiore FE sarà :

$$\begin{aligned}
 R_{ts} &= t^{FE}(0)\cos(\alpha) + n^{FE}\sin(\alpha) \\
 R_{ns} &= -t^{FE}(0)\sin(\alpha) + n^{FE}\cos(\alpha)
 \end{aligned} \tag{23.54}$$

A questo punto, le condizioni di equilibrio da imporre nel bipendolo sono scrivibili come:

$$\begin{aligned} R_{ti} &= 0 \\ R_{ts} &= 0 \\ R_{ni} &= R_{ns} \\ -m^{AF}(H) + m^{FE}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (23.55)$$

Risolvendo le trentadue equazioni si ottengono le costanti di integrazione, le due traslazioni assiali, ed i cinque sforzi normali. Gli spostamenti trasversali sono pari a:

$$u_2^{AB}(x_3) = \frac{F(2H - x_3)x_3}{384EI} (-13H + 16x_3 + (25H - 16x_3) \cos(2\alpha) + 3(15H + x_3) \sin(2\alpha)) \quad (23.56)$$

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(x_3) = -\frac{F(2H - x_3)}{384EI} & \left(-152H^2 - 57Hx_3 - 3x_3^2 + \right. \\ & (104H^2 + 45Hx_3 + 3x_3^2) \cos(2\alpha) + \\ & \left. (-152H^2 - 25Hx_3 + 16x_3^2) \sin(2\alpha) \right) \end{aligned} \quad (23.57)$$

$$\begin{aligned} u_2^{DC}(x_3) = -\frac{F(H - x_3)}{384EI} & \left(-299H^2 - 27Hx_3 + 48x_3^2 + \right. \\ & (247H^2 - 25Hx_3 - 16x_3^2) \cos(2\alpha) + \\ & \left. (-96H^2 - 45Hx_3 + 3x_3^2) \sin(2\alpha) \right) \end{aligned} \quad (23.58)$$

$$\begin{aligned} u_2^{ED}(x_3) = \frac{F}{384EI} & \left(512H^3 - 170H^2x_3 - 27Hx_3^2 - 16x_3^3 + \right. \\ & (-512H^3 + 242H^2x_3 + 39Hx_3^2 - 16x_3^3) \cos(2\alpha) + \\ & \left. 3(32H^3 + 18H^2x_3 - 19Hx_3^2 + x_3^3) \sin(2\alpha) \right) \end{aligned} \quad (23.59)$$

$$\begin{aligned} u_2^{FE}(x_3) = -\frac{F(H - x_3)}{384EI} & \left(-140H^2 - 33Hx_3 + 3x_3^2 + \right. \\ & (200H^2 + 45Hx_3 - 3x_3^2) \cos(2\alpha) + \\ & \left. (95H^2 - 25Hx_3 - 16x_3^2) \sin(2\alpha) \right) \end{aligned} \quad (23.60)$$

$$\begin{aligned} u_2^{AF}(x_3) \frac{F}{384EI} & \left(304H^3 - 26H^2x_3 - 45Hx_3^2 + 3x_3^3 + \right. \\ & (-208H^3 + 50H^2x_3 + 57Hx_3^2 - 3x_3^3) \cos(2\alpha) + \\ & \left. (304H^3 + 90H^2x_3 + 39Hx_3^2 - 16x_3^3) \sin(2\alpha) \right) \end{aligned} \quad (23.61)$$

mentre gli spostamenti assiali sono limitati al tratto AB , ed al tratto FE :

$$\begin{aligned} u_3^{AB}(x_3) &= \frac{FH^3}{24EI} (-13 \cos(2\alpha) + 19(1 + \sin(2\alpha))) \\ u_3^{FE}(x_3) &= \frac{FH^3}{12EI} (-16 + 16 \cos(2\alpha) - 3 \sin(2\alpha)) \end{aligned} \quad (23.62)$$

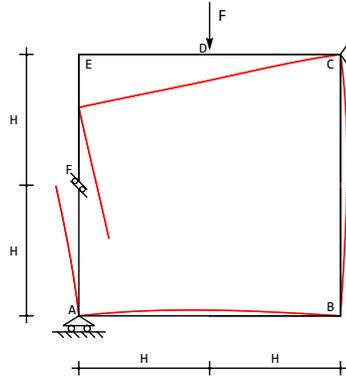


Figura 23.11: La deformata per $\alpha = -\pi/4$

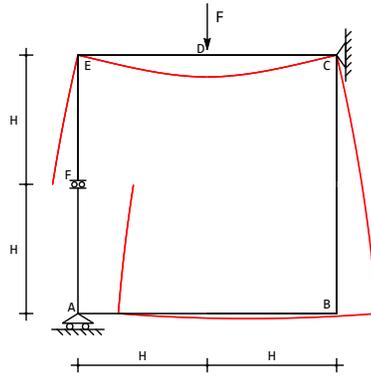


Figura 23.12: La deformata per $\alpha = 0$

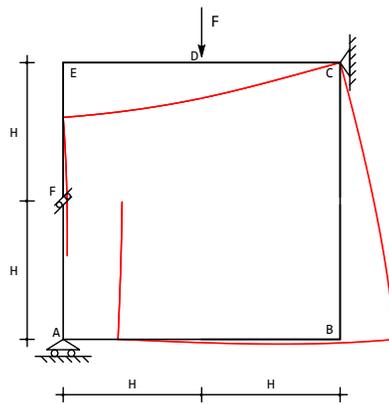


Figura 23.13: La deformata per $\alpha = \pi/4$

Nelle Figure (23.11–23.13) si riporta la deformata per il caso di bipendolo inclinato di $\alpha = \pi/4$, di $\alpha = 0$ e di $\alpha = -\pi/4$, rispettivamente.

I momenti flettenti sono forniti da:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{F}{64} (-15H + 16x_3 + (19H - 16x_3) \cos(2\alpha) + \\
 &\quad (13H + 3x_3) \sin(2\alpha)) \\
 m^{BC}(x_3) &= -\frac{F}{64} (-17H - 3x_3 + (13H + 3x_3) \cos(2\alpha) + \\
 &\quad (-19H + 16x_3) \sin(2\alpha)) \\
 m^{DC}(x_3) &= \frac{F}{64} (25H - 48x_3 + (3H + 16x_3) \cos(2\alpha) + (16H - 3x_3) \sin(2\alpha)) \\
 m^{ED}(x_3) &= -\frac{F}{64} (-9H - 16x_3 + (13H - 16x_3) \cos(2\alpha) + \\
 &\quad (-19H + 3x_3) \sin(2\alpha)) \\
 m^{FE}(x_3) &= -\frac{F}{64} (3(-4H + x_3) + (16H - 3x_3) \cos(2\alpha) - \\
 &\quad (3H + 16x_3) \sin(2\alpha)) \\
 m^{AF}(x_3) &= -\frac{F}{64} (3(-5H + x_3) + (19H - 3x_3) \cos(2\alpha) + \\
 &\quad (13H - 16x_3) \sin(2\alpha))
 \end{aligned} \tag{23.63}$$

ed infine gli sforzi normali sono dati da:

$$\begin{aligned}
 n^{AB} &= -\frac{1}{64} F(-3 + 3 \cos(2\alpha) + 16 \sin(2\alpha)) \\
 n^{BC} &= \frac{1}{64} F(-16 + 16 \cos(2\alpha) - 3 \sin(2\alpha)) \\
 n^{ED} &= n^{DC} = -n^{AB} \\
 n^{AF} &= n^{FE} = -\frac{1}{64} F(16 + 16 \cos(2\alpha) - 3 \sin(2\alpha))
 \end{aligned} \tag{23.64}$$

Nelle Figure (23.14–23.16) si riporta il diagramma per il caso di bipendolo inclinato di $\alpha = \pi/4$, di $\alpha = 0$ e di $\alpha = -\pi/4$, rispettivamente.

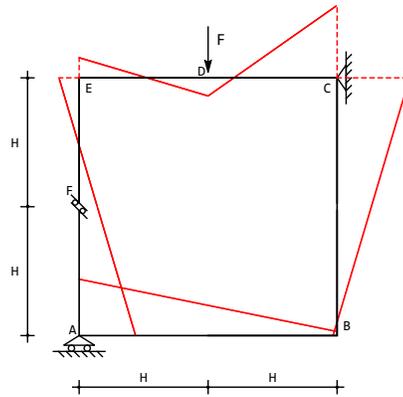


Figura 23.14: La deformata per $\alpha = -\pi/4$

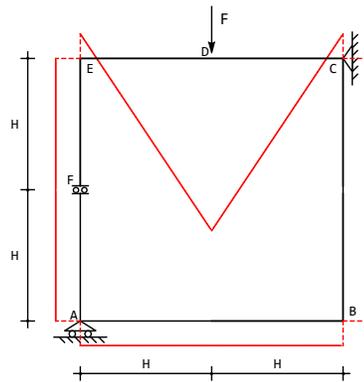


Figura 23.15: La deformata per $\alpha = 0$

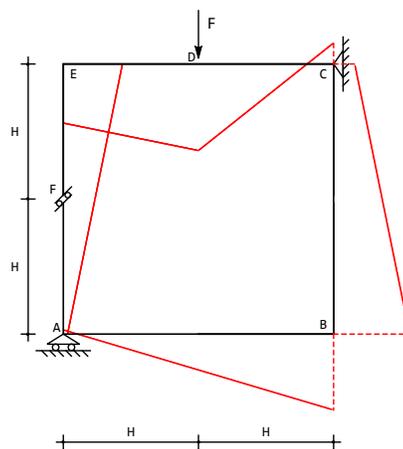


Figura 23.16: La deformata per $\alpha = \pi/4$

Capitolo 24

Un cassone

Si vuole conoscere la deformata della struttura in Figura 24.1, insieme alle caratteristiche della sollecitazione interna.

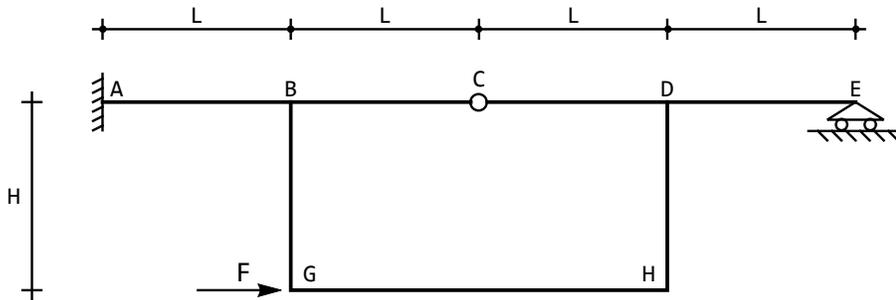


Figura 24.1: Un telaio a cassone sostenuto da una trave Gerber

Il telaio è costituito da una struttura a cassone, agganciata ad una trave Gerber.

Si divide lo schema in sette tratti, e per ciascuno di essi si ipotizza una linea elastica flessionale ed assiale, in funzione del modello strutturale che si vuole adottare. Se non si ipotizza alcun comportamento particolare, le linee elastiche flessionali saranno polinomi cubici, mentre le linee elastiche assiali saranno lineari:

$$\begin{aligned}u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 \\u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\u_3^{CD}(x_3) &= f_0 + f_1x_3\end{aligned}\tag{24.1}$$

$$\begin{aligned}
u_2^{DE}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \\
u_3^{DE}(x_3) &= h_0 + h_1x_3 \\
u_2^{BG}(x_3) &= m_0 + m_1x_3 + m_2x_3^2 + m_3x_3^3 \\
u_3^{BG}(x_3) &= n_0 + n_1x_3 \\
u_2^{DH}(x_3) &= p_0 + p_1x_3 + p_2x_3^2 + p_3x_3^3 \\
u_3^{DH}(x_3) &= q_0 + q_1x_3 \\
u_2^{GH}(x_3) &= r_0 + r_1x_3 + r_2x_3^2 + r_3x_3^3 \\
u_3^{GH}(x_3) &= s_0 + s_1x_3
\end{aligned}$$

Se si fosse adottata l'ipotesi di inestensibilità assiale, le linee elastiche assiali della trave superiore AE sarebbero risultate identicamente nulle, mentre i tre tratti restanti avrebbero subito le traslazioni δ_1 , δ_2 , e δ_3 (telaio a tre nodi spostabili).

Si preferisce tenere in conto — almeno inizialmente — una rigidità assiale finita, scrivendo le seguenti condizioni ai limiti:

— nell'incastro in A , si annulleranno ambedue le componenti di spostamento e la rotazione:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(0) &= 0 \\
u_3^{AB}(0) &= 0 \\
\phi^{AB}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{24.2}$$

— nel nodo triplo in B si hanno le condizioni di congruenza tra i tratti orizzontali AB e BC :

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(L) &= u_2^{BC}(0) \\
u_3^{AB}(L) &= u_3^{BC}(0) \\
\phi^{AB}(L) &= \phi^{BC}(0)
\end{aligned} \tag{24.3}$$

mentre le condizioni di congruenza tra l'asta orizzontale AB e l'asta verticale BG impongono:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(L) &= u_3^{BG}(0) \\
u_3^{AB}(L) &= -u_2^{BG}(0) \\
\phi^{AB}(L) &= \phi^{BG}(0)
\end{aligned} \tag{24.4}$$

Le tre condizioni di equilibrio del nodo portano a scrivere:

$$\begin{aligned}
-t^{AB}(L) + t^{BC}(0) + n^{BG}(0) &= 0 \\
-n^{AB}(L) + n^{BC}(0) - t^{BG}(0) &= 0 \\
-m^{AB}(L) + m^{BC}(0) + m^{BG}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{24.5}$$

— nella cerniera in C , le condizioni di congruenza dettano le tre equazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(L) &= u_2^{CD}(0) \\ u_3^{BC}(L) &= u_3^{CD}(0) \\ \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0) \end{aligned} \quad (24.6)$$

mentre la presenza della cerniera impone l'annullarsi dei momenti flettenti:

$$\begin{aligned} -t^{BC}(L) + t^{CD}(0) &= 0 \\ n^{BC}(L) + n^{CD}(0) &= 0 \\ m^{BC}(L) &= 0 \\ m^{CD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.7)$$

— nel nodo triplo in D si hanno le condizioni di congruenza tra i tratti orizzontali CD e DE :

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(L) &= u_2^{DE}(0) \\ u_3^{CD}(L) &= u_3^{DE}(0) \\ \phi^{CD}(L) &= \phi^{DE}(0) \end{aligned} \quad (24.8)$$

mentre le condizioni di congruenza tra l'asta orizzontale CD e l'asta verticale DH impongono:

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(L) &= u_3^{DH}(0) \\ u_3^{CD}(L) &= -u_2^{DH}(0) \\ \phi^{CD}(L) &= \phi^{DH}(0) \end{aligned} \quad (24.9)$$

Le tre condizioni di equilibrio del nodo portano a scrivere:

$$\begin{aligned} -t^{CD}(L) + t^{DE}(0) + n^{DH}(0) &= 0 \\ -n^{CD}(L) + n^{DE}(0) - t^{DH}(0) &= 0 \\ -m^{CD}(L) + m^{DE}(0) + m^{DH}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.10)$$

— nel carrello in E , si annullano gli spostamenti trasversali, gli sforzi normali ed i momenti flettenti:

$$\begin{aligned} u_2^{DE}(L) &= 0 \\ n^{DE}(L) &= 0 \\ m^{DE}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (24.11)$$

— Nel nodo G , le condizioni di congruenza e di equilibrio dettano le sei condizioni:

$$\begin{aligned} u_2^{BG}(H) &= -u_3^{GH}(0) \\ u_3^{BG}(H) &= u_2^{GH}(0) \\ \phi^{BG}(H) &= \phi^{GH}(0) \end{aligned} \quad (24.12)$$

$$\begin{aligned}
t^{BG}(H) + n^{GH}(0) &= 0 \\
-n^{BG}(H) + t^{GH}(0) &= 0 \\
-m^{BG}(H) + m^{GH}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{24.13}$$

— infine, nel nodo H , le condizioni di congruenza e di equilibrio dettano le sei condizioni:

$$\begin{aligned}
u_2^{GH}(2L) &= u_3^{DH}(H) \\
u_3^{GH}(2L) &= -u_2^{DH}(H) \\
\phi^{GH}(2L) &= \phi^{DH}(H)
\end{aligned} \tag{24.14}$$

$$\begin{aligned}
-t^{GH}(2L) - n^{DH}(H) &= 0 \\
-n^{GH}(2L) + t^{DH}(H) &= 0 \\
-m^{GH}(2L) - m^{DH}(H) &= 0
\end{aligned} \tag{24.15}$$

Le costanti di integrazione si ottengono facilmente, ma le formule per gli spostamenti trasversali ed assiali sono lunghe e poco significative. Nel seguito si riporta solo il caso in cui $H = L$, ed $EA = \infty$:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{Fx_3^2(-144L + 169x_3)}{3768EI} \\
u_2^{BC}(x_3) &= -\frac{F(25L^3 + 219L^2x_3 - 123Lx_3^2 + 41x_3^3)}{3768EI} \\
u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{F(162L^3 + 6L^2x_3 + 41x_3^3)}{3768EI} \\
u_2^{DE}(x_3) &= -\frac{F(209L^3 + 129L^2x_3 - 507Lx_3^2 + 169x_3^3)}{3768EI} \\
u_2^{BG}(x_3) &= \frac{Fx_3(-219L^2 - 486Lx_3 + 287x_3^2)}{3768EI} \\
u_2^{DH}(x_3) &= \frac{Fx_3(-129L^2 - 630Lx_3 + 341x_3^2)}{3768EI} \\
u_2^{GH}(x_3) &= -\frac{F(25L^3 + 330L^2x_3 - 375Lx_3^2 + 128x_3^3)}{3768EI}
\end{aligned} \tag{24.16}$$

Come previsto, in questo caso le linee elastiche assiali della trave superiore sono identicamente nulle, mentre le altre sono costanti:

$$\begin{aligned}
u_3^{BG}(x_3) &= -\frac{25}{3768} \frac{FL^3}{EI} \\
u_3^{GH}(x_3) &= \frac{209}{1884} \frac{FL^3}{EI} \\
u_3^{DH}(x_3) &= -\frac{209}{3768} \frac{FL^3}{EI}
\end{aligned} \tag{24.17}$$

Si osservi che la scelta del sistema di riferimento prevede per ambedue gli elementi verticali un asse X_3 che punta verso il basso, e quindi uno spostamento assiale negativo segnala un innalzamento dell'elemento, come del resto può osservarsi dalla deformata di Figura 24.2.

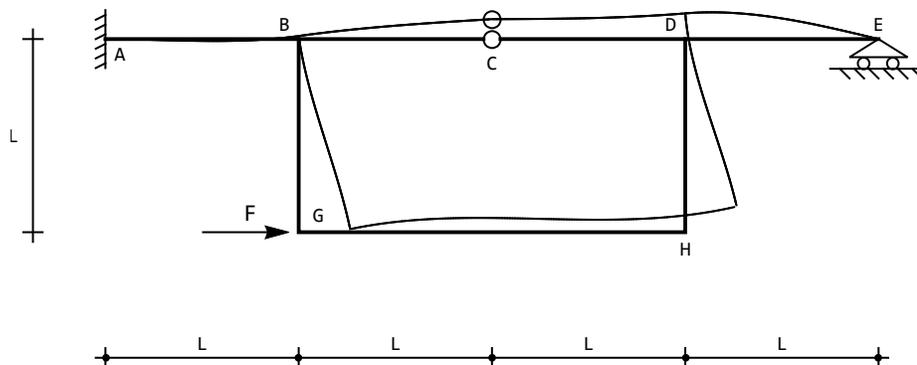


Figura 24.2: La deformata per il telaio a cassone

I momenti flettenti ed i tagli si ottengono per derivazione, ed ovviamente — essendo la struttura iperstatica — dipendono dalla estensibilità assiale delle aste. I momenti sono distribuiti con legge lineare, ed in ipotesi di inestensibilità assiale, valgono:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{F}{628}(48L - 169x_3) \\
 m^{BC}(x_3) &= -\frac{41}{628}F(L - x_3) \\
 m^{CD}(x_3) &= \frac{41Fx_3}{628} \\
 m^{DE}(x_3) &= -\frac{169}{628}F(L - x_3) \\
 m^{BG}(x_3) &= \frac{F}{628}(162L - 287x_3) \\
 m^{DH}(x_3) &= \frac{F}{628}(210L - 341x_3) \\
 m^{GH}(x_3) &= -\frac{F}{628}(125L - 128x_3)
 \end{aligned} \tag{24.18}$$

Il relativo diagramma si presenta come in Figura 24.3. Gli sforzi di taglio e

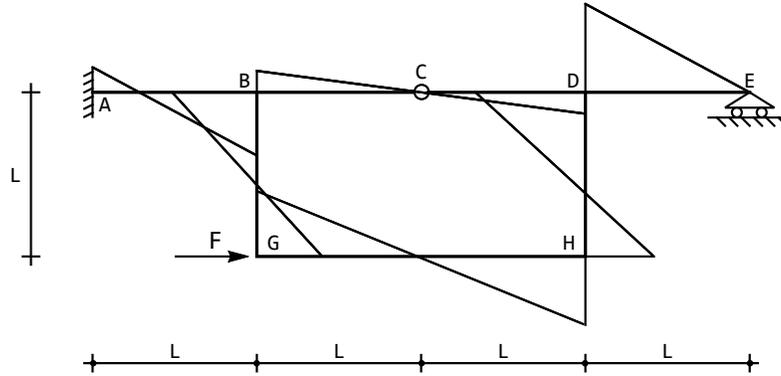


Figura 24.3: I momenti per il telaio a cassone

gli sforzi normali sono costanti su ciascun tratto:

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= t^{DE}(x_3) = \frac{169}{628}F \\
 t^{BC}(x_3) &= t^{CD}(x_3) = \frac{41}{628}F \\
 t^{BG}(x_3) &= -\frac{287}{628}F \\
 t^{DH}(x_3) &= -\frac{341}{628}F \\
 t^{GH}(x_3) &= \frac{32}{157}F \\
 n^{AB}(x_3) &= F \\
 n^{BC}(x_3) &= n^{CD}(x_3) = -n^{GH}(x_3) = \frac{341F}{628} \\
 n^{DE}(x_3) &= 0 \\
 n^{BG}(x_3) &= -n^{DH}(x_3) = \frac{32F}{157}
 \end{aligned} \tag{24.19}$$

24.1 Un caso di simmetria

La struttura in Figura 24.4 è ripresa da M. Di Paola, *Esercizi di Scienza delle Costruzioni*, dove la simmetria è sfruttata al fine di ridurre il grado di iperstaticità, per poi applicare il principio dei lavori virtuali al calcolo del taglio in mezzera del tratto superiore. In questa sede si vuole invece applicare la metodologia della linea elastica al fine di ottenere la deformata ed i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione interna. Si suppone che le rigidezze flessionali dei tratti orizzontali sia pari ad EI_1 , mentre i due tratti verticali hanno rigidezza flessionale EI_2 .

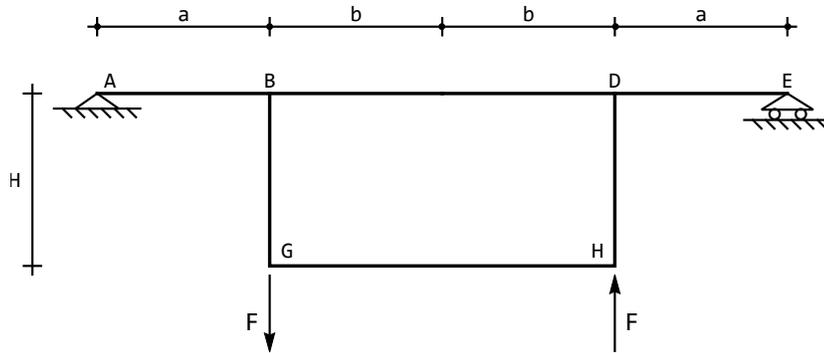


Figura 24.4: Un telaio a cassone simmetrico

Si divide la struttura in sei tratti, e per ciascuno di essi si ipotizza una linea elastica flessionale ed assiale, in funzione del modello strutturale che si vuole adottare. Se non si ipotizza alcun comportamento particolare, le linee elastiche flessionali saranno polinomi cubici, mentre le linee elastiche assiali saranno lineari:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\
 u_2^{BD}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_3^{BD}(x_3) &= d_0 + d_1x_3
 \end{aligned} \tag{24.20}$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{DE}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
 u_3^{DE}(x_3) &= f_0 + f_1x_3 \\
 u_2^{GH}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \\
 u_3^{GH}(x_3) &= h_0 + h_1x_3 \\
 u_2^{BG}(x_3) &= m_0 + m_1x_3 + m_2x_3^2 + m_3x_3^3 \\
 u_3^{BG}(x_3) &= n_0 + n_1x_3 \\
 u_2^{DH}(x_3) &= p_0 + p_1x_3 + p_2x_3^2 + p_3x_3^3 \\
 u_3^{DH}(x_3) &= q_0 + q_1x_3
 \end{aligned} \tag{24.21}$$

La struttura possiede un asse di simmetria verticale, ed il carico in esame è anti-simmetrico rispetto a quest'asse. Ne seguirebbero alcune semplificazioni geometriche, che però si preferisce non sfruttare. E' evidente infatti che condizioni di carico senza proprietà di simmetria costringerebbero comunque a studiare l'intera struttura. Si impongono allora le seguenti condizioni ai limiti:

— nell'appoggio in A , si annulleranno ambedue le componenti di spostamento ed il momento flettente:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(0) &= 0 \\ u_3^{AB}(0) &= 0 \\ m^{AB}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.22)$$

— nel nodo triplo in B si hanno le condizioni di congruenza tra i tratti orizzontali AB e BD :

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(L) &= u_2^{BD}(0) \\ u_3^{AB}(L) &= u_3^{BD}(0) \\ \phi^{AB}(L) &= \phi^{BD}(0) \end{aligned} \quad (24.23)$$

mentre le condizioni di congruenza tra l'asta orizzontale AB e l'asta verticale BG impongono:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(L) &= u_3^{BG}(0) \\ u_3^{AB}(L) &= -u_2^{BG}(0) \\ \phi^{AB}(L) &= \phi^{BG}(0) \end{aligned} \quad (24.24)$$

Le tre condizioni di equilibrio del nodo portano a scrivere:

$$\begin{aligned} -t^{AB}(L) + t^{BD}(0) + n^{BG}(0) &= 0 \\ -n^{AB}(L) + n^{BD}(0) - t^{BG}(0) &= 0 \\ -m^{AB}(L) + m^{BD}(0) + m^{BG}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.25)$$

— nel nodo triplo in D si hanno le condizioni di congruenza tra i tratti orizzontali BD e DE :

$$\begin{aligned} u_2^{BD}(2L) &= u_2^{DE}(0) \\ u_3^{BD}(2L) &= u_3^{DE}(0) \\ \phi^{BD}(2L) &= \phi^{DE}(0) \end{aligned} \quad (24.26)$$

mentre le condizioni di congruenza tra l'asta orizzontale BD e l'asta verticale DH impongono:

$$\begin{aligned} u_2^{BD}(2L) &= u_3^{DH}(0) \\ u_3^{BD}(2L) &= -u_2^{DH}(0) \\ \phi^{BD}(2L) &= \phi^{DH}(0) \end{aligned} \quad (24.27)$$

Le tre condizioni di equilibrio del nodo portano a scrivere:

$$\begin{aligned} -t^{BD}(2L) + t^{DE}(0) + n^{DH}(0) &= 0 \\ -n^{BD}(2L) + n^{DE}(0) - t^{DH}(0) &= 0 \\ -m^{BD}(2L) + m^{DE}(0) + m^{DH}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.28)$$

— nel carrello in E , si annullano gli spostamenti trasversali, gli sforzi normali ed i momenti flettenti:

$$\begin{aligned} u_2^{DE}(L) &= 0 \\ n^{DE}(L) &= 0 \\ m^{DE}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (24.29)$$

— Nel nodo G , le condizioni di congruenza e di equilibrio dettano le sei condizioni:

$$\begin{aligned} u_2^{BG}(H) &= -u_3^{GH}(0) \\ u_3^{BG}(H) &= u_2^{GH}(0) \\ \phi^{BG}(H) &= \phi^{GH}(0) \end{aligned} \quad (24.30)$$

$$\begin{aligned} t^{BG}(H) + n^{GH}(0) &= 0 \\ -n^{BG}(H) + t^{GH}(0) &= 0 \\ -m^{BG}(H) + m^{GH}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.31)$$

— infine, nel nodo H , le condizioni di congruenza e di equilibrio dettano le sei condizioni:

$$\begin{aligned} u_2^{GH}(2L) &= u_3^{DH}(H) \\ u_3^{GH}(2L) &= -u_2^{DH}(H) \\ \phi^{GH}(2L) &= \phi^{DH}(H) \\ -t^{GH}(2L) - n^{DH}(H) &= 0 \\ -n^{GH}(2L) + t^{DH}(H) &= 0 \\ -m^{GH}(2L) - m^{DH}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (24.32)$$

Le costanti di integrazione si ottengono facilmente, ma le formule per gli spostamenti trasversali ed assiali sono lunghe e poco significative. Si preferisce quindi limitarsi al caso in cui $EA = \infty$:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{Fbx_3}{\Delta} (a(2b^2(bEI_2 + 3EI_1H) + a^2(2bEI_2 + 3EI_1H) + \\ &\quad 3ab(2bEI_2 + 3EI_1H)) - (a+b)(2bEI_2 + 3EI_1H)x_3^2) \\ u_2^{BD}(x_3) &= \frac{Fa(b-x_3)}{\Delta} (2ab(2abEI_2 + b^2EI_2 + 3aEI_1H + 3bEI_1H) + \\ &\quad 2b(a+b)(bEI_2 + 3EI_1H)x_3 - (a+b)(bEI_2 + 3EI_1H)x_3^2) \end{aligned} \quad (24.33)$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{DE}(x_3) &= -\frac{Fb(a-x_3)}{\Delta} (2ab(2abEI_2 + b^2EI_2 + 3aEI_1H + 3bEI_1H) + \\
 &\quad 2a(a+b)(2bEI_2 + 3EI_1H)x_3 - (a+b)(2bEI_2 + 3EI_1H)x_3^2) \\
 u_2^{BG}(x_3) &= -\frac{Fابخ_3}{\Delta} (-2b^2(bEI_2 + 3EI_1H) + \\
 &\quad a^2(4bEI_2 + 6EI_1H) + 3b(a+b)EI_1x_3) \\
 u_2^{DH}(x_3) &= -\frac{Fابخ_3}{\Delta} (-2b^2(bEI_2 + 3EI_1H) + \\
 &\quad a^2(4bEI_2 + 6EI_1H) + 3b(a+b)EI_1x_3) \\
 u_2^{GH}(x_3) &= \frac{Fاب(b-x_3)}{\Delta} (2a(2abEI_2 + b^2EI_2 + 3aEI_1H + 3bEI_1H) + \\
 &\quad 2b(a+b)EI_2x_3 - (a+b)EI_2x_3^2)
 \end{aligned}
 \tag{24.34}$$

con:

$$\Delta = (6(a+b)^2EI_1(2bEI_2 + 3EI_1H))
 \tag{24.35}$$

Le linee elastiche assiali della trave superiore sono identicamente nulle, mentre le altre sono costanti:

$$\begin{aligned}
 u_3^{BG}(x_3) &= \frac{Fa^2b^2(2abEI_2 + b^2EI_2 + 3aEI_1H + 3bEI_1H)}{3(a+b)^2EI_1(2bEI_2 + 3EI_1H)} \\
 u_3^{DH}(x_3) &= -\frac{Fa^2b^2(2abEI_2 + b^2EI_2 + 3aEI_1H + 3bEI_1H)}{3(a+b)^2EI_1(2bEI_2 + 3EI_1H)} \\
 u_3^{GH}(x_3) &= \frac{FابH(3abEI_1H - b^2(2bEI_2 + 3EI_1H) + a^2(4bEI_2 + 6EI_1H))}{6(a+b)^2EI_1(2bEI_2 + 3EI_1H)}
 \end{aligned}
 \tag{24.36}$$

La deformata si presenta come in Figura 24.5.

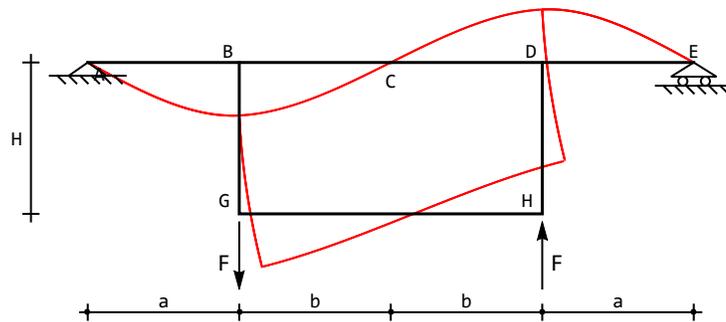


Figura 24.5: La deformata per il telaio a cassone simmetrico

I momenti flettenti ed i tagli si ottengono per derivazione successiva, ed in ipotesi di inestensibilità assiale, valgono:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{Fbx_3}{a+b} \\
 m^{BD}(x_3) &= \frac{Fa(bEI_2 + 3EI_1H)(b-x_3)}{(a+b)(2bEI_2 + 3EI_1H)} \\
 m^{DE}(x_3) &= -\frac{Fb(a-x_3)}{a+b} \\
 m^{BG}(x_3) &= \frac{Fab^2EI_2}{(a+b)(2bEI_2 + 3EI_1H)} \\
 m^{DH}(x_3) &= \frac{Fab^2EI_2}{(a+b)(2bEI_2 + 3EI_1H)} \\
 m^{GH}(x_3) &= \frac{FabEI_2F(b-x_3)}{(a+b)(2bEI_2 + 3EI_1H)}
 \end{aligned} \tag{24.37}$$

Il relativo diagramma si presenta come in Figura 24.6.

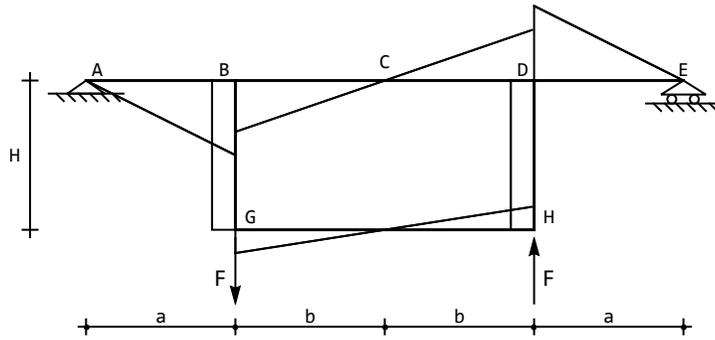


Figura 24.6: I momenti per il telaio a cassone simmetrico

Gli sforzi di taglio sono nulli sui tratti verticali, ed altrove sono costanti:

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= t^{DE}(x_3) = \frac{Fb}{a+b} \\
 t^{BD}(x_3) &= -\frac{Fa(bEI_2 + 3EI_1H)}{(a+b)(2bEI_2 + 3EI_1H)} \\
 t^{BG}(x_3) &= 0 \\
 t^{DH}(x_3) &= 0 \\
 t^{GH}(x_3) &= -\frac{FabEI_2}{(a+b)(2bEI_2 + 3EI_1H)}
 \end{aligned} \tag{24.38}$$

Infine, lo sforzo normale è nullo sui tratti orizzontali, mentre sui tratti verticali vale:

$$n^{BG}(x_3) = -n^{DH}(x_3) = \frac{F(abEI_2 + 2b^2EI_2 + 3aEI_1H + 3bEI_1H)}{(a+b)(2bEI_2 + 3EI_1H)} \quad (24.39)$$

Capitolo 25

Un telaio a due piani

Il telaio a due piani di Figura 25.1 è stato studiato in E.Viola Esercitazioni di Scienza delle Costruzioni, Vol.II, attraverso una applicazione del classico metodo di Cross. Le travi hanno rigidezza flessione $5EI$, mentre i pilastri hanno rigidezza flessionale EI .

Si vuole affrontare lo stesso schema attraverso la scrittura delle linee elastiche, e poichè si ammette che la rigidezza assiale sia infinita, si annullano identicamente le linee elastiche assiali (telaio a nodi fissi) e si scrive:

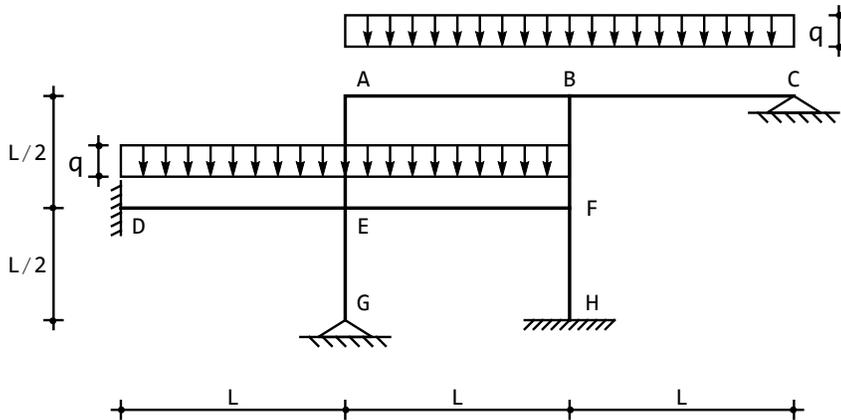


Figura 25.1: Un telaio a due piani

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{120EI} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 + b_2x_3^2 + b_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{120EI} \\
 u_2^{DE}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{120EI}
 \end{aligned} \tag{25.1}$$

$$\begin{aligned}
u_2^{EF}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 + d_2x_3^2 + d_3x_3^3 + q\frac{x_3^4}{120EI} \\
u_2^{GE}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
u_2^{EA}(x_3) &= f_0 + f_1x_3 + f_2x_3^2 + f_3x_3^3 \\
u_2^{HF}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \\
u_2^{FB}(x_3) &= h_0 + h_1x_3 + h_2x_3^2 + h_3x_3^3
\end{aligned}$$

Le condizioni ai limiti da imporre saranno facilmente individuabili in tutti i punti estremi.

Nei due incastri si annullano spostamenti trasversali e rotazioni:

$$\begin{aligned}
u_2^{DE}(0) &= 0 \\
\phi^{DE}(0) &= 0 \\
u_2^{HF}(0) &= 0 \\
\phi^{HF}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{25.2}$$

— nei due appoggi saranno nulli gli spostamenti verticali ed il momento flettente:

$$\begin{aligned}
u_2^{GE}(0) &= 0 \\
m^{GE}(0) &= 0 \\
u_2^{BC}(L) &= 0 \\
m^{BC}(L) &= 0
\end{aligned} \tag{25.3}$$

— nel nodo in A si annullano gli spostamenti trasversali, si uguagliano le rotazioni, e si equilibrano i momenti:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(0) &= 0 \\
u_2^{EA}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\
\phi^{AB}(0) &= \phi^{EA}\left(\frac{L}{2}\right) \\
m^{AB}(0) - m^{EA}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{25.4}$$

— nel nodo triplo in B , allo stesso modo, si annullano gli spostamenti trasversali, si uguagliano le rotazioni, e si equilibrano i momenti:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(L) &= 0 \\
u_2^{BC}(0) &= 0 \\
u_2^{FB}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\
\phi^{AB}(L) &= \phi^{BC}(0)
\end{aligned} \tag{25.5}$$

$$\begin{aligned}\phi^{AB}(L) &= \phi^{FB}\left(\frac{L}{2}\right) \\ -m^{AB}(L) + m^{BC}(0) - m^{FB}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0\end{aligned}$$

— condizioni del tutto analoghe si scrivono nel nodo triplo in F :

$$\begin{aligned}u_2^{EF}(L) &= 0 \\ u_2^{FB}(0) &= 0 \\ u_2^{HF}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\ \phi^{EF}(L) &= \phi^{FB}(0) \\ \phi^{EF}(L) &= \phi^{HF}\left(\frac{L}{2}\right) \\ -m^{EF}(L) + m^{FB}(0) - m^{HF}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0\end{aligned}\tag{25.6}$$

— in corrispondenza del nodo quadruplo in E occorre imporre la congruenza tra le quattro aste in esso concorrenti, e l'equilibrio alla rotazione del nodo. Per l'ipotesi di inestensibilità assiale si potrà scrivere subito:

$$\begin{aligned}u_2^{DE}(L) &= 0 \\ u_2^{EA}(0) &= 0 \\ u_2^{EF}(0) &= 0 \\ u_2^{GE}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0\end{aligned}\tag{25.7}$$

La congruenza imporrà poi l'uguaglianza delle rotazioni, sicchè dovrà essere:

$$\begin{aligned}\phi^{DE}(L) &= \phi^{EA}(0) \\ \phi^{DE}(L) &= \phi^{GE}\left(\frac{L}{2}\right) \\ \phi^{DE}(L) &= \phi^{EF}(0)\end{aligned}\tag{25.8}$$

Infine, l'equilibrio alla rotazione è garantito dallo scrivere:

$$-m^{DE}(L) + m^{EA}(0) + m^{EF}(0) - m^{GE}\left(\frac{L}{2}\right) = 0\tag{25.9}$$

Come si vede, la regolarità del telaio si traduce in una facile imposizione delle condizioni ai limiti. Le linee elastiche sono ricavabili come:

$$\begin{aligned}u_2^{AB}(x_3) &= \frac{qx_3(10195L^3 + 8528L^2x_3 - 49721Lx_3^2 + 30998x_3^3)}{3719760EI} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{qx_3(2080L^3 + 43377L^2x_3 - 76455Lx_3^2 + 30998x_3^3)}{3719760EI}\end{aligned}\tag{25.10}$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{DE}(x_3) &= \frac{qx_3^2(15034L^2 - 30533Lx_3 + 15499x_3^2)}{1859880EI} \\
 u_2^{EF}(x_3) &= \frac{qx_3(465L^3 + 19119L^2x_3 - 35083Lx_3^2 + 15499x_3^3)}{1859880EI} \\
 u_2^{GE}(x_3) &= -\frac{31qLx_3(L^2 - 4x_3^2)}{247984EI} \\
 u_2^{EA}(x_3) &= \frac{qLx_3(93L^2 - 2411Lx_3 + 4450x_3^2)}{371976EI} \\
 u_2^{HF}(x_3) &= \frac{455qL(L - 2x_3)x_3^2}{92994EI} \\
 u_2^{FB}(x_3) &= -\frac{13qLx_3(35L^2 - 124Lx_3 + 108x_3^2)}{185988EI}
 \end{aligned}$$

La deformata è riportata in Figura 25.2. Lo spostamento massimo viene quindi

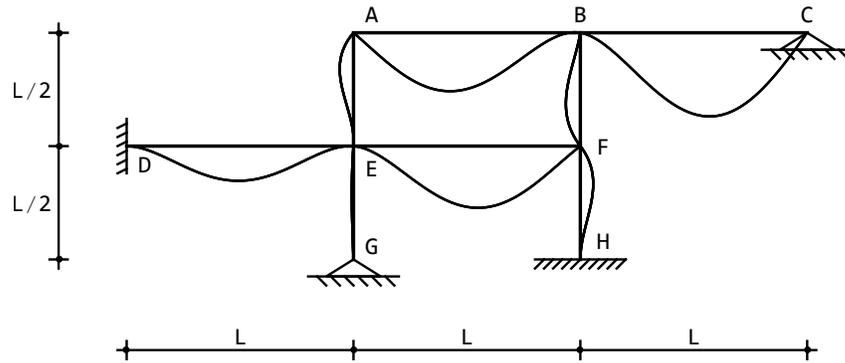


Figura 25.2: La deformata per il telaio a due piani

raggiunto lungo la trave BC , e per conoscere il suo valore occorre ricavare l'ascissa x_3^* di rotazione nulla. Si ha subito:

$$x_3^* \approx 0.569L \quad (25.11)$$

e lo spostamento massimo vale:

$$u_{2max} \approx 0.00118072 \frac{qL^4}{EI} \quad (25.12)$$

I momenti si ottengono per derivazione successiva, a partire dagli spostamenti trasversali, e valgono:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{q(8528L^2 - 149163Lx_3 + 185988x_3^2)}{371976} \\
 m^{BC}(x_3) &= -\frac{q(14459L^2 - 76455Lx_3 + 61996x_3^2)}{123992}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m^{DE}(x_3) &= -\frac{q(15034L^2 - 91599Lx_3 + 92994x_3^2)}{185988} \\
 m^{EF}(x_3) &= -\frac{q(6373L^2 - 35083Lx_3 + 30998x_3^2)}{61996} \\
 m^{GE}(x_3) &= -\frac{93Lqx_3}{30998} \\
 m^{EA}(x_3) &= \frac{Lq(2411L - 13350x_3)}{185988} \\
 m^{HF}(x_3) &= -\frac{455Lq(L - 6x_3)}{46497} \\
 m^{FB}(x_3) &= -\frac{26Lq(31L - 81x_3)}{46497}
 \end{aligned} \tag{25.13}$$

con diagramma riportato in Figura 25.3.

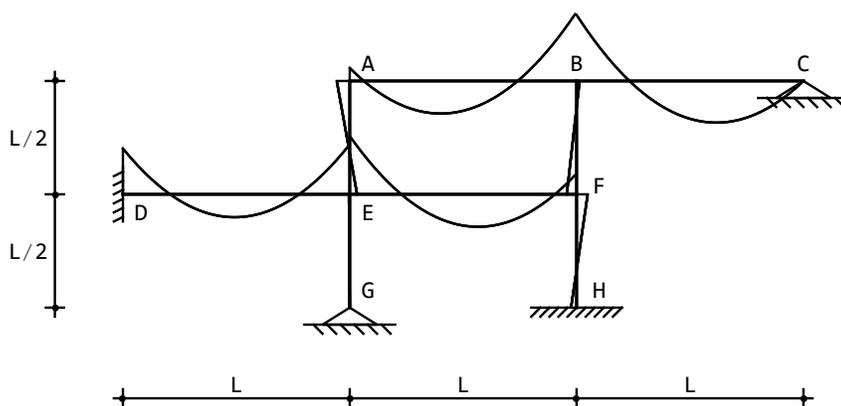


Figura 25.3: I momenti flettenti sul telaio a due piani

Il metodo di Cross è un metodo numerico, e per ritrovare i valori riportati in Viola basta porre $q = 20\text{kN/m}$ ed $L = 6\text{m}$.

Capitolo 26

Un modello di arco

La struttura in Figura 26.1, può essere considerata un modello rudimentale di arco doppiamente incastrato. Si vuole dedurre la deformata, insieme alle caratteristiche della sollecitazione interna.

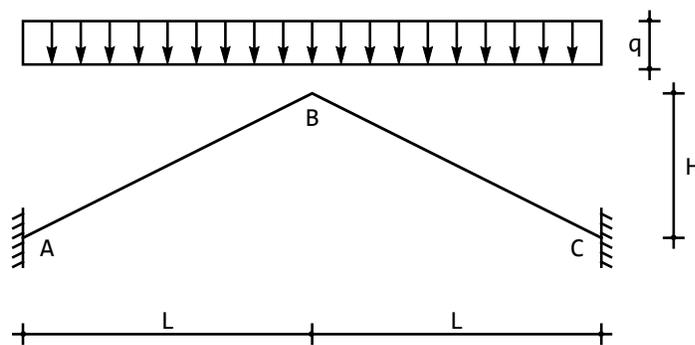


Figura 26.1: Un modello di arco doppiamente incastrato

Ciascuno dei due tratti in cui è divisa la struttura ha lunghezza:

$$S = \sqrt{L^2 + H^2} \quad (26.1)$$

Si indica con α l'angolo di inclinazione del tratto AB rispetto all'orizzontale, e quindi potrà anche scriversi:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(\frac{H}{L}\right) \\ L &= S \cos(\alpha) \\ H &= S \sin(\alpha) = H \end{aligned} \quad (26.2)$$

Il carico q è verticale, e deve essere suddiviso nelle due componenti trasversali ed assiali:

$$\begin{aligned} q_t &= q \cos(\alpha) \\ q_a &= q \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (26.3)$$

Si divide la struttura in due tratti, e per ciascuno di essi si ipotizza una linea elastica flessionale cubica ed una linea elastica assiale lineare, presupponendo che le aste siano assialmente deformabili:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + \frac{q_t \cos(\alpha)}{24EI} x_3^4 \\ u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + \frac{q_a \cos(\alpha)}{2EA} x_3^2 \\ u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 + \frac{q_t \cos(\alpha)}{24EI} x_3^4 \\ u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 - \frac{q_a \cos(\alpha)}{2EA} x_3^2 \end{aligned} \quad (26.4)$$

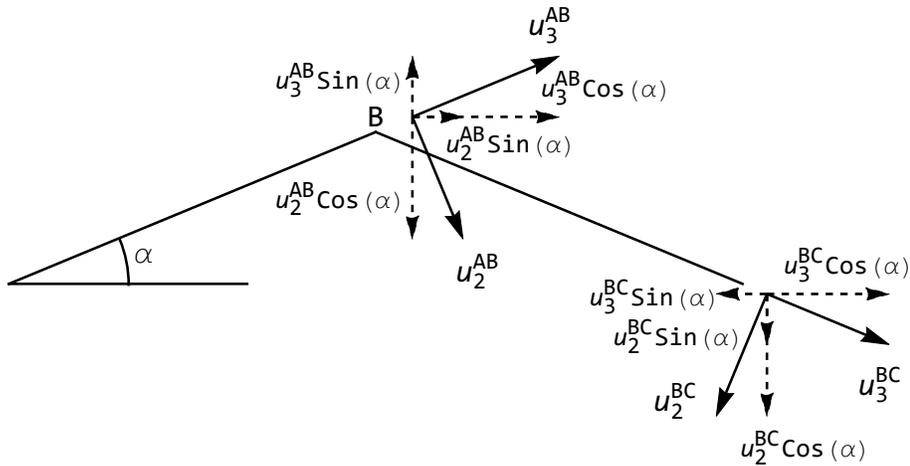
Si osservi infatti che il carico verticale di partenza insisteva su una luce pari a $2L$, ed è poi stato trasformato in due stese di carico agenti lungo una luce $2S$. Di conseguenza le intensità a metro lineare dei carichi assiali e trasversali devono essere opportunamente ridotte. Si faccia anche attenzione ai segni dei carichi, diretta conseguenza della scelta dei sistemi di riferimento: il carico trasversale è diretto secondo l'asse X_2 su ambedue i tratti, mentre il carico assiale sul tratto AB risulta orientato in senso contrario all'asse X_3 , e sul tratto BC secondo X_3 .

Le condizioni ai limiti negli incastri in A e C sono banali, ed annullano spostamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(0) &= 0 \\ u_3^{AB}(0) &= 0 \\ \phi^{AB}(0) &= 0 \\ u_2^{BC}(S) &= 0 \\ u_3^{BC}(S) &= 0 \\ \phi^{BC}(S) &= 0 \end{aligned} \quad (26.5)$$

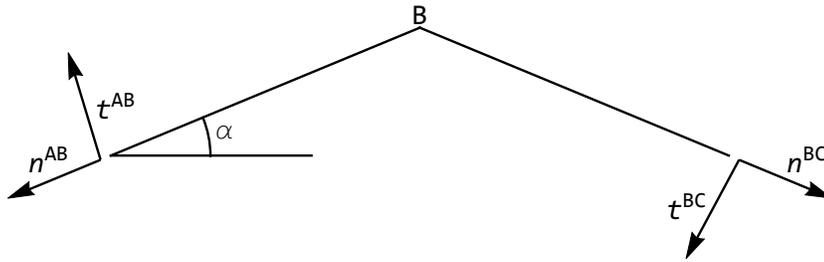
mentre nel nodo in B , la congruenza impone che le componenti orizzontali e verticali degli spostamenti delle due aste concorrenti siano uguali, così come uguali saranno le due rotazioni. Si ha quindi, come può dedursi dalla Figura 26.2:

$$\begin{aligned} u_3^{AB}(S) \cos(\alpha) + u_2^{AB}(S) \sin(\alpha) &= u_3^{BC}(0) \cos(\alpha) - u_2^{BC}(0) \sin(\alpha) \\ -u_3^{AB}(S) \sin(\alpha) + u_2^{AB}(S) \cos(\alpha) &= u_3^{BC}(0) \sin(\alpha) + u_2^{BC}(0) \cos(\alpha) \\ \phi^{AB}(S) &= \phi^{BC}(0) \end{aligned} \quad (26.6)$$


 Figura 26.2: Lo schema per la scrittura delle equazioni di congruenza in B

Analogamente, l'equilibrio del nodo alla traslazione orizzontale e verticale, ed alla rotazione, detta, in base alla Figura 26.3:

$$\begin{aligned}
 -n^{AB}(S) \cos(\alpha) - t^{AB}(S) \sin(\alpha) + n^{BC}(0) \cos(\alpha) - t^{BC}(0) \sin(\alpha) &= 0 \\
 n^{AB}(S) \sin(\alpha) - t^{AB}(S) \cos(\alpha) + n^{BC}(0) \sin(\alpha) + t^{BC}(0) \cos(\alpha) &= 0 \quad (26.7) \\
 -m^{AB}(S) + m^{BC}(0) &= 0
 \end{aligned}$$


 Figura 26.3: Lo schema per la scrittura delle equazioni di equilibrio in B

Si ottengono le costanti di integrazione, da cui, portando la rigidezza assiale EA ad infinito si potranno scrivere gli spostamenti trasversali in ipotesi di inestensibilità assiale:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{qL^2(S-x_3)^2x_3^2}{24EIS^2} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{qL^2(S-x_3)^2x_3^2}{24EIS^2} \quad (26.8)
 \end{aligned}$$

mentre gli spostamenti assiali sono identicamente nulli. La deformata è riportata in Figura 26.4.

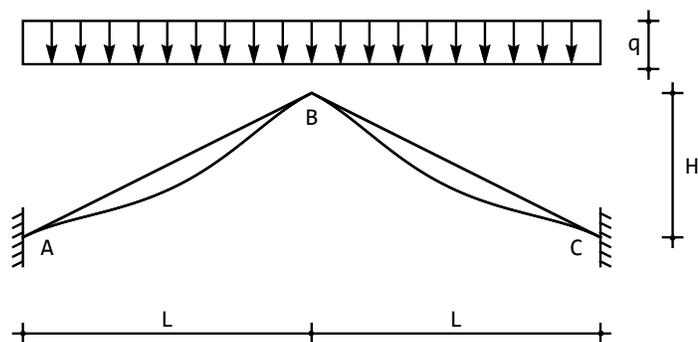


Figura 26.4: La deformata per l'arco doppiamente incastrato

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= -\frac{qL^2(S^2 - 6Sx_3 + 6x_3^2)}{12S^2} \\ m^{BC}(x_3) &= -\frac{qL^2(S^2 - 6Sx_3 + 6x_3^2)}{12S^2} \end{aligned} \quad (26.9)$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 26.5, ed è facile

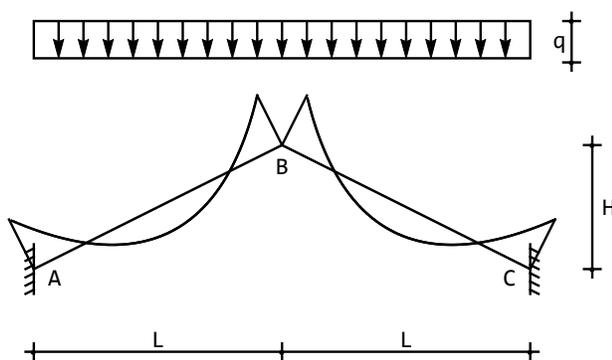


Figura 26.5: Il diagramma del momento per l'arco doppiamente incastrato

verificare che agli estremi si hanno momenti uguali, e pari a:

$$M_A = M_B = M_C = -\frac{qL^2}{12} \quad (26.10)$$

Gli sforzi di taglio si ottengono derivando i momenti:

$$\begin{aligned} t^{AB}(x_3) &= \frac{qL^2(S - 2x_3)}{2S^2} \\ t^{BC}(x_3) &= \frac{qL^2(S - 2x_3)}{2S^2} \end{aligned} \quad (26.11)$$

Gli sforzi normali sono invece forniti da:

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= -\frac{qL((2H^2 + L^2)S - 2H^2x_3)}{2HS^2} \\ n^{BC}(x_3) &= -q\frac{L^3S + 2H^2Lx_3}{2HS^2} \end{aligned} \quad (26.12)$$

Le reazioni esterne sono fornite dall'equilibrio dei nodi A e C :

$$\begin{aligned} R_{Av} &= n^{AB}(0)\sin(\alpha) - t^{AB}(0)\cos(\alpha) = -qL \\ R_{Ah} &= -n^{AB}(0)\cos(\alpha) - t^{AB}(0)\sin(\alpha) = q\frac{L^2}{2H} \\ R_{Cv} &= n^{BC}(S)\sin(\alpha) + t^{BC}(S)\cos(\alpha) = -qL \\ R_{Ch} &= n^{BC}(S)\cos(\alpha) - t^{BC}(S)\sin(\alpha) = -q\frac{L^2}{2H} \\ \mathcal{M}_{rA} &= -m^{AB}(0) = \frac{1}{12}q_tS^2\cos(\alpha) = \frac{qL^2}{12} \\ \mathcal{M}_{rC} &= m^{BC}(S) = -\frac{1}{12}q_tS^2\cos(\alpha) = -\frac{qL^2}{12} \end{aligned} \quad (26.13)$$

Si noti che la simmetria dello schema e del carico avrebbero permesso facili semplificazioni. Tuttavia, poichè ora si vogliono esaminare condizioni di carico e di vincolo che distruggono la simmetria, si è rinunciato ad una trattazione *ad hoc* per questo caso.

26.1 Il caso del carico su metà luce

Si ipotizzi ora che il carico agisca solo sulla metà di sinistra, portando allo schema di Figura 26.6. L'unica modifica da apportare consiste nel modificare le linee elastiche del tratto BC , annullando i carichi. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + \frac{q_t\cos(\alpha)}{24EI}x_3^4 \\ u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 + \frac{q_a\cos(\alpha)}{2EI}x_3^2 \\ u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\ u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 \end{aligned} \quad (26.14)$$

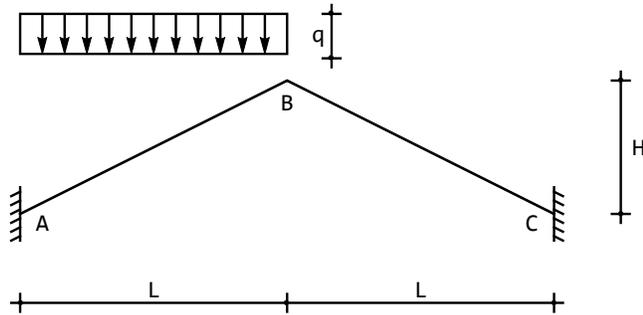


Figura 26.6: Un modello di arco con carico su metà luce incastrato

Le dodici condizioni ai limiti restano immutate, e la loro soluzione porta agli spostamenti:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{qL^2 x_3^2 (5S^2 - 9Sx_3 + 4x_3^2)}{96EIS^2} \\ u_2^{BC}(x_3) &= -\frac{qL^2 (S - x_3)^2 x_3}{96EIS} \end{aligned} \quad (26.15)$$

mentre gli spostamenti assiali sono identicamente nulli. La deformata è riportata in Figura 26.7.

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva :

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= -\frac{qL^2 (5S^2 - 27Sx_3 + 24x_3^2)}{48S^2} \\ m^{BC}(x_3) &= -\frac{qL^2 (2S - 3x_3)}{48S} \end{aligned} \quad (26.16)$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 26.8.

In B , quindi, il momento ora vale:

$$M_B = -\frac{qL^2}{24} \quad (26.17)$$

mentre in corrispondenza degli incastrati si hanno i valori:

$$\begin{aligned} M_A &= -\frac{5}{48}qL^2 \\ M_C &= \frac{qL^2}{48} \end{aligned} \quad (26.18)$$

Gli sforzi di taglio sono lineari lungo AB e costanti lungo BC :

$$\begin{aligned} t^{AB}(x_3) &= \frac{qL^2 (9S - 16x_3)}{16S^2} \\ t^{BC}(x_3) &= \frac{qL^2}{16S} \end{aligned} \quad (26.19)$$

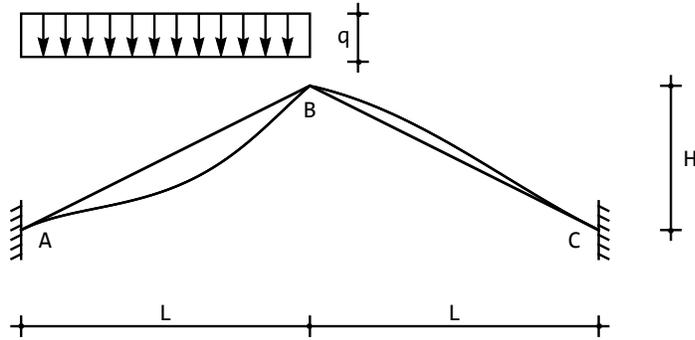


Figura 26.7: La deformata per l'arco con carico su metà luce incastrato

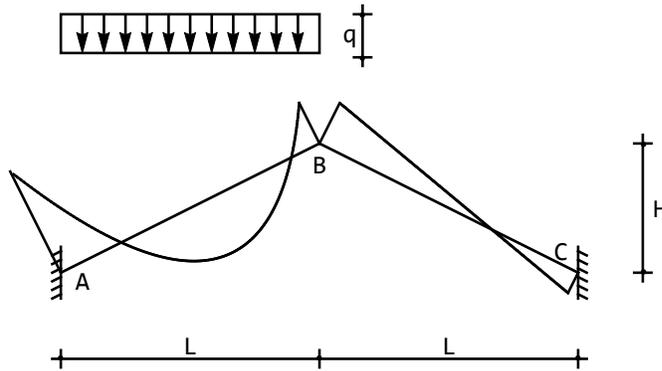


Figura 26.8: I momenti flettenti per l'arco con carico su metà luce incastrato

ed analogo andamento hanno gli sforzi normali:

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= -\frac{qL(13H^2S + 4L^2S - 16H^2x_3)}{16HS^2} \\ n^{BC}(x_3) &= -\frac{qL(3H^2 + 4L^2)}{16HS} \end{aligned} \quad (26.20)$$

Le reazioni esterne sono fornite dall'equilibrio dei nodi A e C:

$$\begin{aligned} R_{Av} &= n^{AB}(0) \sin(\alpha) - t^{AB}(0) \cos(\alpha) = -\frac{13qL}{16} \\ R_{Ah} &= -n^{AB}(0) \cos(\alpha) - t^{AB}(0) \sin(\alpha) = \frac{qL^2}{4H} \\ R_{Cv} &= n^{BC}(S) \sin(\alpha) + t^{BC}(S) \cos(\alpha) = -\frac{3qL}{16} \\ R_{Ch} &= n^{BC}(S) \cos(\alpha) - t^{BC}(S) \sin(\alpha) = -\frac{qL^2}{4H} \end{aligned} \quad (26.21)$$

$$\mathcal{M}_{rA} = -m^{AB}(0) = \frac{5qL^2}{48}$$

$$\mathcal{M}_{rC} = m^{BC}(S) = \frac{qL^2}{48}$$

26.2 Il caso dell'arco con incastro ed appoggio

Se ora si suppone che l'arco sia appoggiato nel nodo C , si giunge allo schema non simmetrico di Figura 26.9. Rispetto al caso di arco doppiamente incastrato

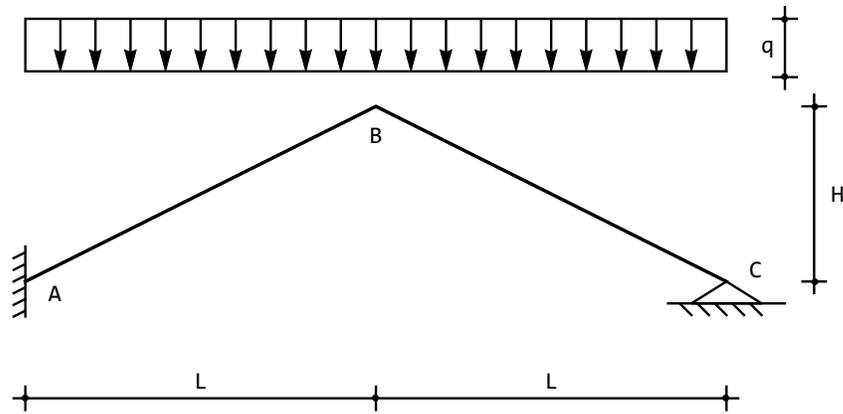


Figura 26.9: Un modello di arco con incastro ed appoggio

bisognerà modificare solo le condizioni ai limiti in C , perchè in questo caso le rotazioni sono libere, e si annulla il momento flettente. Bisognerà quindi imporre, in C :

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(S) &= 0 \\ u_3^{BC}(S) &= 0 \\ m^{BC}(S) &= 0 \end{aligned} \quad (26.22)$$

Le altre condizioni ai limiti restano valide, e la loro soluzione porta alle linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{qL^2 x_3^2 (6S^2 - 13Sx_3 + 7x_3^2)}{168EIS^2} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{qL^2 (S - x_3) x_3 (S^2 + 10Sx_3 - 7x_3^2)}{168EIS^2} \end{aligned} \quad (26.23)$$

con deformata che ora si presenta come in Figura 26.10.

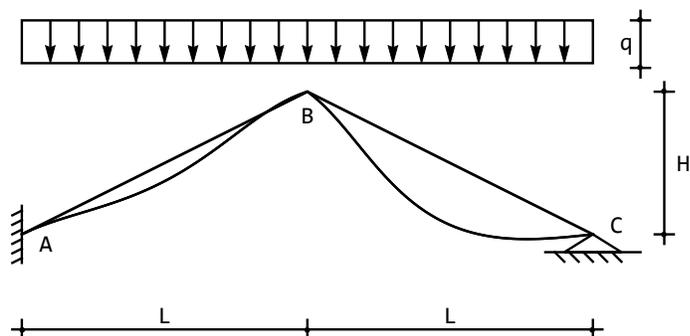


Figura 26.10: La deformata dell'arco incastrato-appoggiato

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{qL^2(2S^2 - 13Sx_3 + 14x_3^2)}{28S^2} \\
 m^{BC}(x_3) &= -\frac{qL^2(3S - 14x_3)(S - x_3)}{28S^2}
 \end{aligned}
 \tag{26.24}$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 26.11.

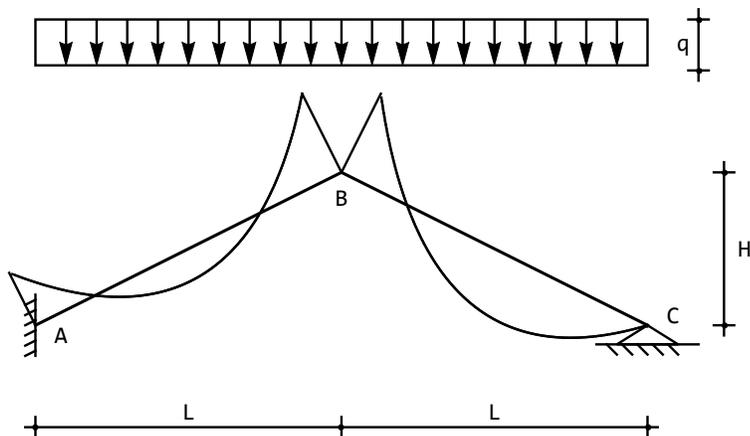


Figura 26.11: Il diagramma del momento per l'arco incastrato-appoggiato

In B , quindi, il momento vale:

$$M_B = -\frac{3}{28}qL^2
 \tag{26.25}$$

mentre in A si ha:

$$M_A = -\frac{2}{28}qL^2
 \tag{26.26}$$

Gli sforzi di taglio si ottengono derivando i momenti:

$$\begin{aligned} t^{AB}(x_3) &= \frac{qL^2(13S - 28x_3)}{28S^2} \\ t^{BC}(x_3) &= \frac{qL^2(17S - 28x_3)}{28S^2} \end{aligned} \quad (26.27)$$

Gli sforzi normali sono invece forniti da:

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= -\frac{qL(29H^4 + 45H^2L^2 + 16L^4 - 28H^2Sx_3)}{28HS^3} \\ n^{BC}(x_3) &= -\frac{qL(-H^4 + 15H^2L^2 + 16L^4 + 28H^2Sx_3)}{28HS^3} \end{aligned} \quad (26.28)$$

Le reazioni esterne sono fornite dall'equilibrio dei nodi A e C :

$$\begin{aligned} R_{Av} &= n^{AB}(0) \sin(\alpha) - t^{AB}(0) \cos(\alpha) = -\frac{29qL}{28} \\ R_{Ah} &= -n^{AB}(0) \cos(\alpha) - t^{AB}(0) \sin(\alpha) = \frac{4qL^2}{7H} \\ R_{Cv} &= n^{BC}(S) \sin(\alpha) + t^{BC}(S) \cos(\alpha) = -\frac{27qL}{28} \\ R_{Ch} &= n^{BC}(S) \cos(\alpha) - t^{BC}(S) \sin(\alpha) = -\frac{4qL^2}{7H} \\ \mathcal{M}_{rA} &= -m^{AB}(0) = \frac{qL^2}{14} \\ \mathcal{M}_{rC} &= m^{BC}(S) = 0 \end{aligned} \quad (26.29)$$

26.3 Il caso dell'arco con incastro e bipendolo

Infine, si consideri lo schema di Figura 26.12, in cui l'arco è vincolato in C con un bipendolo che proibisce lo spostamento assiale, lasciando libero lo spostamento trasversale. Ne segue che il taglio dovrà essere nullo, e quindi le condizioni ai limiti andranno modificate come segue:

$$\begin{aligned} t^{BC}(S) &= 0 \\ u_3^{BC}(S) &= 0 \\ \phi^{BC}(S) &= 0 \end{aligned} \quad (26.30)$$

Le altre condizioni ai limiti restano valide, e la loro soluzione porta alle linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= -\frac{qL^2x_3^2(S^2 + 4Sx_3 - 5x_3^2)}{120EIS^2} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{qL^2x_3(6S^3 + 17S^2x_3 - 20Sx_3^2 + 5x_3^3)}{120EIS^2} \end{aligned} \quad (26.31)$$

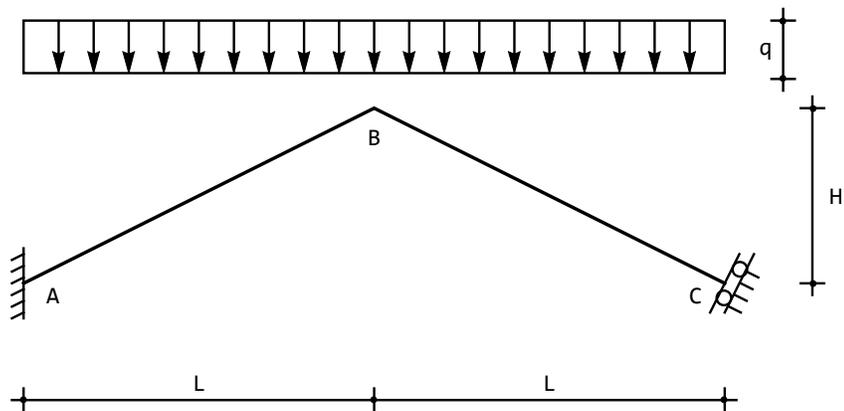


Figura 26.12: L'arco incastrato-guidato

ed alla deformata è riportata in Figura 26.13. Lo spostamento trasversale del bipendolo si calcola come:

$$u_{2C} = \frac{qS^4 \cos(\alpha)^2}{15EI} \quad (26.32)$$

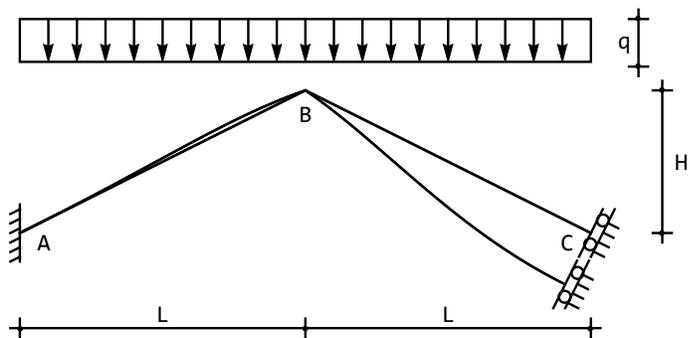


Figura 26.13: La deformata dell'arco incastrato-guidato

Le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= \frac{qL^2 (S^2 + 12Sx_3 - 30x_3^2)}{60S^2} \\ m^{BC}(x_3) &= -\frac{qL^2 (17S^2 - 60Sx_3 + 30x_3^2)}{60S^2} \end{aligned} \quad (26.33)$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 26.14, e da essa possono trarsi i valori notevoli agli estremi.

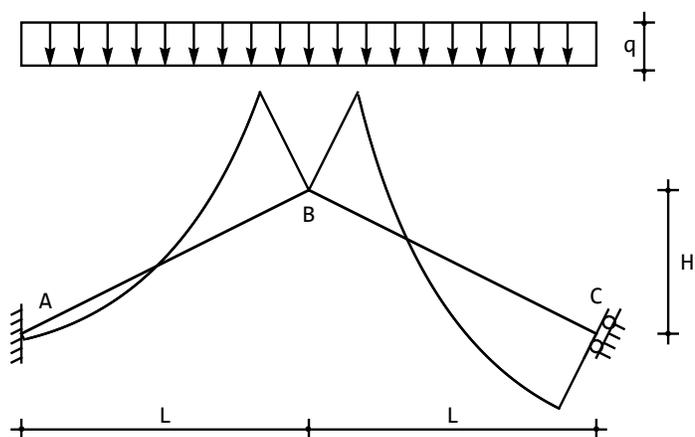


Figura 26.14: Il diagramma del momento per l'arco incastrato-guidato

In B , quindi, il momento vale:

$$M_B = -\frac{17}{60}qL^2 \quad (26.34)$$

mentre in A si ha:

$$M_A = \frac{1}{60}qL^2 \quad (26.35)$$

In corrispondenza del bipendolo in C , il momento vale:

$$M_C = \frac{13}{60}qL^2 \quad (26.36)$$

Gli sforzi di taglio si ottengono derivando i momenti :

$$\begin{aligned} t^{AB}(x_3) &= \frac{qL^2(S - 5x_3)}{5S^2} \\ t^{BC}(x_3) &= \frac{qL^2(S - x_3)}{S^2} \end{aligned} \quad (26.37)$$

Gli sforzi normali sono invece forniti da:

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= -\frac{qL(11H^2S + 9L^2S - 10H^2x_3)}{10HS^2} \\ n^{BC}(x_3) &= \frac{qL(H^2 - 9L^2)S - 10H^2x_3}{10HS^2} \end{aligned} \quad (26.38)$$

Le reazioni esterne sono fornite dall'equilibrio dei nodi A e C :

$$\begin{aligned}R_{Av} &= n^{AB}(0) \sin(\alpha) - t^{AB}(0) \cos(\alpha) = -\frac{11qL}{10} \\R_{Ah} &= -n^{AB}(0) \cos(\alpha) - t^{AB}(0) \sin(\alpha) = \frac{9qL^2}{10H} \\R_{Cv} &= n^{BC}(S) \sin(\alpha) + t^{BC}(S) \cos(\alpha) = -\frac{9qL}{10} \\R_{Ch} &= n^{BC}(S) \cos(\alpha) - t^{BC}(S) \sin(\alpha) = -\frac{9qL^2}{10H} \\ \mathcal{M}_{rA} &= -m^{AB}(0) = -\frac{qL^2}{60} \\ \mathcal{M}_{rC} &= m^{BC}(S) = \frac{13}{60}qL^2\end{aligned}\tag{26.39}$$

Capitolo 27

Telaio a doppio spiovente

Si considera il telaio a due spioventi di Figura 27.1 (*gabled-frame*), costituito da due ritti inclinati di un angolo α rispetto all'orizzontale, e di altezza H . Ne segue quindi che la lunghezza dei tratti laterali è pari a:

$$S = \frac{H}{\sin(\alpha)} = \frac{L_1}{\cos(\alpha)} \quad (27.1)$$

mentre il traverso è lungo L e la lunghezza totale è $L_t = L + 2S \cos(\alpha)$.

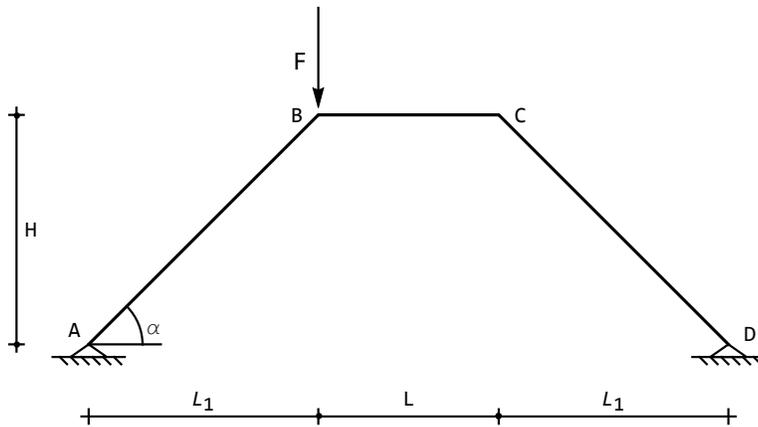


Figura 27.1: Un telaio a doppio spiovente

In ipotesi di validità della teoria di Eulero–Bernoulli per travi snelle, e di elementi assialmente deformabili, gli spostamenti trasversali saranno polinomi cubici, mentre gli spostamenti assiali saranno lineari:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \end{aligned} \quad (27.2)$$

$$\begin{aligned}
u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 \\
u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
u_3^{CD}(x_3) &= f_0 + f_1x_3
\end{aligned}$$

Per poter determinare le diciotto costanti di integrazione, occorre imporre le condizioni ai limiti (di equilibrio e congruenza) in corrispondenza dei quattro nodi:

— negli appoggi in A ed in D si annullano ambedue le componenti di spostamento, ed i momenti:

$$\begin{aligned}
u_2^{AB}(0) &= 0 \\
u_3^{AB}(0) &= 0 \\
m^{AB}(0) &= 0 \\
u_2^{CD}(S) &= 0 \\
u_3^{CD}(S) &= 0 \\
m^{CD}(S) &= 0
\end{aligned} \tag{27.3}$$

— nel nodo in B si hanno le tre condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
u_3^{BC}(0) &= u_2^{AB}(S) \sin(\alpha) + u_3^{AB}(S) \cos(\alpha) \\
u_2^{BC}(0) &= u_2^{AB}(S) \cos(\alpha) - u_3^{AB}(S) \sin(\alpha) \\
\phi^{AB}(S) &= \phi^{BC}(0)
\end{aligned} \tag{27.4}$$

e le tre condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
-t^{AB}(S) \sin(\alpha) - n^{AB}(S) \cos(\alpha) + n^{BC}(0) &= 0 \\
-t^{AB}(S) \cos(\alpha) + n^{AB}(S) \sin(\alpha) + t^{BC}(0) + F &= 0 \\
-m^{AB}(S) + m^{BC}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{27.5}$$

La prima condizione di congruenza esprime l'uguaglianza tra lo spostamento orizzontale del nodo B , inteso come spostamento assiale dell'asta BC , e la somma delle componenti orizzontali di spostamento del nodo B , inteso come appartenente all'asta AB . Poichè — come evidenziato in Figura 27.2 — ambedue queste componenti sono positive, si giunge alla prima delle (27.4). La seconda condizione di congruenza, invece, esprime l'uguaglianza tra lo spostamento verticale del nodo B inteso come spostamento trasversale dell'asta BC , e le componenti verticali di spostamento del nodo B , inteso come appartenente all'asta AB .

Per la scrittura delle tre condizioni di equilibrio si può fare riferimento alla Figura 27.3, dove si è enucleato il nodo B , assieme alle forze su di esso agenti.

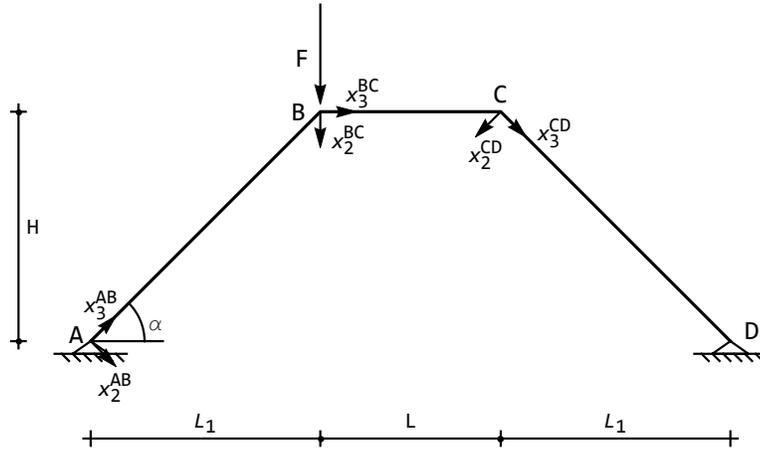


Figura 27.2: Una scelta di sistemi di riferimento per il telaio a doppio spiovente

— nel nodo in C , analogamente a quanto si ottiene in B bisogna imporre la congruenza:

$$\begin{aligned} u_3^{BC}(L) &= u_3^{CD}(0) \cos(\alpha) - u_2^{CD}(0) \sin(\alpha) \\ u_2^{BC}(L) &= u_3^{CD}(0) \sin(\alpha) + u_2^{CD}(0) \cos(\alpha) \\ \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0) \end{aligned} \quad (27.6)$$

e le tre condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} t^{CD}(0) \cos(\alpha) + n^{CD}(0) \sin(\alpha) - t^{BC}(L) &= 0 \\ -t^{CD}(0) \sin(\alpha) + n^{CD}(0) \cos(\alpha) - n^{BC}(L) &= 0 \\ -m^{BC}(L) + m^{DC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (27.7)$$

Si sono così ottenute diciotto condizioni ai limiti, che possono tradursi in altrettante equazioni lineari nelle diciotto costanti di integrazione. Risolvendo il sistema, e portando la rigidità assiale ad infinito, si ottengono le linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{FL \cos(\alpha)}{\Delta} x_3 (S(L(L+3S) + 2S^2 \cos(\alpha)) - L_t x_3^2) \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{FS \cos(\alpha)(L-2x_3)}{\Delta} (LS(L+2S) \cos(\alpha) + LL_t x_3 - L_t x_3^2) \\ u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{FL \cos(\alpha)(S-x_3)}{\Delta} (LS(L+2S) + 2SL_t x_3 - L_t x_3^2) \end{aligned} \quad (27.8)$$

con:

$$\Delta = 12EIL_t^2 \quad (27.9)$$

assieme allo spostamento orizzontale δ del traverso:

$$\begin{aligned} u_3^{AB}(x_3) &= u_3^{CD}(x_3) = 0 \\ u_3^{BC}(x_3) &= \frac{FL^2S^2(L+2S)\sin(2\alpha)}{2\Delta} \end{aligned} \quad (27.10)$$

La deformata si presenta come in Figura 27.4.

Nella stessa ipotesi di telai assialmente inestensibili, le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= \frac{FL\cos(\alpha)x_3}{2L_t} \\ m^{BC}(x_3) &= \frac{FS\cos(\alpha)(L-2x_3)}{2L_t} \\ m^{CD}(x_3) &= -\frac{FL\cos(\alpha)(S-x_3)}{2L_t} \\ t^{AB}(x_3) &= \frac{FL\cos(\alpha)}{2L_t} \\ t^{BC}(x_3) &= -\frac{FL_1}{L_t} \\ t^{CD}(x_3) &= \frac{FL\cos(\alpha)}{2L_t} \\ n^{AB}(x_3) &= \frac{F(-4L_1) + L(-3 + \cos(2\alpha))\csc(\alpha)}{4L_t} \\ n^{BC}(x_3) &= -\frac{1}{2}F\cot(\alpha) \\ n^{CD}(x_3) &= -\frac{F(2S + L\cos(\alpha))\cot(\alpha)}{2L_t} \end{aligned} \quad (27.11)$$

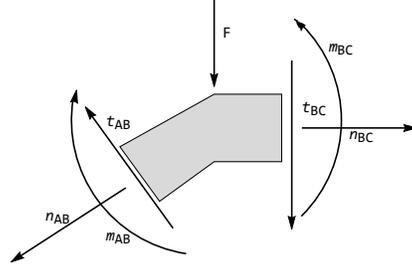


Figura 27.3: L'equilibrio del nodo B per il telaio a doppio spiovente

Il diagramma dei momenti è riportato in Figura 27.5.

Le reazioni dei vincoli si ottengono tramite considerazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_{Ah} &= -n^{AB}(0)\cos(\alpha) - t^{AB}(0)\sin(\alpha) = \frac{1}{2}F\cot(\alpha) \\ R_{Bh} &= n^{CD}(S)\cos(\alpha) - t^{CD}(S)\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}F\cot(\alpha) \\ R_{Av} &= n^{AB}(0)\sin(\alpha) - t^{AB}(0)\cos(\alpha) = -\frac{F(L+L_1)}{L+2L_1} \\ R_{Bv} &= n^{CD}(S)\sin(\alpha) + t^{CD}(S)\cos(\alpha) = -\frac{FL_1}{L+2L_1} \end{aligned} \quad (27.12)$$

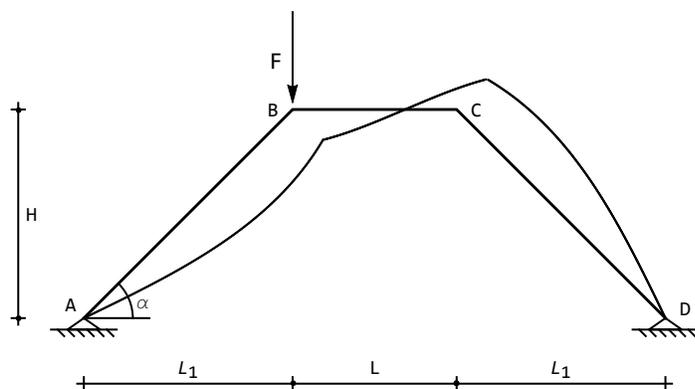


Figura 27.4: La deformata del telaio a doppio spiovente

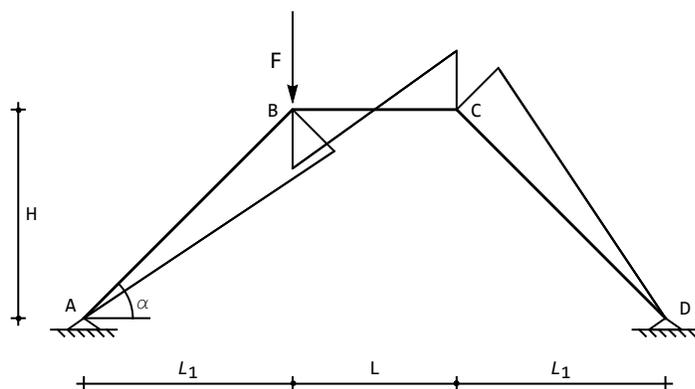


Figura 27.5: Il diagramma del momento per il telaio a doppio spiovente

27.1 Il caso della forza orizzontale

Si consideri ora il caso di una forza orizzontale agente nel nodo B , come illustrato in Figura 27.6. Le condizioni di equilibrio nel nodo B si scriveranno ora:

$$\begin{aligned}
 -t^{AB}(S) \sin(\alpha) - n^{AB}(S) \cos(\alpha) + n^{BC}(0) + F &= 0 \\
 -t^{AB}(S) \cos(\alpha) + n^{AB}(S) \sin(\alpha) + t^{BC}(0) &= 0 \\
 -m^{AB}(S) + m^{BC}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{27.13}$$

mentre le altre condizioni restano inalterate. Le linee elastiche sono date, in

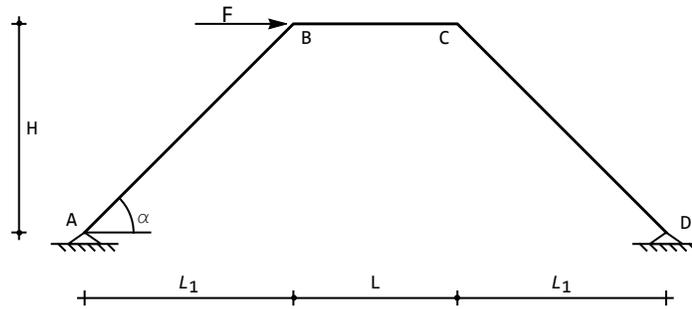


Figura 27.6: Un telaio a doppio spiovente soggetto a forza orizzontale

ipotesi di inestensibilità assiale, da:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{FL \sin(\alpha)}{\Delta} (x_3 (S(L(L+3S) + 2S^2 \cos(\alpha)) - L_t x_3^2)) \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{FS \sin(\alpha)}{\Delta} ((L - 2x_3) (LS(L+2S) \cos(\alpha) + LL_t x_3 - L_t x_3^2)) \\
 u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{FL \sin(\alpha)}{\Delta} ((S - x_3) (LS(L+2S) + 2SL_t x_3 - L_t x_3^2))
 \end{aligned}
 \tag{27.14}$$

assieme allo spostamento orizzontale δ del traverso:

$$\delta = u_3^{BC}(x_3) = \frac{FL^2 S^2 (L+2S) \sin(\alpha)^2}{\Delta}
 \tag{27.15}$$

La deformata si presenta come in Figura 27.7.

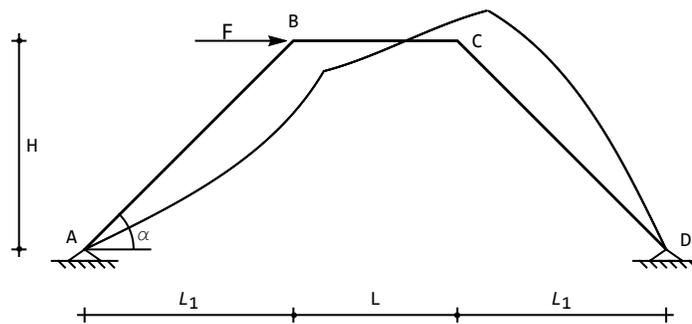


Figura 27.7: La deformata del telaio soggetto a forza orizzontale

Nella stessa ipotesi di telai assialmente inestensibili, le caratteristiche si

ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{FL \sin(\alpha)x_3}{2L_t} \\
 m^{BC}(x_3) &= \frac{FH(L - 2x_3)}{2L_t} \\
 m^{CD}(x_3) &= -\frac{FL \sin(\alpha)(S - x_3)}{2L_t} \\
 t^{AB}(x_3) &= \frac{FL \sin(\alpha)}{2L_t} \\
 t^{BC}(x_3) &= -\frac{FH}{L_t} \\
 t^{CD}(x_3) &= \frac{FL \sin(\alpha)}{2L_t}
 \end{aligned} \tag{27.16}$$

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= \frac{2FS + FL \cos(\alpha)}{2L_t} \\
 n^{BC}(x_3) &= -\frac{F}{2} \\
 n^{CD}(x_3) &= -\frac{F(2S + L \cos(\alpha))}{2L_t}
 \end{aligned} \tag{27.17}$$

Il diagramma dei momenti è riportato in Figura 27.8.

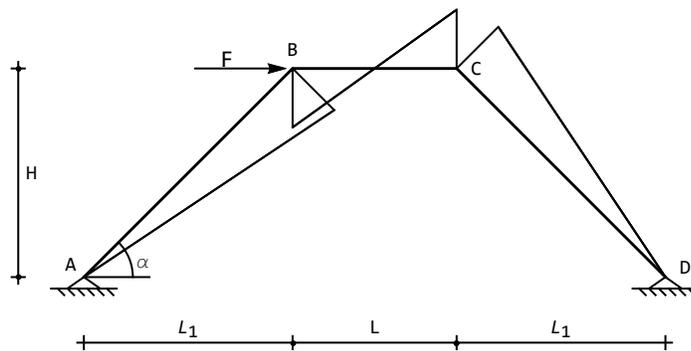


Figura 27.8: Il momento sul telaio soggetto a forza orizzontale

Un valore significativo del momento flettente è ora pari a:

$$M_B = \frac{FLH}{2L_t} \tag{27.18}$$

Le reazioni dei vincoli si ottengono tramite considerazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 R_{Ah} &= -n^{AB}(0) \cos(\alpha) - t^{AB}(0) \sin(\alpha) = -\frac{F}{2} \\
 R_{Bh} &= n^{CD}(S) \cos(\alpha) - t^{CD}(S) \sin(\alpha) = -\frac{F}{2} \\
 R_{Av} &= n^{AB}(0) \sin(\alpha) - t^{AB}(0) \cos(\alpha) = \frac{FH}{L_t} \\
 R_{Bv} &= n^{CD}(S) \sin(\alpha) + t^{CD}(S) \cos(\alpha) = -\frac{FH}{L_t}
 \end{aligned}
 \tag{27.19}$$

27.2 Il caso del carico uniformemente distribuito

Si considera ora il telaio a due spioventi di Figura 27.9, sollecitato da una stesa di carico uniformemente distribuito q lungo tutto il traverso BC . La corrispondente linea elastica diventerà quindi:

$$u_2^{BC}(x_3) = c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 + q \frac{x_3^4}{24EI}
 \tag{27.20}$$

Viceversa, le condizioni ai limiti diventano omogenee, in quanto la forza concentrata è assente. Se gli elementi vengono considerati assialmente rigidi, le

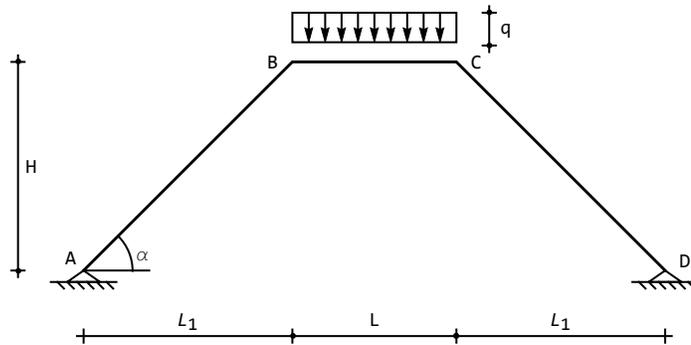


Figura 27.9: Un telaio a doppio spiovente soggetto a carico distribuito

linee elastiche dei due tratti inclinati sono ovviamente nulle. Inoltre, la simmetria dello schema e del carico garantisce che anche lo spostamento assiale del

traverso si annulla. Restano le tre linee elastiche flessionali, date da:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{qL^3x_3(-S^2+x_3^2)}{24EIS(3L+2S)} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{q(L-x_3)x_3(2L^2S+L(3L+2S)x_3-(3L+2S)x_3^2)}{24EI(3L+2S)} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{-qL^3x_3(2S^2-3Sx_3+x_3^2)}{24EIS(3L+2S)}
 \end{aligned} \quad (27.21)$$

La deformata si presenta come in Figura 27.10, ed ha le stesse proprietà di simmetria del carico.

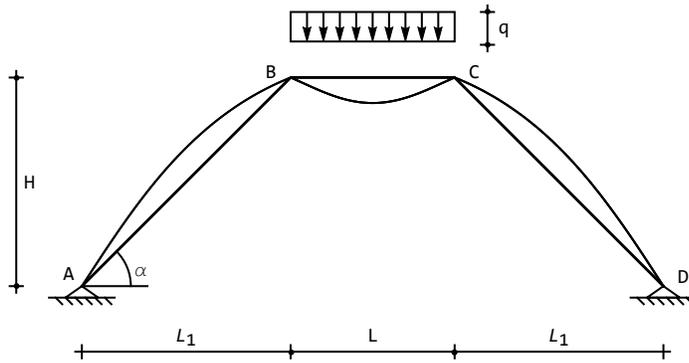


Figura 27.10: La deformata per il telaio a doppio spiovente soggetto a carico distribuito

L'abbassamento del punto centrale è pari a:

$$u_{2\max} = u_2^{BC}\left(x_3 = \frac{L}{2}\right) = \frac{qL^4}{384EI} \frac{3L+10S}{3L+2S} \quad (27.22)$$

Nella stessa ipotesi di telai assialmente inestensibili, le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{L^3qx_3}{12LS+8S^2} \\
 m^{BC}(x_3) &= -\frac{q(L^3-2L(3L+2S)x_3+(6L+4S)x_3^2)}{12L+8S} \\
 m^{CD}(x_3) &= \frac{L^3q(-S+x_3)}{4S(3L+2S)}
 \end{aligned} \quad (27.23)$$

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= -\frac{qL^3}{12LS + 8S^2} \\
 t^{BC}(x_3) &= \frac{q}{2}(L - 2x_3) \\
 t^{CD}(x_3) &= \frac{qL^3}{12LS + 8S^2} \\
 n^{AB}(x_3) &= -\frac{qL(6LS + 4S^2 + L^2 \cos(\alpha)) \csc(\alpha)}{4S(3L + 2S)} \\
 n^{BC}(x_3) &= -\frac{qL(L^2 + 2S(3L + 2S) \cos(\alpha)) \csc(\alpha)}{4S(3L + 2S)} \\
 n^{CD}(x_3) &= -\frac{qL(6LS + 4S^2 + L^2 \cos(\alpha)) \csc(\alpha)}{4S(3L + 2S)}
 \end{aligned} \tag{27.24}$$

Il diagramma dei momenti è riportato in Figura 27.11, ed i corrispondenti valori notevoli si ottengono come:

$$\begin{aligned}
 M_B = M_C &= -\frac{qL^3}{12L + 8S} \\
 M_{\max} = m^{BC}\left(x_3 = \frac{L}{2}\right) &= \frac{qL^2}{8} \frac{L + 2S}{3L + 2S}
 \end{aligned} \tag{27.25}$$

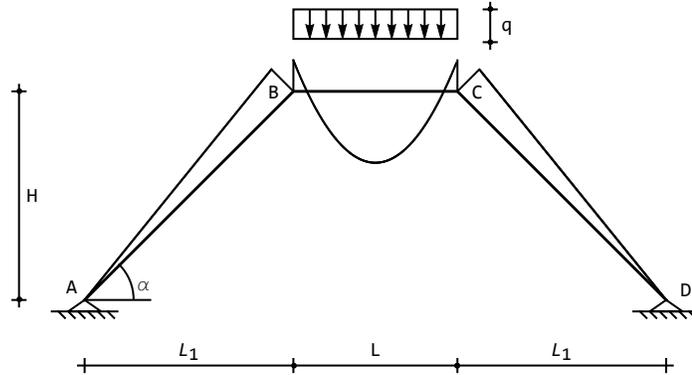


Figura 27.11: I momenti sul telaio a doppio spiovente soggetto a carico distribuito

Le reazioni dei vincoli si ottengono tramite considerazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 R_{Ah} &= -n^{AB}(0) \cos(\alpha) - t^{AB}(0) \sin(\alpha) = \frac{qL(L^2 + 2S(3L + 2S) \cos(\alpha))}{4H(3L + 2S)} \\
 R_{Bh} &= n^{CD}(S) \cos(\alpha) - t^{CD}(S) \sin(\alpha) = -\frac{qL(L^2 + 2S(3L + 2S) \cos(\alpha))}{4H(3L + 2S)}
 \end{aligned} \tag{27.26}$$

$$\begin{aligned}R_{Av} &= n^{AB}(0) \sin(\alpha) - t^{AB}(0) \cos(\alpha) = -\frac{qL}{2} \\R_{Bv} &= n^{CD}(S) \sin(\alpha) + t^{CD}(S) \cos(\alpha) = -\frac{qL}{2}\end{aligned}\tag{27.27}$$

Verifica

La stessa struttura é stata analizzata in T.Cavallina, E. D'Anna, Esercizi di Scienza delle Costruzioni, Vol.II, pp.145–153 e pp.168–173.

Capitolo 28

Trave a ginocchio

Si considera la trave a ginocchio di Figura 28.1, costituita da due tratti orizzontali di luce L_1 , collegati da un tratto di luce L inclinato di un angolo α . Ne segue che il dislivello verticale tra i due tratti orizzontali è pari a:

$$H = L \tan(\alpha) \quad (28.1)$$

mentre il tratto BC è lungo $S = \sqrt{L^2 + H^2}$. Gli estremi sono incastrati, ed il carico q insiste su tutta la luce. Sul tratto inclinato, quindi, esso deve essere scomposto in una componente trasversale q_t ed una componente assiale q_a fornite da:

$$\begin{aligned} q_t &= q \cos(\alpha) \\ q_a &= q \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (28.2)$$

In ipotesi di validità della teoria di Eulero–Bernoulli per travi snelle, e di

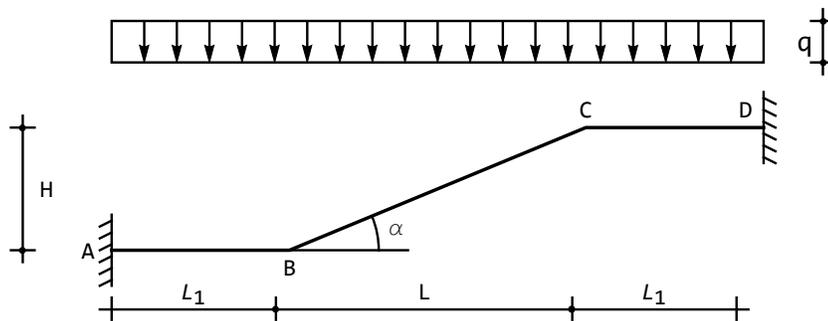


Figura 28.1: Una trave a ginocchio

elementi assialmente deformabili, si dovranno quindi definire le linee elastiche:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_3^{AB}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 + \frac{q_t \cos(\alpha)}{24EI}x_3^4 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 + \frac{q_a \cos(\alpha)}{2EA}x_3^2 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
 u_3^{CD}(x_3) &= f_0 + f_1x_3
 \end{aligned} \tag{28.3}$$

Si osservi infatti che il carico verticale di partenza insisteva su una luce pari ad L , ed è poi stato trasformato in due stese di carico agenti lungo una luce $S = \frac{L}{\cos(\alpha)}$. Di conseguenza le intensità a metro lineare dei carichi assiali e trasversali devono essere opportunamente ridotte. Si faccia anche attenzione ai segni dei carichi, diretta conseguenza della scelta dei sistemi di riferimento: il carico trasversale è diretto secondo l'asse X_2 , mentre il carico assiale risulta orientato in senso contrario ad X_3 .

Per poter determinare le diciotto costanti di integrazione, occorre imporre le condizioni ai limiti (di equilibrio e congruenza) in corrispondenza dei quattro nodi:

— negli incastri in A ed in D si annullano ambedue le componenti di spostamento, e le rotazioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 u_3^{AB}(0) &= 0 \\
 \phi^{AB}(0) &= 0 \\
 u_2^{CD}(L_1) &= 0 \\
 u_3^{CD}(L_1) &= 0 \\
 \phi^{CD}(L_1) &= 0
 \end{aligned} \tag{28.4}$$

— nel nodo in B si hanno le tre condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
 u_3^{AB}(L_1) &= u_3^{BC}(0) \cos(\alpha) + u_2^{BC}(0) \sin(\alpha) \\
 u_2^{AB}(L_1) &= -u_3^{BC}(0) \sin(\alpha) + u_2^{BC}(0) \cos(\alpha) \\
 \phi^{AB}(L_1) &= \phi^{BC}(0)
 \end{aligned} \tag{28.5}$$

e le tre condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 -n^{AB}(L_1) + t^{BC}(0) \sin(\alpha) + n^{BC}(0) \cos(\alpha) &= 0 \\
 -t^{AB}(L_1) + t^{BC}(0) \cos(\alpha) - n^{BC}(0) \sin(\alpha) &= 0 \\
 -m^{AB}(L_1) + m^{BC}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{28.6}$$

La prima condizione di congruenza esprime l'uguaglianza tra lo spostamento orizzontale del nodo B , inteso come spostamento assiale dell'asta AB , e la somma delle componenti orizzontali di spostamento del nodo B , inteso come appartenente all'asta BC . Poichè — come evidenziato in Figura 28.2 — ambedue queste componenti sono positive, si giunge alla prima delle (4). La seconda condizione di congruenza, invece, esprime l'uguaglianza tra lo spostamento verticale del nodo B inteso come spostamento trasversale dell'asta AB , e le componenti verticali di spostamento del nodo B , inteso come appartenente all'asta BC .

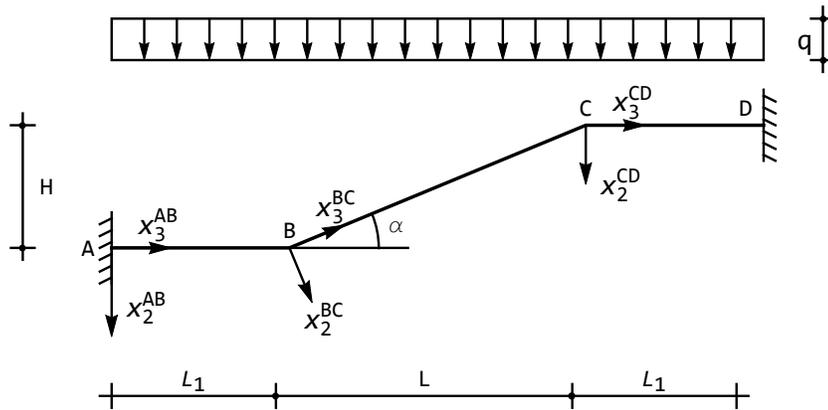


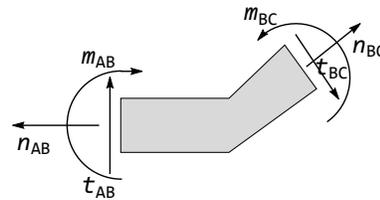
Figura 28.2: I sistemi di riferimento per la trave a ginocchio

Per la scrittura delle tre condizioni di equilibrio si può fare riferimento alla Figura 28.3, dove si è enucleato il nodo B , assieme alle forze su di esso agenti.

Nel nodo in C , analogamente a quanto si ottiene in B bisogna imporre la congruenza:

$$\begin{aligned} u_3^{CD}(0) &= u_3^{BC}(S) \cos(\alpha) + u_2^{BC}(S) \sin(\alpha) \\ u_2^{CD}(0) &= -u_3^{BC}(0) \sin(\alpha) + u_2^{BC}(S) \cos(\alpha) \\ \phi^{BC}(S) &= \phi^{CD}(0) \end{aligned}$$

(28.7) Figura 28.3: Le forze agenti sul nodo B



e le tre condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} t^{CD}(0) - t^{BC}(S) \cos(\alpha) + n^{BC}(S) \sin(\alpha) &= 0 \\ n^{CD}(0) - t^{BC}(S) \sin(\alpha) - n^{BC}(S) \cos(\alpha) &= 0 \\ -m^{BC}(S) + m^{CD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (28.8)$$

Si sono così ottenute diciotto condizioni ai limiti, che possono tradursi in altrettante equazioni lineari nelle diciotto costanti di integrazione. Risolvendo il

sistema, e portando la rigidezza assiale ad infinito, si ottengono le linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= \frac{qx_3^2}{2\Delta} (L^3 + 6L^2L_1 + 6L(1 + \cos(\alpha))L_1^2 + 8\cos(\alpha)L_1^3 - \\
 &\quad 2(L + 2L_1)(L + 2\cos(\alpha)L_1)x_3 + (L + 2\cos(\alpha)L_1)x_3^2) \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{q}{2\Delta} (L(1 + 3\cos(\alpha) + \cos(2\alpha))L_1^4 + 2\cos(\alpha)^2L_1^4 + \\
 &\quad Lx_3^2(L - \cos(\alpha)x_3)^2 + LL_1^2(L^2 + 6Lx_3 - 6\cos(\alpha)x_3^2) + \\
 &\quad 4L_1^3(L^2\cos(\alpha) + Lx_3 - \cos(\alpha)x_3^2) + \\
 &\quad 2L_1x_3(L^3 - 2L\cos(\alpha)^2x_3^2 + \cos(\alpha)^3x_3^3)) \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{q}{2\Delta} ((L_1 - x_3)^2(2\cos(\alpha)L_1^3 + L(L + x_3)^2 + \\
 &\quad 2L_1(2L + x_3)(L + \cos(\alpha)x_3) + L_1^2(L(3 + 2\cos(\alpha)) + 4\cos(\alpha)x_3))
 \end{aligned} \tag{28.9}$$

con:

$$\Delta = 12EI(L + 2L_1\cos(\alpha)) \tag{28.10}$$

I due tratti orizzontali non subiscono spostamenti assiali, mentre il tratto inclinato subisce lo spostamento assiale δ :

$$\begin{aligned}
 u_3^{AB}(x_3) &= u_3^{CD}(x_3) = 0 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= -\frac{q\sin(\alpha)}{2\Delta} (L_1^2(L + L_1)(L^2 + 3LL_1 + 2\cos(\alpha)L_1^2))
 \end{aligned} \tag{28.11}$$

La deformata si presenta come in Figura 28.4.

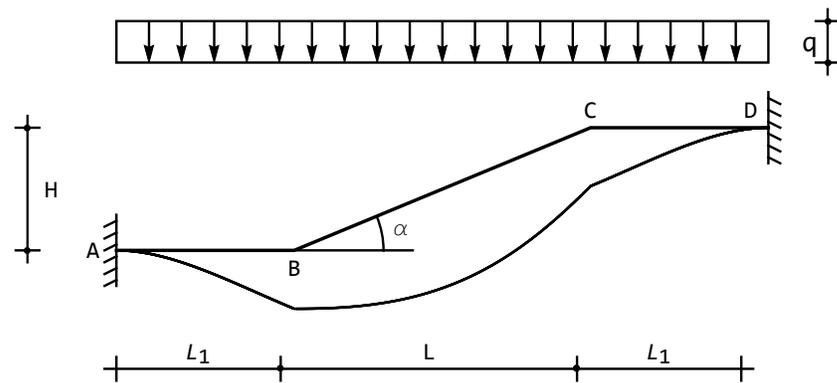


Figura 28.4: La deformata per la trave a ginocchio

Nella stessa ipotesi di elementi assialmente inestensibili, le caratteristiche si ottengono per derivazione successiva:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{q}{\Delta} (8 \cos(\alpha)L_1^3 + 6L_1^2(L + L \cos(\alpha) - 4 \cos(\alpha)x_3) + \\
 &\quad 6L_1(L^2 - 2L(1 + \cos(\alpha))x_3 + 2 \cos(\alpha)x_3^2) + L(L^2 - 6Lx_3 + 6x_3^2)) \\
 m^{BC}(x_3) &= \frac{q}{\Delta} (6L \cos(\alpha)L_1^2 + 4 \cos(\alpha)L_1^3 - 12 \cos(\alpha)^2 L_1 x_3 (-L + \cos(\alpha)x_3) - \\
 &\quad L(L^2 - 6L \cos(\alpha)x_3 + 6 \cos(\alpha)^2 x_3^2)) \\
 m^{CD}(x_3) &= -\frac{q}{\Delta} (-6L \cos(\alpha)L_1^2 - 4 \cos(\alpha)L_1^3 + 12 \cos(\alpha)L_1 x_3(L + x_3) + \\
 &\quad L(L^2 + 6Lx_3 + 6x_3^2))
 \end{aligned} \tag{28.12}$$

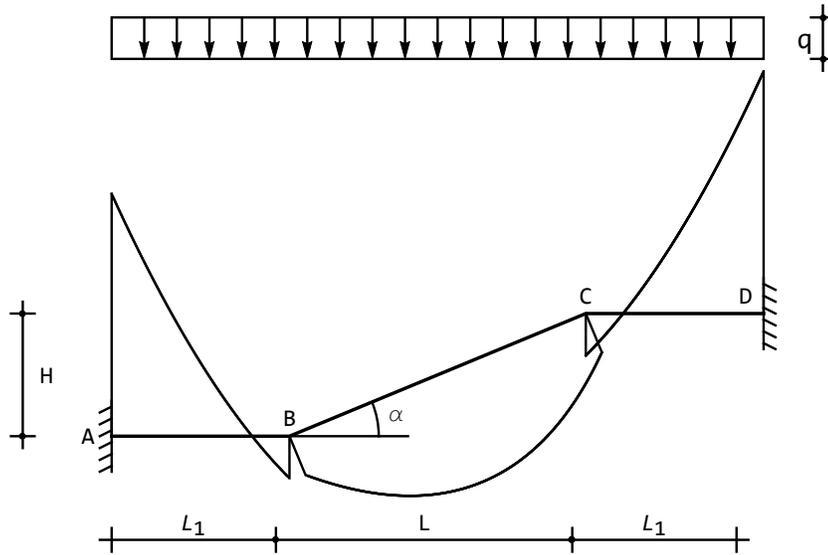


Figura 28.5: Il momento flettente sulla trave a ginocchio

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= \frac{q}{2} (L + 2L_1 - 2x_3) \\
 t^{BC}(x_3) &= \frac{q}{2} \cos(\alpha) (L - 2 \cos(\alpha)x_3) \\
 t^{CD}(x_3) &= -\frac{q}{2} (L + 2x_3)
 \end{aligned} \tag{28.13}$$

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= 0 \\
 n^{BC}(x_3) &= -\frac{q}{2} \sin(\alpha) (L - 2 \cos(\alpha)x_3) \\
 n^{CD}(x_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{28.14}$$

Il diagramma dei momenti è riportato in Figura 28.5. Nei nodi B e C il momento risulta uguale (struttura simmetrica) e pari a:

$$M_B = M_C = -\frac{q(S^3 \cos(\alpha)^2 - 6S \cos(\alpha)L_1^2 - 4L_1^3)}{12(S + 2L_1)} \quad (28.15)$$

Le reazioni dei vincoli si ottengono valutando le caratteristiche agli estremi:

$$R_{Ah} = 0$$

$$R_{Bh} = 0$$

$$R_{Av} = -t^{AB}(0) = -\frac{qL}{2} - qL_1$$

$$R_{Bv} = t^{CD}(L_1) = -\frac{qL}{2} - qL_1$$

$$\mathcal{M}_{rA} = -m^{AB}(0) = \frac{q(L^3 + 6L^2L_1 + 6L(1 + \cos(\alpha))L_1^2 + 8\cos(\alpha)L_1^3)}{12(L + 2\cos(\alpha)L_1)}$$

$$\mathcal{M}_{rD} = m^{CD}(L_1) = -\frac{q(L^3 + 6L^2L_1 + 6L(1 + \cos(\alpha))L_1^2 + 8\cos(\alpha)L_1^3)}{12(L + 2\cos(\alpha)L_1)} \quad (28.16)$$

Indice analitico

analogia di Mohr, *vedi* corollari di Mohr
arco, *vedi* trave ad asse parabolico

equazione di Clapeyron, *vedi* equazio-
ne dei tre momenti

forca, *vedi* telaio zoppo

metodo di Lagrange, *vedi* Lagrange

strutture iperstatiche, *vedi* iperstaticità
strutture isostatiche, *vedi* isostaticità
strutture labili, *vedi* labilità

teoria di Eulero per i carichi critici,
vedi carichi critici

teoria di Eulero-Bernoulli, 2

teoria di Timoshenko, 2

variazioni termiche alla Navier, *vedi* va-
riazioni termiche flessionali