

# Esercizi di Scienza delle Costruzioni

Claudio Franciosi

10 giugno 2018



# Indice

<b>1</b>	<b>Analisi cinematica delle strutture: metodo analitico</b>	<b>1</b>
1.1	Un telaio zoppo . . . . .	2
1.2	Telaio zoppo con carrello inclinato . . . . .	4
1.3	Telaio zoppo con cerniera interna . . . . .	6
1.4	Telaio a due campate con cerniere interne . . . . .	8
1.5	Trave a tre campate . . . . .	11
1.6	Trave con bipendolo interno . . . . .	13
1.7	Trave ad asse parabolico . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Analisi cinematica delle strutture: metodo grafico</b>	<b>21</b>
2.1	Un portale a tre cerniere . . . . .	23
2.2	Un portale labile . . . . .	23
2.3	Portale con cerniera e pendolo . . . . .	25
2.4	Portale con pendolo interno . . . . .	27
2.5	Portale con doppio bipendolo interno . . . . .	28
2.6	Telaio a quattro cerniere . . . . .	29
2.7	Portale a tre cerniere e bipendolo . . . . .	32
2.8	Portale con bipendolo al piede . . . . .	34
2.9	Telaio a tre tratti, con due cerniere interne . . . . .	36
2.10	Una maglia chiusa . . . . .	37
2.11	Un portale su trave appoggiata . . . . .	41
2.12	Doppia capriata . . . . .	44
2.13	Un arco parabolico . . . . .	46
2.14	Arco con bipendolo interno . . . . .	48
2.15	Una maglia chiusa . . . . .	50
2.16	Una maglia chiusa con bipendolo . . . . .	53
2.17	Un portale poggiante su trave appoggiata . . . . .	56
2.18	Una maglia con doppio bipendolo interno . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Analisi statica: metodo analitico</b>	<b>63</b>
3.1	Telaio zoppo non caricato . . . . .	65
3.2	Telaio zoppo con carico distribuito . . . . .	66
3.3	Portale a tre cerniere . . . . .	67
3.4	Telaio a due campate . . . . .	70
3.5	Portale a quattro cerniere con pendolo . . . . .	73

3.6	Trave appoggiata con sovrastruttura . . . . .	75
3.7	Portale con cerniera e due bipendoli . . . . .	77
3.8	Portale a tre tratti . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Analisi statica: metodo grafico</b>	<b>83</b>
4.1	Portale con bipendolo interno . . . . .	86
4.2	Portale con due bipendoli . . . . .	86
4.3	Portale soggetto ad una coppia . . . . .	87
4.4	Arco a quattro cerniere con pendolo . . . . .	89
4.5	Maglia chiusa a quattro cerniere e pendolo . . . . .	91
4.6	Maglia chiusa a tre cerniere: caso semplice . . . . .	93
4.7	Maglia chiusa a tre cerniere: caso complesso . . . . .	93
4.7.1	Una escursione nel campo della Geometria Analitica . . . . .	93
4.8	Maglia chiusa con cerniera e due bipendoli . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Sul grado di labilità ed iperstaticità</b>	<b>101</b>
5.1	Un portale labile ed iperstatico . . . . .	102
5.2	Un portale con pendolo inefficace . . . . .	102
5.3	Un portale con cerniere mal disposte . . . . .	103
5.4	Un portale doppio . . . . .	103
5.5	Vincoli multipli . . . . .	104
5.6	Le travi ad asse rettilineo in assenza di forze orizzontali . . . . .	105
5.7	Il caso delle travature reticolari . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Il procedimento di Lagrange</b>	<b>109</b>
6.1	Il calcolo delle reazioni . . . . .	110
6.1.1	Una trave appoggiata . . . . .	110
6.1.2	Trave Gerber . . . . .	111
6.1.3	Arco a quattro cerniere con pendolo . . . . .	113
6.1.4	Arco con bipendolo all'imposta . . . . .	117
6.1.5	Un portale zoppo . . . . .	121
6.2	Il calcolo delle caratteristiche della sollecitazione . . . . .	122
6.2.1	Trave a due campate . . . . .	122
6.2.2	Trave appoggiata con sbalzo . . . . .	123
6.2.3	Portale con quattro cerniere e pendolo . . . . .	125
<b>7</b>	<b>Calcolo delle caratteristiche per strutture isostatiche</b>	<b>127</b>
7.1	Trave a mensola . . . . .	128
7.2	Trave a due campate . . . . .	131
7.3	Mensola con sbalzo . . . . .	133
7.4	Portale a tre cerniere con sbalzo . . . . .	137
7.5	Telaio a due campate . . . . .	143
7.6	Telaio a quattro cerniere e pendolo interno . . . . .	150
7.7	Un portale con pendolo inclinato . . . . .	157
7.8	Maglia chiusa . . . . .	165

<b>8</b>	<b>Analisi della tensione</b>	<b>177</b>
8.1	Determinazione del vettore di tensione . . . . .	178
8.2	Determinazione del vettore di tensione . . . . .	178
8.3	Determinazione del vettore di tensione tangenziale . . . . .	180
8.4	Verifica dell'equilibrio per uno stato piano . . . . .	181
8.5	Verifica dell'equilibrio per uno stato tensionale generico . . . . .	181
8.6	Deduzione forze di massa . . . . .	182
8.7	Studio di uno stato tensionale generico . . . . .	183
8.8	Uno stato tensionale piano . . . . .	188
8.9	Secondo stato tensionale piano . . . . .	190
8.10	Un terzo stato tensionale piano . . . . .	193
8.11	Lo stato tensionale alla De Saint-Venant . . . . .	195
	8.11.1 Soluzione: . . . . .	195
8.12	L'utilizzo dei cerchi di Mohr . . . . .	198
<b>9</b>	<b>Analisi della deformazione</b>	<b>201</b>
9.1	La deduzione della matrice delle deformazioni . . . . .	201
9.2	Deduzione delle componenti di deformazione . . . . .	203
9.3	Componenti di deformazione . . . . .	204
9.4	Componenti di deformazione . . . . .	205
9.5	Studio di uno stato piano di spostamento . . . . .	205
9.6	Un controllo di compatibilità . . . . .	209
9.7	Deduzione delle deformazioni lineari . . . . .	210
9.8	Deduzione delle deformazioni lineari e nonlineari . . . . .	210
9.9	Controllo di compatibilità per uno stato piano . . . . .	211
9.10	Controllo di compatibilità per uno stato generico . . . . .	212
<b>10</b>	<b>Geometria delle aree</b>	<b>213</b>
10.1	Un sistema ad aree concentrate . . . . .	213
10.2	La sezione ad L . . . . .	216
10.3	Una travata da ponte . . . . .	219
10.4	Triangolo isoscele . . . . .	220
10.5	Una sezione composta . . . . .	221
10.6	Semicerchio . . . . .	222
<b>11</b>	<b>Flessione deviata</b>	<b>225</b>
11.1	Un profilato sottile . . . . .	225
<b>12</b>	<b>Taglio</b>	<b>233</b>
12.1	Sezione compatta a T . . . . .	233
12.2	Profilato a T . . . . .	235
12.3	Sezione a tre rettangoli . . . . .	238
12.4	Sezione a tre rettangoli . . . . .	242
12.5	Quadrato sollecitato lungo una diagonale: prima soluzione . . . . .	244
12.6	Quadrato sollecitato lungo una diagonale: seconda soluzione . . . . .	247
12.7	Sezione triangolare . . . . .	248

12.8	La sezione circolare . . . . .	251
12.9	La sezione a C . . . . .	254
<b>13</b>	<b>Le travi soggette a sforzo assiale</b>	<b>261</b>
13.1	L'approccio energetico . . . . .	262
13.2	Asta bloccata-libera . . . . .	263
13.3	I vincoli elasticamente cedevoli . . . . .	266
13.4	Un'asta indentata . . . . .	269
13.5	Il caso della sezione variabile . . . . .	271
<b>14</b>	<b>Le travi soggette a momento flettente e taglio</b>	<b>275</b>
14.1	Relazioni fondamentali . . . . .	275
14.2	L'approccio energetico . . . . .	277
14.3	Le travi ad una campata . . . . .	277
14.4	Alcuni esempi per travi a due campate . . . . .	280
14.4.1	La trave soggetta a forza concentrata ad una ascissa arbitraria . . . . .	282
14.4.2	La trave soggetta a distorsione flessionale . . . . .	285
14.5	Le travi a più campate . . . . .	286
14.5.1	Una trave continua . . . . .	288
14.6	La presenza di variazioni termiche e coppie distribuite . . . . .	292
14.6.1	Una trave soggetta a coppie distribuite . . . . .	295
14.6.2	Le travi soggette a variazioni termiche flessionali . . . . .	301
14.7	Le travi a sezione variabile . . . . .	304
14.7.1	La trave a mensola a rigidezza variabile linearmente . . . . .	305
<b>15</b>	<b>Il metodo della doppia integrazione</b>	<b>309</b>
15.1	La trave appoggiata soggetta a carico distribuito . . . . .	309
15.2	La trave appoggiata soggetta a forza concentrata . . . . .	311
15.3	Trave bipendolo-appoggio con sbalzo . . . . .	317
15.4	Trave Gerber . . . . .	321
<b>16</b>	<b>I corollari di Mohr per il calcolo degli spostamenti</b>	<b>327</b>
16.1	Relazioni fondamentali: l'analogia . . . . .	327
16.2	La trave ausiliaria . . . . .	328
16.3	Trave appoggiata con carico distribuito . . . . .	329
16.4	La trave appoggiata con forza concentrata . . . . .	331
16.5	La trave appoggiata con coppia concentrata . . . . .	333
16.6	Trave con bipendolo ed appoggio . . . . .	334
16.7	Trave Gerber . . . . .	335
16.8	Trave con sbalzo e coppia all'estremo . . . . .	337
16.9	Mensola caricata parzialmente . . . . .	338
16.10	Una trave a più campate . . . . .	340
<b>17</b>	<b>I coefficienti fondamentali</b>	<b>343</b>
17.1	La trave a mensola . . . . .	344

---

17.2	La trave appoggiata . . . . .	348
<b>18</b>	<b>La composizione degli spostamenti</b>	<b>353</b>
18.1	L'utilizzo dei risultati fondamentali . . . . .	353
18.2	Trave a mensola con carico parziale . . . . .	354
18.3	Trave appoggiata caricata parzialmente . . . . .	356
18.4	La cosiddetta "forca" . . . . .	360
<b>19</b>	<b>Calcolo di spostamenti su strutture isostatiche</b>	<b>363</b>
19.1	Trave appoggiata con coppia applicata . . . . .	364
19.2	Trave appoggiata con variazione termica . . . . .	366
19.3	Trave appoggiata con cedimento elastico . . . . .	367
19.4	Trave con cedimento anelastico . . . . .	369
19.5	Un telaio con bipendolo interno . . . . .	370
19.5.1	Lo spostamento del traverso . . . . .	374
19.5.2	Il metodo della doppia integrazione . . . . .	376
19.6	Il caso della rigidità assiale infinita . . . . .	381
<b>20</b>	<b>Le equazioni di congruenza</b>	<b>385</b>
20.1	Trave con incastro ed appoggio . . . . .	386
20.2	Una trave doppiamente iperstatica . . . . .	391
20.3	Un'equazione dei tre momenti . . . . .	393
20.4	Un telaio zoppo con sbalzo . . . . .	397
20.5	Un telaio zoppo due volte iperstatico . . . . .	400
20.6	Un telaio zoppo tre volte iperstatico . . . . .	403
20.7	Un portale semplicemente iperstatico . . . . .	406
20.8	Un portale doppiamente iperstatico . . . . .	410
20.8.1	L'utilizzo del principio dei lavori virtuali . . . . .	413
20.9	Un telaio tre volte iperstatico . . . . .	416
20.10	Una diversa scelta di incognite iperstatiche . . . . .	421
<b>21</b>	<b>Il plv per le strutture iperstatiche</b>	<b>427</b>
21.1	Un portale semplicemente iperstatico . . . . .	427
21.2	Portale con cedimento anelastico . . . . .	434
21.3	Un portale sospeso . . . . .	435
21.4	Un telaio semplicemente iperstatico . . . . .	439
21.5	Una trave tre volte iperstatica . . . . .	443
21.6	Una struttura spingente iperstatica . . . . .	447
21.7	Una maglia triangolare chiusa . . . . .	450
21.8	Una trave doppia con pendolo di collegamento . . . . .	458
21.9	Un telaio doppiamente iperstatico . . . . .	463
<b>22</b>	<b>Il metodo misto per le strutture iperstatiche</b>	<b>469</b>
22.1	Un telaio zoppo . . . . .	469
22.2	Una trave doppia . . . . .	472

<b>23 Vincoli imperfetti e variazioni termiche</b>	<b>475</b>
23.1 Trave con cedimento anelastico . . . . .	477
23.2 La matrice di rigidezza di una trave di Eulero–Bernoulli . . . . .	479
23.3 I corollari di Mohr e le distorsioni . . . . .	482
23.4 La linea elastica in presenza di distorsioni . . . . .	483
23.5 La trave continua in presenza di variazioni termiche . . . . .	484
23.6 Il principio dei lavori virtuali in presenza di variazioni termiche	490
23.7 Un telaio a tre cerniere con pendolo interno . . . . .	492
<b>24 La linea elastica e le strutture a telaio isostatiche</b>	<b>495</b>
24.1 Un telaio zoppo . . . . .	496
24.2 Una maglia chiusa a tre cerniere . . . . .	504
24.3 Un telaio zoppo con pendolo . . . . .	514
24.4 Un telaio zoppo con sbalzo . . . . .	524
24.5 Una maglia chiusa . . . . .	529
<b>25 La linea elastica e le strutture a telaio iperstatiche</b>	<b>541</b>
25.1 Un semplice telaio zoppo . . . . .	542
25.2 Un portale con nodo triplo . . . . .	548
25.3 Portale con nodo quadruplo . . . . .	551
25.4 Un telaio a due piani . . . . .	558
25.5 Un telaio zoppo con bipendolo . . . . .	562
25.6 Telaio zoppo con incastro e carrello . . . . .	567
25.7 Una trave doppia collegata da un pendolo . . . . .	571
25.8 Un telaio chiuso . . . . .	576
25.9 Portale a quattro cerniere e pendolo . . . . .	582
25.10 Una struttura triangolare . . . . .	587
25.11 Una maglia chiusa . . . . .	590
25.12 Una maglia chiusa con cerniere nei nodi . . . . .	595
25.13 Maglia chiusa con pendolo interno . . . . .	598
<b>26 I telai assialmente rigidi</b>	<b>603</b>
26.1 Telaio a nodi fissi . . . . .	603
26.2 Telaio a nodi spostabili . . . . .	607
26.3 Un Telaio zoppo a nodi fissi . . . . .	610
26.4 Una forca con due carrelli . . . . .	614
26.5 Una forca con carrello ed appoggio . . . . .	617
26.6 Un telaio simmetrico con carico antisimmetrico . . . . .	621
26.6.1 L'utilizzo delle proprietà di simmetria . . . . .	625
26.7 Un telaio simmetrico con carico simmetrico . . . . .	625
26.7.1 L'utilizzo delle proprietà di simmetria . . . . .	627
26.8 Un telaio a tre campate . . . . .	629
26.9 Un telaio “a scala” . . . . .	633
26.10 Una mensola con tirante incastrato . . . . .	638
26.11 Una mensola con tirante incernierato . . . . .	641
26.12 Una travatura reticolare . . . . .	643

26.13	Una maglia chiusa esternamente labile . . . . .	644
<b>27</b>	<b>Strutture simmetriche ed antisimmetriche</b>	<b>651</b>
27.1	Un portale simmetrico . . . . .	652
27.2	Trave a tre appoggi con carico simmetrico . . . . .	654
27.3	Trave con carico anti-simmetrico . . . . .	655
27.4	Un telaio simmetrico con forza sul traverso . . . . .	655
27.5	Una maglia doppiamente simmetrica . . . . .	655
27.6	Un telaio chiuso con carico antisimmetrico . . . . .	656
27.7	Un telaio con un ritto sull'asse di simmetria . . . . .	657
27.8	La scomposizione di un carico . . . . .	658
<b>28</b>	<b>Le travi di Timoshenko</b>	<b>663</b>
28.1	Il metodo della funzione ausiliaria . . . . .	664
28.2	Trave a mensola . . . . .	665
28.3	Trave doppiamente incastrata . . . . .	666
28.4	Trave a due campate caricata parzialmente . . . . .	667
28.5	La matrice di rigidezza di una trave di Timoshenko . . . . .	669
<b>29</b>	<b>La ricerca dei carichi critici</b>	<b>673</b>
29.1	Una trave a due campate . . . . .	673
29.2	Trave a due campate con sbalzo . . . . .	677
29.3	La frontiera di stabilità . . . . .	680
29.4	Il caso della perturbazione . . . . .	682
29.5	Un semplice telaio zoppo . . . . .	684

# Elenco delle figure

1.1	Un telaio zoppo . . . . .	2
1.2	Il caso degenero del telaio di Figura 1.1 . . . . .	4
1.3	Un telaio zoppo vincolato con un carrello inclinato in $A$ . . . . .	4
1.4	Relazione tra gli spostamenti orizzontali e verticali, e secondo il piano di scorrimento del carrello, e la sua normale . . . . .	5
1.5	Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera . . . . .	7
1.6	Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera: diagramma degli spostamenti orizzontali e verticali . . . . .	9
1.7	Un telaio costituito da tre tratti rigidi connessi da due cerniere . . . . .	10
1.8	Una trave labile . . . . .	11
1.9	Il meccanismo rigido per la trave di Figura 1.8 . . . . .	13
1.10	Una trave labile . . . . .	13
1.11	Il meccanismo rigido per la trave di Figura 1.10 . . . . .	15
1.12	Un arco ad asse parabolico di freccia $f$ . . . . .	16
1.13	Un arco ad asse parabolico di freccia $f$ : il meccanismo . . . . .	19
2.1	Un portale a tre cerniere . . . . .	23
2.2	Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera . . . . .	24
2.3	I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.2 . . . . .	24
2.4	Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera . . . . .	25
2.5	I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.4 . . . . .	26
2.6	Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da un pendolo . . . . .	27
2.7	I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.6 . . . . .	28
2.8	Un telaio appoggiato in $A$ e $C$ , costituito da due tratti rigidi connessi da un doppio bipendolo . . . . .	29
2.9	Un possibile cinematismo per il telaio di Figura 2.8 . . . . .	30
2.10	Un telaio zoppo costituito da tre tratti rigidi connessi da due cerniere . . . . .	30

ELENCO DELLE FIGURE

---

2.11	I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.10 . . . . .	31
2.12	Un telaio zoppo costituito da tre tratti rigidi connessi da una cerniera e da un bipendolo . . . . .	32
2.13	I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.12 . . . . .	33
2.14	Un telaio zoppo costituito da tre tratti rigidi connessi da due cerniere, vincolato al suolo con bipendolo ed appoggio . . . . .	34
2.15	I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.14 . . . . .	35
2.16	Un telaio costituito da tre tratti, con vincoli mal disposti. . . . .	37
2.17	Un telaio costituito da tre tratti: i centri assoluti e relativi . . . . .	38
2.18	Un telaio costituito da tre tratti: le deformate verticali ed orizzontali . . . . .	38
2.19	Una maglia chiusa con quattro cerniere . . . . .	39
2.20	I centri di rotazione necessari per il tracciamento della catena cinematica . . . . .	40
2.21	Le catene cinematiche per la maglia chiusa di Figura 2.19 . . . . .	40
2.22	Un portale a quattro cerniere poggiante su una trave appoggiata . . . . .	41
2.23	I centri di rotazione necessari per il tracciamento delle defor- mate . . . . .	42
2.24	Il cinematismo della struttura di Figura 2.22 . . . . .	43
2.25	Quattro tratti rigidi vincolati tra loro con due cerniere . . . . .	44
2.26	I centri per l'esercizio della Figura 2.25 . . . . .	45
2.27	Il cinematismo per l'esempio di Figura 2.25 . . . . .	46
2.28	Un arco parabolico costituito da tre tratti . . . . .	47
2.29	I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.28 . . . . .	48
2.30	Un arco costituito da tre tratti collegati da una cerniera ed un bipendolo . . . . .	49
2.31	I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.30 . . . . .	50
2.32	Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera . . . . .	51
2.33	I dieci centri relativi al telaio a quattro tratti di Figura 2.32 . . . . .	52
2.34	I diagrammi degli spostamenti per il telaio di Figura 2.32 . . . . .	52
2.35	Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera . . . . .	53
2.36	I dieci centri relativi al telaio a quattro tratti di Figura 2.35 . . . . .	54
2.37	I diagrammi di spostamento per il telaio di Figura 2.35 . . . . .	55
2.38	Un portale a quattro cerniere poggiante su una trave appoggiata . . . . .	56
2.39	I centri di rotazione necessari per il tracciamento delle defor- mate . . . . .	57
2.40	Il cinematismo della struttura di Figura 2.38 . . . . .	58
2.41	Un portale a tre cerniere e doppio bipendolo su una trave ap- poggiata . . . . .	59

2.42	I centri di rotazione per il tracciamento delle deformate . . . . .	60
2.43	Il cinematismo della struttura di Figura 2.41 . . . . .	60
3.1	Un portale zoppo . . . . .	65
3.2	Il diagramma delle reazioni per l'esempio di Figura 3.1 . . . . .	66
3.3	Il telaio zoppo di Figura 3.1, caricato sul traverso da un carico $q$ uniformemente distribuito . . . . .	67
3.4	Lo stesso telaio della Figura 3.3, con applicata la risultante $F$ del carico . . . . .	68
3.5	Un portale a tre cerniere . . . . .	69
3.6	Il diagramma delle forze per la struttura di Figura 3.5 . . . . .	69
3.7	Un telaio zoppo a due campate . . . . .	71
3.8	Il diagramma delle forze per il telaio di Figura 3.7 . . . . .	71
3.9	Un telaio a quattro cerniere e pendolo interno . . . . .	73
3.10	Il diagramma delle forze per il telaio di Figura 3.9 . . . . .	74
3.11	Una trave appoggiata, con cerniera intermedia, carrello e sbalzo, su cui poggia una coppia di aste connesse da un pendolo . . . . .	76
3.12	Il diagramma delle forze per l'esempio di Figura 3.11 . . . . .	77
3.13	Un telaio con cerniera e due bipendoli . . . . .	78
3.14	Il diagramma delle forze per l'esempio di Figura 3.13 . . . . .	78
3.15	Un altro semplice telaio soggetto a carico distribuito sul traverso . . . . .	80
3.16	Il diagramma delle forze per il telaio di Figura 3.15 . . . . .	80
3.17	Le forze agenti sulla cerniera d'angolo) . . . . .	81
4.1	Condizioni di equilibrio per tratto rigido soggetto a due, tre e quattro forze . . . . .	84
4.2	Condizioni di equilibrio per tratto rigido soggetto a due forze ed una coppia, oppure tre forze ed una coppia . . . . .	84
4.3	Un portale zoppo con bipendolo interno . . . . .	86
4.4	La determinazione grafica delle reazioni per il telaio di Figura 4.3 . . . . .	87
4.5	Un secondo portale zoppo con bipendolo interno . . . . .	88
4.6	La determinazione grafica delle reazioni per il telaio di Figura 4.5 . . . . .	88
4.7	Un portale zoppo soggetto ad una coppia concentrata . . . . .	89
4.8	Le reazioni per il telaio zoppo di Figura 4.7 . . . . .	89
4.9	Un arco a quattro cerniera e pendolo . . . . .	90
4.10	Le reazioni per l'arco di Figura 4.9 . . . . .	90
4.11	Una maglia chiusa a quattro cerniere e pendolo . . . . .	91
4.12	Una maglia chiusa a quattro cerniere e pendolo: la ricerca delle reazioni . . . . .	92
4.13	Le reazioni . . . . .	92
4.14	Una maglia chiusa a tre cerniere soggetta ad un carico autoequilibrato . . . . .	94
4.15	La ricerca delle reazioni per la maglia di Figura 4.14 . . . . .	94
4.16	Le reazioni . . . . .	94

ELENCO DELLE FIGURE

---

4.17	Una maglia chiusa a tre cerniere soggetta ad un carico auto-equilibrato . . . . .	95
4.18	La ricerca delle reazioni per la maglia di Figura 4.17 . . . . .	96
4.19	Le reazioni per la maglia di Figura 4.17 . . . . .	97
4.20	Una maglia chiusa a due bipendoli ed una cerniera soggetta ad un carico auto-equilibrato . . . . .	97
4.21	La ricerca delle reazioni per la maglia di Figura 4.20 . . . . .	99
4.22	Le reazioni per la maglia di Figura 4.20 . . . . .	99
5.1	Un portale a quattro cerniere con pendolo inefficace, $l=1, i=1$	102
5.2	Un portale a quattro cerniere ed incastro, con pendolo inefficace, $l=1, i=1$ . . . . .	103
5.3	Un portale incastrato al piede, con tre cerniere mal disposte .	103
5.4	Un portale doppio una volta iperstatico: il pendolo $HK$ può essere rimosso senza pregiudicare l'equilibrio . . . . .	104
5.5	Un portale doppio una volta labile e due volte iperstatico: la labilità risiede nell'arco a quattro cerniere $CDEF$ . . . . .	104
5.6	Alcuni vincoli multipli e vincoli misti . . . . .	105
5.7	Una trave ad asse rettilineo . . . . .	106
5.8	Una travatura reticolare . . . . .	107
6.1	Una trave a mensola . . . . .	110
6.2	Lo schema per il calcolo della coppia reattiva dell'incastro . . .	111
6.3	Una trave a tre appoggi e cerniera . . . . .	112
6.4	Lo schema per il calcolo della reazione dell'appoggio in $B$ . . .	112
6.5	Un arco a quattro cerniere e pendolo esterno . . . . .	113
6.6	Le deformate per l'arco a quattro cerniere . . . . .	114
6.7	Arco parabolico con bipendolo, tre cerniere e pendolo esterno .	118
6.8	Il cinematismo per l'arco parabolico con bipendolo, tre cerniere e pendolo esterno . . . . .	119
6.9	Un portale zoppo . . . . .	121
6.10	Il cinematismo per il portale zoppo di Figura 6.9 . . . . .	122
6.11	Una semplice trave con incastro ed appoggio, e cerniera intermedia . . . . .	122
6.12	Il cinematismo della trave di Figura 6.11 . . . . .	123
6.13	Una trave appoggiata con sbalzo . . . . .	124
6.14	Il cinematismo della trave di Figura 6.13 . . . . .	124
6.15	Un portale a quattro cerniere con pendolo . . . . .	125
6.16	Il cinematismo del portale con pendolo soppresso . . . . .	125
7.1	Un primo esempio elementare . . . . .	128
7.2	Il diagramma del taglio per la trave di Figura 7.1 . . . . .	129
7.3	Il diagramma del momento per la trave di Figura 7.1 . . . . .	130
7.4	Una trave isostatica a due tratti . . . . .	131
7.5	Il diagramma del taglio per la trave di Figura 7.4 . . . . .	132
7.6	Il diagramma del momento per la trave di Figura 7.4 . . . . .	132

7.7	Un semplice telaio a mensola con sbalzo . . . . .	134
7.8	L'equilibrio del concio in $B$ . . . . .	135
7.9	I diagrammi di sforzo normale e taglio . . . . .	136
7.10	Il diagramma del momento flettente . . . . .	136
7.11	L'equilibrio del concio in $A$ . . . . .	137
7.12	Portale a tre cerniere con sbalzo . . . . .	138
7.13	Il diagramma dei momenti . . . . .	141
7.14	Un telaio a due cerniere e bipendolo con sbalzo . . . . .	142
7.15	I momenti per il telaio a due cerniere e bipendolo con sbalzo . . . . .	143
7.16	Il calcolo grafico delle reazioni . . . . .	144
7.17	Tracciamento del diagramma del momento . . . . .	144
7.18	Un telaio a due campate asimmetrico . . . . .	145
7.19	Il diagramma dei tagli . . . . .	149
7.20	Il diagramma dei momenti flettenti . . . . .	149
7.21	Un telaio a due campate asimmetrico: la costruzione della risultante $MN$ per l'equilibrio di quattro forze . . . . .	151
7.22	Un telaio a due campate asimmetrico: il diagramma del momento . . . . .	151
7.23	Un telaio a quattro cerniere e pendolo interno . . . . .	152
7.24	Le forze agenti sul nodo $B$ e sul nodo $C$ . . . . .	153
7.25	Le forze agenti sul nodo $F$ e sul nodo $L$ . . . . .	154
7.26	L'equilibrio del concio in corrispondenza della forza $P$ . . . . .	154
7.27	Il diagramma del momento flettente . . . . .	156
7.28	Ricerca grafica delle reazioni . . . . .	157
7.29	Il poligono di equilibrio per il calcolo delle reazioni . . . . .	158
7.30	Il diagramma del momento per via grafica . . . . .	158
7.31	Un portale con pendolo inclinato . . . . .	159
7.32	Il diagramma dei momenti per il portale con pendolo inclinato . . . . .	163
7.33	Il calcolo grafico delle reazioni . . . . .	164
7.34	Tracciamento della ausiliaria $a + d = i + m$ . . . . .	166
7.35	Tracciamento del momento nel traverso inferiore $BM$ . . . . .	166
7.36	Il tracciamento del momento nel ritto $AB$ . . . . .	167
7.37	Il diagramma del momento dedotto graficamente . . . . .	167
7.38	Una maglia chiusa auto-equilibrata . . . . .	168
7.39	Il diagramma dei momenti per la maglia chiusa a tre cerniere . . . . .	172
7.40	Una maglia chiusa a due cerniere e bipendolo . . . . .	173
7.41	I momenti per la maglia chiusa a due cerniere e bipendolo . . . . .	174
7.42	Ricerca delle reazioni e tracciamento del diagramma del momento . . . . .	175
8.1	Il piano di equazione (8.5) . . . . .	179
8.2	Lo stato tensionale in esame . . . . .	184
8.3	I tre cerchi principali di Mohr . . . . .	188
8.4	Lo stato tensionale in esame . . . . .	189
8.5	I cerchi principali di Mohr . . . . .	191
8.6	I cerchi principali di Mohr . . . . .	194

ELENCO DELLE FIGURE

---

8.7	I cerchi principali di Mohr . . . . .	196
8.8	Il cerchio di Mohr relativo ai fasci di piani che si appoggiano all'asse $X_2$ . . . . .	198
9.1	I sei apparati sperimentali per la misura degli allungamenti percentuali. . . . .	201
9.2	Un rettangolo ed i suoi spostamenti . . . . .	204
9.3	Un rettangolo ed i suoi spostamenti . . . . .	205
9.4	La decomposizione degli spostamenti . . . . .	207
10.1	Un sistema di aree concentrate . . . . .	215
10.2	Il baricentro del sistema . . . . .	215
10.3	Gli assi centrali di inerzia . . . . .	216
10.4	La sezione ad L . . . . .	217
10.5	La sezione ad L come unione di due rettangoli . . . . .	217
10.6	Baricentro ed assi centrali di inerzia del profilato ad L . . . . .	219
10.7	Una sezione da ponte aperta . . . . .	219
10.8	Una sezione a triangolo isoscele . . . . .	221
10.9	Una sezione composta . . . . .	222
10.10	Una sezione a semicerchio: baricentro ed assi centrali . . . . .	223
11.1	Il profilato sottile in esame . . . . .	226
11.2	I quattro rettangoli in cui è scomposta la sezione, e gli assi di primo riferimento . . . . .	227
11.3	Gli assi centrali di inerzia . . . . .	229
11.4	La flessione retta secondo l'asse 1 . . . . .	230
11.5	La flessione retta secondo l'asse 2 . . . . .	231
11.6	Lo stato tensionale finale . . . . .	232
12.1	Una sezione compatta a T . . . . .	234
12.2	Il diagramma delle $\sigma_{23}$ . . . . .	235
12.3	Un profilato a T . . . . .	236
12.4	Il calcolo della tensione all'attacco tra ala ed anima . . . . .	237
12.5	Il calcolo della tensione massima nell'anima . . . . .	237
12.6	Una sezione compatta costruita assemblando tre rettangoli . . . . .	239
12.7	La sezione di Figura 12.6 vista come insieme di tre rettangoli . . . . .	239
12.8	Caso A - La corda taglia il rettangolo superiore . . . . .	241
12.9	Caso B - La corda taglia il rettangolo centrale . . . . .	241
12.10	Caso C - La corda taglia il rettangolo inferiore . . . . .	241
12.11	Il diagramma delle $\sigma_{23}$ . . . . .	242
12.12	Una sezione compatta . . . . .	243
12.13	Il diagramma delle $\sigma_{23}$ . . . . .	244
12.14	Una sezione quadrata sollecitata lungo la diagonale . . . . .	245
12.15	Il caso della corda parallela all'asse orizzontale . . . . .	246
12.16	Il diagramma delle $\sigma_{23}$ . . . . .	246
12.17	Il quadro tensionale completo delle $\tau_n$ . . . . .	247

12.18	La stessa sezione, caso delle corde parallele ai lati . . . . .	248
12.19	Il calcolo del momento statico rispetto all'asse $l$ . . . . .	249
12.20	Una sezione a triangolo isoscele . . . . .	250
12.21	Il calcolo del momento statico . . . . .	251
12.22	Il diagramma delle $\sigma_{23}$ . . . . .	252
12.23	I valori notevoli . . . . .	252
12.24	La sezione retta circolare . . . . .	253
12.25	Il calcolo del momento statico $S'$ . . . . .	253
12.26	La sezione retta a C soggetta a taglio verticale . . . . .	254
12.27	La corda parallela all'asse $X_2$ per il calcolo delle tensioni nelle ali . . . . .	255
12.28	Lo stato tensionale nell'ala inferiore della sezione a C . . . . .	257
12.29	La corda parallela all'asse $X_1$ per il calcolo delle tensioni nell'anima . . . . .	258
12.30	Il diagramma delle tensioni $\sigma_{23}$ nell'anima . . . . .	259
12.31	Le risultanti delle tensioni tangenziali ed il centro di taglio . . . . .	260
13.1	Un'asta soggetta a carico assiale linearmente distribuito . . . . .	263
13.2	Lo sforzo normale nell'asta di Figura 13.1 . . . . .	265
13.3	Gli spostamenti assiali per l'asta di Figura 13.1 . . . . .	265
13.4	Una trave a vincoli elasticamente cedevoli . . . . .	266
13.5	L'equilibrio del concio . . . . .	268
13.6	Un'asta a sezione variabile con discontinuità . . . . .	269
13.7	Il diagramma dello sforzo normale per la trave di Figura 13.6 . . . . .	271
13.8	Il diagramma degli spostamenti assiali per la trave di Figura 13.6 . . . . .	272
13.9	Spostamenti assiali per trave iperstatica a sezione variabile . . . . .	274
13.10	Sforzi normali per trave iperstatica a sezione variabile . . . . .	274
13.11	Spostamenti assiali per trave isostatica a sezione variabile . . . . .	274
14.1	Una trave doppiamente incastrata soggetta a carico parabolico . . . . .	278
14.2	Il diagramma del taglio per la trave di Figura 14.1 . . . . .	280
14.3	Il diagramma del momento per la trave di Figura 14.1 . . . . .	280
14.4	Il diagramma delle rotazioni per la trave di Figura 14.1 . . . . .	281
14.5	Il diagramma degli spostamenti per la trave di Figura 14.1 . . . . .	281
14.6	Una trave soggetta a forza concentrata in una generica ascissa intermedia . . . . .	282
14.7	I diagrammi di taglio, momento, rotazioni e spostamenti per la trave soggetta a forza concentrata ad un terzo della luce . . . . .	284
14.8	Una trave su tre appoggi soggetta ad una distorsione flessionale in corrispondenza dell'appoggio intermedio . . . . .	285
14.9	I diagrammi di taglio, momento, rotazioni e spostamenti per la trave soggetta a distorsione concentrata in mezzzeria . . . . .	287
14.10	Una trave continua . . . . .	288
14.11	Il diagramma del taglio . . . . .	292
14.12	Il diagramma del momento . . . . .	293

ELENCO DELLE FIGURE

---

14.13	Il diagramma delle rotazioni . . . . .	293
14.14	Il diagramma degli spostamenti . . . . .	293
14.15	Il concio elementare soggetto a carico trasversale e coppie distribuite . . . . .	294
14.16	Una trave Gerber soggetta ad un carico di coppie linearmente distribuite . . . . .	295
14.17	Il diagramma del taglio per la trave di Figura 14.16 . . . . .	298
14.18	Il diagramma della derivata del momento per la trave di Figura 14.16 . . . . .	299
14.19	Il diagramma del momento per la trave di Figura 14.16 . . . . .	300
14.20	Il diagramma delle rotazioni per la trave di Figura 14.16 . . . . .	300
14.21	Il diagramma degli abbassamenti per la trave di Figura 14.16 . . . . .	300
14.22	Una trave isostatica soggetta a variazione termica . . . . .	301
14.23	Una trave iperstatica soggetta a variazione termica . . . . .	302
14.24	Una trave iperstatica soggetta a variazione termica: diagramma del momento . . . . .	303
14.25	Una trave iperstatica soggetta a variazione termica: diagramma delle rotazioni . . . . .	304
14.26	Una trave iperstatica soggetta a variazione termica: diagramma degli spostamenti . . . . .	304
14.27	Trave a mensola a sezione variabile . . . . .	305
14.28	Trave a mensola a sezione variabile soggetta a coppia all'estremo . . . . .	307
15.1	Trave appoggiata soggetta a carico distribuito . . . . .	310
15.2	Trave appoggiata soggetta a carico concentrato in una sezione generica . . . . .	312
15.3	I diagrammi delle c.s.i. per la trave appoggiata soggetta a carico concentrato in una sezione generica . . . . .	313
15.4	I diagrammi di rotazioni e spostamenti . . . . .	316
15.5	Una trave con bipendolo ed appoggio caricata su uno sbalzo . . . . .	317
15.6	I diagrammi delle c.s.i. per la trave di Figura 15.5 . . . . .	319
15.7	I diagrammi di rotazioni e spostamenti per la trave di Figura 15.5 . . . . .	320
15.8	Una trave su tre appoggi e cerniera . . . . .	321
15.9	I diagrammi delle c.s.i. per la trave di Figura 15.8 . . . . .	323
15.10	I diagrammi di rotazioni e spostamenti per la trave di Figura 15.8 . . . . .	325
16.1	Lo studio della trave appoggiata soggetta a carico distribuito secondo la teoria di Mohr . . . . .	329
16.2	La trave ausiliaria . . . . .	330
16.3	Trave appoggiata soggetta a carico concentrato . . . . .	331
16.4	La trave ausiliaria . . . . .	332
16.5	Il diagramma delle forze per il calcolo del momento flettente in $L/4$ . . . . .	332
16.6	Una trave appoggiata soggetta ad una coppia concentrata . . . . .	333

16.7	La trave ausiliaria corrispondente alla trave di Figura 16.6 . . .	334
16.8	Una trave con bipendolo ed appoggio caricata su uno sbalzo . . .	334
16.9	La trave ausiliaria ed il carico fittizio corrispondente alla trave di Figura 16.8 . . . . .	335
16.10	Il diagramma delle forze per il calcolo del momento . . . . .	335
16.11	Una trave su tre appoggi e cerniera . . . . .	336
16.12	La trave ausiliaria corrispondente alla Figura 16.11 . . . . .	336
16.13	Una trave con sbalzo e coppia applicata . . . . .	337
16.14	La trave ausiliaria corrispondente alla Figura 16.13 . . . . .	337
16.15	Una trave a mensola parzialmente caricata . . . . .	338
16.16	La trave ausiliaria per l'esempio di Figura 16.15 . . . . .	339
16.17	Una trave composta da tre tratti, soggetta a due forze indipendenti . . . . .	340
16.18	La trave ausiliaria per l'esempio di Figura 16.17 . . . . .	341
17.1	Lo schema 1: trave a mensola con coppia all'estremo . . . . .	344
17.2	La trave ausiliaria per lo schema 1 . . . . .	345
17.3	Lo schema 2: trave a mensola con forza all'estremo . . . . .	345
17.4	La trave ausiliaria per lo schema 2 . . . . .	346
17.5	Lo schema 3: trave a mensola con forza all'estremo . . . . .	347
17.6	La trave ausiliaria per lo schema 3 . . . . .	347
17.7	Lo schema 4: trave appoggiata con coppia all'estremo . . . . .	348
17.8	La trave ausiliaria per lo schema 4 . . . . .	349
17.9	Lo schema 5: trave appoggiata con forza in mezzzeria . . . . .	350
17.10	La trave ausiliaria per lo schema 5 . . . . .	350
17.11	Lo schema 6: trave appoggiata con carico distribuito . . . . .	351
17.12	La trave ausiliaria per lo schema 6 . . . . .	351
18.1	Uno schema elementare per la composizione degli spostamenti . . . . .	353
18.2	Lo spostamento all'estremo libero come somma del contributo elastico e del cinematismo rigido . . . . .	354
18.3	Calcolo di spostamenti e rotazioni nell'estremo libero . . . . .	355
18.4	Il tratto $AB$ è rigido, $BC$ è una mensola di luce $L_2$ . . . . .	355
18.5	Il tratto $BC$ è rigido, $AB$ è soggetto al taglio ed al momento flettente . . . . .	356
18.6	Una trave appoggiata soggetta ad un carico parziale . . . . .	357
18.7	Fase 1 - Il tratto $AB$ è rigido e vincolato con un incastro, $BC$ è una mensola soggetta al carico ed alla reazione . . . . .	357
18.8	Fase 2 - Il tratto $BC$ è rigido, $AB$ è soggetto al taglio ed al momento flettente, ed è ancora vincolato con un incastro . . . . .	358
18.9	Fase 3 - L'intera trave è rigida, si ripristina la congruenza in $C$ . . . . .	358
18.10	La "forca" . . . . .	360
18.11	Lo spostamento del punto di applicazione della forza secondo il metodo delle composizioni . . . . .	361
19.1	Una trave appoggiata con coppia in mezzzeria . . . . .	364

ELENCO DELLE FIGURE

---

19.2	Il sistema di forze fittizio scelto per il calcolo dell'abbassamento in mezzeria . . . . .	364
19.3	Il sistema di forze fittizio scelto per il calcolo dell'abbassamento in mezzeria . . . . .	366
19.4	Una trave appoggiata soggetta a variazione termica . . . . .	366
19.5	Una trave appoggiata con appoggio cedevole e sbalzo . . . . .	367
19.6	Il sistema di forze fittizio per il calcolo della rotazione in $A$ . . . . .	368
19.7	Una trave con bipendolo anelasticamente cedevole . . . . .	369
19.8	Lo schema fittizio per il calcolo dello spostamento in $A$ . . . . .	369
19.9	Un telaio isostatico di esempio per il calcolo di spostamenti . . . . .	370
19.10	Il sistema di forze virtuali per il calcolo dello spostamento relativo in $C$ . . . . .	371
19.11	Il diagramma del momento per il telaio di Figura 19.9 . . . . .	372
19.12	Il diagramma del momento per il telaio di Figura 19.10 . . . . .	373
19.13	Il diagramma del momento fittizio per il calcolo dello spostamento del traverso . . . . .	375
19.14	La deformata per il telaio di Figura 19.9 . . . . .	382
20.1	Una trave continua tre volte iperstatica . . . . .	386
20.2	Un sistema isostatico equivalente alla struttura di Figura 20.1 (S.I.E.) . . . . .	387
20.3	Il sistema isostatico equivalente suddiviso in aliquote singole . . . . .	387
20.4	Una trave semplicemente iperstatica . . . . .	388
20.5	Un sistema isostatico (S.I.E.) equivalente per la trave di Figura 20.4 . . . . .	388
20.6	I due sistemi parziali per il calcolo dei coefficienti dell'equazione di congruenza . . . . .	389
20.7	Un secondo possibile sistema isostatico equivalente (S.I.E.) per la trave di Figura 20.4 . . . . .	390
20.8	I due sistemi parziali per il calcolo dei coefficienti dell'equazione di congruenza (20.11) . . . . .	390
20.9	Una trave due volte iperstatica . . . . .	391
20.10	Un possibile sistema isostatico equivalente per la trave di Figura 20.9 . . . . .	391
20.11	I tre sistemi parziali sui quali determinare i coefficienti delle equazioni di congruenza . . . . .	392
20.12	Un sistema iperstatico adatto all'equazione dei tre momenti . . . . .	393
20.13	Un conveniente S.I.E. per la struttura di Figura 20.12 . . . . .	394
20.14	Lo schema per il calcolo di reazioni e tagli sulla prima campata . . . . .	395
20.15	Lo schema per il calcolo di reazioni e tagli sulla seconda campata . . . . .	396
20.16	Un telaio con piedritto e sbalzo . . . . .	397
20.17	Il S.I.E. al telaio di Figura 20.16 . . . . .	398
20.18	Lo schema per il calcolo dell'abbassamento in $A$ dovuto al carico $q$ . . . . .	399
20.19	Lo schema per il calcolo dell'abbassamento in $A$ dovuto alla forza $F$ . . . . .	399

20.20	Lo schema per il calcolo dell'abbassamento in $A$ dovuto ad una incognita iperstatica di valore unitario . . . . .	400
20.21	Un telaio doppiamente iperstatico . . . . .	401
20.22	Un possibile S.I.E. al telaio di Figura 20.21 . . . . .	401
20.23	Lo schema $S_2$ per il calcolo degli spostamenti in $A$ dovuti ad una incognita iperstatica di valore unitario . . . . .	402
20.24	Un telaio tre volte iperstatico . . . . .	404
20.25	Un possibile S.I.E. al telaio di Figura 20.24 . . . . .	404
20.26	Lo schema $S_3$ per il calcolo degli spostamenti in $A$ dovuti ad una incognita iperstatica di valore unitario . . . . .	405
20.27	Un telaio zoppo semplicemente iperstatico . . . . .	407
20.28	Un S.I.E. per il telaio zoppo di Figura 20.27 . . . . .	407
20.29	Lo schema $S_0$ per il telaio zoppo di Figura 20.27 . . . . .	409
20.30	Lo schema $S_1$ per il telaio zoppo di Figura 20.27 . . . . .	409
20.31	Un telaio zoppo doppiamente iperstatico . . . . .	410
20.32	Un S.I.E. per il telaio zoppo di Figura 20.31 . . . . .	411
20.33	Lo schema $S_2$ per il telaio zoppo di Figura 20.30 . . . . .	412
20.34	Un telaio tre volte iperstatico . . . . .	417
20.35	Un possibile S.I.E. per il telaio di Figura 20.34 . . . . .	417
20.36	Le forze agenti sulla struttura . . . . .	419
20.37	I diagrammi di sforzo normale, sforzo di tagli e momento flettente	422
20.38	Un altro possibile sistema isostatico equivalente . . . . .	423
20.39	Lo schema $S_1$ . . . . .	424
20.40	Lo schema $S_2$ . . . . .	424
20.41	Lo schema $S_3$ . . . . .	424
20.42	Lo schema $S_0$ . . . . .	425
21.1	Un portale semplicemente iperstatico . . . . .	428
21.2	Il sistema isostatico equivalente . . . . .	429
21.3	Il sistema $S_1$ di forze virtuali . . . . .	429
21.4	Il diagramma del momento sul sistema $S_1$ . . . . .	430
21.5	I diagrammi delle forze per il calcolo di sforzi normali e tagli .	431
21.6	I diagrammi del taglio e dello sforzo normale sul sistema $S_1$ . .	431
21.7	Il diagramma del momento sul sistema $S_0$ . . . . .	432
21.8	Il diagramma del taglio e dello sforzo normale sul sistema $S_0$ .	433
21.9	La presenza di un vincolo imperfetto . . . . .	434
21.10	Un portale sospeso . . . . .	435
21.11	Un S.I.E. per il portale sospeso . . . . .	436
21.12	Il diagramma $M_0$ per il portale sospeso . . . . .	437
21.13	Il diagramma $M_1$ per il portale sospeso . . . . .	437
21.14	Un telaio semplicemente iperstatico . . . . .	439
21.15	Un S.I.E. per il telaio semplicemente iperstatico di Figura 21.14	440
21.16	Il diagramma $M_0$ . . . . .	441
21.17	Il diagramma $M_1$ . . . . .	442
21.18	Una trave tre volte iperstatica . . . . .	444
21.19	Un S.I.E. per la trave di Figura 21.18 . . . . .	444

ELENCO DELLE FIGURE

---

21.20	Il diagramma del momento per il sistema $S_0$ . . . . .	445
21.21	Il diagramma del momento per il sistema $S_1$ . . . . .	445
21.22	Il diagramma del momento per il sistema $S_2$ . . . . .	445
21.23	Il diagramma del momento per il sistema $S_3$ . . . . .	445
21.24	Una struttura spingente semplicemente iperstatica . . . . .	447
21.25	Un S.I.E. per la struttura di Figura 21.24 . . . . .	447
21.26	L'equilibrio della cerniera in sommità per il sistema $S_0$ . . . . .	448
21.27	Il diagramma del momento sul sistema $S_1$ . . . . .	448
21.28	L'equilibrio della cerniera in $A$ per il sistema $S_1$ . . . . .	449
21.29	Una maglia triangolare chiusa, tre volte iperstatica . . . . .	450
21.30	Il sistema isostatico equivalente alla maglia chiusa di Figura 21.29 . . . . .	451
21.31	Il diagramma del momento sul sistema $S_0$ . . . . .	452
21.32	Il diagramma del momento sul sistema $S_1$ . . . . .	452
21.33	Le forze agenti sull'asta $AB$ e sulla cerniera in $A$ . . . . .	453
21.34	Il diagramma del momento sul sistema $S_2$ . . . . .	454
21.35	Il diagramma del momento sul sistema $S_3$ . . . . .	455
21.36	Una trave doppia collegata da un pendolo . . . . .	459
21.37	Il sistema isostatico equivalente alla struttura di Figura 21.36 . . . . .	459
21.38	Il sistema $S_0$ ed il relativo diagramma dei momenti $M_0$ . . . . .	461
21.39	Il sistema $S_1$ ed il relativo diagramma dei momenti $M_1$ . . . . .	461
21.40	Il sistema $S_2$ ed il relativo diagramma dei momenti $M_2$ . . . . .	461
21.41	Un telaio doppiamente iperstatico . . . . .	463
21.42	Un sistema isostatico equivalente per il telaio di Figura 21.41 . . . . .	464
21.43	Il diagramma $M_0$ per il telaio di Figura 21.41 . . . . .	465
21.44	Il diagramma $M_1$ per il telaio di Figura 21.41 . . . . .	465
21.45	Il diagramma $M_2$ per il telaio di Figura 21.41 . . . . .	465
22.1	Un telaio zoppo . . . . .	469
22.2	Un possibile sistema labile equivalente . . . . .	470
22.3	Il cinematismo del sistema labile equivalente . . . . .	471
22.4	Il diagramma del momento . . . . .	472
22.5	Una trave doppia . . . . .	473
22.6	La struttura labile equivalente del sistema di Figura 22.5 . . . . .	473
22.7	Un possibile cinematismo del sistema labile equivalente . . . . .	473
22.8	Il diagramma dei momenti . . . . .	474
23.1	La distorsione termica flessionale (alla Navier) . . . . .	476
23.2	Una trave su tre appoggi soggetta a cedimento anelastico di uno dei tre appoggi . . . . .	477
23.3	Momenti e tagli per la trave di Figura 23.2 . . . . .	478
23.4	Spostamenti e rotazioni per la trave di Figura 23.2 . . . . .	480
23.5	Una trave isostatica soggetta a variazione termica . . . . .	482
23.6	La trave ausiliaria per la trave di Figura 23.5 . . . . .	483
23.7	Una trave continua soggetta a variazione termica su due cam- pate . . . . .	485

23.8	Il diagramma degli spostamenti per la trave continua . . . . .	488
23.9	Il diagramma delle rotazioni per la trave continua . . . . .	489
23.10	Il diagramma dei momenti per la trave continua . . . . .	489
23.11	Il diagramma dei tagli per la trave continua . . . . .	490
23.12	Una trave iperstatica soggetta a variazione termica . . . . .	490
23.13	Il S.I.E. per la trave di Figura 23.12: su di esso si calcola il momento $M$ . . . . .	491
23.14	Il sistema di forze virtuali per la trave di Figura 23.12: su di esso si calcola il momento $M_1$ . . . . .	491
23.15	Un telaio a tre cerniere con pendolo interno . . . . .	492
23.16	Il S.I.E. al telaio di Figura 23.15 . . . . .	493
23.17	Il sistema di forze virtuali per l'esercizio di Figura 23.15 . . . . .	493
24.1	Un semplice telaio zoppo . . . . .	497
24.2	I tre sistemi di riferimento per i tre tratti $AB$ , $BC$ e $CD$ . . . . .	497
24.3	Il momento per il telaio zoppo di Figura 24.1 . . . . .	500
24.4	La deformata per il telaio zoppo di Figura 24.1 . . . . .	503
24.5	Una maglia chiusa a tre cerniere . . . . .	504
24.6	Il diagramma dei momenti per la maglia chiusa di Figura 24.5 . . . . .	508
24.7	Le reazioni per la maglia chiusa di Figura 24.5 . . . . .	509
24.8	Il tracciamento grafico per la maglia chiusa di Figura 24.5 . . . . .	510
24.9	Il diagramma degli spostamenti per la maglia chiusa di Figura 24.5, in ipotesi di $EA = \infty$ . . . . .	514
24.10	Un telaio zoppo con pendolo . . . . .	515
24.11	Il diagramma dei momenti per il telaio di Figura 24.10. . . . .	518
24.12	La ricerca grafica delle reazioni per il telaio di Figura 24.10. . . . .	519
24.13	Il diagramma degli spostamenti per il telaio di Figura 24.10, in ipotesi $EA = \infty$ . . . . .	523
24.14	Un telaio zoppo con sbalzo . . . . .	524
24.15	Il diagramma dei momenti per il telaio di Figura 24.14 . . . . .	526
24.16	Il diagramma degli spostamenti per il telaio di Figura 24.14, in ipotesi $EA = \infty$ . . . . .	529
24.17	Una maglia chiusa . . . . .	530
24.18	Il diagramma dei momenti per il telaio di Figura 24.17 . . . . .	533
24.19	La ricerca per via grafica delle reazioni per il telaio di Figura 24.17 . . . . .	534
24.20	Il diagramma degli spostamenti per il telaio di Figura 24.18, in ipotesi $H = 2/3L$ , $\alpha = \pi/4$ , $EA = \infty$ . . . . .	538
25.1	Un semplice telaio zoppo . . . . .	542
25.2	I due sistemi di riferimento locale per il traverso ed il ritto . . . . .	543
25.3	Il concio in $B$ e le forze su di esso agenti . . . . .	544
25.4	Gli spostamenti per il telaio di Figura 25.1 . . . . .	546
25.5	I momenti flettenti per il telaio di Figura 25.1 . . . . .	547
25.6	Un telaio costituito da tre elementi . . . . .	549
25.7	Il nodo triplo ed il suo equilibrio . . . . .	550

ELENCO DELLE FIGURE

---

25.8	Gli spostamenti per il telaio di Figura 25.6 . . . . .	552
25.9	I momenti flettenti per il telaio di Figura 25.6 . . . . .	552
25.10	Un telaio con un nodo quadruplo . . . . .	553
25.11	Il nodo quadruplo ed il suo equilibrio . . . . .	555
25.12	Gli spostamenti per il telaio con nodo quadruplo . . . . .	557
25.13	I momenti flettenti per il telaio con nodo quadruplo . . . . .	557
25.14	Un telaio a due piani . . . . .	558
25.15	Gli spostamenti per il telaio a due piani di Figura 25.14 . . . . .	563
25.16	I momenti flettenti per il telaio a due piani di Figura 25.14 . . . . .	563
25.17	Un telaio zoppo . . . . .	564
25.18	Il concio in $B$ e le forze su di esso agenti . . . . .	565
25.19	Gli spostamenti per il telaio di Figura 25.17 . . . . .	567
25.20	Un telaio zoppo con forza orizzontale sul traverso . . . . .	568
25.21	Il concio in $B$ e le forze su di esso agenti . . . . .	568
25.22	Gli spostamenti per il telaio di Figura 25.20 . . . . .	571
25.23	Una trave doppia . . . . .	572
25.24	Gli spostamenti per il telaio di Figura 25.23 . . . . .	576
25.25	Una maglia chiusa con il ritto di destra a rigidità flessionale (ed assiale) dimezzata . . . . .	577
25.26	Il diagramma dei momenti per la maglia chiusa di Figura 25.25 . . . . .	580
25.27	Gli spostamenti per la maglia chiusa di Figura 25.25 . . . . .	580
25.28	Un telaio a quattro cerniere e pendolo . . . . .	582
25.29	La deformata per il telaio di Figura 25.28 . . . . .	587
25.30	Il diagramma dei momenti per il telaio di Figura 25.28 . . . . .	587
25.31	Una maglia chiusa triangolare . . . . .	588
25.32	Lo schema per le equazioni di congruenza in $C$ . . . . .	588
25.33	Lo schema per la scrittura delle equazioni di equilibrio in $C$ . . . . .	589
25.34	Una maglia chiusa triangolare . . . . .	591
25.35	Gli spostamenti per la maglia chiusa di Figura 25.34 . . . . .	594
25.36	I momenti flettenti per la maglia chiusa di Figura 25.34 . . . . .	594
25.37	Una maglia chiusa triangolare . . . . .	595
25.38	Gli spostamenti per la maglia chiusa triangolare di Figura 25.37 . . . . .	597
25.39	Una maglia chiusa triangolare con pendolo interno . . . . .	598
25.40	Gli spostamenti per la maglia chiusa triangolare di Figura 25.39 . . . . .	601
25.41	I momenti flettenti per la maglia chiusa triangolare di Figura 25.39 . . . . .	601
26.1	Un semplice telaio zoppo . . . . .	604
26.2	Il concio in $B$ e le forze su di esso agenti . . . . .	605
26.3	Gli spostamenti per il telaio di Figura 26.1 . . . . .	606
26.4	I momenti flettenti per il telaio di Figura 26.1 . . . . .	607
26.5	Un semplice telaio zoppo a nodi spostabili . . . . .	608
26.6	Il concio in $B$ e le forze su di esso agenti . . . . .	609
26.7	Gli spostamenti per il telaio di Figura 26.5 . . . . .	610
26.8	Un semplice telaio zoppo . . . . .	611
26.9	L'equilibrio del concio in $B$ . . . . .	612

26.10	Gli spostamenti per il telaio di Figura 26.8 . . . . .	613
26.11	Un telaio a nodi spostabili . . . . .	614
26.12	Un telaio di esempio a nodi spostabili: diagramma degli spostamenti . . . . .	617
26.13	Un telaio di esempio a nodi spostabili: diagramma dei momenti	618
26.14	Un telaio di esempio a nodi fissi . . . . .	619
26.15	Un telaio a nodi fissi: il diagramma degli spostamenti . . . . .	620
26.16	Un telaio a nodi fissi: il diagramma dei momenti . . . . .	621
26.17	Un telaio simmetrico con carico antisimmetrico . . . . .	622
26.18	Un telaio simmetrico con carico antisimmetrico: diagramma degli spostamenti . . . . .	624
26.19	Un telaio simmetrico con carico antisimmetrico: diagramma dei momenti . . . . .	624
26.20	Lo schema ridotto per il telaio simmetrico con carico antisimmetrico . . . . .	626
26.21	Un telaio simmetrico con carico simmetrico . . . . .	627
26.22	Un telaio simmetrico con carico simmetrico: diagramma degli spostamenti . . . . .	628
26.23	Un telaio simmetrico con carico simmetrico: diagramma dei momenti . . . . .	629
26.24	Lo schema ridotto per il telaio simmetrico con carico simmetrico	630
26.25	Un telaio di esempio a nodi fissi . . . . .	631
26.26	Un telaio di esempio a nodi fissi: il diagramma degli spostamenti	632
26.27	Un telaio di esempio a nodi fissi: il diagramma dei momenti . . . . .	633
26.28	Un telaio di esempio . . . . .	634
26.29	La deformata del telaio di Figura 26.28 . . . . .	636
26.30	Il diagramma dei momenti per il telaio di Figura 26.28 . . . . .	637
26.31	Una mensola con tirante . . . . .	638
26.32	Una mensola con pendolo tirante . . . . .	641
26.33	Una semplice travatura reticolare . . . . .	643
26.34	Una maglia chiusa in equilibrio per particolari condizioni di carico	645
26.35	Il diagramma degli spostamenti per la maglia chiusa di Figura 26.34 . . . . .	650
26.36	Il diagramma dei momenti per la maglia chiusa di Figura 26.34	650
27.1	Una struttura dotata di un asse di simmetria. Per essa, sono interessanti i carichi simmetrici ed antisimmetrici rispetto allo stesso asse . . . . .	651
27.2	Una struttura simmetrica, e simmetricamente caricata. A destra, la struttura ridotta . . . . .	653
27.3	Una struttura simmetrica, ed antisimmetricamente caricata. A destra, la struttura ridotta . . . . .	653
27.4	Una trave simmetrica, simmetricamente caricata . . . . .	654
27.5	La struttura ridotta dello schema di Figura 27.4 . . . . .	654
27.6	Una trave simmetrica, antisimmetricamente caricata . . . . .	655
27.7	La struttura ridotta dello schema di Figura 27.6 . . . . .	655

ELENCO DELLE FIGURE

---

27.8	Un telaio simmetrico, antisimmetricamente caricato, almeno in ipotesi di infinità rigidezza assiale . . . . .	656
27.9	La struttura ridotta dello schema di Figura 27.8 . . . . .	656
27.10	Una maglia chiusa con due assi di simmetria . . . . .	657
27.11	La struttura ridotta dello schema di Figura 27.10 . . . . .	657
27.12	Un telaio chiuso rettangolare soggetto a carico antisimmetrico . . . . .	658
27.13	La struttura ridotta dello schema di Figura 27.12 . . . . .	658
27.14	Lo stesso telaio dell'esempio precedente, ma con un ritto centrale . . . . .	659
27.15	La struttura ridotta dello schema di Figura 27.14 . . . . .	659
27.16	Un telaio a due campate con carrelli centrali su ogni campata . . . . .	660
27.17	La struttura ridotta dello schema di Figura 27.16 . . . . .	660
27.18	Un telaio simmetrico soggetto ad un carico non simmetrico . . . . .	661
27.19	La scomposizione del carico originario . . . . .	661
27.20	Lo schema ridotto del telaio di Figura 27.19 . . . . .	662
28.1	Trave a mensola di Timoshenko . . . . .	665
28.2	Trave doppiamente incastrata di Timoshenko . . . . .	666
28.3	Una trave di Timoshenko a due campate . . . . .	668
28.4	L'influenza delle deformazioni da taglio sul diagramma degli abbassamenti . . . . .	670
28.5	L'influenza delle deformazioni da taglio sul diagramma dei momenti . . . . .	670
29.1	Un primo esempio per il calcolo del carico critico . . . . .	674
29.2	La deformata in corrispondenza del carico critico per $L_1 < 0.4303L_2$ . . . . .	676
29.3	La deformata in corrispondenza del carico critico per $L_1 = L_2$ . . . . .	677
29.4	Una trave continua su tre appoggi, con sbalzo . . . . .	677
29.5	La deformata per la trave continua in corrispondenza del carico critico . . . . .	679
29.6	Una trave soggetta a due forze assiali . . . . .	680
29.7	La deformata per la trave di Figura 29.6 in corrispondenza del carico critico . . . . .	682
29.8	Una trave a mensola soggetta al carico assiale $F$ e ad una perturbazione $q$ . . . . .	683
29.9	L'effetto della perturbazione sullo spostamento in sommità della mensola . . . . .	684
29.10	Un semplice telaio zoppo . . . . .	685



# Capitolo 1

## Analisi cinematica Metodo analitico

In questo Capitolo si esamina una serie di strutture al fine di identificare le proprietà cinematiche di ognuna di esse. L'approccio è analitico, si scrivono le equazioni di vincolo, poi si scelgono gli opportuni poli e si trasformano — laddove necessario — le equazioni di vincolo, al fine di esprimerle in funzione degli spostamenti dei poli. Infine, scrivendo le equazioni in forma matriciale si possono trarre conclusioni sulla eventuale labilità della struttura.

Per essere più specifici, sia  $O$  il polo, e sia  $P$  un punto qualsiasi del tratto rigido in considerazione. Siano  $\mathbf{u}_O$  ed  $\mathbf{u}_P$  gli spostamenti del polo e del punto  $P$  generico, e sia  $\boldsymbol{\phi}$  il vettore delle rotazioni del tratto rigido:

$$\mathbf{u}_O = \begin{pmatrix} u_{1O} \\ u_{2O} \\ u_{3O} \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_P = \begin{pmatrix} u_{1P} \\ u_{2P} \\ u_{3P} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Come noto, gli spostamenti del punto generico  $P$  possono esprimersi in funzione degli spostamenti dei punti del polo  $O$ , attraverso la relazione vettoriale:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\phi} \times \overrightarrow{OP} \quad (1.2)$$

dividendo lo spostamento complessivo in una traslazione ed una rotazione rigida. Scalarmente si ha:

$$\begin{pmatrix} u_{1P} \\ u_{2P} \\ u_{3P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1O} \\ u_{2O} \\ u_{3O} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{1P} - x_{1O} \\ x_{2P} - x_{2O} \\ x_{3P} - x_{3O} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Più esplicitamente si ha:

$$u_{1P} \mathbf{i} + u_{2P} \mathbf{j} + u_{3P} \mathbf{k} = u_{1O} \mathbf{i} + u_{2O} \mathbf{j} + u_{3O} \mathbf{k} + \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ x_{1P} - x_{1O} & x_{2P} - x_{2O} & x_{3P} - x_{3O} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

e quindi infine:

$$\begin{aligned} u_{1P} &= u_{1O} + \phi_2 (x_{3P} - x_{3O}) - \phi_3 (x_{2P} - x_{2O}) \\ u_{2P} &= u_{2O} + \phi_3 (x_{1P} - x_{1O}) - \phi_1 (x_{3P} - x_{3O}) \\ u_{3P} &= u_{3O} + \phi_1 (x_{2P} - x_{2O}) - \phi_2 (x_{1P} - x_{1O}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Nel caso di un corpo rigido bidimensionale giacente nel piano ( $X_2X_3$ ) si ha poi:

$$\begin{aligned} u_{2P} &= u_{2O} - \phi_1 (x_{3P} - x_{3O}) \\ u_{3P} &= u_{3O} + \phi_1 (x_{2P} - x_{2O}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

## 1.1 Un telaio zoppo

Come primo esempio, si consideri il telaio di Figura 1.1, costituito da un'asta verticale di altezza  $H$  ed un'asta orizzontale di luce  $L$ .

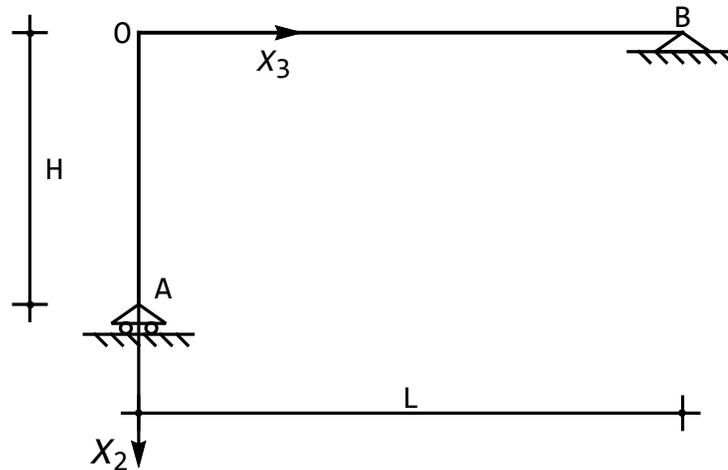


Figura 1.1: Un telaio zoppo

Si vuole analizzare la struttura per identificare possibili cinematismi:

- Passo 1 - Le condizioni di vincolo proibiscono lo spostamento verticale del punto  $A$ , ed ambedue le componenti di spostamento del punto  $B$ :

$$\begin{aligned} u_{2A} &= 0 \\ u_{3B} &= 0 \\ u_{2B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

- Passo 2 - Si scelga il polo  $O$  all'intersezione delle due aste, e si esprimano le condizioni di vincolo in funzione degli spostamenti  $u_{3O}$ ,  $u_{2O}$  del polo, e della rotazione  $\phi_O$  intorno ad un asse  $X_1$  passante per il polo  $O$ .

Utilizzando le (1.6) si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} u_{2A} &= u_{2O} - \phi_O (x_{3A} - x_{3O}) = 0 \\ u_{3B} &= u_{3O} + \phi_O (x_{2B} - x_{2O}) = 0 \\ u_{2B} &= u_{2O} - \phi_O (x_{3B} - x_{3O}) = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

e poichè:

$$\begin{aligned} x_{3A} - x_{3O} &= 0 \\ x_{2B} - x_{2O} &= 0 \\ x_{3B} - x_{3O} &= L \end{aligned} \quad (1.9)$$

si giunge all'espressione finale delle equazioni di vincolo in funzione delle incognite polari:

$$\begin{aligned} u_{2O} &= 0 \\ u_{3O} &= 0 \\ u_{2O} - \phi_O L &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

- Passo 3 - Si scrivono ora le relazioni precedenti in forma matriciale, per poter studiare le caratteristiche cinematiche della struttura esaminando la matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{3O} \\ u_{2O} \\ \phi_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

E' questo un sistema di tre equazioni, omogeneo, e la matrice dei coefficienti ha determinante pari ad  $L$ . Ne segue che l'unica soluzione possibile è la soluzione banale, in cui  $u_{3O}$ ,  $u_{2O}$  e  $\phi_0$  sono nulli. La struttura è quindi cinematicamente determinata.

- Passo 4 - Infine, si considerino i possibili casi eccezionali, quando particolari geometrie della struttura conducono a risultati atipici. Nel caso in esame, ad esempio, se la luce  $L$  si riduce a zero la struttura si riduce ad un'asta singola, come riportato in Figura 1.2, per cui la matrice dei coefficienti diviene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Tale matrice ha determinante nullo, e rango due. La struttura possiede un grado di labilità, quindi  $\infty^1$  possibili cinematismi, definiti da spostamenti nulli del polo, e valori arbitrari della rotazione  $\phi_O$ .

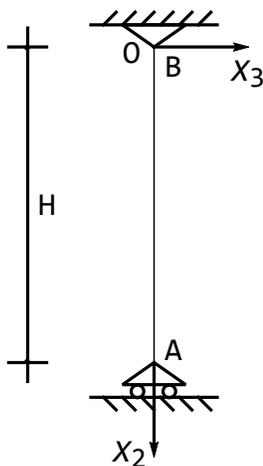
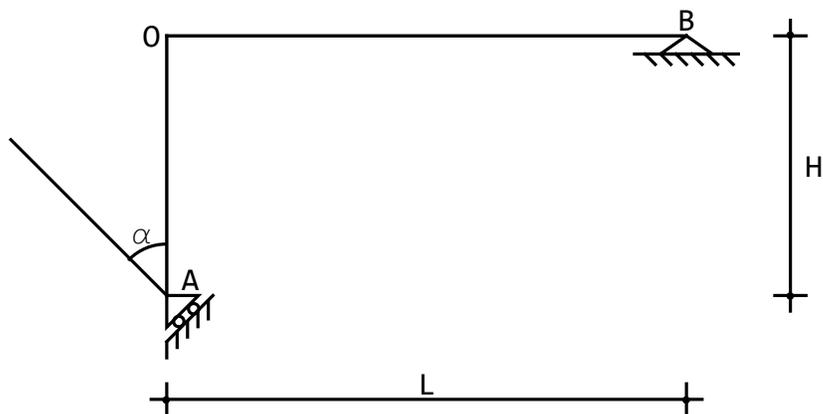


Figura 1.2: Il caso degenero del telaio di Figura 1.1

## 1.2 Telaio zoppo con carrello inclinato

Si vuole ora esaminare lo stesso telaio dell'esempio precedente, vincolato in  $B$  con la cerniera, ed in  $A$  con un carrello il cui piano di scorrimento è inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale (cfr. Figura 1.3).

Figura 1.3: Un telaio zoppo vincolato con un carrello inclinato in  $A$ 

- Passo 1 – La condizione di vincolo espressa dal carrello annulla lo spostamento del punto  $A$  lungo la retta ortogonale al piano del carrello, e quindi la prima delle (1.7) dovrà essere rimpiazzata da:

$$\bar{u}_{2A} = 0 \quad (1.13)$$

Dalla Figura 1.4 si evince subito:

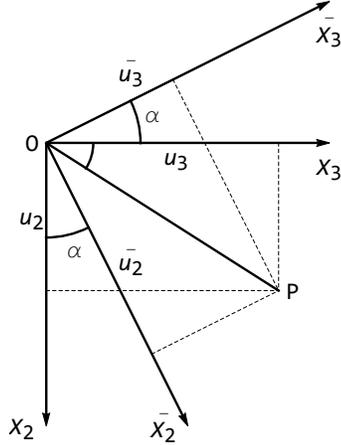


Figura 1.4: Relazione tra gli spostamenti orizzontali e verticali, e secondo il piano di scorrimento del carrello, e la sua normale

$$\begin{aligned} u_{3A} &= \bar{u}_{3A} \cos(\alpha) + \bar{u}_{2A} \sin(\alpha) \\ u_{2A} &= -\bar{u}_{3A} \sin(\alpha) + \bar{u}_{2A} \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (1.14)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{3A} &= u_{3A} \cos(\alpha) - u_{2A} \sin(\alpha) \\ \bar{u}_{2A} &= u_{3A} \sin(\alpha) + u_{2A} \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (1.15)$$

La (1.13) si scrive quindi:

$$u_{3A} \sin(\alpha) + u_{2A} \cos(\alpha) = 0 \quad (1.16)$$

da affiancare alle altre condizioni di vincolo che proibiscono gli spostamenti in  $B$ :

$$\begin{aligned} u_{3B} &= 0 \\ u_{2B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

- Passo 2 – Si scelga ora il polo  $O$  all'intersezione delle due aste, e si esprimano le condizioni di vincolo in funzione degli spostamenti  $u_{3O}$ ,  $u_{2O}$  del polo, e della rotazione  $\phi_O$  intorno ad un asse  $X_1$  passante per il polo  $O$ . Utilizzando le (1.6) si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} (u_{3O} + \phi_O (x_{2A} - x_{2O})) \sin(\alpha) + (u_{2O} - \phi_O (x_{3A} - x_{3O})) \cos(\alpha) &= 0 \\ u_{3O} + \phi_O (x_{2B} - x_{2O}) &= 0 \\ u_{2O} - \phi_O (x_{3B} - x_{3O}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

e poichè:

$$\begin{aligned}x_{2A} - x_{2O} &= H \\x_{3A} - x_{3O} &= 0 \\x_{2B} - x_{2O} &= L\end{aligned}\tag{1.19}$$

si giunge all'espressione finale delle equazioni di vincolo in funzione delle incognite polari:

$$\begin{aligned}(u_{3O} + \phi_O H) \sin(\alpha) + u_{2O} \cos(\alpha) &= 0 \\u_{3O} &= 0 \\u_{2O} - \phi_O L &= 0\end{aligned}\tag{1.20}$$

- Passo 3 – Si scrivono ora le espressioni precedenti in forma matriciale, per poter studiare le caratteristiche cinematiche della struttura esaminando la matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & H \sin(\alpha) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{3O} \\ u_{2O} \\ \phi_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\tag{1.21}$$

Il determinante di questa matrice è pari a  $L \cos(\alpha) + H \sin(\alpha)$ , usualmente diverso da zero. Ne segue che la struttura continua ad essere cinematicamente determinata, a meno di casi eccezionali, che si studiano nel passo successivo

- Passo 4 – Un possibile caso eccezionale si ha per un particolare valore dell'angolo  $\alpha$  di inclinazione del carrello. Se infatti  $\alpha$  è tale da annullare il determinante dei coefficienti della (1.21), la struttura presenterà un meccanismo. L'equazione fornisce:

$$L \cos(\alpha) + H \sin(\alpha) = 0\tag{1.22}$$

da cui  $\alpha^* = -\arctan(L/H)$ . Ne segue che quando il carrello è inclinato in modo tale che il suo piano di scorrimento è ortogonale alla congiungente  $A$  e  $B$ , sarà possibile un meccanismo di rotazione intorno al punto  $B$ .

### 1.3 Telaio zoppo con cerniera interna

Si consideri ora il telaio di Figura 1.5, costituito da due tratti rigidi connessi tra loro tramite una cerniera.

- Passo 1 — Indicando simbolicamente con  $B_1$  e  $B_2$  la faccia di sinistra e di destra della cerniera, rispettivamente, si possono scrivere le equazioni di

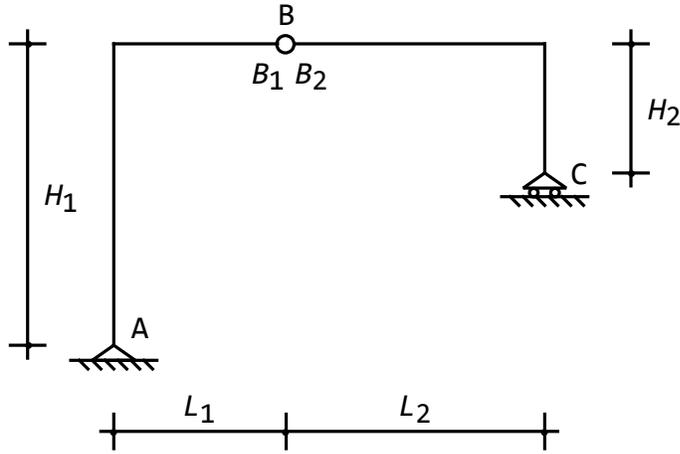


Figura 1.5: Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera

vincolo:

$$\begin{aligned}
 u_{3A} &= 0 \\
 u_{2A} &= 0 \\
 u_{3B'} &= u_{3B''} \\
 u_{2B'} &= u_{2B''} \\
 u_{2C} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

La terza e la quarta equazione di vincolo esprimono l'uguaglianza degli spostamenti ai due lati della cerniera.

- Passo 2 — Si scelgono come parametri lagrangiani gli spostamenti  $u_{3A}$ ,  $u_{2A}$  del punto  $A$ , e la rotazione  $\phi_A$  del primo tratto, gli spostamenti  $u_{3C}$ ,  $u_{2C}$  del punto  $C$ , e la rotazione  $\phi_C$  del secondo tratto. Utilizzando le (1.6) occorre trasformare la terza e quarta equazione. Sarà:

$$\begin{aligned}
 u_{2B'} &= u_{2A} - \phi_A (x_{3B} - x_{3A}) = u_{2A} - \phi_A L_1 \\
 u_{3B'} &= u_{3A} + \phi_A (x_{2B} - x_{2A}) = u_{3A} - \phi_A H_1 \\
 u_{2B''} &= u_{2C} - \phi_C (x_{3B} - x_{3C}) = u_{2C} + \phi_C L_2 \\
 u_{3B''} &= u_{3C} + \phi_C (x_{2B} - x_{2C}) = u_{3C} - \phi_C H_2
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

e quindi le equazioni di vincolo si scrivono:

$$\begin{aligned}
 u_{3A} &= 0 \\
 u_{2A} &= 0 \\
 u_{3A} - \phi_A H_1 &= u_{3C} - \phi_C H_2
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned} u_{2A} - \phi_A L_1 &= u_{2C} + \phi_C L_2 \\ u_{2C} &= 0 \end{aligned}$$

- Passo 3 - Introdotta il vettore delle coordinate lagrangiane:

$$\mathbf{d}^T = (u_{3A}, u_{2A}, \phi_A, u_{3C}, u_{2C}, \phi_C) \quad (1.26)$$

le equazioni precedenti si scrivono, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -H_1 & -1 & 0 & H_2 \\ 0 & 1 & -L_1 & 0 & -1 & -L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{3A} \\ u_{2A} \\ \phi_A \\ u_{3C} \\ u_{2C} \\ \phi_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

- Passo 4 — In genere, il rango della matrice dei coefficienti è massimo, ossia pari a 5, e quindi la struttura è una volta labile. Il risultante meccanismo può identificarsi ponendo, ad esempio,  $\phi_A = \alpha$ , da cui subito:

$$\phi_C = -\alpha \frac{L_1}{L_2} \quad (1.28)$$

ed ancora:

$$u_{3C} = -\alpha H_1 - \alpha H_2 \frac{L_1}{L_2} \quad (1.29)$$

Il parametro  $\alpha$  non ha un valore determinato, in quanto il meccanismo è definito in forma, ma non in ampiezza.

Gli spostamenti della cerniera possono calcolarsi in funzione di  $\alpha$ , a partire dalle (1.24):

$$\begin{aligned} u_{2B'} &= -\phi_A L_1 = -\alpha L_1 \\ u_{3B'} &= -\phi_A H_1 = -\alpha H_1 \end{aligned} \quad (1.30)$$

In Figura 1.6 sono riportati i diagrammi degli spostamenti orizzontali lungo i due ritti, nonché il diagramma degli spostamenti verticali lungo il traverso, assumendo un angolo  $\alpha$  positivo (antiorario) ed arbitrario.

## 1.4 Telaio a due campate con cerniere interne

Il telaio di Figura 1.7 è composto da tre tratti rigidi vincolati tra loro dalle due cerniere  $B$  e  $D$ , mentre i vincoli esterni si riducono a due appoggi in  $A$  e  $C$ , ed al carrello a piano di scorrimento orizzontale in  $E$ . Si effettui l'analisi cinematica della struttura.

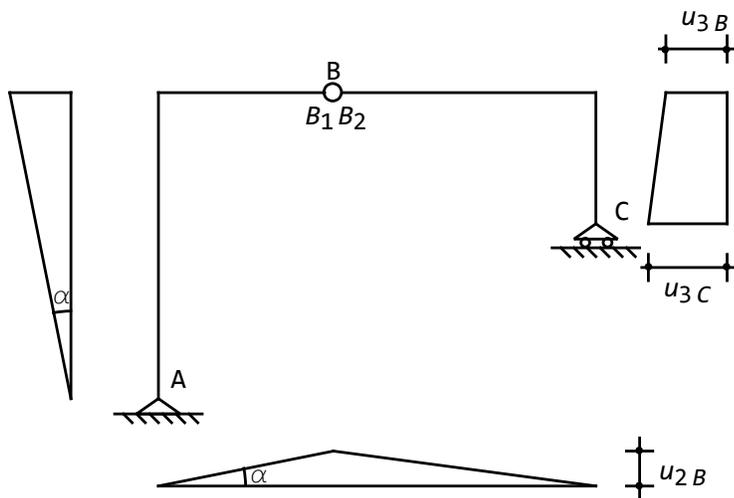


Figura 1.6: Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera: diagramma degli spostamenti orizzontali e verticali

- Passo 1 — Le condizioni di vincolo impongono:

$$\begin{aligned}
 u_{3A} &= 0 \\
 u_{2A} &= 0 \\
 u_{3B'} &= u_{3B''} \\
 u_{2B'} &= u_{2B''} \\
 u_{3C} &= 0 \\
 u_{2C} &= 0 \\
 u_{3D'} &= u_{3D''} \\
 u_{2D'} &= u_{2D''} \\
 u_{2E} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

- Passo 2 — Si scelgono come poli dei tre tratti i punti  $A$ ,  $C$  ed  $E$ , rispettivamente, e quindi i parametri lagrangiani saranno:

$$\mathbf{d}^T = (u_{3A}, u_{2A}, \phi_A, u_{3C}, u_{2C}, \phi_C, u_{3E}, u_{2E}, \phi_E) \tag{1.32}$$

Occorre ora esprimere le quattro condizioni di vincolo nelle due cerniere

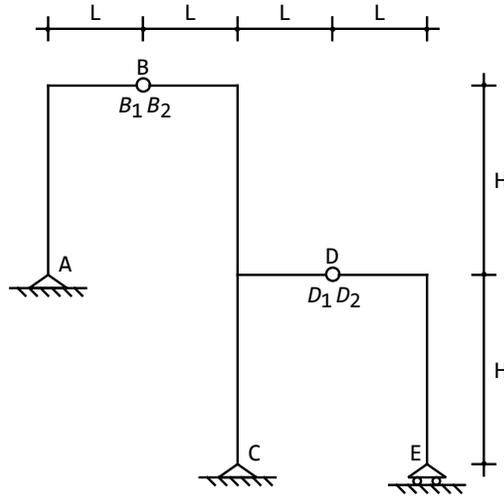


Figura 1.7: Un telaio costituito da tre tratti rigidi connessi da due cerniere

in  $B$  e  $D$  in funzione delle coordinate lagrangiane. Sarà:

$$\begin{aligned}
 u_{2B'} &= u_{2A} - \phi_A (x_{3B} - x_{3A}) = u_{2A} - \phi_A L \\
 u_{3B'} &= u_{3A} + \phi_A (x_{2B} - x_{2A}) = u_{3A} - \phi_A H \\
 u_{2B''} &= u_{2C} - \phi_C (x_{3B} - x_{3C}) = u_{2C} + \phi_C L \\
 u_{3B''} &= u_{3C} + \phi_C (x_{2B} - x_{2C}) = u_{3C} - 2\phi_C H \\
 u_{2D'} &= u_{2C} - \phi_C (x_{3D} - x_{3C}) = u_{2C} - \phi_C L \\
 u_{3D'} &= u_{3C} + \phi_C (x_{2D} - x_{2C}) = u_{3C} - \phi_C H \\
 u_{2D''} &= u_{2E} - \phi_E (x_{3D} - x_{3E}) = u_{2E} + \phi_E L \\
 u_{3D''} &= u_{3E} + \phi_E (x_{2D} - x_{2E}) = u_{3E} - \phi_E H
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

e quindi le equazioni di vincolo divengono:

$$\begin{aligned}
 u_{3A} &= 0 \\
 u_{2A} &= 0 \\
 u_{3A} - \phi_A H &= u_{3C} - 2\phi_C H \\
 u_{2A} - \phi_A L &= u_{2C} + \phi_C L \\
 u_{3C} &= 0 \\
 u_{2C} &= 0 \\
 u_{3C} - \phi_C H &= u_{3E} - \phi_E H \\
 u_{2C} - \phi_C L &= u_{2E} + \phi_E L \\
 u_{2E} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

- Passo 3 — Scrivendo le relazioni precedenti in forma matriciale si giunge a definire la matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -H & -1 & 0 & 2H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L & 0 & -1 & -L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -H & -1 & 0 & H \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L & 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

il cui determinante è pari a  $-3HL^2$ , sicuramente diverso da zero. La struttura è quindi cinematicamente determinata.

## 1.5 Trave a tre campate

Si consideri ora la trave di Figura 1.8, costituita da tre tratti rigidi connessi tra loro da due cerniere in  $B$  e  $D$ . La trave è vincolata con un appoggio all'estremo di sinistra, con un bipendolo esterno all'ascissa  $z_C = 2L$ , e con un carrello a piano di scorrimento orizzontale all'ascissa  $z_E = 4L$ .

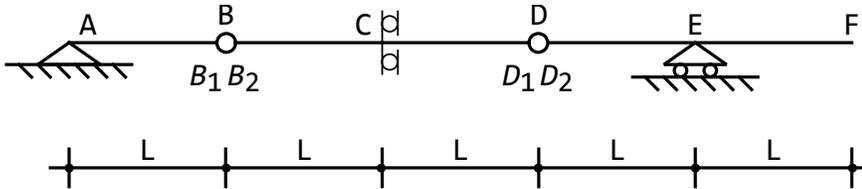


Figura 1.8: Una trave labile

- Passo 1 — Le condizioni di vincolo impongono:

$$\begin{aligned} u_{3A} &= 0 \\ u_{2A} &= 0 \\ u_{3B'} &= u_{3B''} \\ u_{2B'} &= u_{2B''} \\ \phi_C &= 0 \\ u_{3D'} &= u_{3D''} \\ u_{2D'} &= u_{2D''} \\ u_{2E} &= 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

- Passo 2 — Si scelgono come poli dei tre tratti i punti  $A$ ,  $C$  ed  $E$ , rispettivamente, e quindi i parametri lagrangiani saranno:

$$\mathbf{d}^T = (u_{3A}, u_{2A}, \phi_A, u_{3C}, u_{2C}, \phi_C, u_{3E}, u_{2E}, \phi_E) \quad (1.37)$$

Occorre ora esprimere le quattro condizioni di vincolo nelle due cerniere in  $B$  e  $D$  in funzione delle coordinate lagrangiane. Sarà:

$$\begin{aligned} u_{2B'} &= u_{2A} - \phi_A (x_{3B} - x_{3A}) = u_{2A} - \phi_A L \\ u_{3B'} &= +\phi_A (x_{2B} - x_{2A}) = u_{3A} \\ u_{2B''} &= u_{2C} - \phi_C (x_{3B} - x_{3C}) = u_{2C} + \phi_C L \\ u_{3B''} &= u_{3C} + \phi_C (x_{2B} - x_{2C}) = u_{3C} \\ u_{2D'} &= u_{2C} - \phi_C (x_{3D} - x_{3C}) = u_{2C} - \phi_C L \\ u_{3D'} &= u_{3C} + \phi_C (x_{2D} - x_{2C}) = u_{3C} \\ u_{2D''} &= u_{2E} - \phi_E (x_{3D} - x_{3E}) = u_{2E} + \phi_E L \\ u_{3D''} &= u_{3E} + \phi_E (x_{2D} - x_{2E}) = u_{3E} \end{aligned} \quad (1.38)$$

e quindi le equazioni di vincolo divengono:

$$\begin{aligned} u_{3A} &= 0 \\ u_{2A} &= 0 \\ u_{3A} &= u_{3C} \\ u_{2A} - \phi_A L &= u_{2C} + \phi_C L \\ \phi_C &= 0 \\ u_{3C} &= u_{3E} \\ u_{2C} - \phi_C L &= u_{2E} + \phi_E L \\ u_{2E} &= 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

- Passo 3 — Scrivendo le espressioni precedenti in forma matriciale si giunge a definire la matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L & 0 & -1 & -L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L & 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Il rango di questa matrice è pari ad 8, quindi la struttura risulta una volta labile. Se si sceglie come parametro lagrangiano la rotazione  $\phi_A = \alpha$

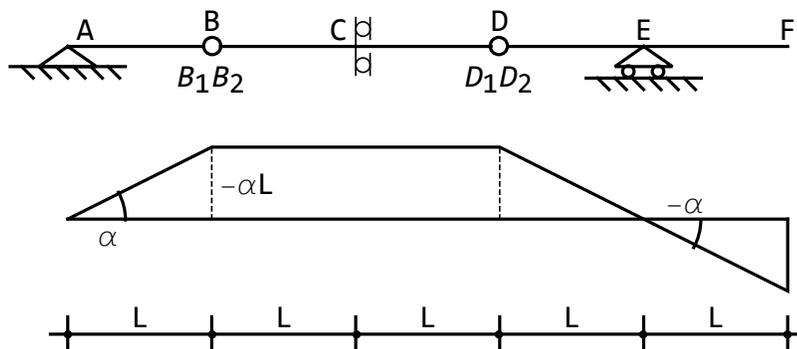


Figura 1.9: Il meccanismo rigido per la trave di Figura 1.8

del primo tratto, la quarta condizione e la settima condizione di vincolo forniscono:

$$\begin{aligned} u_{2C} &= -\alpha L \\ \phi_E &= -\alpha \end{aligned} \quad (1.41)$$

Gli altri gradi di libertà sono nulli, mentre è possibile calcolare, a partire dalle (1.38):

$$u_{2B} = -\alpha L \quad (1.42)$$

In Figura 1.9 è riportato il diagramma degli spostamenti verticali.

## 1.6 Trave con bipendolo interno

Si studiano adesso i possibili cinematismi della trave di Figura 1.10, costituita da tre tratti rigidi connessi tra loro da un bipendolo interno in  $z_B = L_1$  e da una cerniera in  $z_D = L_1 + L_2 + L_3$ . La trave è vincolata esternamente con un appoggio in A, e due carrelli a piano di scorrimento orizzontale in C ed E.

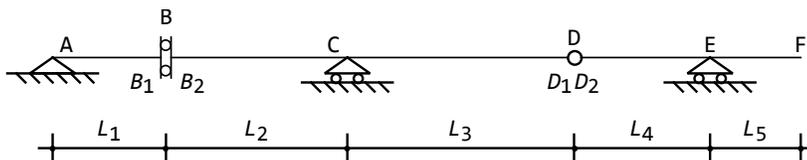


Figura 1.10: Una trave labile

- Passo 1 — Le condizioni di vincolo impongono:

$$\begin{aligned}
 u_{3A} &= 0 \\
 u_{2A} &= 0 \\
 \phi_{B'} &= \phi_{B''} \\
 u_{3B'} &= u_{3B''} \\
 u_{2C} &= 0 \\
 u_{3D'} &= u_{3D''} \\
 u_{2D'} &= u_{2D''} \\
 u_{2E} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

- Passo 2 - Si scelgono come poli dei tre tratti i punti  $A$ ,  $C$  ed  $E$ , rispettivamente, e quindi i parametri lagrangiani saranno:

$$\mathbf{d}^T = (u_{3A}, u_{2A}, \phi_A, u_{3C}, u_{2C}, \phi_C, u_{3E}, u_{2E}, \phi_E) \tag{1.44}$$

Occorre ora esprimere le quattro condizioni di vincolo nel bipendolo interno e nella cerniera in  $B$  e  $D$  in funzione delle coordinate lagrangiane. Sarà:

$$\begin{aligned}
 u_{3B'} &= u_{3A} + \phi_A (x_{2B} - x_{2A}) = u_{3A} \\
 u_{3B''} &= u_{3C} + \phi_C (x_{2B} - x_{2C}) = u_{3C} \\
 \phi_{B'} &= \phi_A \\
 \phi_{B''} &= \phi_C \\
 u_{2D'} &= u_{2C} - \phi_C (x_{3D} - x_{3C}) = u_{2C} - \phi_C L_3 \\
 u_{3D'} &= u_{3C} + \phi_C (x_{2D} - x_{2C}) = u_{3C} \\
 u_{2D''} &= u_{2E} - \phi_E (x_{3D} - x_{3E}) = u_{2E} + \phi_E L_4 \\
 u_{3D''} &= u_{3E} + \phi_E (x_{2D} - x_{2E}) = u_{3E}
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

e quindi le equazioni di vincolo divengono:

$$\begin{aligned}
 u_{3A} &= 0 \\
 u_{2A} &= 0 \\
 \phi_A &= \phi_C \\
 u_{3A} &= u_{3C} \\
 u_{2C} &= 0 \\
 u_{3C} &= u_{3E} \\
 u_{2CA} - \phi_C L_3 &= u_{2E} + \phi_E L_4 \\
 u_{2E} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

- Passo 3 - Scrivendo le relazioni precedenti in forma matriciale si giunge a definire la matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_3 & 0 & -1 & -L_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

Il rango di questa matrice è pari ad 8, quindi la struttura risulta una volta labile. Se si sceglie come parametro lagrangiano la rotazione  $\phi_A = \alpha$  del primo tratto, la terza condizione e la settima condizione di vincolo forniscono:

$$\begin{aligned} \phi_C &= \alpha \\ \phi_E &= -\alpha \frac{L_3}{L_4} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Gli altri gradi di libertà sono nulli, mentre è possibile calcolare gli spostamenti delle due facce del bipendolo, come:

$$\begin{aligned} u_{2B'} &= u_{2A} - \phi_A (x_{3B} - x_{3A}) = -\phi_A L_1 = -\alpha L_1 \\ u_{2B''} &= u_{2C} - \phi_C (x_{3B} - x_{3C}) = -\phi_C (z_B - z_C) = \alpha L_2 \end{aligned} \quad (1.49)$$

In Figura 1.11 è riportato il diagramma degli spostamenti verticali.

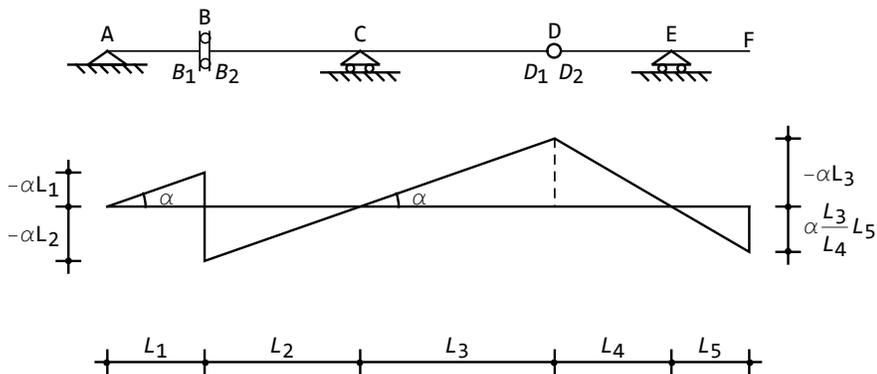


Figura 1.11: Il meccanismo rigido per la trave di Figura 1.10

## 1.7 Trave ad asse parabolico

Si consideri ora la struttura ad asse curvilineo di Figura 1.12, costituita da tre archi rigidi collegati tra loro da due cerniere, ed al suolo tramite un appoggio all'estremo di destra ed un bipendolo all'estremo di sinistra. L'asse di scorrimento del bipendolo è ortogonale all'asse dell'arco.

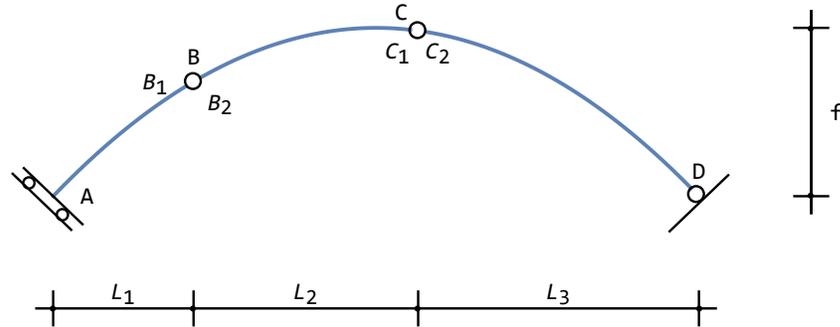


Figura 1.12: Un arco ad asse parabolico di freccia  $f$

Supponendo che l'arco sia parabolico, di luce  $L = L_1 + L_2 + L_3$  e di freccia  $f$ , l'equazione dell'asse sarà data da:

$$g(z) = -4 \frac{f}{L^2} z(L - z) \quad (1.50)$$

e quindi la tangente all'arco stesso sarà fornita da:

$$g'(z) = -4 \frac{f}{L^2} (L - 2z) \quad (1.51)$$

In particolare, quindi, all'estremo di sinistra la tangente all'arco sarà pari a  $-4 \frac{f}{L}$ .

Per scrivere le equazioni di vincolo si indichi con  $(t, n)$  la coppia di assi con origine in  $A$ , con  $t$  tangente all'asse ed  $n$  ortogonale all'asse, e siano  $(u_t, u_n)$  gli spostamenti lungo la tangente e la normale. Le equazioni di vincolo si scrivono allora:

$$\begin{aligned} \phi_A &= 0 \\ u_{tA} &= 0 \\ u_{3B'} &= u_{3B''} \\ u_{2B'} &= u_{2B''} \\ u_{3C'} &= u_{3C''} \\ u_{2C'} &= u_{2C''} \\ u_{3D} &= 0 \\ u_{2D} &= 0 \end{aligned} \quad (1.52)$$

La seconda condizione di vincolo deve modificarsi, a somiglianza di quanto fatto nell'Esercizio 1.2. Restano infatti valide le (1.15), con  $\alpha = 4\frac{f}{L}$  e quindi dovrà essere:

$$u_{tA} = u_{3A} \cos\left(4\frac{f}{L}\right) - u_{2A} \sin\left(4\frac{f}{L}\right) = 0 \quad (1.53)$$

Sarà poi:

$$\begin{aligned} u_{2B'} &= u_{2A} - \phi_A (x_{3B} - x_{3A}) = u_{2A} - \phi_A L_1 \\ u_{3B'} &= u_{3A} + \phi_A (x_{2B} - x_{2A}) = u_{3A} + \phi_A (g(L_1) - g(0)) \\ u_{2B''} &= u_{2C'} - \phi_C (x_{3B} - x_{3C}) = u_{2C'} + \phi_C L_2 \\ u_{3B''} &= u_{3C'} + \phi_C (x_{2B} - x_{2C}) = u_{3C'} + \phi_C (g(L_1) - g(L_1 + L_2)) \\ u_{2C''} &= u_{2D} - \phi_D (x_{3C} - x_{3D}) = u_{2D} + \phi_D L_3 \\ u_{3C''} &= u_{3D} + \phi_D (x_{2C} - x_{2D}) = u_{3D} + \phi_D (g(L_1 + L_2) - g(L_1 + L_2 + L_3)) \end{aligned} \quad (1.54)$$

Le equazioni di vincolo divengono quindi:

$$\begin{aligned} \phi_A &= 0 \\ u_{3A} \cos\left(4\frac{f}{L}\right) - u_{2A} \sin\left(4\frac{f}{L}\right) &= 0 \\ u_{3A} + \phi_A (g(L_1) - g(0)) &= u_{3C'} + \phi_C (g(L_1) - g(L_1 + L_2)) \\ u_{2A} - \phi_A L_1 &= u_{2C'} + \phi_C L_2 \\ u_{3C'} &= u_{3D} + \phi_D (g(L_1 + L_2) - g(L_1 + L_2 + L_3)) \\ u_{2C'} &= u_{2D} + \phi_D L_3 \\ u_{3D} &= 0 \\ u_{2D} &= 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Semplificando si ha:

$$\begin{aligned} \phi_A &= 0 \\ u_{3A} \cos\left(4\frac{f}{L}\right) - u_{2A} \sin\left(4\frac{f}{L}\right) &= 0 \\ u_{3A} &= u_{3C'} + \phi_C (g(L_1) - g(L_1 + L_2)) \\ u_{2A} &= u_{2C'} + \phi_C L_2 \\ u_{3C'} &= \phi_D (g(L_1 + L_2) - g(L_1 + L_2 + L_3)) \\ u_{2C'} &= \phi_D L_3 \\ u_{3D} &= 0 \\ u_{2D} &= 0 \end{aligned} \quad (1.56)$$

Si giunge quindi ad un sistema di cinque equazioni in sei incognite, che può scriversi matricialmente come:

$$\begin{pmatrix} c_1 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_A \\ v_A \\ w_{C'} \\ v_{C'} \\ \phi_C \\ \phi_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos\left(4\frac{f}{L}\right) \\ c_2 &= \sin\left(4\frac{f}{L}\right) \\ c_3 &= g(L_1) - g(L_1 + L_2) \\ c_4 &= g(L_1 + L_2) - g(L_1 + L_2 + L_3) \end{aligned} \quad (1.58)$$

Scegliendo la rotazione dell'ultimo tratto,  $\phi_D$ , come parametro lagrangiano, si possono scrivere le cinque equazioni non omogenee:

$$\begin{aligned} c_1 u_{3A} - c_2 u_{2A} &= 0 \\ u_{3A} - u_{3C'} - c_3 \phi_C &= 0 \\ u_{2A} - u_{2C'} - \phi_C L_2 &= 0 \\ u_{3C'} &= c_4 \alpha \\ u_{2C'} &= \alpha L_3 \end{aligned} \quad (1.59)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} u_{3C'} &= c_4 \alpha \\ u_{2C'} &= \alpha L_3 \\ \phi_C &= \frac{-c_1 c_4 + c_2 L_3}{c_1 c_3 - c_2 L_2} \alpha \\ u_{3A} &= \frac{c_2 (-c_4 L_2 + c_3 L_3)}{c_1 c_3 - c_2 L_2} \alpha \\ u_{2A} &= \frac{c_1 (-c_4 L_2 + c_3 L_3)}{c_1 c_3 - c_2 L_2} \alpha \end{aligned} \quad (1.60)$$

### Esempio numerico

Si consideri un arco di luce  $L$  e freccia  $L/4$ , e le cerniere siano situate ad  $L/4$  e  $2L/3$ , sicchè  $L_1 = L/4$ ,  $L_2 = \frac{5}{12}L$  ed  $L_3 = \frac{L}{3}$ , mentre i quattro coefficienti

divengono:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \cos\left(4\frac{f}{L}\right) = 0.5403 \\
 c_2 &= \sin\left(4\frac{f}{L}\right) = 0.8414 \\
 c_3 &= g(L_1) - g(L_1 + L_2) = 0.0347L \\
 c_4 &= g(L_1 + L_2) - g(L_1 + L_2 + L_3) = -0.222L
 \end{aligned}
 \tag{1.61}$$

e quindi la deformata dell'arco è definita da:

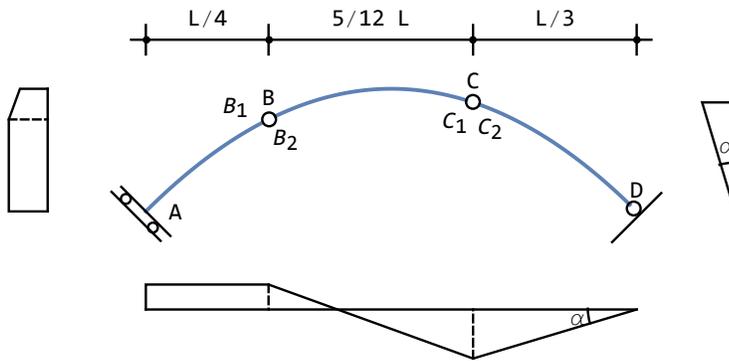


Figura 1.13: Un arco ad asse parabolico di freccia  $f$ : il meccanismo

$$\begin{aligned}
 u_{3C'} &= -0.222\alpha L \\
 u_{2C'} &= \alpha \frac{L}{3} \\
 \phi_C &= \frac{-c_1 c_4 + c_2 L_3}{c_1 c_3 - c_2 L_2} \alpha = -1.207\alpha \\
 u_{3A} &= \frac{c_2 (-c_4 L_2 + c_3 L_3)}{c_1 c_3 - c_2 L_2} \alpha = -0.264\alpha L \\
 u_{2A} &= \frac{c_1 (-c_4 L_2 + c_3 L_3)}{c_1 c_3 - c_2 L_2} \alpha = -0.1696\alpha L
 \end{aligned}
 \tag{1.62}$$

Per il tracciamento delle deformate è anche utile individuare gli spostamenti del punto  $F$  in mezzzeria, ossia in  $z = \frac{L}{2}$ . Sarà:

$$\begin{aligned}
 u_{2F} &= u_{2C'} - \phi_C (x_{3F} - x_{3C}) = 0.1322\alpha L \\
 u_{3F} &= u_{3C'} + \phi_C (x_{2F} - x_{2C}) = -0.188\alpha L
 \end{aligned}
 \tag{1.63}$$

In Figura 1.13 sono riportati i diagrammi degli spostamenti verticali ed orizzontali.

## Capitolo 2

# Analisi cinematica Metodo grafico

Si illustra ora un classico metodo grafico per l'analisi cinematica delle strutture, utilizzando due risultati di geometria che permettono il tracciamento veloce dei diagrammi degli spostamenti. Il metodo proposto è da ritenersi duale rispetto al metodo analitico studiato nel precedente Capitolo: il metodo analitico fornisce in modo semi-automatico risultati precisi per strutture geometricamente semplici, il metodo grafico fornisce risultati qualitativi per strutture più complesse.

L'intera trattazione grafica si basa sui concetti di *centro assoluto di rotazione*  $C_i$  di un tratto rigido  $i$  e di *centro relativo di rotazione*  $C_{ij}$  tra i due tratti rigidi  $i$  e  $j$ . A tal proposito, si ricorda che per ciascun tratto rigido si può scegliere arbitrariamente un punto, detto *polo*, e ricondurre gli spostamenti degli altri punti del tratto alle due traslazioni del polo, e ad una rotazione del tratto intorno ad un asse ortogonale al piano e passante per il polo. Alternativamente, è possibile dimostrare che esiste una *particolare* scelta del polo, per cui le due traslazioni si annullano, e gli spostamenti dei punti del tratto si riducono ad una singola rotazione intorno ad un asse ortogonale al piano e passante per esso. Tale punto si chiama *centro assoluto di rotazione*.

E' appena il caso di osservare che il tratto rigido continua a possedere tre gradi di libertà, essendosi barattate le due traslazioni con le due coordinate del centro.

Se poi si considerano due tratti rigidi  $i$  e  $j$ , allora ha senso definire gli spostamenti rigidi del tratto  $j$ -mo relativamente al tratto  $i$ -mo (o viceversa), ossia considerando il tratto  $i$ -mo come fermo, e trattando gli spostamenti del tratto  $j$ -mo come assoluti. E' così possibile definire il centro di rotazione relativo  $C_{ij}$  per gli spostamenti rigidi relativi tra i due tratti rigidi  $i$  e  $j$ .

Conosciuto il centro assoluto  $C_i$  del tratto  $i$ -mo, di coordinate  $(x_{3i}, x_{2i})$  è quindi possibile tracciare i diagrammi delle componenti orizzontali e verticali di

---

spostamento, secondo le formule:

$$\begin{aligned}u_{3P} &= \phi_i (x_{2P} - x_{2i}) \\ u_{2P} &= -\phi_i (x_{3P} - x_{3i})\end{aligned}\tag{2.1}$$

dove  $\phi_i$  è la rotazione del tratto rigido intorno ad un asse ortogonale al piano, e passante per il punto  $C_i$ .

Come si vedrà, per il tracciamento delle deformede occorre ricavare le coordinate dei centri assoluti di rotazione e dei centri relativi di rotazione, e questa ricerca può essere condotta applicando i due teoremi sulle catene cinematiche, per la cui dimostrazione si rimanda ad un qualsiasi classico trattato di Scienza delle Costruzioni<sup>1</sup>:

**Teorema 1.** *Un sistema rigido costituito dai 2 tratti  $i$  e  $j$  è labile se e solo se i centri  $C_i$ ,  $C_j$  e  $C_{ij}$  risultano allineati*

**Teorema 2.** *Un sistema rigido costituito da 3 tratti  $i$ ,  $j$  e  $k$  è labile se e solo se i centri di rotazione relativa  $C_{ij}$ ,  $C_{ik}$  e  $C_{jk}$  risultano allineati*

Applicando questi due teoremi è possibile ricavare le coordinate dei centri, ed in base ad essi tracciare le deformede. Alcune semplici regole pratiche per localizzare velocemente i centri sono le seguenti:

1. un appoggio agente sul tratto  $i$ -mo permette di definire il centro assoluto di rotazione del tratto  $i$ -mo stesso, in quanto  $C_i$  viene a coincidere col punto di applicazione dell'appoggio
2. un bipendolo esterno sul tratto  $i$ -mo impone che il centro assoluto di rotazione  $C_i$  sia il punto improprio degli assi dei due pendoli
3. un carrello sul tratto  $i$ -mo, con piano di scorrimento lungo la retta  $s$ , impone che il centro di rotazione si trovi sulla retta normale alla retta  $s$ .  
Per quanto concerne i vincoli interni, o sconnessioni, si può concludere:
4. se due tratti rigidi  $i$  e  $j$  sono collegati da una cerniera, il loro centro relativo di rotazione  $C_{ij}$  è situato in corrispondenza della cerniera stessa
5. se due tratti rigidi  $i$  e  $j$  sono collegati da un bipendolo, il loro centro relativo di rotazione  $C_{ij}$  è situato in corrispondenza del punto improprio dell'asse dei pendoli
6. se due tratti rigidi  $i$  e  $j$  sono collegati da un pendolo, il loro centro relativo di rotazione  $C_{ij}$  è situato lungo l'asse del pendolo.

Dopo aver applicato queste semplici regole, si passa ad applicare le condizioni di allineamento, deducendo gli altri centri, ed una volta conclusa la ricerca dei centri, si passa al tracciamento delle deformede, in base alle (2.1).

---

<sup>1</sup>Si consulti ad esempio A. Sollazzo, U. Ricciuti, *Scienza delle Costruzioni* Vol.I, pagg.220–222

In generale, per una struttura costituita da  $n$  tratti rigidi, si hanno  $\frac{n(n+1)}{2}$  centri, assoluti o relativi, anche se per il tracciamento dell'intera deformata basta la conoscenza di  $2n - 1$  centri opportuni. Ed infatti, la deformata del primo tratto è definita a partire dalla conoscenza del centro assoluto  $C_1$ , mentre per ogni tratto successivo  $k$  si può tracciare la deformata a partire dalla conoscenza di  $C_k$  e di  $C_{k-1}$ .

## 2.1 Un portale a tre cerniere

Si consideri il portale di Figura 2.1, vincolato con due appoggi al suolo, e con una cerniera intermedia in  $B$ . Poichè  $C_1$  è situato in corrispondenza dell'appoggio in  $A$ , il centro  $C_{12}$  è situato in corrispondenza della cerniera intermedia in  $B$ , ed il centro  $C_2$  si trova in corrispondenza dell'appoggio in  $C$ , si può concludere — in base al primo teorema — che la struttura è cinematicamente determinata. Infatti, i tre centri non sono allineati.

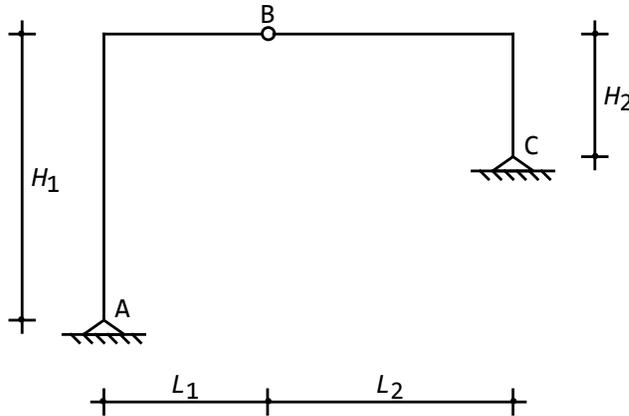


Figura 2.1: Un portale a tre cerniere

## 2.2 Un portale labile

Si consideri ora il portale di Figura 2.2, costituito da due tratti rigidi ma vincolato con un carrello in  $C$ . La presenza dell'appoggio in  $A$  permette di situare subito il centro  $C_1$ , mentre il carrello in  $C$  permette di affermare che  $C_2$  è situato sulla verticale per il punto  $C$ . Infine, la cerniera in  $B$  permette di situare subito il centro  $C_{12}$ .

Applicando ora il primo teorema sulle catene cinematiche giungiamo ad identificare il centro assoluto  $C_2$  del secondo tratto all'intersezione tra la congiungente il punto  $A$  ed il punto  $B$ , e la verticale passante per  $C$ , come riportato in Figura 2.3.

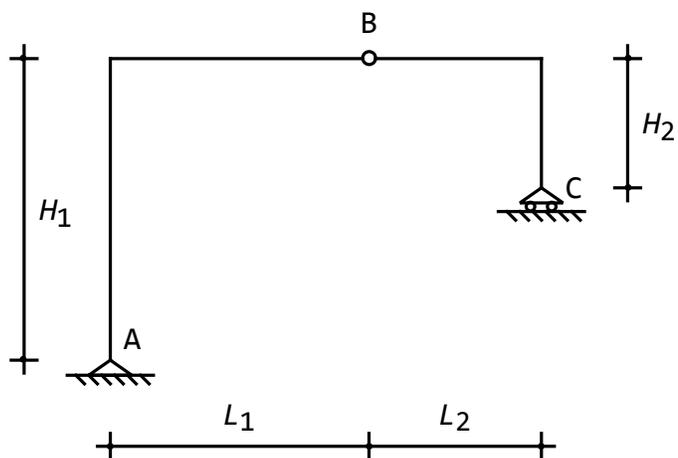


Figura 2.2: Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera

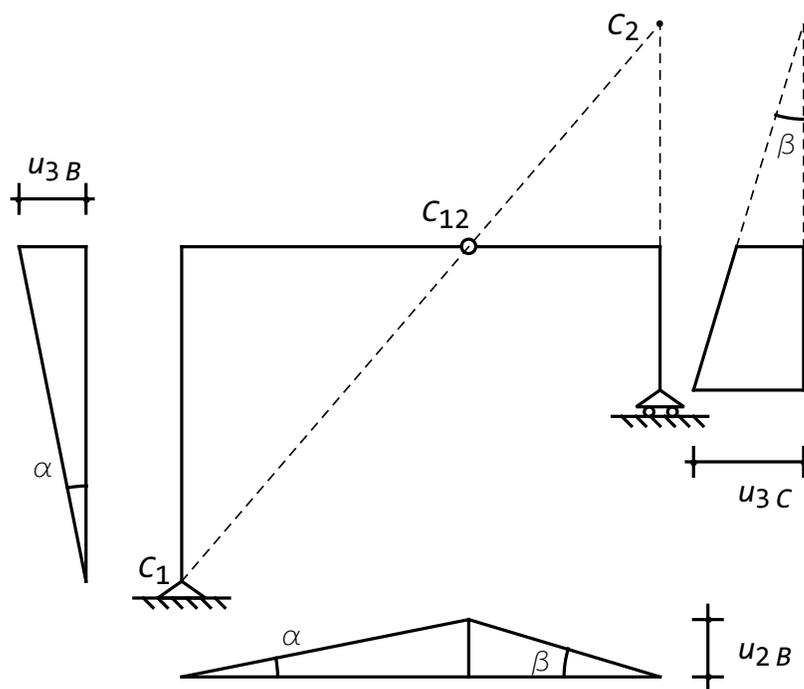


Figura 2.3: I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.2

Assegnato il parametro lagrangiano, ossia scelto arbitrariamente l'angolo  $\phi_1 = \alpha$  di cui ruota il primo tratto intorno ad un asse ortogonale al piano e passante per  $C_1$ , si può tracciare il diagramma delle componenti verticali di spostamento per il primo tratto: esso è costituito da un segmento rettilineo, inclinato di  $\alpha$  rispetto alla fondamentale. In corrispondenza del centro  $C_{12}$  si ha lo spostamento  $u_{2B} = -\alpha L_1$ , che fornisce uno dei due valori necessari a disegnare il diagramma degli spostamenti verticali lungo il secondo tratto. L'altro valore è ovviamente il valore nullo in corrispondenza del centro  $C_2$ . Nel segue che il secondo tratto ruoterà di un angolo  $\beta = u_{2B}/L_2$ .

Per disegnare il diagramma delle componenti orizzontali di spostamento si consideri che per il primo tratto si ha il valore nullo in  $C_1$  e si conosce l'inclinazione, pari ad  $\alpha$ , e questo permette il tracciamento immediato del diagramma, da zero in corrispondenza di  $C_1$  fino a  $u_{3B} = -\alpha H_1$ . Per il secondo tratto, si consideri che il diagramma deve annullarsi in  $C_2$  ed essere inclinato di  $\beta$ , oppure, alternativamente, che si conosce il valore dello spostamento  $u_{2B}$  ed il punto di nullo in  $C_2$ . In ambedue i casi si ottiene il risultato di Figura 2.3.

### 2.3 Portale con cerniera e pendolo

Si consideri il portale di Figura 2.4, costituito da due tratti rigidi collegati da una cerniera in  $B$ , e vincolato al suolo con appoggio in  $A$  ed un pendolo in  $C$ . Il pendolo è inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale. Si tratta di

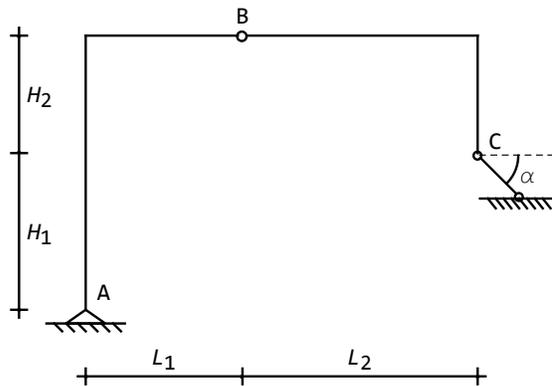


Figura 2.4: Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera

una struttura composta da due tratti, quindi i centri da determinare sono i due centri assoluti  $C_1$  e  $C_2$ , ed il centro relativo  $C_{12}$ . La presenza dell'appoggio in  $A$  permette di situare subito il centro  $C_1$ , mentre la cerniera in  $B$  permette di situare subito il centro di rotazione relativo  $C_{12}$ . Infine, il centro di rotazione assoluto  $C_2$  deve situarsi lungo la retta d'azione del pendolo.

Applicando ora il primo teorema sulle catene cinematiche giungiamo ad identificare il centro assoluto  $C_2$  del secondo tratto all'intersezione tra la retta d'azione del pendolo e la congiungente il punto  $A$  ed il punto  $B$ .

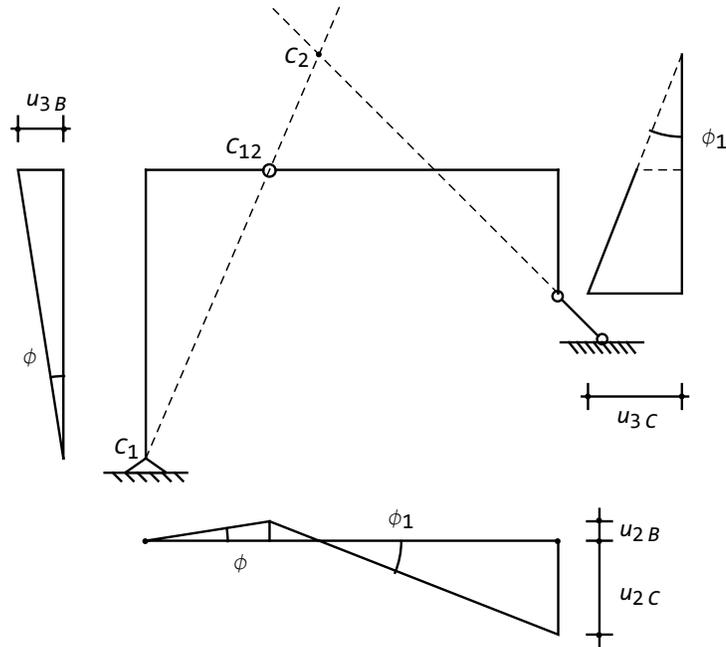


Figura 2.5: I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.4

Si passa ora al tracciamento del cinematismo. Assegnato il parametro lagrangiano, ossia scelto arbitrariamente l'angolo  $\phi$  di cui ruota il primo tratto intorno ad un asse ortogonale al piano e passante per  $C_1$ , si può tracciare il diagramma delle componenti verticali di spostamento per il primo tratto: esso è costituito da un segmento rettilineo, inclinato di  $\phi$  rispetto alla fondamentale. In corrispondenza del centro  $C_{12}$  si ha lo spostamento  $u_{2B} = -\phi L_1$ , che fornisce uno dei due valori necessari a disegnare il diagramma degli spostamenti verticali lungo il secondo tratto. L'altro valore è ovviamente il valore nullo in corrispondenza del centro  $C_2$ . Nel segue che il secondo tratto ruoterà di un angolo  $\phi_1 = u_{2B}/L_2 = -\phi L_1/L_2$ .

Per disegnare il diagramma delle componenti orizzontali di spostamento si consideri che per il primo tratto si ha il valore nullo in  $C_1$  e l'inclinazione, pari ad  $\phi$ , e questo permette il tracciamento immediato del diagramma, da zero fino a  $u_{3B} = -\phi(H_1 + H_2)$ . Per il secondo tratto, si consideri che il diagramma deve annullarsi in  $C_2$  ed essere inclinato di  $\phi_1$ , oppure, alternativamente, che si conosce il valore dello spostamento  $u_{3B}$  ed il punto di nullo in  $C_2$ . In ambedue

i casi si ottiene il risultato di Figura 2.5, in cui è possibile anche leggere le componenti di spostamento del pendolo in  $C$ .

## 2.4 Portale con pendolo interno

Si consideri il portale di Figura 2.6, costituito da due tratti rigidi collegati da un pendolo in  $B$ , e vincolato al suolo con appoggi in  $A$  e  $C$ . Il pendolo è inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale.

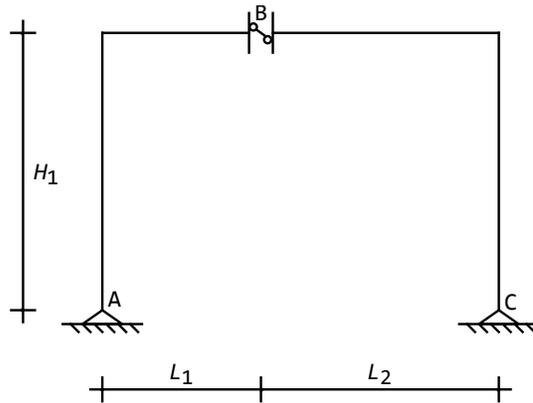


Figura 2.6: Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da un pendolo

Si tratta di una struttura composta da due tratti, quindi i centri da determinare sono i due centri assoluti  $C_1$  e  $C_2$ , ed il centro relativo  $C_{12}$ . La presenza dell'appoggio in  $A$  permette di situare subito il centro  $C_1$ , mentre l'appoggio in  $C$  permette di situare subito il centro di rotazione assoluto  $C_2$ . Infine, il centro di rotazione relativo  $C_{12}$  deve situarsi lungo la retta d'azione del pendolo.

Secondo il primo teorema sulle catene cinematiche, i tre centri  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_{12}$  devono essere allineati, quindi il centro  $C_{12}$  dovrà situarsi sulla congiungente gli appoggi in  $A$  ed in  $C$ .

Assegnato il parametro lagrangiano, ossia scelto arbitrariamente l'angolo  $\phi$  di cui ruota il primo tratto intorno ad un asse ortogonale al piano e passante per  $C_1$ , si può tracciare il diagramma delle componenti verticali di spostamento per il primo tratto: esso è costituito da un segmento rettilineo, inclinato di  $\phi$  rispetto alla fondamentale. In corrispondenza del centro  $C_{12}$  si ha lo spostamento  $u_{2C_{12}} = -\phi x_{3C_{12}}$ , che fornisce uno dei due valori necessari a disegnare il diagramma degli spostamenti verticali lungo il secondo tratto. L'altro valore è ovviamente il valore nullo in corrispondenza del centro  $C_2$ . Si noti che si sono disegnate a tratteggio le parti virtuali di ambedue le rette, ossia le parti che non corrispondono a punti reali. L'angolo di rotazione del secondo tratto è calcolabile come:

$$\phi_2 = \phi \frac{x_{3C_{12}}}{x_{3C_{12}} - x_{3C}} \quad (2.2)$$

La faccia sinistra del pendolo subisce uno spostamento verticale pari a:

$$u_{2Bsin} = -\phi x_{3B} = -\phi L_1 \quad (2.3)$$

mentre la faccia destra avrà lo spostamento:

$$u_{2Bdes} = \phi_2 (x_{3C} - x_{3B}) = \phi_2 L_2 \quad (2.4)$$

Le componenti orizzontali di spostamento si deducono immediatamente, realizzando che il primo tratto ruota dell'angolo  $\phi$  ed il secondo dell'angolo  $\phi_2$ . Di conseguenza, gli spostamenti orizzontali delle due facce del pendolo sono pari a:

$$\begin{aligned} u_{3Bsin} &= -\phi x_{2B} = -\phi H_1 \\ u_{3Bdes} &= -\phi_2 x_{2B} = -\phi_2 H_1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

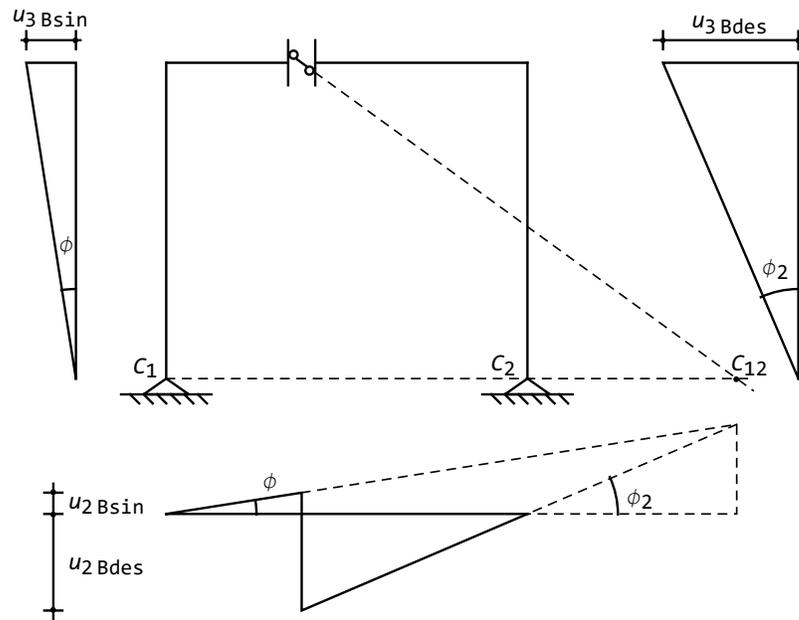


Figura 2.7: I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.6

Se l'asse del pendolo è verticale, l'angolo  $\alpha$  diviene  $\pi/2$ , e di conseguenza  $\phi_2 = -\frac{L_1}{L_2}$  e le due facce del pendolo subiscono lo stesso spostamento verticale.

## 2.5 Portale con doppio bipendolo interno

Si consideri il portale di Figura 2.8, costituito da due tratti rigidi collegati da un doppio bipendolo in  $B$ , e vincolato al suolo con appoggi in  $A$  e  $C$ .

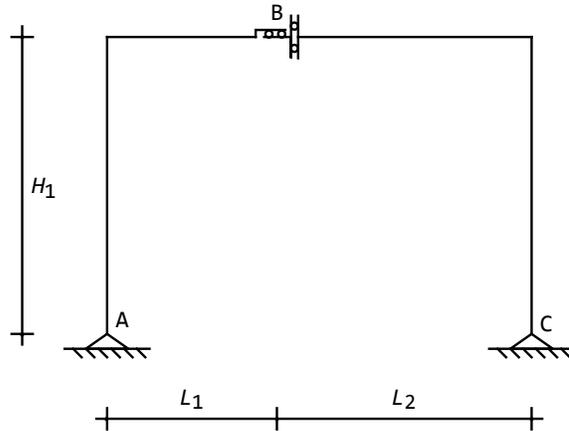


Figura 2.8: Un telaio appoggiato in  $A$  e  $C$ , costituito da due tratti rigidi connessi da un doppio bipendolo

Si tratta di una struttura composta da due tratti, quindi i centri da determinare sono i due centri assoluti  $C_1$  e  $C_2$ , ed il centro relativo  $C_{12}$ . La presenza dei due appoggi permette di individuare subito i due centri di rotazione assoluti  $C_1$  e  $C_2$ . Infine, il centro di rotazione relativo  $C_{12}$  è improprio, lungo la retta che congiunge  $C_1$  e  $C_2$ . Ne segue che le rotazioni relative in  $B$  sono proibite, e le rette rappresentative degli spostamenti dei due tratti devono essere parallele. Si ha quindi il diagramma di Figura 2.9 da cui è immediato ricavare gli spostamenti del doppio bipendolo.

## 2.6 Telaio a quattro cerniere

Si consideri il portale di Figura 2.10, costituito da tre tratti rigidi collegati da due cerniere in  $B$  ed in  $C$ , e vincolato al suolo con appoggi in  $A$  e  $D$ .

Si tratta di una struttura composta da tre tratti, quindi i centri da determinare sono i tre centri assoluti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , e i tre centri relativi  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  e  $C_{23}$ . La presenza dell'appoggio in  $A$  permette di situare subito il centro  $C_1$ , mentre le cerniere in  $B$  e  $C$  permettono di situare subito i centri di rotazione relativi  $C_{12}$  e  $C_{23}$ , rispettivamente. Infine, il centro di rotazione assoluto  $C_3$  deve situarsi nell'appoggio  $D$ .

I due teoremi delle catene cinematiche permettono di situare gli altri centri: per il primo teorema, il centro assoluto  $C_2$  deve appartenere alla retta che congiunge  $C_1$  e  $C_{12}$ , nonché alla retta che congiunge  $C_3$  e  $C_{23}$ , mentre il centro relativo  $C_{13}$  deve appartenere alla retta che congiunge  $C_1$  e  $C_3$ , e per il secondo teorema delle catene cinematiche, deve anche appartenere alla retta che congiunge  $C_{12}$  e  $C_{23}$ .

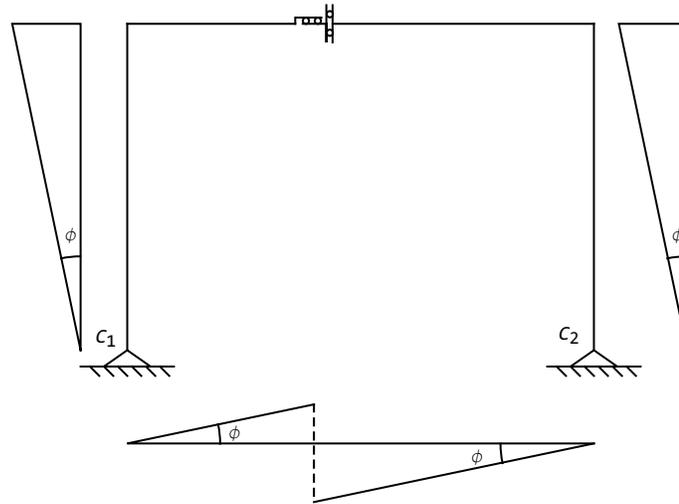


Figura 2.9: Un possibile cinematismo per il telaio di Figura 2.8

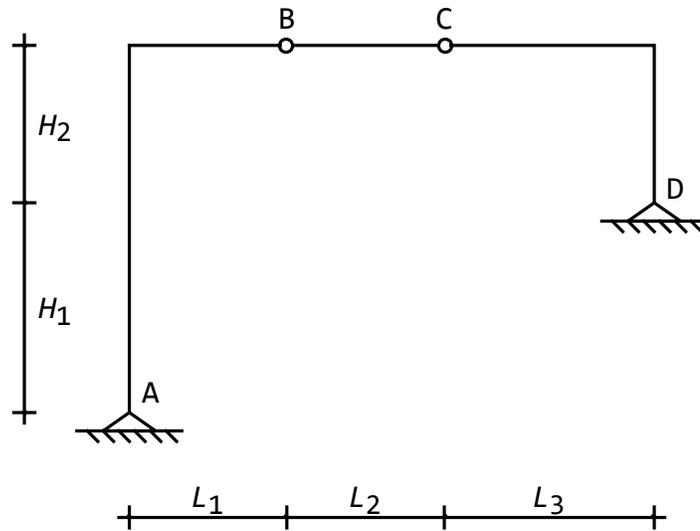


Figura 2.10: Un telaio zoppo costituito da tre tratti rigidi connessi da due cerniere

Assegnato il parametro lagrangiano, ossia scelto arbitrariamente l'angolo  $\phi$  di cui ruota il primo tratto intorno ad un asse ortogonale al piano e passante per  $C_1$ , si può tracciare il diagramma delle componenti verticali di spostamento per il primo tratto: esso è costituito da un segmento rettilineo, inclinato di  $\phi$  rispetto alla fondamentale. In corrispondenza del centro  $C_{12}$  si ha lo spostamento  $u_{2B} = -\phi L_1$ , che fornisce uno dei due valori necessari a disegnare il diagramma degli spostamenti verticali lungo il secondo tratto. L'altro valore è ovviamente il valore nullo in corrispondenza del centro  $C_2$ . Nel seguito che il secondo tratto ruoterà di un angolo  $\phi_1 = u_{2B}/L_2 = -\phi L_1/L_2$ , e la relativa deformata si estenderà fino al punto  $C_{23}$ . Per il terzo tratto, basterà congiungere l'ultimo punto della seconda deformata con il valore nullo in corrispondenza dell'appoggio in  $D$ . Per disegnare il diagramma delle componenti orizzontali di spostamento si con-

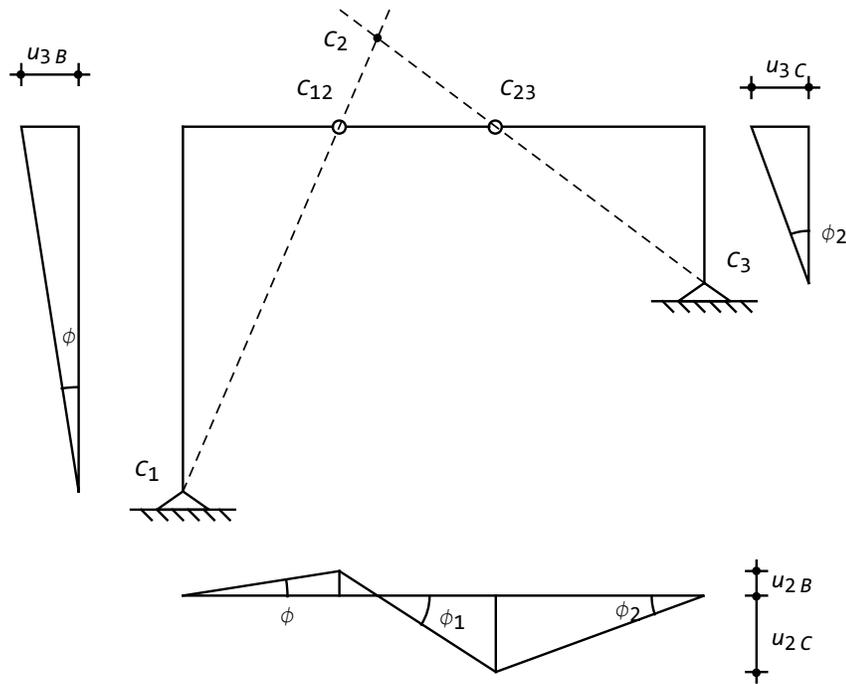


Figura 2.11: I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.10

sideri che per il primo tratto si ha il valore nullo in  $C_1$  e l'inclinazione, pari ad  $\phi$ , e questo permette il tracciamento immediato del diagramma, da zero fino a  $u_{3B} = -\phi(H_1 + H_2)$ . Per il secondo tratto, si consideri che il diagramma deve annullarsi in  $C_2$  ed essere inclinato di  $\phi_2$ , oppure, alternativamente, che si conosce il valore dello spostamento  $u_{3B}$  ed il punto di nullo in  $C_2$ . In ambedue i casi si ottiene il risultato di Figura 2.11. Come utile esercizio, si situi, sulla

stessa Figura 2.11, il centro  $C_{13}$  e si controlli che le rette rappresentative degli spostamenti del primo e del terzo tratto si intersechino in corrispondenza del centro stesso.

## 2.7 Portale a tre cerniere e bipendolo

Si consideri il portale di Figura 2.12, uguale al portale dell'esercizio precedente, ma con un bipendolo in  $C$ .

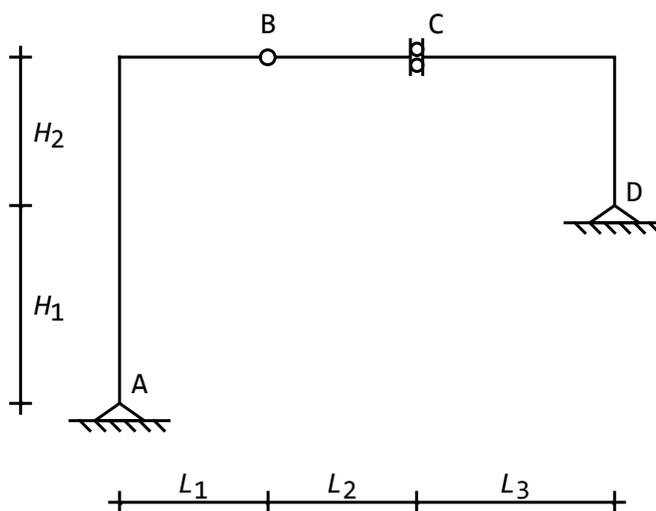


Figura 2.12: Un telaio zoppo costituito da tre tratti rigidi connessi da una cerniera e da un bipendolo

Si tratta di una struttura composta da tre tratti, quindi i centri da determinare sono i tre centri assoluti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , e i tre centri relativi  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  e  $C_{23}$ . La presenza dell'appoggio in  $A$  permette di situare subito il centro  $C_1$ , mentre la cerniera in  $B$  permette di situare subito il centro di rotazione relativo  $C_{12}$ . Il bipendolo interno in  $C$  situa il centro  $C_{23}$  lungo la retta impropria ortogonale all'asse del bipendolo. Infine, il centro di rotazione assoluto  $C_3$  deve situarsi nell'appoggio  $D$ .

Applicando ora il primo teorema sulle catene cinematiche, possiamo affermare che il centro  $C_2$  deve appartenere alla retta che congiunge  $C_1$  e  $C_{12}$ , ed anche alla retta che congiunge  $C_{23}$  e  $C_3$ , ossia alla retta passante per  $D$  ed avente inclinazione ortogonale all'asse del bipendolo. Nel caso in esame, quindi, in cui il bipendolo ha asse verticale, bisognerà tracciare la retta orizzontale passante per  $D$ .

Il centro  $C_{13}$  deve appartenere alla retta che congiunge  $C_1$  e  $C_3$ , e per il secondo teorema delle catene cinematiche, deve anche appartenere alla retta che congiunge  $C_{12}$  e  $C_{23}$ .

Assegnato il parametro lagrangiano, ossia scelto arbitrariamente l'angolo  $\phi$  di cui ruota il primo tratto intorno ad un asse ortogonale al piano e passante per  $C_1$ , si può tracciare il diagramma delle componenti verticali di spostamento per il primo tratto: esso è costituito da un segmento rettilineo, inclinato di  $\phi$  rispetto alla fondamentale. In corrispondenza del centro  $C_{12}$  si ha lo spostamento  $u_{2B} = -\phi L_1$ , che fornisce uno dei due valori necessari a disegnare il diagramma degli spostamenti verticali lungo il secondo tratto. L'altro valore è ovviamente il valore nullo in corrispondenza del centro  $C_2$ . Nel seguito che il secondo tratto ruoterà di un angolo  $\phi_1 = u_{2B}/L_2$ , e la relativa deformata si estenderà fino al bispodolo in  $C$ . Si noti che una parte della retta è fittizia, ed è quindi stata tratteggiata. Il terzo tratto dovrà ruotare della stessa quantità  $\phi_1$  di cui è ruotato il secondo tratto, partendo dal punto di nullo in corrispondenza della cerniera in  $D$ .

Il disegno delle componenti orizzontali di spostamento non presenta alcun elemento di novità, rispetto a quanto detto nell'esercizio precedente, ed è riportato in Figura 2.13.

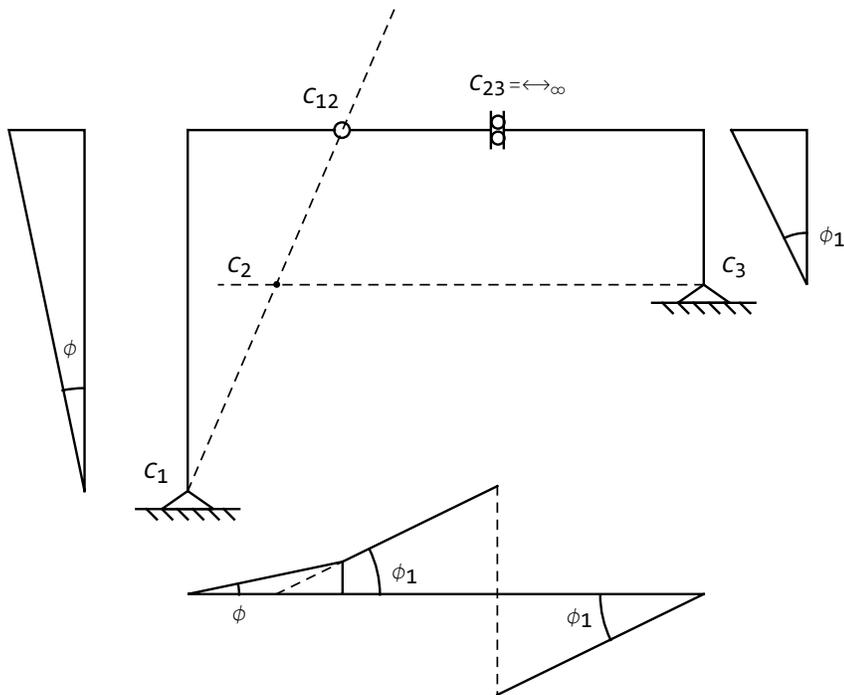


Figura 2.13: I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.12

## 2.8 Portale con bipendolo al piede

Si consideri il portale di Figura 2.14, costituito da tre tratti rigidi collegati da due cerniere in  $B$  ed in  $C$ , e vincolato al suolo con un bipendolo in  $A$  ed una cerniera in  $D$ .

Si tratta di una struttura composta da tre tratti, quindi i centri da determinare sono i tre centri assoluti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , e i tre centri relativi  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  e  $C_{23}$ . La presenza del bipendolo in  $A$  permette di situare subito il centro  $C_1$ , punto improprio della retta verticale, mentre le cerniere in  $B$  e  $C$  permettono di situare subito il centro di rotazione relativo  $C_{12}$  e  $C_{23}$ , rispettivamente. Infine, il centro di rotazione assoluto  $C_3$  deve situarsi nell'appoggio  $D$ . Applicando

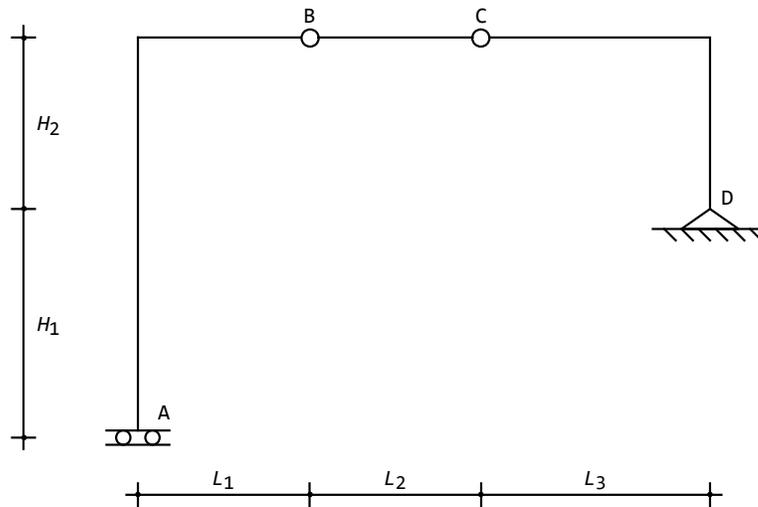


Figura 2.14: Un telaio zoppo costituito da tre tratti rigidi connessi da due cerniere, vincolato al suolo con bipendolo ed appoggio

ora il primo teorema sulle catene cinematiche, possiamo affermare che il centro  $C_2$  deve appartenere alla retta che congiunge  $C_1$  e  $C_{12}$ , ed anche alla retta che congiunge  $C_{23}$  e  $C_3$ .

Per disegnare il diagramma delle componenti verticali di spostamento, si consideri che il primo tratto non subisce traslazioni verticali, e quindi occorre assegnare arbitrariamente l'angolo  $\phi$  di cui ruota il secondo tratto intorno ad un asse ortogonale al piano e passante per  $C_{12}$ . In corrispondenza della cerniera in  $C$  si ha quindi uno spostamento verticale pari ad  $u_{2C} = -\phi L_2$ , ed il diagramma può essere completato per il terzo tratto congiungendo tale valore col punto di nullo in  $D$ . L'angolo di rotazione del terzo tratto sarà quindi  $\phi_1 = -\phi L_2 / L_3$ .

Per disegnare il diagramma delle componenti orizzontali di spostamento si consideri che per il terzo tratto ruota dell'angolo  $\phi_1$ , e quindi lo spostamento

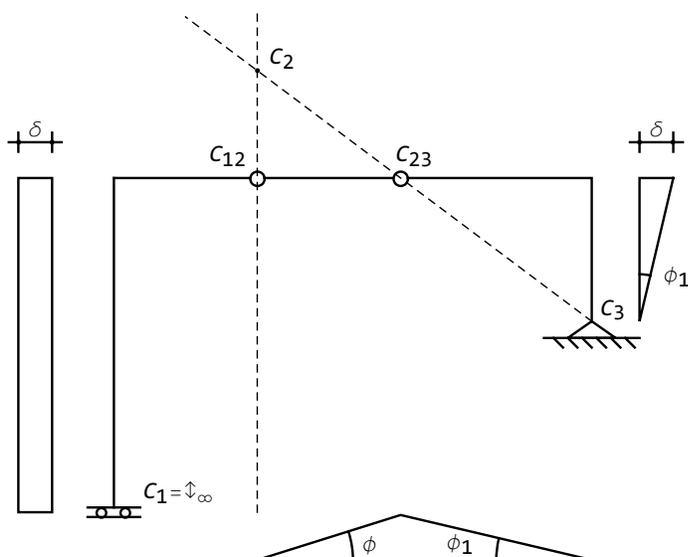


Figura 2.15: I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.14

orizzontale del traverso sarà pari a  $\delta = -\phi_1 H_2$ . Infine, il primo tratto subirà uno spostamento orizzontale costante, e pari a  $\delta$ .

### Verifica analitica

Le equazioni di vincolo possono scriversi come:

$$\begin{aligned}
 u_{2A} &= 0 \\
 \phi_A &= 0 \\
 \Delta u_{3B} &= 0 \\
 \Delta u_{2B} &= 0 \\
 \Delta u_{3C} &= 0 \\
 \Delta u_{2C} &= 0 \\
 u_{3D} &= 0 \\
 u_{2D} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

e scegliendo come coordinate lagrangiane le seguenti quantità:

$$\mathbf{d}^T = \{u_{3A}, u_{2A}, \phi_A, u_{3Ddes}, u_{2Bdes}, \phi_{Bdes}, u_{3D}, u_{2D}, \phi_D\} \tag{2.7}$$

si giunge alle otto equazioni nelle nove incognite:

$$\begin{aligned}
 u_{2A} &= 0 \\
 \phi_A &= 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
 u_{3Bdes} &= u_{3A} \\
 u_{2Bdes} &= 0 \\
 u_{3Bdes} &= u_{3D} - \phi_D H_2 \\
 u_{2Bdes} + \phi_B L_2 &= u_{2D} + \phi_D L_3 \\
 u_{3D} &= 0 \\
 u_{2D} &= 0
 \end{aligned}$$

Si sceglie un parametro libero, ad esempio lo spostamento  $\delta$ , e si esprimono le altre coordinate in funzione di esso:

$$\begin{aligned}
 u_{3A} &= \delta \\
 u_{3Bdes} &= \delta \\
 \phi_D &= -\frac{\delta}{H_2} \\
 \phi_{Bdes} &= -\frac{\delta}{H_2} \frac{L_3}{L_2}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

ritrovando i valori ottenuti col metodo geometrico.

## 2.9 Telaio a tre tratti, con due cerniere interne

Il telaio di Figura 2.16 è costituito da tre tratti, vincolati al suolo da un bipendolo, un appoggio ed un carrello, e collegati tra loro da due cerniere intermedie. Un banale computo dei tratti  $t$  e dei gradi di libertà  $s$  soppressi dai vincoli fornisce:

$$3t - s = 9 - 9 = 0 \tag{2.10}$$

e quindi la struttura, potenzialmente, è cinematicamente determinata.

Tuttavia, nell'esempio di Figura 2.16, la cerniera in  $B$  è mal situata, sicchè il centro  $C_1$ , punto improprio della retta verticale passante per  $A$ , il centro  $C_2$ , situato in corrispondenza dell'appoggio in  $C$ , ed il centro relativo  $C_{12}$  corrispondente alla cerniera in  $B$ , risultano allineati. Ciò implica la possibilità, in base al primo teorema delle catene cinematiche, di un meccanismo. Si consideri infatti che il centro  $C_{23}$  è situato nella cerniera in  $D$  e che il centro  $C_3$  si troverà sulla verticale passante per  $E$ , ortogonale al piano di scorrimento dell'appoggio. Applicando il primo teorema delle catene cinematiche si possono subito ricavare le coordinate esatte di tale centro, in quanto basta intersecare la retta  $CD$  con la verticale per  $E$ .

Il tracciamento del diagramma degli spostamenti verticali non presenta difficoltà alcuna: il primo tratto non ammette spostamenti verticali, e risulta conveniente scegliere come coordinata lagrangiana l'angolo di rotazione  $\phi_2 = \alpha$  del secondo tratto. Ne segue che la cerniera in  $D$  subisce un innalzamento pari ad  $\alpha L$ , mentre il terzo tratto ruota di  $-\alpha$ .

Per il tracciamento dei diagrammi dello spostamento orizzontale si consideri che il terzo tratto ruota di  $-\alpha$  intorno al punto  $C_3$ , e di conseguenza il carrello

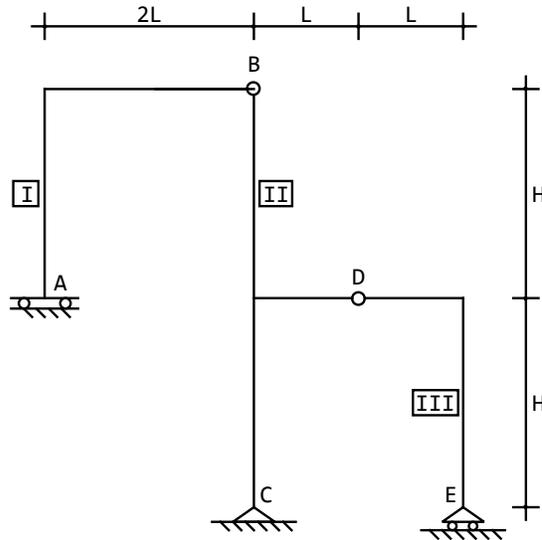


Figura 2.16: Un telaio costituito da tre tratti, con vincoli mal disposti.

si sposta verso sinistra di una quantità pari a  $2\alpha H$ , mentre la cerniera in  $D$  ha uno spostamento orizzontale, sempre verso sinistra, pari ad  $\alpha H$ . Il secondo tratto ruota di  $\alpha$ , in senso antiorario, quindi la cerniera in  $B$  subisce uno spostamento orizzontale, verso sinistra, pari a  $2\alpha H$ , ed infine il primo tratto trasla orizzontalmente, senza ruotare, della medesima quantità. Tutto è riportato nel diagramma di Figura 2.18.

## 2.10 Una maglia chiusa

Si consideri ora la maglia chiusa di Figura 2.19, di base  $L$  ed altezza  $H$ , costituita da quattro tratti connessi tra loro da quattro cerniere. La maglia non è vincolata esternamente, quindi può essere soggetta a traslazioni rigide; alternativamente, può pensarsi che la maglia sia soggetta ad un insieme di forze autoequilibrate. In entrambi i casi, esisterà una ulteriore possibilità di moto rigido, come si dimostra in seguito attraverso l'identificazione dei centri ed il tracciamento della deformata.

Si scelga arbitrariamente un tratto, ad esempio il primo, e lo si consideri fisso, (in Figura 2.19 lo si è indicato con la lettera  $S$ , per indicare il suolo) sicché il centro  $C_1$  è immediatamente identificabile in corrispondenza della cerniera in  $(L_1, 0)$ , ed il centro  $C_3$  è situato in corrispondenza della cerniera in  $(0, -H_1)$ . Altri centri facilmente ricavabili sono il centro  $C_{12}$  ed il centro  $C_{23}$ , posti nelle due cerniere che connettono il primo ed il secondo tratto, ed il secondo e terzo tratto, rispettivamente.

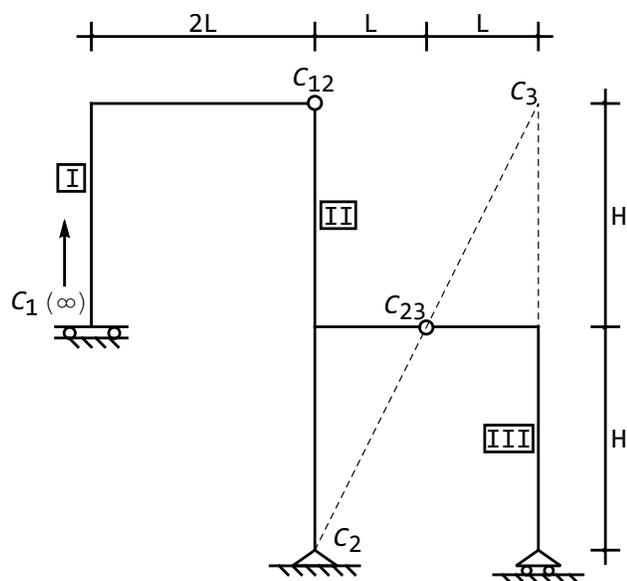


Figura 2.17: Un telaio costituito da tre tratti: i centri assoluti e relativi

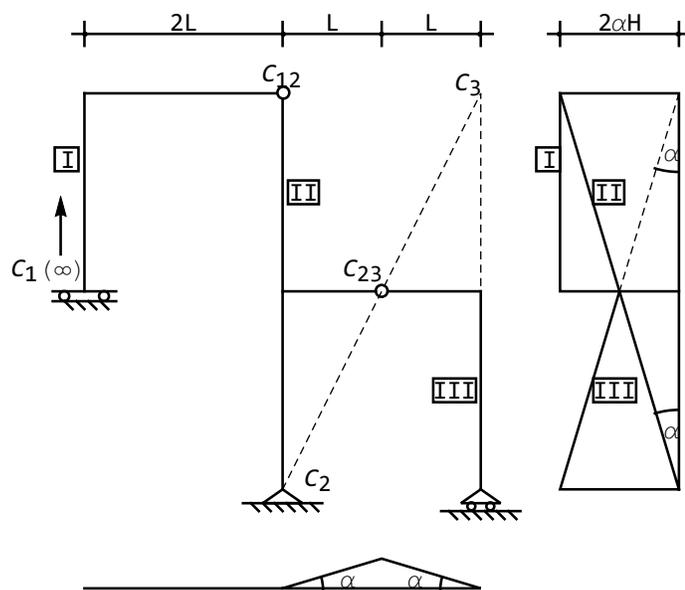


Figura 2.18: Un telaio costituito da tre tratti: le deformate verticali ed orizzontali

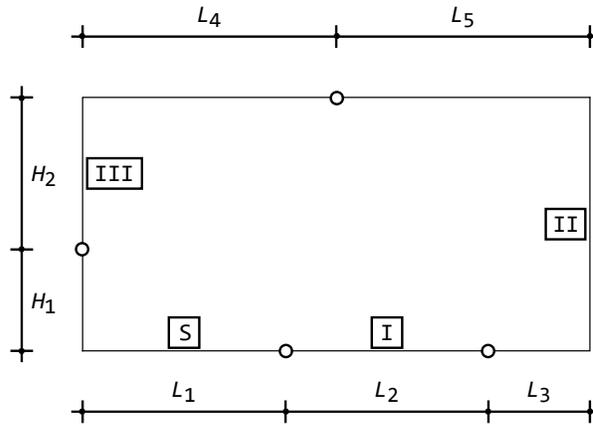


Figura 2.19: Una maglia chiusa con quattro cerniere

Applicando i teoremi delle catene cinematiche, si può poi ricavare il centro assoluto  $C_2$ , intersecando la retta che collega  $C_1$  e  $C_{12}$  con la retta che collega  $C_{23}$  e  $C_3$ . Ed infatti, per il primo teorema,  $C_2$  deve essere allineato sia con  $C_1$  e  $C_{12}$ , sia con  $C_3$  e  $C_{23}$ . Una semplice similitudine geometrica permette di situare esattamente il centro, in quanto si potrà scrivere, a partire dalla Figura 2.20:

$$\frac{H_2 + H_1}{L^* + L_4} = \frac{H_1}{L^*} \quad (2.11)$$

e quindi:

$$L^* = \frac{H_1}{H_2} L_4 \quad (2.12)$$

La conoscenza di questi cinque centri permette il tracciamento del cinematicismo. Ed infatti, si scelga come parametro lagrangiano l'angolo  $\alpha$  di cui ruota il primo tratto, sicchè il diagramma degli spostamenti del primo tratto è definito. Il centro  $C_{12}$  si innalza della quantità  $\alpha L_2$ , e la conoscenza di questo valore permette di calcolare la rotazione del secondo tratto. Sarà, come evidente dalla Figura 2.21:

$$\beta = \frac{L_2}{L^* + L_1 + L_2} \alpha \quad (2.13)$$

Può quindi proseguirsi il diagramma degli spostamenti verticali al di là di  $C_{12}$ , con inclinazione  $\beta$ , e giungendo a calcolare l'innalzamento dell'estremo di destra,  $\beta(L^* + L)$ , dove con  $L$  si è indicata la luce totale della maglia:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = L_4 + L_5 \quad (2.14)$$

Tale innalzamento si ritrova anche nel corrispondente punto del tratto superiore, giungendo quindi a calcolare l'innalzamento del centro  $C_{23}$ . Lungo il terzo

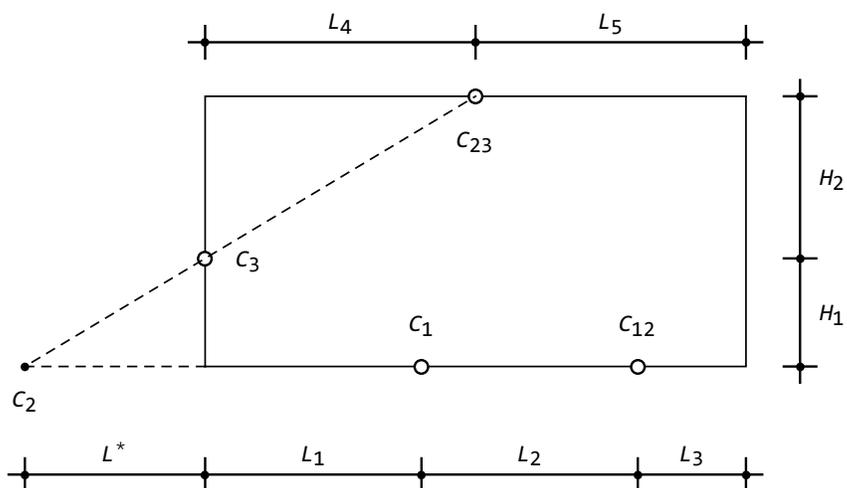


Figura 2.20: I centri di rotazione necessari per il tracciamento della catena cinematica

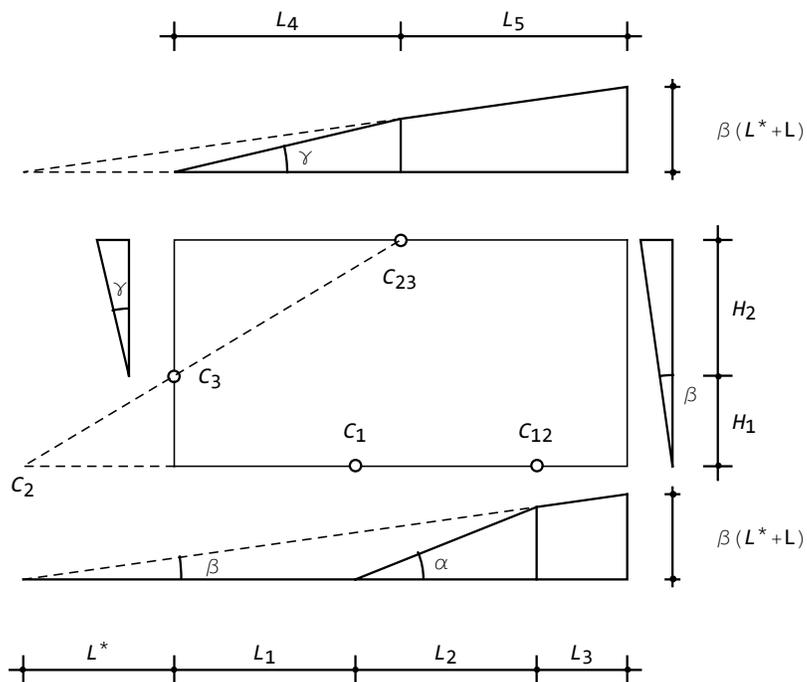


Figura 2.21: Le catene cinematiche per la maglia chiusa di Figura 2.19

tratto la pendenza cambia nuovamente, in quanto il diagramma deve annullarsi in corrispondenza del centro  $C_3$ , e ciò permette di calcolare l'angolo  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{H_1 + H_2}{H_2} \beta \quad (2.15)$$

Il tracciamento dei diagrammi degli spostamenti orizzontali è reso più agevole dall'osservare che il tratto 2 ruota dell'angolo  $\beta$ , mentre il tratto 3 ruota dell'angolo  $\gamma$ . Ne segue che il traverso superiore si sposta verso sinistra della quantità  $\beta(H_1 + H_2)$ , pari ovviamente a  $\gamma H_2$ .

## 2.11 Un portale su trave appoggiata

Si consideri ora il sistema di Figura 2.22, costituito da quattro tratti rigidi connessi tramite quattro cerniere, e vincolati al suolo da un appoggio ed un carrello. I centri banalmente noti sono  $C_1$ , in corrispondenza dell'appoggio, ed i centri di rotazione relativa  $C_{12}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{34}$  e  $C_{14}$  in corrispondenza delle quattro cerniere. Inoltre, il centro  $C_3$  di rotazione assoluto del tratto 3 deve appartenere alla retta verticale passante per il carrello. Servono almeno altri due centri, per cui occorre applicare i teoremi delle catene cinematiche.

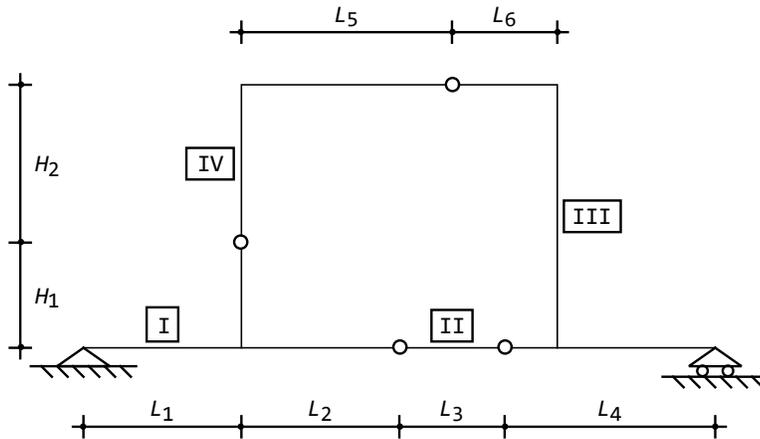


Figura 2.22: Un portale a quattro cerniere poggianti su una trave appoggiata

Per il secondo teorema delle catene cinematiche, applicato ai tratti 1,2 e 3, il centro  $C_{13}$  deve appartenere alla retta passante per i centri  $C_{12}$  e  $C_{23}$ , entrambi noti, quindi deve giacere sull'orizzontale passante per l'appoggio. Inoltre, possiamo applicare lo stesso teorema utilizzando i tratti 1,3, e 4, per cui il centro  $C_{13}$  deve anche appartenere alla retta passante per i centri  $C_{34}$  e  $C_{14}$ , anch'essi noti. All'intersezione di queste due rette si troverà  $C_{13}$ . Anche in questo caso, una semplice similitudine geometrica permette di situare esattamente il centro,

in quanto si potrà scrivere, a partire dalla Figura 2.23:

$$\frac{H_2 + H_1}{L^* + L_1 + L_5} = \frac{H_1}{L^* + L_1} \quad (2.16)$$

e quindi:

$$L^* = L_1 - \frac{H_1}{H_2} L_5 \quad (2.17)$$

Conosciuto  $C_{13}$  può applicarsi il primo teorema delle catene cinematiche, utilizzando i tratti 1 e 3, e quindi  $C_3$  dovrà essere situato sulla retta passante per  $C_1$  e  $C_{13}$ . Ne segue che esso sarà situato in corrispondenza del carrello. Si giunge alla situazione di Figura 2.23

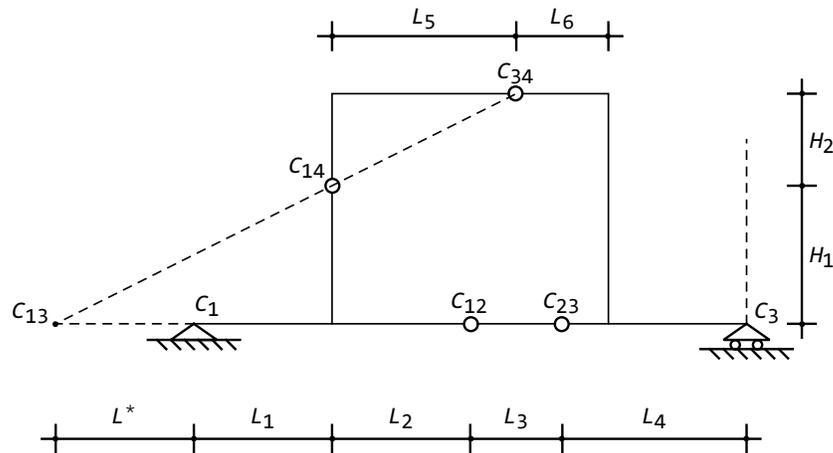


Figura 2.23: I centri di rotazione necessari per il tracciamento delle deformate

La conoscenza di questi sette centri è sufficiente per tracciare i cinematismi, mentre la localizzazione degli altri centri può servire da utile verifica. Il centro  $C_4$  può ad esempio calcolarsi applicando il primo teorema ai tratti 1 e 4, e quindi imponendo che esso si trovi sulla retta congiungente i centri  $C_1$  e  $C_{14}$ , ed ai tratti 3 e 4, imponendo quindi che esso appartenga anche alla retta congiungente  $C_{34}$  e  $C_3$ .

Per il tracciamento del cinematismo, si inizi a tracciare il diagramma dello spostamento verticale del tratto I, ruotandolo di un angolo arbitrario  $\alpha$ , scelto quindi come coordinata lagrangiana. La cerniera  $C_{12}$  subisce un innalzamento pari ad  $\alpha(L_1 + L_2)$ , ma il tracciamento della deformata sul secondo tratto è reso impossibile dalla mancata conoscenza di  $C_2$ . Si esamini allora il terzo tratto: per esso si conosce subito lo spostamento in corrispondenza del carrello in  $C_3$ , e si conosce anche lo spostamento (virtuale) del punto  $C_{13}$ . Basta, per ottenerlo, proseguire virtualmente la deformata del primo tratto fino ad intersecare la verticale per  $C_{13}$  (deformata virtuale, riportata in tratteggio), ottenendo lo

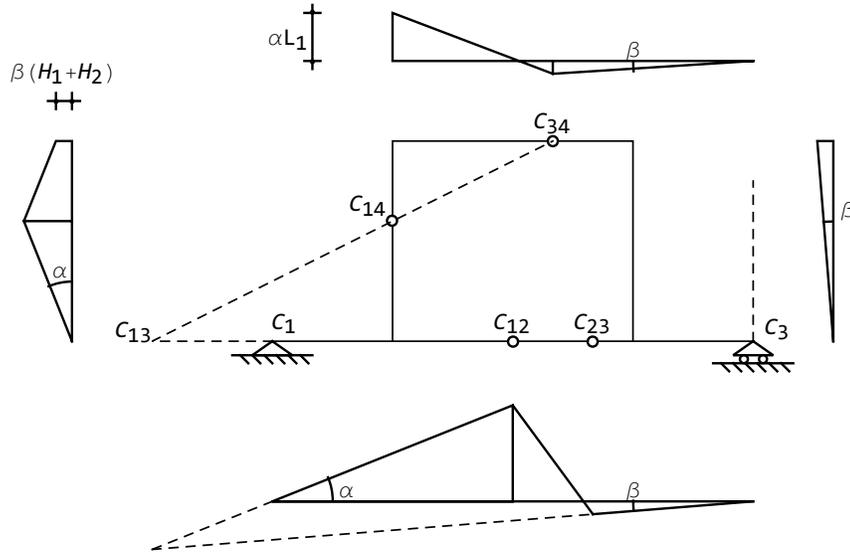


Figura 2.24: Il cinematismo della struttura di Figura 2.22

spostamento pari ad  $\alpha L^*$ . Basta collegare questo valore col punto di nullo in  $C_3$  e si ottiene la deformata relativa al terzo tratto, tenendo conto che una parte di questo segmento è virtuale, ed è quindi riportato in tratteggio.

A questo punto è possibile completare il diagramma dello spostamento lungo il tratto 2, in quanto si conosce sia lo spostamento della cerniera in  $C_{12}$  che lo spostamento in  $C_{23}$ .

L'angolo  $\beta$  di cui ruota il tratto III è fornito da:

$$\beta = \alpha \frac{L^*}{L^* + L_1 + L_2 + L_3 + L_4} \quad (2.18)$$

e la conoscenza di  $\beta$  permette il tracciamento immediato del diagramma degli spostamenti orizzontali sul tratto verticale a destra: da zero, in corrispondenza del punto inferiore, a  $\beta(H_1 + H_2)$  in sommità.

Per il tracciamento del diagramma degli spostamenti verticali sul tratto orizzontale superiore, si consideri che il tratto III ruota dell'angolo  $\beta$ , ed il suo abbassamento si annulla in corrispondenza della verticale per  $C_3$ . Quindi il diagramma può proseguire fino a  $C_{34}$ . Lungo il tratto IV, si consideri che lo spostamento del tratto verticale di sinistra è pari a  $-\alpha L_1$ , e quindi gli spostamenti verticali possono completarsi lungo tutto il tratto orizzontale superiore. Si giunge quindi alle deformate di Figura 2.24.

Infine, il diagramma degli spostamenti orizzontali sul tratto verticale sinistro può tracciarsi constatando che il tratto I ruota dell'angolo  $\alpha$ , e che lo spostamento in sommità vale  $\beta(H_1 + H_2)$ .

## 2.12 Doppia capriata

Si vogliono ora studiare i possibili cinematismi della struttura di Figura 2.25, formata da quattro tratti rigidi collegati tra loro da due cerniere, ed al suolo tramite un appoggio ed un carrello.

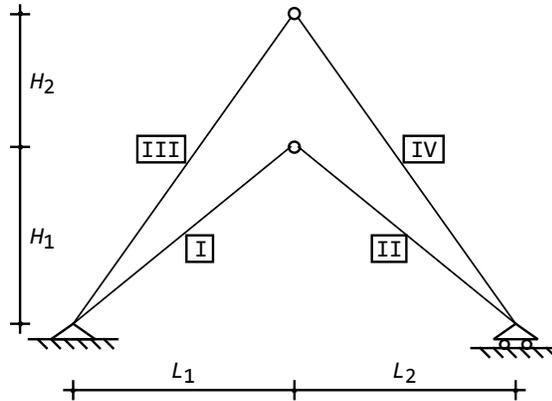


Figura 2.25: Quattro tratti rigidi vincolati tra loro con due cerniere

Le informazioni fornite dai vincoli sono numerose: in corrispondenza dell'appoggio a sinistra possono essere identificati i centri assoluti  $C_1$  e  $C_3$  delle due aste in esso concorrenti, nelle due cerniere interne si ritroveranno i centri relativi  $C_{12}$  e  $C_{34}$ , in corrispondenza del carrello a destra si trova il centro relativo  $C_{24}$  delle due aste in esso concorrenti. Inoltre, i centri assoluti delle stesse aste 2 e 4 si troveranno sulla verticale per il carrello.

Una doppia applicazione del primo teorema delle catene cinematiche fornisce le coordinate esatte di questi due centri: ed infatti  $C_2$  dovrà giacere sulla congiungente  $C_1$  e  $C_{12}$ , mentre  $C_4$  sulla congiungente  $C_3$  e  $C_{34}$ . Sarà quindi:

$$\begin{aligned} C_2 &= \left( 0, -\frac{H_1}{L_1} (L_1 + L_2) \right) \\ C_4 &= \left( 0, -\frac{H_1 + H_2}{L_1} (L_1 + L_2) \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Per il tracciamento delle catene cinematiche, si inizia con gli spostamenti verticali dell'asta 1, utilizzando quale coordinata lagrangiana la rotazione  $\alpha$ . Si definisce così l'innalzamento del punto  $C_{12}$ , pari ad  $\alpha L_1$ , ed è anche immediato proseguire lungo l'asta 2, fino ad annullare il diagramma in corrispondenza del carrello. Si osserva quindi che il tratto 2 ruota di una quantità negativa, perchè oraria, e pari a:

$$\beta = -\alpha \frac{L_1}{L_2} \quad (2.20)$$

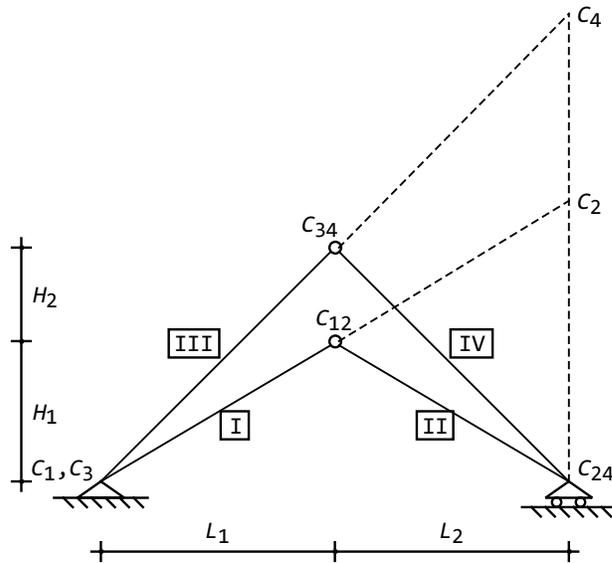


Figura 2.26: I centri per l'esercizio della Figura 2.25

Si prosegue poi con gli spostamenti orizzontali dell'asta 2, di cui si conosce il punto di nullo, in corrispondenza di  $y_2 = -\frac{H_1}{L_1}(L_1 + L_2)$  e l'inclinazione, pari a  $\beta$ . Il diagramma può essere quindi facilmente tracciato, e risulta in parte virtuale (linea tratteggiata). Il carrello subisce uno spostamento orizzontale verso sinistra, pari a:

$$w_{24} = -\beta \frac{H_1}{L_1} (L_1 + L_2) \quad (2.21)$$

La conoscenza dello spostamento del carrello permette di tracciare anche il diagramma delle componenti orizzontali di spostamento dell'asta 4, in quanto sono noti gli spostamenti del punto  $C_{24}$  e  $C_4$ . Anche in questo caso parte del diagramma sarà virtuale. L'asta 4 ruota di un angolo  $\gamma$  pari a:

$$\gamma = \beta \frac{H_1}{H_1 + H_2} \quad (2.22)$$

Il diagramma delle componenti orizzontali di spostamento dell'asta 1 è costituito da un tratto unico inclinato dell'angolo  $\alpha$ , mentre per il tracciamento del diagramma relativo al tratto 3 è possibile utilizzare la conoscenza dello spostamento orizzontale della cerniera 34:

$$w_{34} = \gamma (y_4 - y_{34}) = \gamma \left( -\frac{(H_1 + H_2)}{L_1} (L_1 + L_2) + H_1 + H_2 \right) = -\gamma (H_1 + H_2) \frac{L_2}{L_1} \quad (2.23)$$

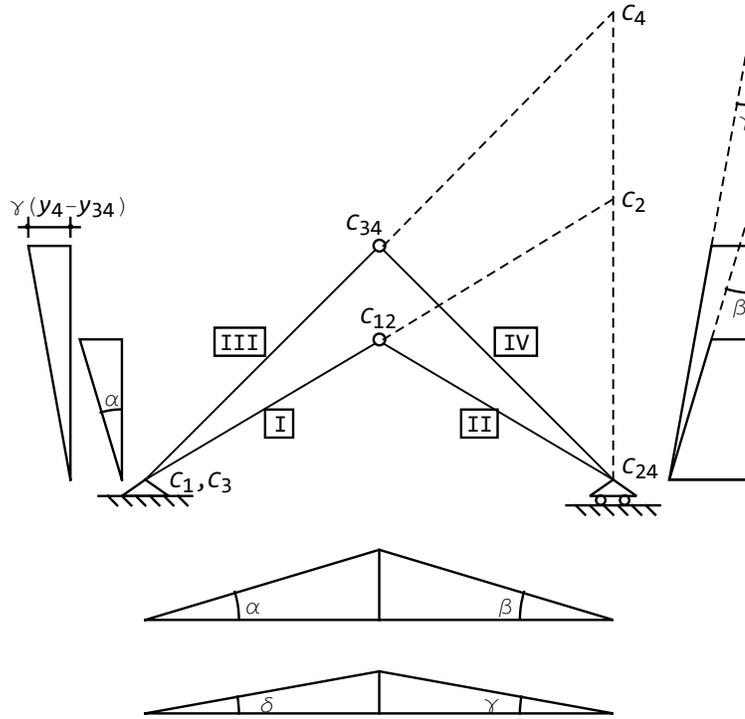


Figura 2.27: Il cinematismo per l'esempio di Figura 2.25

Di conseguenza, l'asta 4 ruota dell'angolo  $\delta$ :

$$\delta = -\gamma \frac{L_2}{L_1} \quad (2.24)$$

E' infine possibile tracciare i diagrammi delle componenti verticali di spostamenti per le due aste superiori, giungendo al diagramma di Figura 2.27

## 2.13 Un arco parabolico

Si consideri ora l'arco parabolico di Figura 2.28, di luce complessiva  $L$  e freccia  $f$ . Esso è costituito da tre tratti rigidi collegati da due cerniere in  $B$  ed in  $C$ , ed è vincolato al suolo con un bipendolo in  $A$  ed un appoggio in  $D$ . L'equazione dell'asse dell'arco è:

$$y[z] = -4 \frac{f}{L^2} z(L - z) \quad (2.25)$$

Si tratta di una struttura composta da tre tratti, quindi i centri da determinare sono i tre centri assoluti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , e i tre centri relativi  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  e  $C_{23}$ . La presenza del bipendolo in  $A$  permette di situare subito il centro  $C_1$ ,

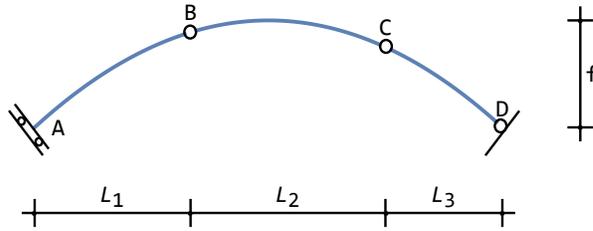


Figura 2.28: Un arco parabolico costituito da tre tratti

punto improprio della retta ortogonale al piano di scorrimento del bipendolo, mentre le cerniere in  $B$  e  $C$  permettono di situare subito il centro di rotazione relativo  $C_{12}$  e  $C_{23}$ , rispettivamente. Infine, il centro di rotazione assoluto  $C_3$  deve situarsi nell'appoggio  $D$ .

Applicando ora il primo teorema sulle catene cinematiche, possiamo affermare che il centro  $C_2$  deve appartenere alla retta che congiunge  $C_1$  e  $C_{12}$ , ed anche alla retta che congiunge  $C_{23}$  e  $C_3$ .

Per disegnare il diagramma delle componenti verticali di spostamento, si assegni arbitrariamente uno spostamento verticale  $\delta$  al bipendolo in  $A$ . Tale spostamento resta costante lungo tutto il primo tratto, fino alla cerniera  $B$ , poi occorre tracciare gli spostamenti verticali del secondo tratto. Conoscendo sia lo spostamento in corrispondenza di  $C_{12}$  ( $= \delta$ ) che lo spostamento in corrispondenza di  $C_2$  ( $= 0$ ), si può tracciare subito la retta che congiunge tali punti, proseguendola fino alla cerniera in  $C$ . Il secondo tratto ruota quindi dell'angolo:

$$\phi_2 = -\frac{\delta}{x_{3C_2} - x_{3B}} \quad (2.26)$$

e la cerniera in  $C$  subisce uno spostamento verticale pari a:

$$u_{2C} = \phi_2 (x_{3C} - x_{3C_2}) = -\frac{x_{3C} - x_{3C_2}}{x_{3C_2} - x_{3B}} \delta \quad (2.27)$$

Si può infine completare il diagramma, in quanto sul terzo tratto si conoscono gli abbassamenti in  $C$  ed in  $D$ . Il terzo tratto ruota quindi di:

$$\phi_3 = -\frac{u_{2C}}{x_{3D} - x_{3C}} = \frac{x_{3C} - x_{3C_2}}{x_{3D} - x_{3C}} \phi_2 \quad (2.28)$$

Per disegnare il diagramma delle componenti orizzontali di spostamento si consideri che il terzo tratto ruota dell'angolo  $\phi_3$ , e quindi lo spostamento orizzontale della cerniera  $C$  sarà pari a:

$$u_{3C} = -\phi_3 x_{2C} \quad (2.29)$$

Il diagramma delle componenti orizzontali di spostamento può quindi essere tracciato (retta  $HC$ ). Il secondo tratto ruota intorno a  $C_2$ , quindi il relativo

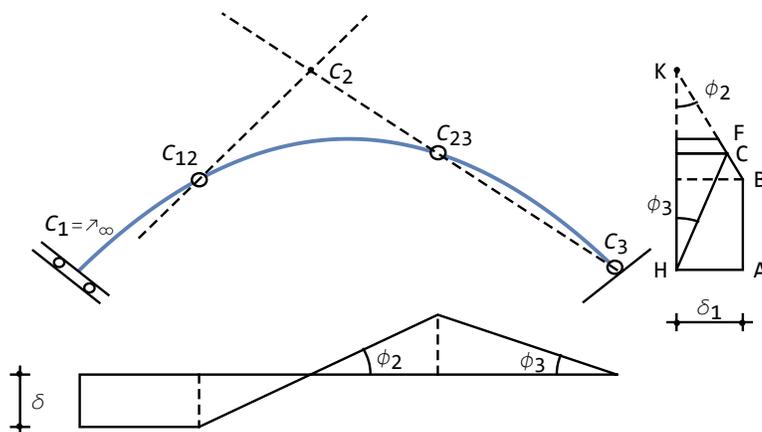


Figura 2.29: I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.28

diagramma degli spostamenti orizzontali si ottiene dalla retta  $KB$  (solo il tratto  $FB$  è reale). Lo spostamento orizzontale della cerniera in  $B$  è quindi fornito da:

$$u_{3B} = \delta_1 = -\phi_2 (x_{2C_2} - x_{2B}) = \frac{\delta}{x_{3C_2} - x_{3B}} (x_{2C_2} - x_{2B}) \quad (2.30)$$

Infine, il primo tratto non subisce rotazioni, quindi il suo diagramma sarà fornito dalla retta verticale  $BA$ . Si noti che il bipendolo subirà uno spostamento di intensità:

$$s_A = \delta \sqrt{1 + \left( \frac{x_{2C_2} - x_{2B}}{x_{3C_2} - x_{3B}} \right)^2} \quad (2.31)$$

## 2.14 Arco con bipendolo interno

Si consideri ora l'arco parabolico di Figura 2.30, di luce complessiva  $L$  e freccia  $f$ . Esso è costituito da tre tratti rigidi collegati da una cerniera in  $B$  ed un bipendolo in  $C$ , ed è vincolato al suolo con due appoggi in  $A$  e  $D$ .

Si tratta di una struttura composta da tre tratti, quindi i centri da determinare sono i tre centri assoluti  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , e i tre centri relativi  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  e  $C_{23}$ . La presenza dei due appoggi di estremità permette di situare subito i centri  $C_1$  e  $C_3$ , la cerniera in  $B$  rende possibile situare il centro relativo  $C_{12}$ , mentre il bipendolo in  $C$  situa il centro di rotazione relativo  $C_{23}$  nel punto improprio della retta definita dall'asse dei pendoli.

Applicando ora il primo teorema sulle catene cinematiche, possiamo affermare che il centro  $C_2$  deve appartenere alla retta che congiunge  $C_1$  e  $C_{12}$ , ed anche alla retta che congiunge  $C_{23}$  e  $C_3$ .

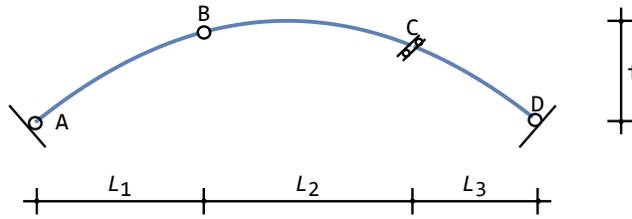


Figura 2.30: Un arco costituito da tre tratti collegati da una cerniera ed un bipendolo

Per disegnare il diagramma delle componenti verticali di spostamento, si assegni arbitrariamente una rotazione di ampiezza  $\phi$  al primo tratto, ossia intorno a  $C_1 \equiv A$ . Lo spostamento verticale di  $C_{12}$  sarà quindi pari a  $-\phi L_1$ , e questo permette il tracciamento delle componenti verticali anche per il secondo tratto, passando per il punto di nullo in corrispondenza di  $C_2$ , e proseguendo fino al bipendolo in  $C$ . Il secondo tratto ruota quindi di un angolo:

$$\phi_2 = -\phi \frac{L_1}{x_{3C_2} - x_{3B}} \quad (2.32)$$

e la faccia sinistra del bipendolo in  $C$  subisce uno spostamento verticale pari a:

$$u_{2C_{sin}} = \phi_2 (x_{3C} - x_{3C_2}) \quad (2.33)$$

Si può infine completare il diagramma, in quanto il terzo tratto dovrà ruotare dello stesso angolo di cui è ruotato il secondo, ossia dovrà essere parallelo al secondo tratto, con punto di nullo in corrispondenza dell'appoggio in  $D$ . La faccia destra del bipendolo subirà uno spostamento verticale pari a:

$$u_{2C_{des}} = -\phi_2 L_3 \quad (2.34)$$

Per disegnare il diagramma delle componenti orizzontali di spostamento si consideri che il primo tratto ruota dell'angolo  $\phi$ , e quindi lo spostamento orizzontale della cerniera  $B$  sarà pari a:

$$u_{3B} = -\phi x_{2B} \quad (2.35)$$

Il secondo tratto ruota, dell'angolo  $\phi_2$ , intorno a  $C_2$ , quindi il relativo diagramma degli spostamenti orizzontali può completarsi tracciando la retta che passa per il punto precedente e poi interseca la fondamentale in corrispondenza di  $x_{2C_2}$ . A sinistra, quindi, possono leggersi gli spostamenti orizzontali della semiluce sinistra dell'arco.

Infine, il terzo tratto ruota di  $\phi_2$ , quindi la faccia destra del bipendolo subirà uno spostamento orizzontale pari a:

$$u_{3C_{des}} = \phi_2 x_{2C} \quad (2.36)$$

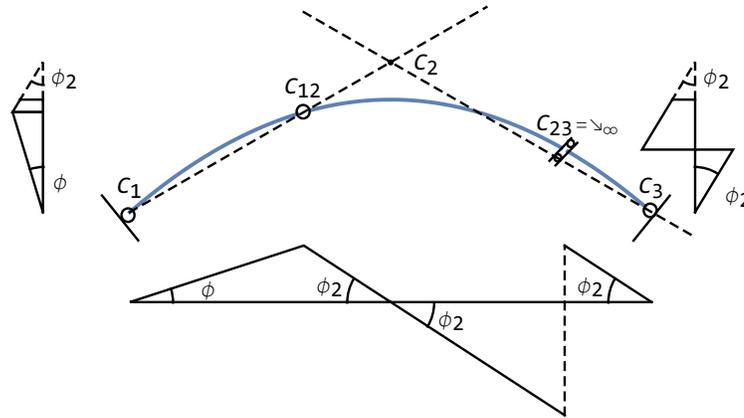


Figura 2.31: I centri di rotazione ed il relativo meccanismo per l'esempio di Figura 2.30

mentre gli spostamenti orizzontali del secondo tratto saranno rappresentati da una retta parallela a quella appena tracciata per il terzo tratto. Lo spostamento orizzontale della faccia sinistra del bipendolo sarà quindi pari a:

$$u_{3Csin} = \phi_2 (x_{2C_2} - x_{2C}) \quad (2.37)$$

## 2.15 Una maglia chiusa

Si consideri il portale di Figura 2.32, costituito da quattro tratti rigidi collegati da cerniere, e vincolati al suolo tramite un appoggio in  $A$  ed un pendolo in  $C$ . Il pendolo è inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale.

Si tratta di una struttura composta da quattro tratti, quindi i centri da determinare sono i quattro centri assoluti  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ , dei quattro tratti, i centri di rotazione relativi tra il primo tratto ed i restanti tre,  $C_{12}, C_{13}, C_{14}$ , i centri di rotazione relativi tra il secondo tratto ed i restanti due,  $C_{23}, C_{24}$  ed il centro di rotazione relativo  $C_{34}$  tra gli ultimi due tratti. La relativa tabella, quindi, intrinsecamente simmetrica, può indicarsi come:

$$C = \begin{matrix} & C_1 & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{12} & C_2 & C_{23} & C_{24} \\ C_{13} & C_{23} & C_3 & C_{34} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_4 \end{matrix} \quad (2.38)$$

I centri noti sono:

$C_1$  in corrispondenza della cerniera in  $A$

$C_{12}$  in corrispondenza della cerniera in  $B$

$C_{13}$  in corrispondenza della cerniera in  $D$

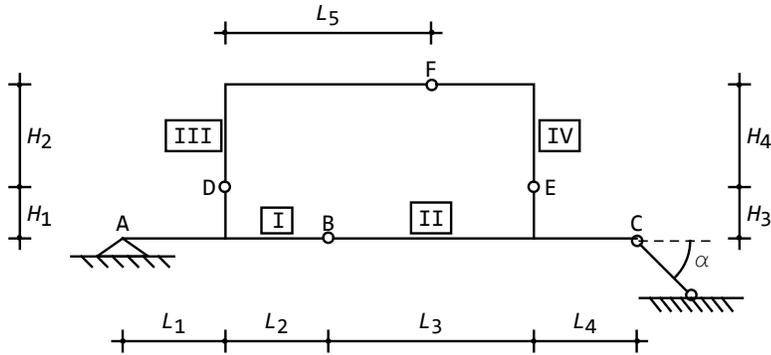


Figura 2.32: Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera

$C_{34}$  in corrispondenza della cerniera in  $F$

$C_{24}$  in corrispondenza della cerniera in  $E$

E' inoltre immediato situare il centro assoluto  $C_2$  in corrispondenza della congiungente  $C_1$  e  $C_{12}$  con l'asse del pendolo, ossia in  $C$ .

Applicando ora il secondo teorema sulle catene cinematiche ai tratti 1,2 e 4 possiamo affermare che i tre centri relativi  $C_{12}$ ,  $C_{14}$  e  $C_{24}$  devono essere allineati, mentre applicando lo stesso teorema ai tratti 1, 3 e 4 possiamo affermare che i tre centri relativi  $C_{13}$ ,  $C_{14}$  e  $C_{34}$  devono essere allineati. Quindi il centro  $C_{14}$  dovrà situarsi all'intersezione delle retta congiungente  $C_{12}$  e  $C_{24}$ , e della retta congiungente  $C_{13}$  e  $C_{34}$ .

Del tutto analogamente, applicando ora il secondo teorema sulle catene cinematiche ai tratti 1, 2 e 3 possiamo affermare che i tre centri relativi  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  e  $C_{23}$  devono essere allineati, mentre applicando lo stesso teorema ai tratti 2, 3 e 4 possiamo affermare che i tre centri relativi  $C_{23}$ ,  $C_{24}$  e  $C_{34}$  devono essere allineati. Quindi il centro  $C_{23}$  dovrà situarsi all'intersezione delle retta congiungente  $C_{12}$  e  $C_{13}$ , e della retta congiungente  $C_{24}$  e  $C_{34}$ .

Il centro assoluto di rotazione del terzo tratto può essere dedotto applicando il primo teorema delle catene cinematiche ai tratti 1 e 3, ed ai tratti 2 e 3.  $C_3$  dovrà quindi situarsi all'intersezione della retta congiungente  $C_1$  e  $C_{13}$  e della retta congiungente  $C_2$  e  $C_{23}$

Infine, il centro assoluto di rotazione del quarto tratto può essere dedotto applicando il primo teorema delle catene cinematiche ai tratti 1 e 4, ed ai tratti 2 e 4.  $C_4$  dovrà quindi situarsi all'intersezione della retta congiungente  $C_1$  e  $C_{14}$  e della retta congiungente  $C_2$  e  $C_{24}$  :

I dieci centri sono riportati in Figura 2.33, insieme alle rette necessarie per la loro individuazione. Tuttavia, al fine del tracciamento del diagramma degli spostamenti, non tutti i centri devono essere necessariamente dedotti.

Assegnato il parametro lagrangiano, ossia scelto arbitrariamente l'angolo  $\phi$  di cui ruota il primo tratto intorno ad un asse ortogonale al piano e passante per

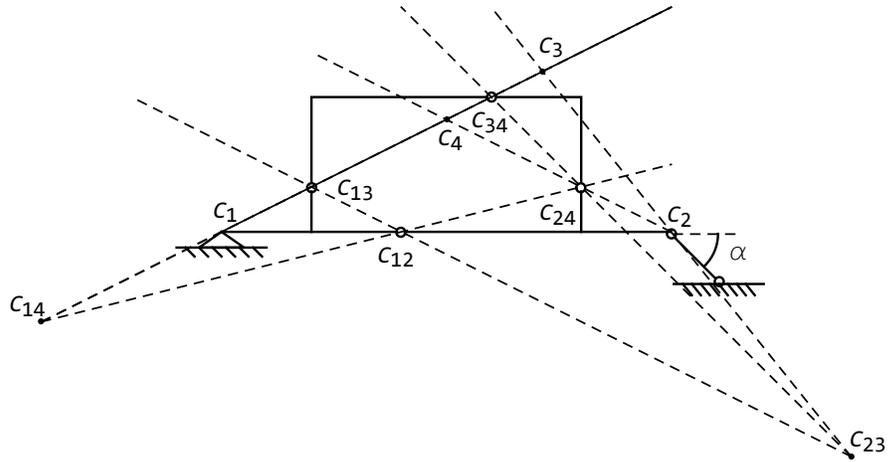


Figura 2.33: I dieci centri relativi al telaio a quattro tratti di Figura 2.32

$C_1$ , si può tracciare il diagramma delle componenti verticali di spostamento per il primo tratto: esso è costituito da un segmento rettilineo, inclinato di  $\phi$  rispetto alla fondamentale. In corrispondenza del centro  $C_{12}$  si ha lo spostamento  $u_{2B} = -\phi(L_1 + L_2)$  che fornisce uno dei due valori necessari a disegnare il diagramma degli spostamenti verticali lungo il secondo tratto. L'altro valore è ovviamente il valore nullo in corrispondenza del centro  $C_2$ . Nel segue che il secondo tratto ruoterà di un angolo:

$$\phi_2 = -\phi \frac{L_1 + L_2}{L_3 + L_4} \quad (2.39)$$

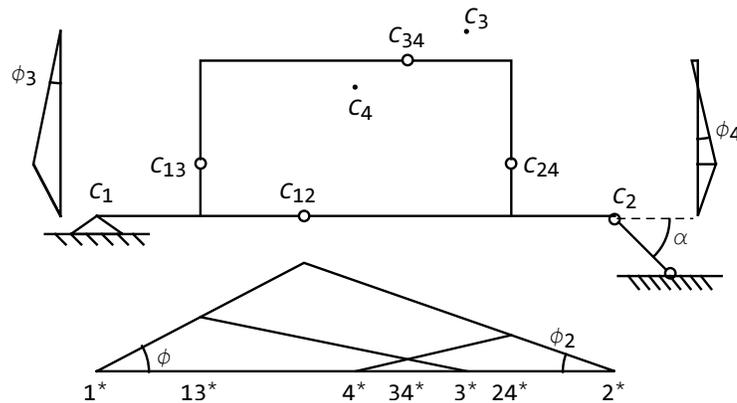


Figura 2.34: I diagrammi degli spostamenti per il telaio di Figura 2.32

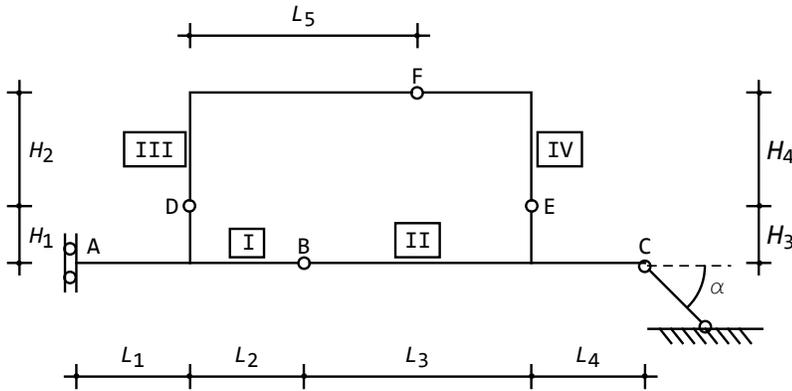


Figura 2.35: Un telaio zoppo costituito da due tratti rigidi connessi da una cerniera

Per ottenere le componenti verticali di spostamento del terzo tratto, si consideri che in corrispondenza del centro  $C_{13}$  (cerniera  $D$ ) si ha un valore noto, e che tali componenti devono annullarsi in corrispondenza del punto  $C_3$ . Basta congiungere questi due valori e si ottiene il richiesto diagramma. Analogamente, nel punto  $C_{24}$  (cerniera  $E$ ) si conosce un punto del diagramma relativo al tratto quarto, mentre l'altro punto è il valore nullo in corrispondenza di  $C_4$ . Ciò basta per tracciare l'intero diagramma.

Per disegnare il diagramma delle componenti orizzontali di spostamento si consideri che per il primo tratto si ha il valore nullo in  $C_1$  e l'inclinazione, pari ad  $\phi$ , e questo permette il tracciamento immediato del diagramma, da zero fino a  $u_{3D} = -\phi H_1$ . Poichè in  $D$  è situato il centro di rotazione relativo  $C_{13}$ , questo valore è valido anche per il terzo tratto, e poichè in corrispondenza di  $C_3$  gli spostamenti devono annullarsi, si ha la possibilità di tracciare l'intero diagramma relativo al terzo tratto.

Il secondo tratto ruota dell'angolo  $\phi_2$  intorno al punto  $C$ . Ciò permette di tracciare le componenti orizzontali di spostamento giungendo nella cerniera  $E$  con uno spostamento pari a  $u_{3E} = \phi_2 H_3$ . Da questo valore si può poi tracciare il diagramma rappresentativo del quarto tratto, utilizzando il punto di nullo in corrispondenza di  $C_4$ .

## 2.16 Una maglia chiusa con bipendolo

Lo stesso telaio dell'esercizio precedente presenti un bipendolo ad asse di scorrimento verticale in  $A$ , invece dell'appoggio:

I centri noti sono:

$C_1$  in corrispondenza del punto improprio della retta orizzontale

$C_{12}$  in corrispondenza della cerniera in  $B$

$C_{13}$  in corrispondenza della cerniera in  $D$

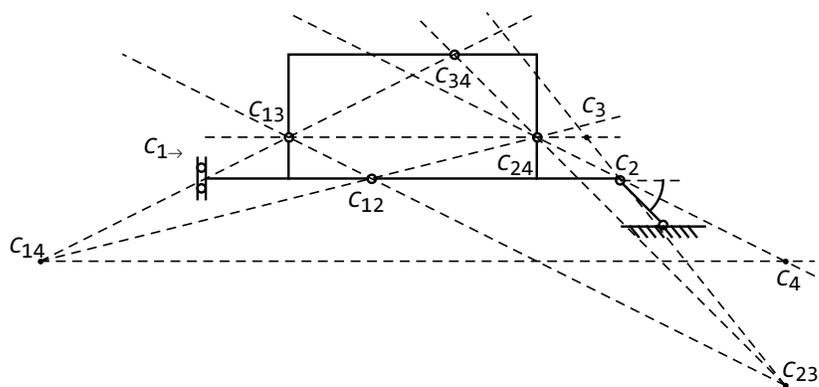


Figura 2.36: I dieci centri relativi al telaio a quattro tratti di Figura 2.35

$C_{34}$  in corrispondenza della cerniera in  $F$

$C_{24}$  in corrispondenza della cerniera in  $E$

E' inoltre immediato situare il centro assoluto  $C_2$  in corrispondenza della congiungente  $C_1$  e  $C_{12}$  con l'asse del pendolo, ossia in  $C$ .

Applicando ora il secondo teorema sulle catene cinematiche ai tratti 1,2 e 4 possiamo affermare che i tre centri relativi  $C_{12}$ ,  $C_{14}$  e  $C_{24}$  devono essere allineati, mentre applicando lo stesso teorema ai tratti 1, 3 e 4 possiamo affermare che i tre centri relativi  $C_{13}$ ,  $C_{14}$  e  $C_{34}$  devono essere allineati. Quindi il centro  $C_{14}$  dovrà situarsi all'intersezione delle rette congiungente  $C_{12}$  e  $C_{24}$ , e della retta congiungente  $C_{13}$  e  $C_{34}$ .

Del tutto analogamente, applicando ora il secondo teorema sulle catene cinematiche ai tratti 1, 2 e 3 possiamo affermare che i tre centri relativi  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  e  $C_{23}$  devono essere allineati, mentre applicando lo stesso teorema ai tratti 2, 3 e 4 possiamo affermare che i tre centri relativi  $C_{23}$ ,  $C_{24}$  e  $C_{34}$  devono essere allineati. Quindi il centro  $C_{23}$  dovrà situarsi all'intersezione delle rette congiungente  $C_{12}$  e  $C_{13}$ , e della retta congiungente  $C_{24}$  e  $C_{34}$ .

Il centro assoluto di rotazione del terzo tratto può essere dedotto applicando il primo teorema delle catene cinematiche ai tratti 1 e 3, ed ai tratti 2 e 3.  $C_3$  dovrà quindi situarsi all'intersezione della retta congiungente  $C_1$  e  $C_{13}$  (ossia dell'orizzontale per  $C_{13}$ ) e della retta congiungente  $C_2$  e  $C_{23}$ .

Infine, il centro assoluto di rotazione del quarto tratto può essere dedotto applicando il primo teorema delle catene cinematiche ai tratti 1 e 4, ed ai tratti 2 e 4.  $C_4$  dovrà quindi situarsi all'intersezione della retta congiungente  $C_1$  e  $C_{14}$  (ossia dell'orizzontale per  $C_{14}$ ) e della retta congiungente  $C_2$  e  $C_{24}$ .

I dieci centri sono riportati in Figura 2.36, insieme alle rette necessarie per la loro individuazione. Tuttavia, al fine del tracciamento del diagramma degli spostamenti, non tutti i centri devono essere necessariamente dedotti.

Assegnato il parametro lagrangiano, ossia scelto arbitrariamente lo spostamento  $\delta$  del primo tratto (si noti che lo si è scelto verso l'alto, quindi negativo),

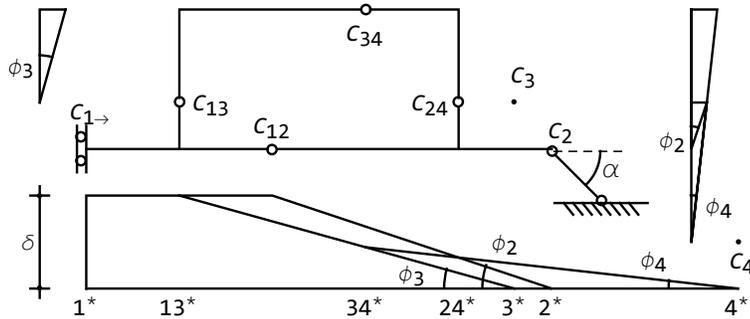


Figura 2.37: I diagrammi di spostamento per il telaio di Figura 2.35

si può tracciare il diagramma delle componenti verticali di spostamento per il primo tratto: esso è costituito da un segmento orizzontale, fino al centro  $C_{12}$ . Poi, lungo il secondo tratto, il diagramma scende fino ad annullarsi in  $C_2$ . Ne segue che il secondo tratto ruoterà di un angolo:

$$\phi_2 = \frac{\delta}{L_3 + L_4} \quad (2.40)$$

Per ottenere le componenti verticali di spostamento del terzo tratto, si consideri che in corrispondenza del centro  $C_{13}$  (cerniera  $D$ ) si ha lo spostamento  $\delta$ , e che tali componenti devono annullarsi in corrispondenza del punto  $C_3$ . Basta congiungere questi due valori e si ottiene il richiesto diagramma. Il terzo tratto ruota quindi dell'angolo:

$$\phi_3 = \frac{\delta}{x_{3C_3} - x_{3D}} \quad (2.41)$$

Analogamente, nel punto  $C_{24}$  (cerniera  $E$ ) si conosce un punto del diagramma relativo al tratto quarto, mentre l'altro punto è il valore nullo in corrispondenza di  $C_4$ . Ciò basta per tracciare l'intero diagramma. Il quarto tratto subirà quindi una rotazione pari a:

$$\phi_4 = \phi_3 \frac{x_{3C_3} - x_{3C_{34}}}{x_{3C_4} - x_{3C_{34}}} \quad (2.42)$$

Per disegnare il diagramma delle componenti orizzontali di spostamento si consideri che il primo tratto non subisce spostamenti orizzontali, mentre il terzo tratto ruota, intorno a  $C_{13} \equiv D$  di un angolo  $\phi_3$ . Il traverso superiore quindi subisce lo spostamento orizzontale:

$$u_{3F} = \phi_3 H_2 \quad (2.43)$$

Il secondo tratto ruota dell'angolo  $\phi_2$  intorno al punto  $C$ . Ciò permette di tracciare le componenti orizzontali di spostamenti giungendo nella cerniera  $E$  con uno spostamento pari a  $u_{3E} = \phi_2 H_3$ . Da questo valore si può poi tracciare il diagramma rappresentativo del quarto tratto, utilizzando il punto di nullo in corrispondenza di  $C_4$ . Lo spostamento finale dovrà essere pari a  $u_{3F}$

## 2.17 Un portale poggiante su trave appoggiata

Si consideri ora il sistema di Figura 2.38, costituito da quattro tratti rigidi connessi tramite quattro cerniere, e vincolati al suolo da un appoggio ed un carrello.

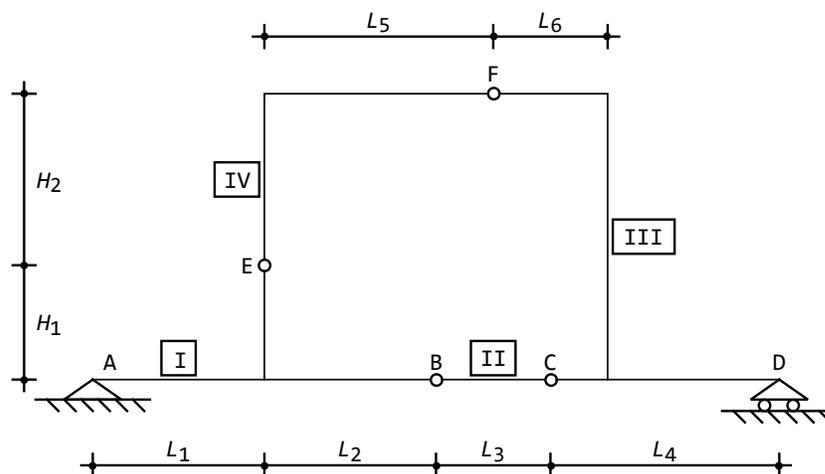


Figura 2.38: Un portale a quattro cerniere poggiante su una trave appoggiata

I centri banalmente noti sono  $C_1$ , in corrispondenza dell'appoggio, ed i centri di rotazione relativa  $C_{12}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{34}$  e  $C_{14}$  in corrispondenza delle quattro cerniere. Inoltre, il centro  $C_3$  di rotazione assoluto del tratto 3 deve appartenere alla retta verticale passante per il carrello. Servono almeno altri due centri, per cui occorre applicare i teoremi delle catene cinematiche.

Per il secondo teorema delle catene cinematiche, applicato ai tratti 1, 2 e 3, il centro  $C_{13}$  deve appartenere alla retta passante per i centri  $C_{12}$  e  $C_{23}$ , entrambi noti, quindi deve giacere sull'orizzontale passante per l'appoggio. Inoltre, possiamo applicare lo stesso teorema utilizzando i tratti 1, 3, e 4, per cui il centro  $C_{13}$  deve anche appartenere alla retta passante per i centri  $C_{34}$  e  $C_{14}$ , anch'essi noti. All'intersezione di queste due rette si troverà  $C_{13}$ .

Conosciuto  $C_{13}$  può applicarsi il primo teorema delle catene cinematiche, utilizzando i tratti 1 e 3, e quindi  $C_3$  dovrà essere situato sulla retta passante per  $C_1$  e  $C_{13}$ . Ne segue che esso sarà situato in corrispondenza del carrello.

La conoscenza di questi sette centri è sufficiente per tracciare i cinematismi, mentre la localizzazione degli altri centri può servire da utile verifica. Il centro  $C_4$  può ad esempio calcolarsi applicando il primo teorema ai tratti 1 e 4, e quindi imponendo che esso si trovi sulla retta congiungente i centri  $C_1$  e  $C_{14}$ , ed ai tratti 3 e 4, imponendo quindi che esso appartenga anche alla retta congiungente  $C_{34}$  e  $C_3$ .

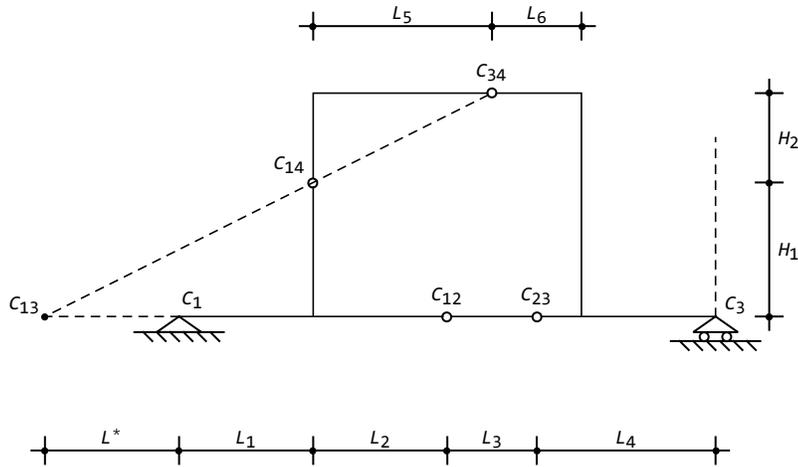


Figura 2.39: I centri di rotazione necessari per il tracciamento delle deformate

Per il tracciamento del cinematismo (cfr. Figura 2.40), si inizi a tracciare il diagramma dello spostamento verticale del tratto 1, ruotandolo di un angolo arbitrario  $\phi_1$ , scelto quindi come coordinata lagrangiana. La cerniera  $C_{12}$  subisce un innalzamento pari ad  $\phi_1 (L_1 + L_2)$ , ma il tracciamento della deformata sul secondo tratto è reso impossibile dalla mancata conoscenza di  $C_2$ . Si esamini allora il terzo tratto: per esso si conosce subito lo spostamento in corrispondenza del carrello in  $C_3$ , e si conosce anche lo spostamento (virtuale) del punto  $C_{13}$ .

Basta, per ottenerlo, proseguire virtualmente la deformata del primo tratto fino ad intersecare la verticale per  $C_{13}$  (deformata virtuale, riportata in tratteggio), ottenendo lo spostamento pari ad  $\phi_1 x_{3C_{13}}$ . Basta collegare questo valore col punto di nullo in  $C_3$  e si ottiene la deformata relativa al terzo tratto, tenendo conto che una parte di questo segmento è virtuale, ed è quindi riportato in tratteggio. A questo punto è possibile completare il diagramma dello spostamento lungo il tratto 2, in quanto si conosce sia lo spostamento della cerniera in  $C_{12}$  che lo spostamento in  $C_{23}$ .

L'angolo  $\phi_3$  di cui ruota il tratto 3 è fornito da:

$$\phi_3 = \phi_1 \frac{x_{3C_{13}}}{x_{3C_{13}} + L_1 + L_2 + L_3 + L_4} \quad (2.44)$$

e la conoscenza di  $\phi_3$  permette il tracciamento immediato del diagramma degli spostamenti orizzontali sul tratto verticale a destra: da zero, in corrispondenza del punto inferiore, a  $\phi_3 (H_1 + H_2)$  in sommità.

Per il tracciamento del diagramma degli spostamenti verticali sul tratto orizzontale superiore, si consideri che il tratto 3 ruota dell'angolo  $\phi_3$ , ed il suo abbassamento si annulla in corrispondenza della verticale per  $C_3$ . Quindi il diagramma può proseguire fino a  $C_{34}$ . Lungo il tratto 4, si consideri che lo spo-

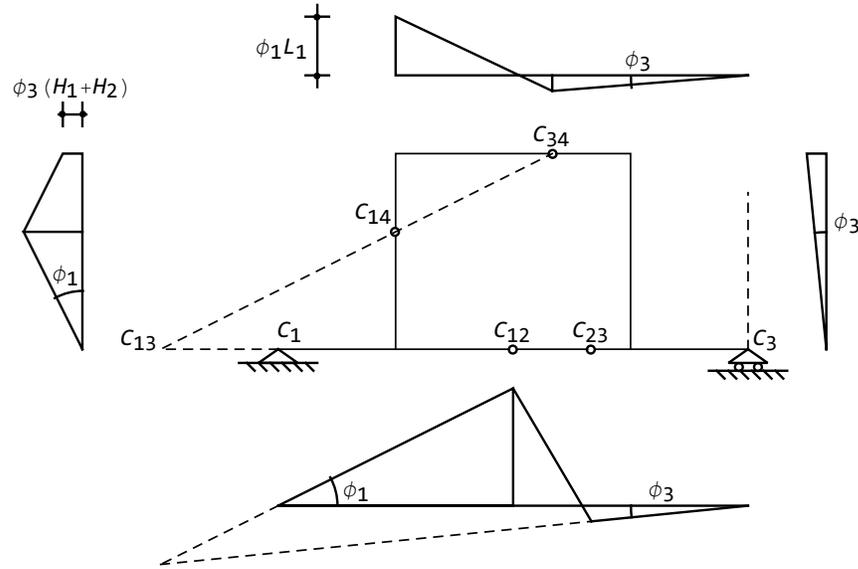


Figura 2.40: Il cinematismo della struttura di Figura 2.38

stamento del tratto verticale di sinistra è pari a  $-\phi_1 L_1$ , e quindi gli spostamenti verticali possono completarsi lungo tutto il tratto orizzontale superiore.

Infine, il diagramma degli spostamenti orizzontali sul tratto verticale sinistro può tracciarsi constatando che il tratto 1 ruota dell'angolo  $\phi_1$ , e che lo spostamento in sommità vale  $\phi_3 (H_1 + H_2)$ .

## 2.18 Una maglia con doppio bipendolo interno

Si consideri ora il sistema di Figura 2.41, costituito da quattro tratti rigidi connessi tramite tre cerniere ed un doppio bipendolo, e vincolati al suolo da un appoggio ed un carrello. Esiste inoltre un pendolo che collega il primo ed il quarto tratto.

Il computo dei vincoli fornisce  $3t - s = 12 - 11 = 1$ , e la struttura risulta labile. I centri banalmente noti sono  $C_1$ , in corrispondenza dell'appoggio, ed i centri di rotazione relativa  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{24}$  in corrispondenza delle tre cerniere, mentre il centro relativo  $C_{34}$  è improprio. Il centro  $C_2$  è immediatamente situabile in corrispondenza del carrello in  $C$ , in quanto dovrà situarsi sulla congiungente  $C_1$  e  $C_{12}$ , e sulla retta verticale passante per il carrello.

Per il secondo teorema delle catene cinematiche, applicato ai tratti 1, 2 e 4, il centro  $C_{14}$  deve appartenere alla retta passante per i centri  $C_{12}$  e  $C_{24}$ , entrambi noti. Inoltre, il centro di rotazione relativo  $C_{14}$  dovrà situarsi sull'asse del pendolo  $HK$ , che unisce i tratti 1 e 4.

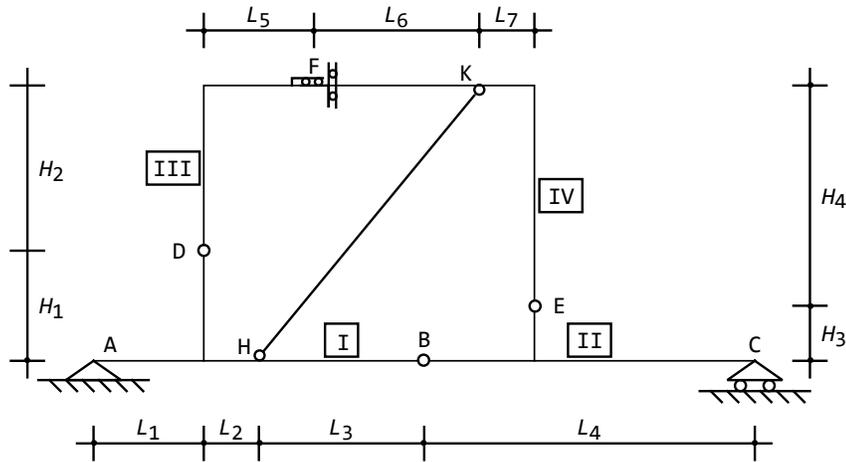


Figura 2.41: Un portale a tre cerniere e doppio bipendolo su una trave appoggiata

Il centro (improprio)  $C_{34}$  può calcolarsi applicando il secondo teorema delle catene cinematiche ai tre tratti 1, 3 e 4, e quindi imponendo l'allineamento dei centri  $C_{13}$ ,  $C_{14}$  e  $C_{34}$ : ne risulta che  $C_{34}$  deve situarsi all'infinito della retta congiungente  $C_{13}$  e  $C_{14}$ .

Il centro  $C_{23}$  deve trovarsi, applicando il secondo teorema ai tratti 1, 2 e 3, allineato con i centri  $C_{12}$  e  $C_{13}$ , ed applicando lo stesso teorema ai tratti 2, 3 e 4,  $C_{23}$  deve risultare allineato con  $C_{24}$  e  $C_{34}$ . Ciò significa, per l'improprietà di  $C_{34}$ , che esso deve situarsi sulla retta passante per  $C_{24}$  e parallela alla retta congiungente  $C_{13}$  e  $C_{14}$ .

Il centro assoluto  $C_3$  si deduce applicando il primo teorema delle catene cinematiche ai tratti 1 e 3 (e quindi il centro deve essere sulla retta che congiunge  $C_1$  e  $C_{13}$ ) ed ai tratti 2 e 3 (e quindi il centro deve essere sulla retta che congiunge  $C_2$  e  $C_{23}$ ).

Infine, il centro assoluto  $C_4$  si deduce applicando il primo teorema delle catene cinematiche ai tratti 1 e 4 (e quindi il centro deve essere sulla retta che congiunge  $C_1$  e  $C_{14}$ ) ed ai tratti 2 e 4 (e quindi il centro deve essere sulla retta che congiunge  $C_2$  e  $C_{24}$ ).

In definitiva, si ottengono i centri riportati in Figura 2.42.

Per il tracciamento del cinematismo (cfr. Figura 2.43), si inizi a tracciare il diagramma dello spostamento verticale del tratto 1, ruotandolo di un angolo arbitrario  $\phi$ , scelto quindi come coordinata lagrangiana. La cerniera  $C_{12}$  subisce un innalzamento pari ad  $\phi(L_1 + L_2 + L_3)$ , e da questo valore si può iniziare a tracciare il diagramma relativo al secondo tratto; poichè lo spostamento deve annullarsi in corrispondenza del carrello in  $C$ , si può completare anche il diagramma relativo al tratto 2.

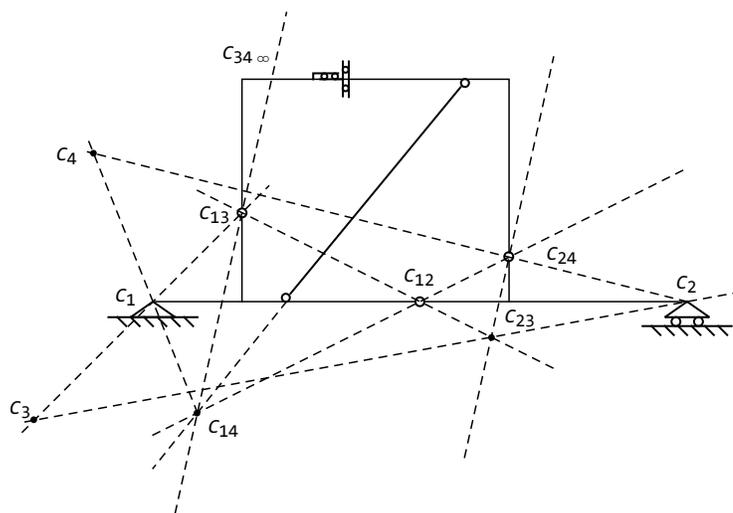


Figura 2.42: I centri di rotazione per il tracciamento delle deformate

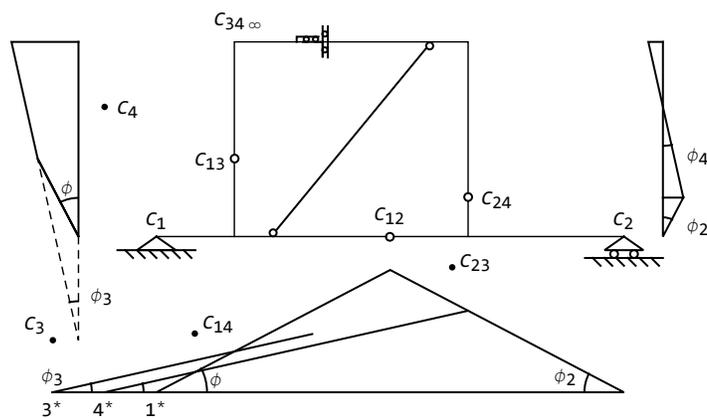


Figura 2.43: Il cinematismo della struttura di Figura 2.41

L'angolo  $\phi_2$  di cui ruota il tratto 2 è quindi fornito da:

$$\phi_2 = -\phi \frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_4} \quad (2.45)$$

Per il tracciamento dei diagrammi relativi al traverso superiore, si consideri che si conosce lo spostamento della cerniera  $D$  (ossia del centro  $C_{13}$ ) e lo spostamento (nullo) del punto  $C_3$ . Ciò basta a tracciare il diagramma del tratto 3. Analogamente, si conosce lo spostamento della cerniera in  $E$  (ossia di  $C_{24}$ ) e lo spostamento (nullo) di  $C_4$ , e questo è sufficiente a tracciare il diagramma per l'intero tratto 4. Si noti il parallelismo tra le due rette, a conferma dell'esistenza di un doppio bipendolo in  $F$ . Si avrà allora l'angolo di rotazione dei tratti 3 e 4:

$$\phi_3 = \phi \frac{L_1}{L_1 - z_{C_3}} = -\phi_2 \frac{H_3}{x_{2C_4} - H_3} \quad (2.46)$$

Per il tracciamento del diagramma degli spostamenti orizzontali, si consideri che il primo tratto ruota di un angolo  $\phi$ , e che quindi la cerniera in  $D$  subisce uno spostamento pari a  $-\phi H_1$ . Poichè si conosce anche lo spostamento del punto  $C_3$ , si può tracciare il diagramma relativo al tratto 3. Analoghe considerazioni possono farsi per il tratto 2 (che ruota di  $\phi_2$ ) e per il tratto 4, ottenendo il diagramma riportato in Figura.

Dal diagramma sono anche chiaramente visibili gli spostamenti relativi verticali ed orizzontali tra le due facce del doppio bipendolo.

2.18. UNA MAGLIA CON DOPPIO BIPENDOLO INTERNO

## Capitolo 3

# Analisi statica Metodo analitico

Si consideri una struttura piana  $S$ , costituita da  $t$  tratti rigidi, e si immagini di rimuovere tutti i vincoli, sia interni che esterni, sostituendo ad essi le opportune reazioni incognite. Ci si è ricondotti ad un insieme di  $t$  tratti rigidi, sconnessi, soggetti ai carichi esterni, noti, ed alle reazioni incognite, e sia  $s$  il numero di tali reazioni.

Per ciascun tratto si possono scrivere tre equazioni di equilibrio, due di traslazione lungo i due assi coordinati  $X_2$  ed  $X_3$ , ed una di rotazione intorno ad un asse  $X_1$  ortogonale al piano  $(Z, Y)$  e passante per un punto arbitrario del piano, detto *polo*. Simbolicamente si possono quindi scrivere le  $3t$  equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}\sum F_2^{(k)} &= 0 \\ \sum F_3^{(k)} &= 0 \\ \sum M^{(k)} &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

Alternativamente, la prima equazioni di equilibrio di traslazione può essere sostituita da una seconda equazione di equilibrio di rotazione intorno ad un secondo polo  $O_2$  che non sia allineato verticalmente con il primo polo  $O_1$ , oppure la seconda equazione di equilibrio di traslazione può essere sostituita da una seconda equazione di equilibrio di rotazione intorno ad un secondo polo che non sia allineato orizzontalmente con il primo polo. Ancora, ambedue le equazioni di traslazione possono sostituirsi con due equazioni di rotazione, scegliendo un secondo e terzo polo in modo tale che la terna dei poli  $O_1, O_2, O_3$  sia non allineata.

Comunque sia, è possibile scrivere solo tre equazioni indipendenti di equilibrio per ciascun tratto, e quindi si giunge infine a  $3t$  equazioni nelle  $s$  incognite reattive. Matricialmente si ha:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\tag{3.2}$$

---

La matrice  $\mathbf{A}$  si dice *matrice di equilibrio*, è rettangolare, con  $3t$  righe ed  $s$  colonne, e dipende solo dalla geometria della struttura  $S$ . Viceversa, il vettore dei  $3t$  termini noti  $\mathbf{b}$  dipende dai carichi applicati, ed è nullo se la struttura non è caricata, nel qual caso le equazioni di equilibrio risultano omogenee. Il vettore  $\mathbf{x}$  contiene le  $s$  incognite reattive.

Sia  $r$  il rango della matrice di equilibrio  $\mathbf{A}$ , e sia  $r^*$  il rango della sua orlata, ossia della matrice  $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ , e si ipotizzi, in questa fase, che il rango  $r$  sia massimo, rimandando ai successivi Capitoli lo studio del caso in cui ciò non avvenga. Possono verificarsi tre condizioni:

**Caso I:**  $3t - s > 0$  Esistono più equazioni che incognite, la struttura si dice *labile*, ed  $l = 3t - s$  è il corrispondente *grado di labilità*. Il rango  $r$  della matrice di equilibrio è pari ad  $s$ , ed in genere non è garantito l'equilibrio, e la struttura ammette cinematismi rigidi che possono essere tracciati coi metodi già descritti nei Capitolo precedenti. Se tuttavia le forze applicate sono disposte in modo tale che il rango  $r^*$  dell'orlata sia anch'esso pari ad  $s$ , allora si ha possibilità di equilibrio: la struttura  $S$  è in realtà equilibrata per particolari condizioni di carico.

**Caso II:**  $3t - s = 0$  Il numero delle equazioni è pari al numero delle incognite, la matrice di equilibrio è quadrata, e poichè si è ipotizzato che il rango della matrice sia massimo, sarà sicuramente possibile risolvere le equazioni di equilibrio, a fornire l'unica soluzione equilibrata. E' questo il caso delle strutture *isostatiche*, in cui il problema statico può essere risolto attraverso la scrittura delle sole equazioni di equilibrio:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (3.3)$$

**Caso III:**  $3t - s < 0$  Esistono più incognite che equazioni di equilibrio, il rango della matrice è pari a  $3t$ , la struttura è sicuramente equilibrata, e la soluzione delle (3.2) è definita a meno di  $i = s - 3t$  parametri, che possono essere  $i$  reazioni arbitrariamente scelte. E' questo il caso delle strutture *iperstatiche*, ed  $i = s - 3t$  è il relativo grado di iperstaticità. In questo caso, i valori delle reazioni non possono essere calcolati con l'ausilio delle sole equazioni di equilibrio, ed occorrerà affiancare ad esse altre equazioni (di congruenza).

Schematicamente, e nell'ipotesi che  $\mathbf{A}$  abbia rango massimo, si ha:

$$\text{Struttura } S \text{ labile} \longrightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\text{Struttura } S \text{ isostatica} \longrightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\text{Struttura } S \text{ iperstatica} \rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

### 3.1 Telaio zoppo non caricato

La struttura di Figura 3.1 è già stata studiata da un punto di vista cinematico, giungendo alla conclusione che essa era cinematicamente determinata.

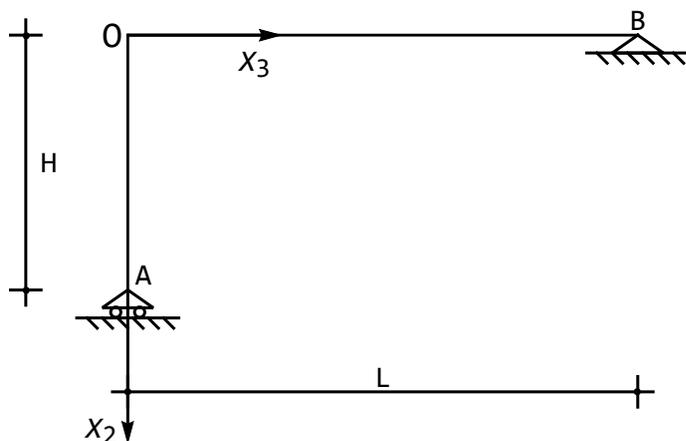


Figura 3.1: Un portale zoppo

Si sostituisca al carrello in  $A$  la sua reazione verticale incognita  $R_{Av}$ , ed all'appoggio in  $B$  la reazione verticale orizzontale  $R_{Bw}$  e la reazione verticale  $R_{Bv}$ . Poichè la struttura è costituita da un solo tratto, è possibile scrivere tre equazioni di equilibrio, e la struttura risulta isostatica.

Le tre equazioni di equilibrio possono essere ad esempio le due equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale, e l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno al polo  $O$ . Dalla Figura 3.2 si trae:

$$\begin{aligned} R_{Bh} &= 0 \\ R_{Av} + R_{Bv} &= 0 \\ -R_{Bv}L &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

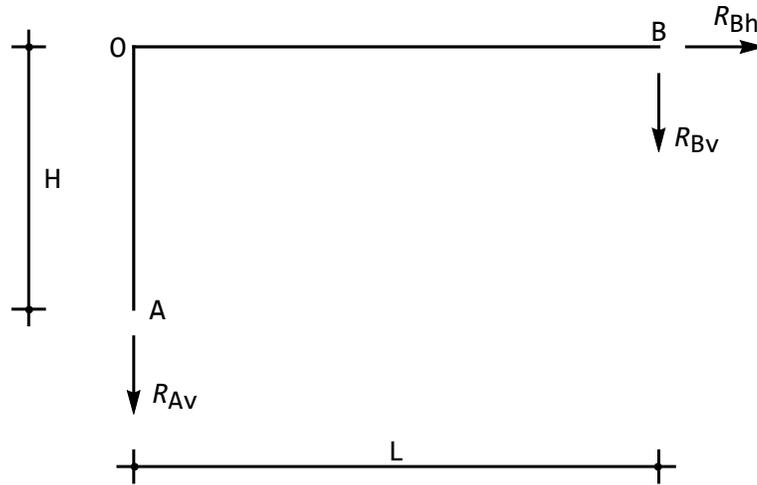


Figura 3.2: Il diagramma delle reazioni per l'esempio di Figura 3.1

che matricialmente si scrivono:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Av} \\ R_{Bh} \\ R_{Bv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Il rango della matrice di equilibrio è pari a 3, e l'unica soluzione delle equazioni è quella banale. Si noti che la matrice di equilibrio  $\mathbf{A}$  è la trasposta della matrice cinematica ottenuta nella (1.11) del Capitolo 1. Ciò esprime la cosiddetta dualità statico-cinematica, ed è conseguenza dell'aver utilizzato lo stesso polo  $O$  per ambedue le analisi.

## 3.2 Telaio zoppo con carico distribuito

La stessa struttura dell'esercizio precedente sia ora soggetta ad una stesa di carico uniformemente distribuito lungo l'asta orizzontale, di intensità  $q$  (cfr. Figura 3.3). Poichè l'asta su cui agisce il carico è rigida, il carico stesso può essere sostituito da una corrispondente forza concentrata, di intensità pari all'integrale del carico, ed agente nel baricentro del carico.

Nel caso in esame:

$$F = \int_0^L q \, dz = qL \quad (3.6)$$

ed il baricentro del rettangolo è ovviamente situato in  $L/2$ . Ai fini della scrittura delle equazioni di equilibrio, si può sempre sostituire il carico distribuito con la corrispondente forza concentrata, come riportato in Figura 3.4

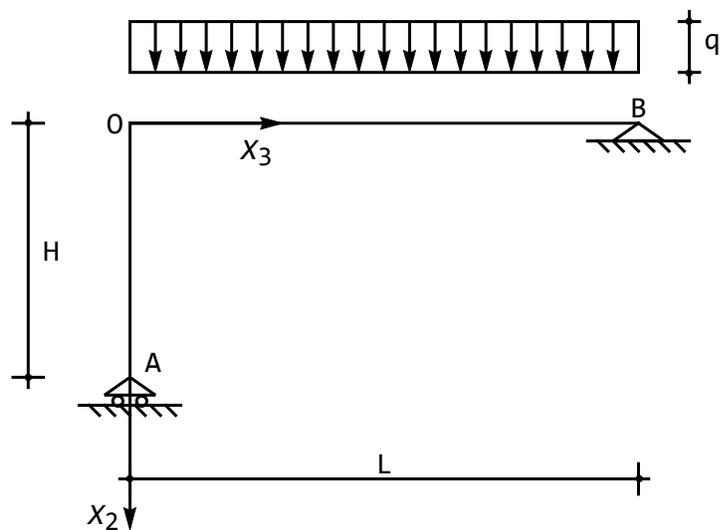


Figura 3.3: Il telaio zoppo di Figura 3.1, caricato sul traverso da un carico  $q$  uniformemente distribuito

Le equazioni di equilibrio si scrivono quindi:

$$\begin{aligned} R_{Bh} &= 0 \\ R_{Av} + R_{Bv} + qL &= 0 \\ -R_{Bv}L - qL\frac{L}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

che matricialmente si scrivono:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Av} \\ R_{Bh} \\ R_{Bv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -qL \\ \frac{qL^2}{2} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} R_{Bh} &= 0 \\ R_{Av} = R_{Bv} &= -\frac{qL}{2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Il carico verticale si distribuisce equamente tra i due vincoli in  $A$  e  $B$ , dando luogo a due reazioni dirette verso l'alto.

### 3.3 Portale a tre cerniere

Si voglia adesso eseguire l'analisi statica per il telaio di Figura 3.5, costituito da due tratti rigidi collegati tra loro da una cerniera, e vincolati al suolo tramite

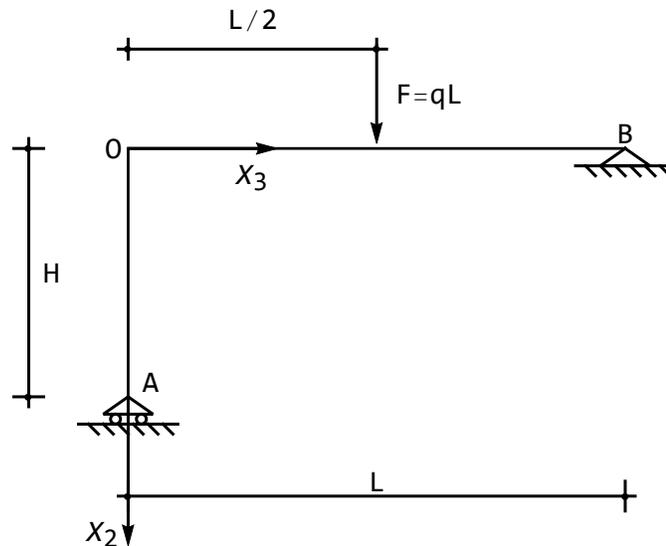


Figura 3.4: Lo stesso telaio della Figura 3.3, con applicata la risultante  $F$  del carico

due appoggi. Poichè per ogni tratto possono scriversi tre equazioni di equilibrio, si possono scrivere, in complesso, sei equazioni di equilibrio.

Corrispondentemente, eliminando i vincoli, sia esterni che interni, e sostituendo ad essi le rispettive reazioni, si giunge allo schema di Figura 3.6, in cui sono evidenziate le sei incognite statiche, ossia le reazioni orizzontali e verticali dei due appoggi, lo sforzo normale e lo sforzo di taglio nella cerniera. Si ha così una uguaglianza tra il numero di incognite ed il numero di equazioni di equilibrio,  $3t - s = 0$ , e la struttura è potenzialmente isostatica.

Scegliendo come poli per la scrittura delle equazioni di equilibrio alla rotazione il punto  $A$  ed il punto  $C$ , rispettivamente per il primo ed il secondo tratto, si potranno scrivere le equazioni:

$$\begin{aligned}
 R_{Ah} + F + N_B &= 0 \\
 R_{Av} + T_B &= 0 \\
 -FH_1 - N_B H_1 - T_B L_1 &= 0 \\
 -N_B + R_{Ch} &= 0 \\
 -T_B + qL_2 + R_{Cv} &= 0 \\
 N_B H_2 - T_B L_2 + \frac{qL_2^2}{2} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

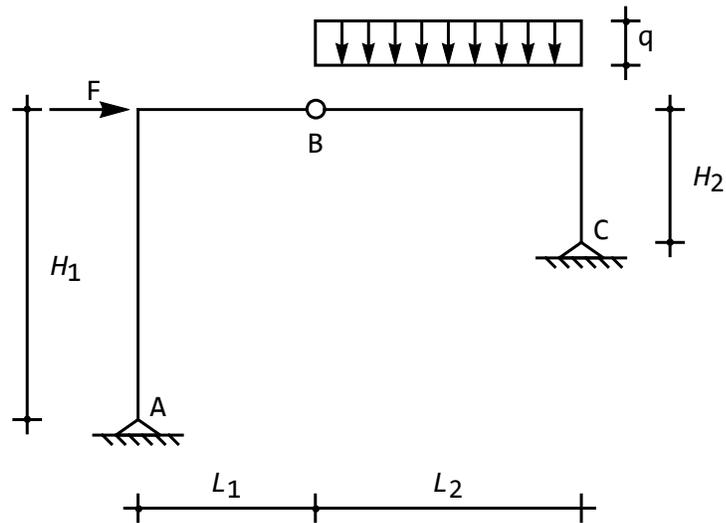


Figura 3.5: Un portale a tre cerniere

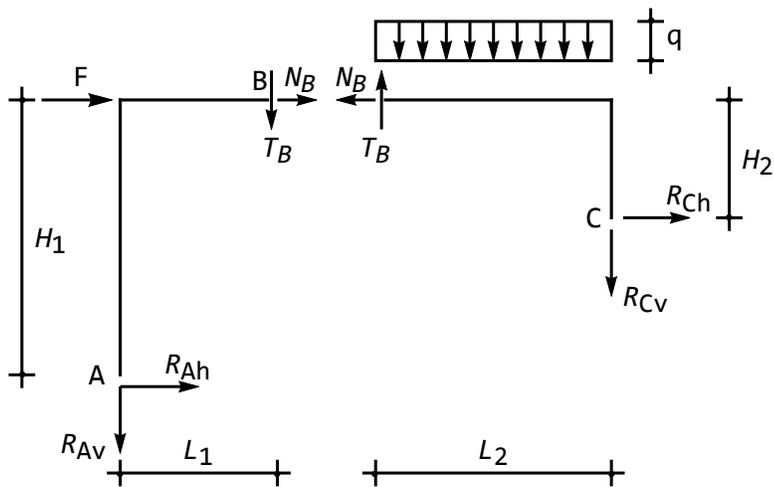


Figura 3.6: Il diagramma delle forze per la struttura di Figura 3.5

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 & L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & H_2 & -L_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Ah} \\ R_{Av} \\ N_B \\ T_B \\ R_{Ch} \\ R_{Cv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \\ -FH_1 \\ 0 \\ -qL_2 \\ \frac{-qL_2^2}{2} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Il rango della matrice di equilibrio è massimo, come può evidenziarsi calcolando il suo determinante, pari a  $\Delta = -(H_1L_2 + H_2L_1)$ , banalmente diverso da zero se le dimensioni geometriche non si annullano. Ne segue che la struttura è isostatica, e che è possibile calcolare le reazioni dovute alle forze applicate, risolvendo il sistema (3.10). Sarà quindi:

$$\begin{aligned} R_{Ah} &= \frac{L_1(2FH_2 - qL_2^2)}{2\Delta} \\ R_{Av} &= -\frac{H_1(2FH_2 - qL_2^2)}{2\Delta} \\ N_B &= \frac{L_2(2FH_1 + qL_1L_2)}{2\Delta} \\ T_B &= \frac{H_1(2FH_2 - qL_2^2)}{2\Delta} \\ R_{Ch} &= \frac{L_2(2FH_1 + qL_1L_2)}{2\Delta} \\ R_{Cv} &= -qL_2 + \frac{H_1(2FH_2 - qL_2^2)}{2\Delta} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Un'utile verifica può essere il controllo dell'equilibrio globale della struttura. Dovrà essere:

$$\begin{aligned} R_{Ah} + R_{Ch} + F &= 0 \\ R_{Av} + R_{Cv} + qL_2 &= 0 \\ -FH_1 - R_{Ch}(H_1 - H_2) - qL_2 \left( L_1 + \frac{L_2}{2} \right) - R_{Cv}(L_1 + L_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.4 Telaio a due campate

La struttura di Figura 3.7 è già stata studiata nel primo Capitolo, e la scrittura della matrice cinematica aveva condotto a concludere che essa fosse cinematicamente determinata. Poichè per essa si ha  $3t - s = 9 - 9 = 0$ , se ne deduce subito che essa è isostatica.

La struttura è caricata da una forza orizzontale in sommità del primo tratto, e da una forza verticale in corrispondenza della cerniera in  $D$ . Sostituendo ai vincoli le reazioni incognite e le caratteristiche della sollecitazione interna, si

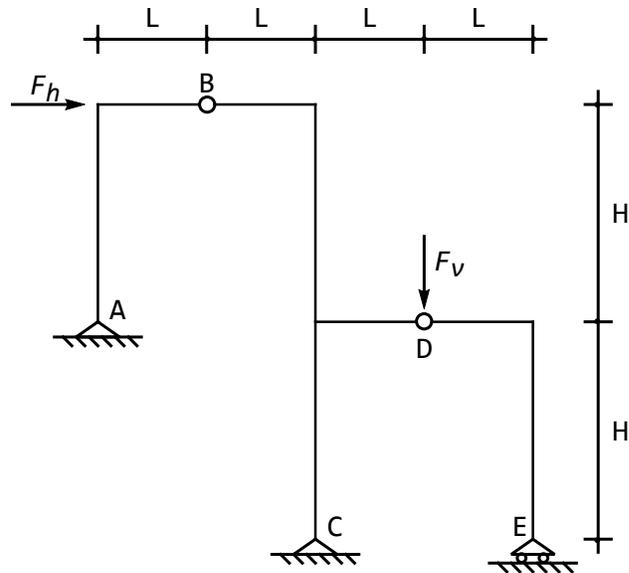


Figura 3.7: Un telaio zoppo a due campate

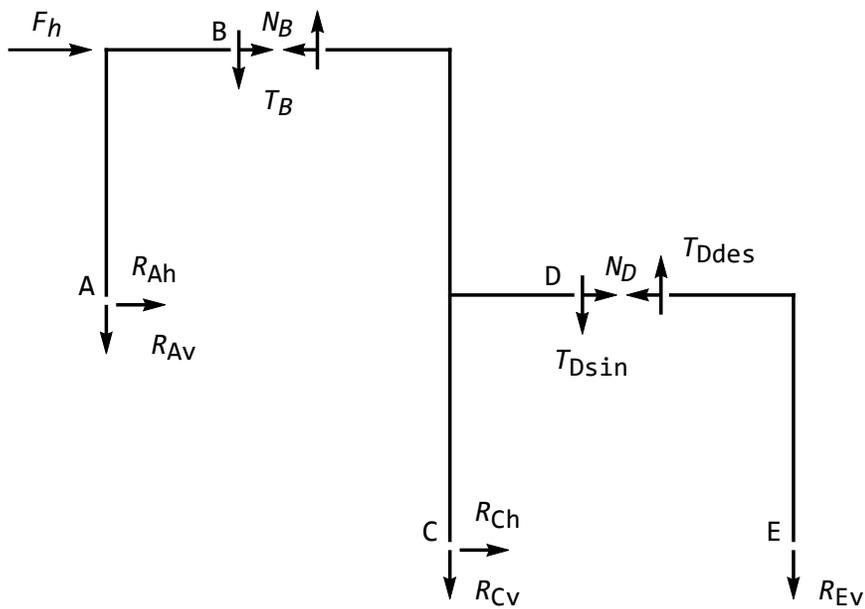


Figura 3.8: Il diagramma delle forze per il telaio di Figura 3.7

giunge al diagramma di Figura 3.8, dove banali considerazioni di equilibrio della cerniera in  $D$  portano a scrivere:

$$T_{Dsin} = T_{Ddes} + F_v \quad (3.14)$$

Le equazioni di equilibrio si possono ora scrivere imponendo l'equilibrio dei tre tratti di Figura 3.8, e scegliendo come poli i punti  $A$ ,  $C$  ed  $E$ , rispettivamente:

$$\begin{aligned} R_{Ah} + N_B + F_h &= 0 \\ R_{Av} + T_B &= 0 \\ -N_B H - F_h H - T_B L &= 0 \\ -N_B + N_D + R_{Ch} &= 0 \\ -T_B + T_{Dsin} + R_{Cv} &= 0 \\ 2N_B H - T_B L - N_D H - T_{Dsin} L &= 0 \\ -N_D &= 0 \\ -T_{Ddes} + R_{Ev} &= 0 \\ N_D H - T_{Ddes} L &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

ed introducendo la (3.14) si giunge alla relazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H & -L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2H & -L & 0 & 0 & -H & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H & -L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Ah} \\ R_{Av} \\ N_B \\ T_B \\ R_{Ch} \\ R_{Cv} \\ N_D \\ T_{Dsin} \\ R_{Ev} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_h \\ 0 \\ F_h H \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_v \\ F_v L \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

La matrice di equilibrio risulta essere la trasposta della matrice cinematica dedotta nell'applicazione precedente, in quanto si sono scelti i medesimi poli. Il determinante è quindi pari a  $-3HL^2$ , sicuramente diverso da zero. Risolvendo le (3.15) si ha:

$$\begin{aligned} R_{Ah} &= \frac{-2HF_h + LF_v}{3H} \\ R_{Av} &= \frac{2HF_h - LF_v}{3L} \\ N_B &= \frac{-HF_h - LF_v}{3H} \\ T_B &= \frac{-2HF_h + LF_v}{3L} \\ R_{Ch} &= \frac{-HF_h - LF_v}{3H} \\ R_{Cv} &= -\frac{2(HF_h - 2LF_v)}{3L} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} N_D &= 0 \\ T_{Dsin} &= -F_v \\ R_{Ev} &= 0 \end{aligned}$$

Le equazioni globali di equilibrio si scrivono:

$$\begin{aligned} R_{Ah} + R_{Ch} + F_h &= 0 \\ R_{Av} + R_{Cv} + R_{Ev} + F_v &= 0 \\ -F_h H - 3F_v L + R_{Ch} H - 2R_{Cv} L - 4R_{Ev} L &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

avendo scelto come polo il punto  $A$ .

### 3.5 Portale a quattro cerniere con pendolo

Si consideri ora il telaio di Figura 3.9, ripreso da V. Franciosi, *Problemi di Scienza delle Costruzioni*, Liguori, Napoli, Vol.1, pag.179–185. Esso può riguardarsi come un telaio rettangolare a quattro cerniere, con un pendolo che collega il primo ed il terzo tratto. Le incognite reattive sono rappresentate dalle reazioni orizzontali e verticali nei due appoggi, nei tagli e negli sforzi normali nelle due cerniere interne, e nello sforzo normale  $N_{HK}$  nel pendolo. In totale si ha quindi  $s = 9$ , e poichè la struttura è costituita da tre tratti rigidi, si ha  $3t - s = 0$

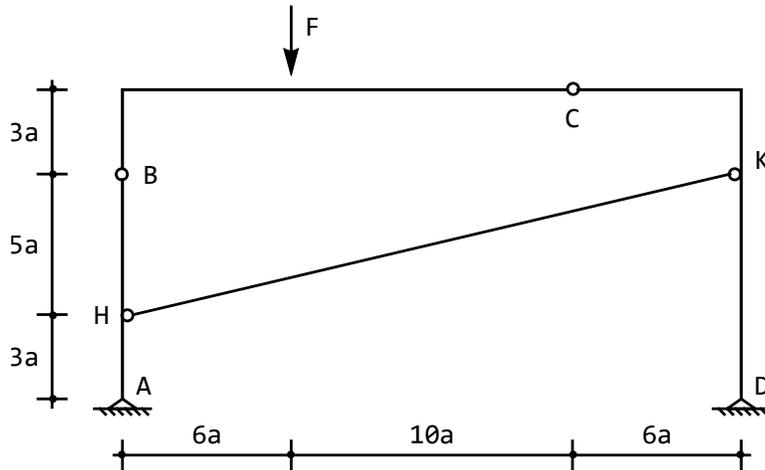


Figura 3.9: Un telaio a quattro cerniere e pendolo interno

Lo sforzo normale nel pendolo è considerato positivo se esso tende ad allungare il pendolo stesso (sforzo di trazione). Ne segue che lo stesso sforzo normale, agente sulla struttura, tende a far avvicinare i punti  $H$  e  $K$  di estremità del pendolo. La struttura libera dei vincoli è allora riportata in Figura 3.10.

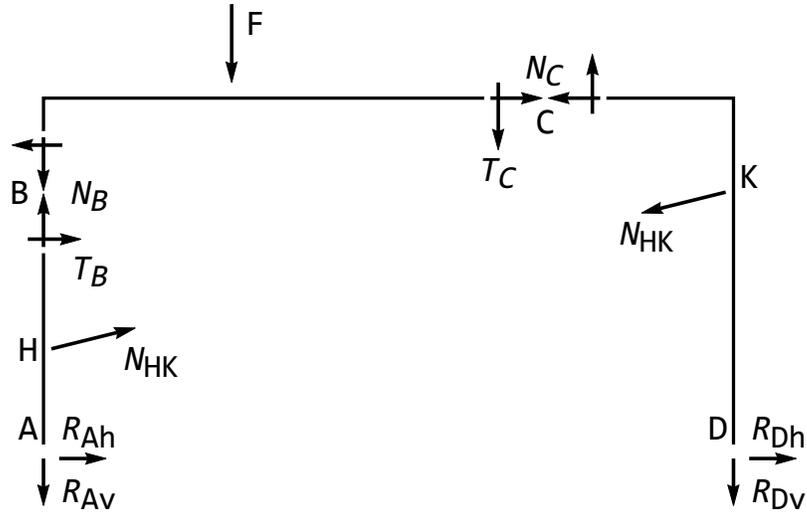


Figura 3.10: Il diagramma delle forze per il telaio di Figura 3.9

Per il primo tratto si potrà scrivere:

$$\begin{aligned}
 R_{Ah} + T_B + N_{HK} \cos(\alpha) &= 0 \\
 R_{Av} - N_B - N_{HK} \sin(\alpha) &= 0 \\
 -8aT_B - 3aN_{HK} \cos(\alpha) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

avendo scelto come polo il punto  $A$ , ed avendo definito l'inclinazione del pendolo attraverso l'angolo  $\alpha = \arctan\left(\frac{5}{22}\right)$ . Per il secondo tratto e terzo tratto, invece:

$$\begin{aligned}
 -T_B + N_C &= 0 \\
 N_B + F + T_C &= 0 \\
 -6aF - 16aT_C - 3aN_C &= 0 \\
 -N_C + R_{Dh} - N_{HK} \cos(\alpha) &= 0 \\
 -T_C + R_{Dv} + N_{HK} \sin(\alpha) &= 0 \\
 11aN_C - 6aT_C + 8aN_{HK} \cos(\alpha) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

avendo scelto il punto  $B$ , ed il punto  $D$  come polo del secondo e del terzo tratto, rispettivamente.

Si può quindi scrivere, matricialmente:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -\sin(\alpha) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 3a \cos(\alpha) & 0 & 8a & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a & 16a & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\cos(\alpha) & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 8a \cos(\alpha) & 0 & 0 & 11a & -6a & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 R_{Ah} \\
 R_{Av} \\
 N_{HK} \\
 N_B \\
 T_B \\
 N_C \\
 T_C \\
 R_{Dh} \\
 R_{Dv}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -F \\
 -6aF \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}
 \quad (3.21)$$

Il determinante della matrice di equilibrio  $\mathbf{A}$  è pari a:

$$\det(A) = 442a^3 \cos(\alpha) \quad (3.22)$$

e quindi la struttura è isostatica. Per la particolare condizione di carico proposta in Figura 3.9 le reazioni orizzontali sono uguali e contrarie:

$$R_{Ah} = -R_{Dh} = \frac{90}{221}F \quad (3.23)$$

le reazioni verticali sono fornite da:

$$\begin{aligned}
 R_{Av} &= -\frac{8}{11}F \\
 R_{Dv} &= -\frac{3}{11}F
 \end{aligned} \quad (3.24)$$

gli sforzi normali e gli sforzi di taglio nelle due cerniere interne sono pari a:

$$\begin{aligned}
 N_B &= -\frac{128}{221}F \\
 T_B &= \frac{54}{221}F \\
 N_C &= \frac{54}{221}F \\
 T_C &= -\frac{93}{221}F
 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Infine, lo sforzo normale nel pendolo è negativo, e quindi il pendolo risulta compresso:

$$N_{HK} = -\frac{72\sqrt{509}}{2431}F \approx -0.6682F \quad (3.26)$$

### 3.6 Trave appoggiata con sovrastruttura

La struttura di Figura 3.11 è anch'essa ripresa da V.Franciòsi, *Problemi di Scienza delle Costruzioni*, vol.1, dove è risolta graficamente.

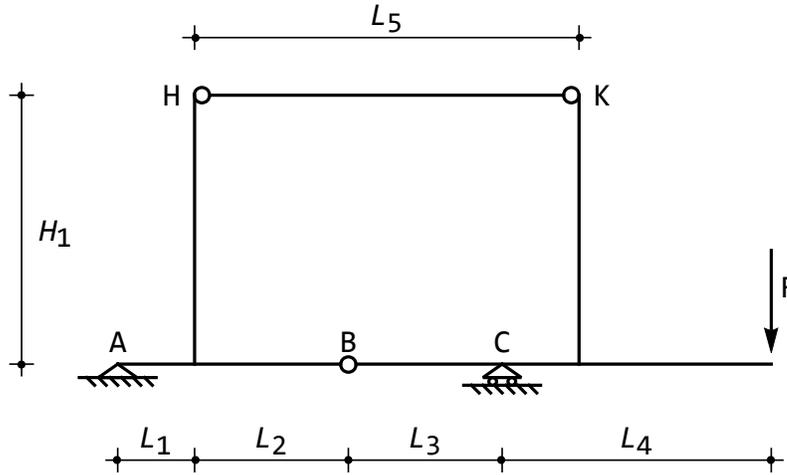


Figura 3.11: Una trave appoggiata, con cerniera intermedia, carrello e sbalzo, su cui poggia una coppia di aste connesse da un pendolo

Essa è costituita da una trave appoggiata, con cerniera intermedia, carrello e sbalzo, su cui poggia una coppia di aste connesse da un pendolo. I tratti rigidi sono due, e quindi  $3t = 6$ , le incognite reattive sono le due reazioni nell'appoggio, la reazione verticale del carrello, lo sforzo normale ed il taglio nella cerniera, lo sforzo normale nel pendolo. Quindi  $s = 6$ , e  $3t - s = 0$ .

Rimuovendo i vincoli, si giunge allo schema di Figura 3.12, su cui possono scriversi le equazioni di equilibrio. Scegliendo i poli nei punti  $A$ , per il primo tratto, e  $C$  per il secondo tratto, si giunge a scrivere:

$$\begin{aligned}
 R_{Ah} + N_B + N_{HK} &= 0 \\
 R_{Av} + T_B &= 0 \\
 -N_{HK}H_1 - T_B(L_1 + L_2) &= 0 \\
 -N_B - N_{HK} &= 0 \\
 -T_B + R_{Cv} + F &= 0 \\
 -R_{Cv}L_3 - F(L_3 + L_4) + N_{HK}H_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

ossia, matricialmente:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & L_1 + L_2 & 0 & H_1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -L_3 & H_1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 R_{Ah} \\
 R_{Av} \\
 N_B \\
 T_B \\
 R_{Cv} \\
 N_{HK}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 F \\
 F(L_3 + L_4)
 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

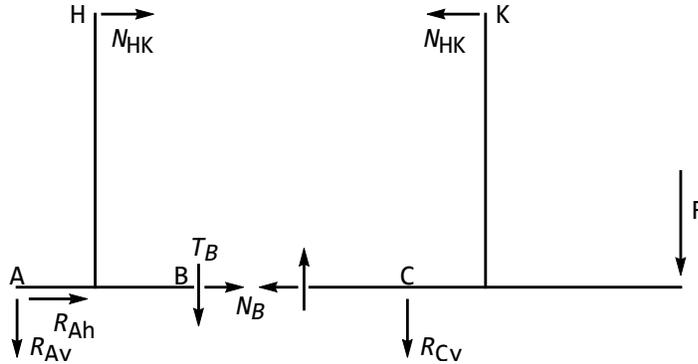


Figura 3.12: Il diagramma delle forze per l'esempio di Figura 3.11

Il determinante della matrice di equilibrio è pari ad  $H_1(L_1 + L_2 + L_3)$ , e quindi la struttura risulta isostatica. Le reazioni sono fornite da:

$$\begin{aligned}
 R_{Ah} &= 0 \\
 R_{Av} &= F \frac{L_4}{L_1 + L_2 + L_3} \\
 R_{Cv} &= -F \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{L_1 + L_2 + L_3} \\
 N_B &= -F \frac{(L_1 + L_2) L_4}{H_1 (L_1 + L_2 + L_3)} \\
 T_B &= -\frac{L_4}{L_1 + L_2 + L_3} \\
 N_{HK} &= F \frac{(L_1 + L_2) L_4}{H_1 (L_1 + L_2 + L_3)}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

E' ovviamente nulla l'unica componente reattiva orizzontale, mentre può facilmente verificarsi che  $R_{Av} + R_{Cv} + F = 0$ . Il pendolo  $HK$  risulta teso.

### 3.7 Portale con cerniera e due bipendoli

La struttura seguente è un telaio, costituito da due tratti rigidi connessi tra loro con un bipendolo interno, e vincolati al suolo con un appoggio ed un altro bipendolo. Per esso si potranno scrivere quindi sei equazioni di equilibrio, mentre le incognite reattive saranno le due reazioni orizzontali e verticali dell'appoggio in  $C$ , la reazione verticale e la coppia reattiva in  $A$ , lo sforzo normale ed il momento in  $B$ . Quindi, ancora una volta,  $3t - s = 0$

Per scrivere le equazioni di equilibrio, si consideri lo schema di Figura 3.14, e si scelgano come poli i due punti  $A$  e  $C$ , rispettivamente per il primo ed il

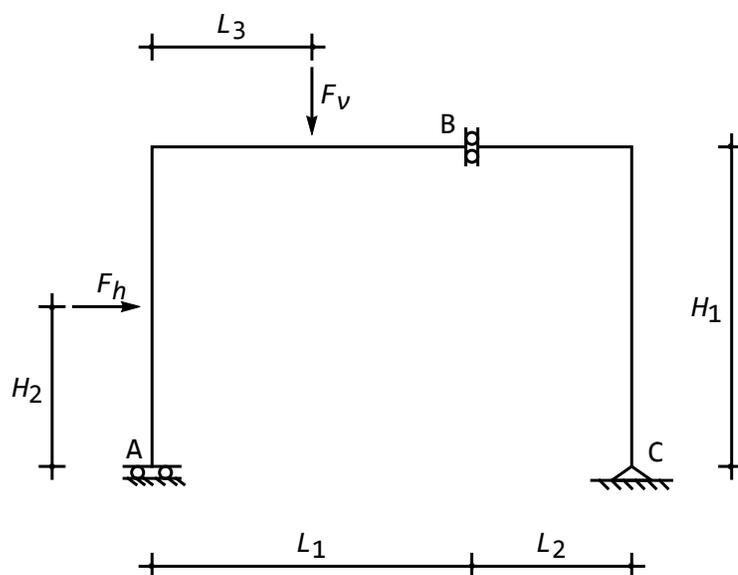


Figura 3.13: Un telaio con cerniera e due bipendoli

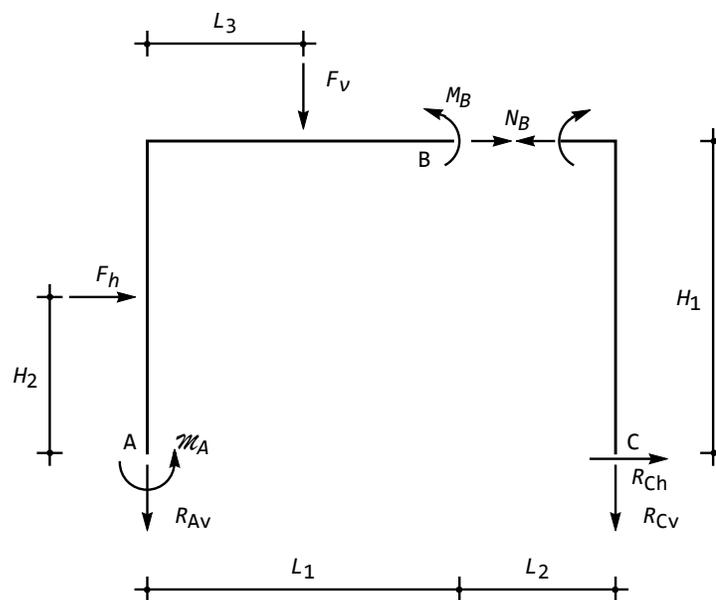


Figura 3.14: Il diagramma delle forze per l'esempio di Figura 3.13

secondo tratto. Si ha:

$$\begin{aligned}
 F_h + N_B &= 0 \\
 R_{Av} + F_v &= 0 \\
 \mathcal{M}_A + M_B - N_B H_2 - F_h H_2 - F_v L_3 &= 0 \\
 R_{Cw} - N_B &= 0 \\
 R_{Cv} &= 0 \\
 -M_B + N_B H_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

e matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -H_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & H_1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{Av} \\ \mathcal{M}_A \\ N_B \\ M_B \\ R_{Ch} \\ R_{Cv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_h \\ -F_v \\ F_h H_2 + F_v L_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

La struttura è sicuramente non labile, in quanto il determinante di  $\mathbf{A}$  è pari a  $-1$ . La soluzione delle (3.30) è immediata:

$$\begin{aligned}
 R_{Av} &= -F_v \\
 \mathcal{M}_A &= F_h H_1 + F_v L_3 \\
 N_B &= -F_h \\
 M_B &= -F_h w H_1 \\
 R_{Ch} &= -F_h \\
 R_{Cv} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Si noti infine che spesso, e quasi sempre nell'approccio grafico, si preferisce utilizzare il teorema del trasporto, pensare che il bipendolo reagisca con una forza ortogonale al piano di scorrimento del bipendolo stesso, e passante per un punto dettato dalle condizioni di equilibrio.

### 3.8 Portale a tre tratti

Il portale di Figura 3.15 è formato da tre tratti rigidi, ed è vincolato al suolo con un appoggio a sinistra ed un incastro a destra. Le nove incognite reattive possono calcolarsi in base alla scrittura di nove equazioni di equilibrio.

A tal fine, si sostituiscono ai vincoli le rispettive reazioni, giungendo al diagramma di Figura 3.17; si noti che la cerniera in  $C$  è posta all'incrocio del traverso col ritto di destra, e che per l'equilibrio del concio lo sforzo normale nel traverso sarà uguale al taglio nel ritto, mentre il taglio nel traverso sarà uguale allo sforzo normale nel ritto. Si sono allora indicati con  $T_{BC}$  ed  $N_{BC}$  il taglio e

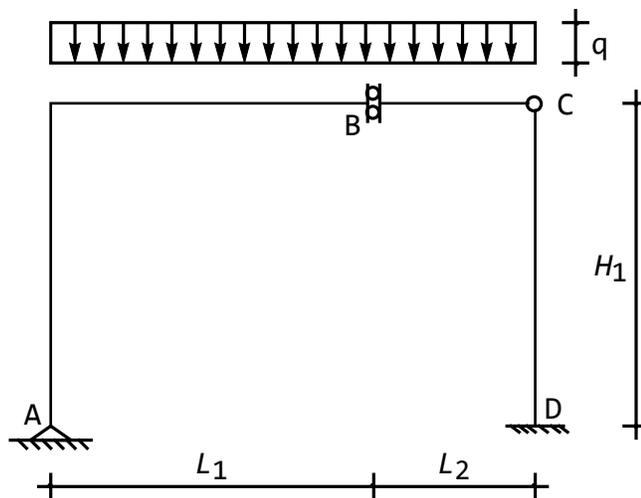


Figura 3.15: Un altro semplice telaio soggetto a carico distribuito sul traverso

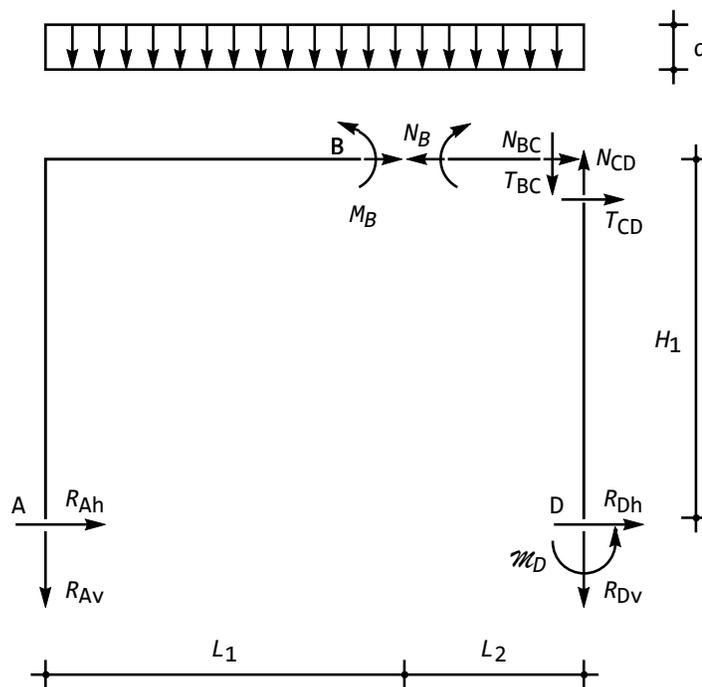


Figura 3.16: Il diagramma delle forze per il telaio di Figura 3.15

lo sforzo normale sul traverso, e con  $T_{CD}$  ed  $N_{CD}$  il taglio e lo sforzo normale sul ritto, giungendo a scrivere:

$$\begin{aligned} N_{BC} + T_{CD} &= 0 = 0 \\ -T_{BC} + N_{CD} &= 0 = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Le equazioni di equilibrio dei tratti possono scriversi, utilizzando i punti  $A$ ,  $B$  e  $D$  come poli:

$$\begin{aligned} R_{Ah} + N_B &= 0 \\ R_{Av} + qL_1 &= 0 \\ M_B - N_B H_1 - q \frac{L_1^2}{2} &= 0 \\ -N_B + N_{BC} &= 0 \\ T_{BC} + qL_2 &= 0 \\ -M_B - T_{BC} L_2 - q \frac{L_2^2}{2} &= 0 \\ T_{DC} + R_{Dh} &= 0 \\ -N_{CD} + R_{Dv} &= 0 \\ \mathcal{M}_D + T_{CD} H_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

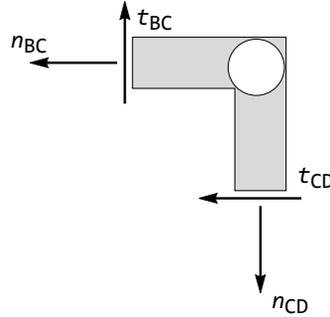


Figura 3.17: Le forze agenti sulla cerniera d'angolo)

Si è giunti infine ad un sistema di undici equazioni in altrettante incognite, la cui soluzione fornisce le reazioni vincolari:

$$\begin{aligned} R_{Ah} &= -R_{Dh} = q \frac{L_1^2 - L_2^2}{2H_1} \\ R_{Av} &= -qL_1 \\ R_{Dv} &= -qL_2 \\ \mathcal{M}_D &= \frac{1}{2}q(L_1^2 - L_2^2) \end{aligned} \quad (3.35)$$

il momento e lo sforzo normale nel bipendolo in  $B$ :

$$\begin{aligned} N_B &= q \frac{L_2^2 - L_1^2}{2H_1} \\ M_B &= \frac{qL_2^2}{2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

nonchè tagli e sforzi normali nella cerniera d'angolo in  $C$ :

$$\begin{aligned} N_{BC} &= -T_{CD} = q \frac{L_2^2 - L_1^2}{2H_1} \\ T_{BC} &= N_{CD} = -qL_2 \end{aligned} \quad (3.37)$$



## Capitolo 4

# Analisi statica Metodo grafico

Come si è visto nel Capitolo precedente, ciascun vincolo esterno o interno può essere sostituito dalle reazioni da esso esplicate. Ad esempio, un carrello può essere sostituito da una forza — di valore incognito — ortogonale al piano di scorrimento del carrello stesso, mentre il valore della forza deve essere poi calcolato imponendo le equazioni di equilibrio. Analogamente, un appoggio è equivalente a due forze incognite, un incastro a due forze ed una coppia, etc. Sostituite le reazioni ai vincoli, si possono imporre le condizioni di equilibrio, tratto per tratto, tra le reazioni e le forze applicate.

In questo Capitolo si imporranno tali equilibri in forma grafica, tenendo conto che:

- un carrello definisce la retta d'azione della reazione, che passa per il carrello ed è ortogonale al piano di scorrimento
- un doppio bipendolo fornisce una coppia reattiva
- un appoggio, o una cerniera interna, fornisce due forze orientate secondo gli assi coordinati, che possono essere composte in una singola forza. Ne segue che l'appoggio, o la cerniera interna, può essere visto come equivalente ad una forza appartenente ad una retta che passa per l'appoggio (o per la cerniera), la cui direzione viene definita imponendo l'equilibrio
- un bipendolo, esterno o interno, reagisce con una forza ortogonale all'asse di scorrimento dei bipendoli, e con una coppia. Esse possono essere composte in una singola forza ortogonale all'asse di scorrimento dei bipendoli, la cui posizione viene definita imponendo l'equilibrio
- un incastro reagisce con due forze ed una coppia, che possono essere composte in una singola forza di cui non è noto a priori nè la direzione nè la posizione, che dovranno calcolarsi in base alle condizioni di equilibrio

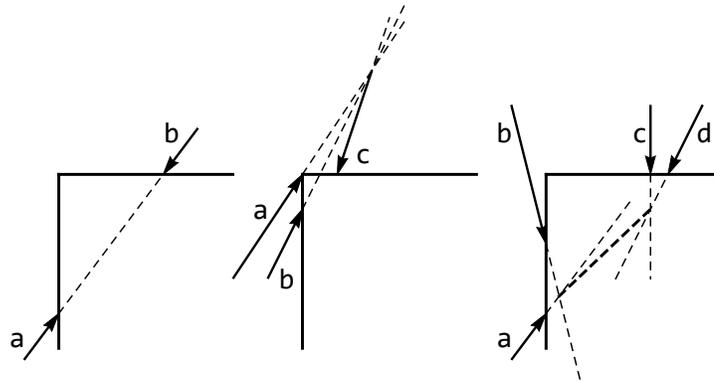


Figura 4.1: Condizioni di equilibrio per tratto rigido soggetto a due, tre e quattro forze

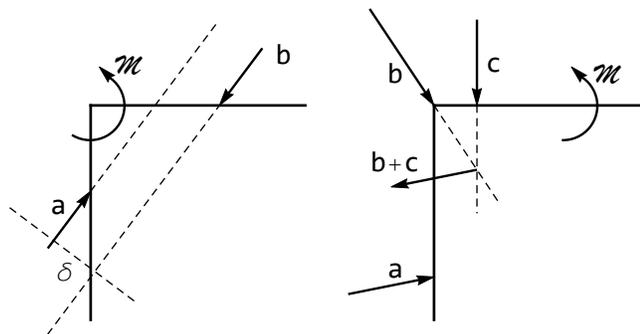


Figura 4.2: Condizioni di equilibrio per tratto rigido soggetto a due forze ed una coppia, oppure tre forze ed una coppia

Operate queste sostituzioni, le forze agenti su ciascun tratto rigido devono essere equilibrate, e possono presentarsi i seguenti casi:

- tratto rigido soggetto a 2 forze: per l'equilibrio, esse devono avere la stessa retta d'azione
- tratto rigido soggetto a 3 forze: per l'equilibrio, esse devono concorrere in un punto
- tratto rigido soggetto a 4 forze: per l'equilibrio, la risultante di due di esse deve avere la stessa retta d'azione della risultante delle altre due forze
- tratto rigido soggetto a 2 forze ed una coppia: per l'equilibrio, le due forze devono essere parallele, dirette in verso opposto, e a distanza tale da bilanciare la coppia

- tratto rigido soggetto a 3 forze ed una coppia: per l'equilibrio, la risultante di due forze deve risultare parallela alla terza, e giacere a distanza tale da bilanciare la coppia.

Graficamente, si hanno quindi i casi di Figura 4.1 e Figura 4.2.

Spesso, per esigenze di brevità e per comodità di scrittura, si esprimeranno le cinque suddette condizioni in modo simbolico. Se un tratto rigido è soggetto a due forze  $a$  e  $b$ , si scriverà l'equazione simbolica di equilibrio:

$$a + b = 0 \quad (4.1)$$

da cui potremo trarre le relative informazioni sulle due rette d'azione, scrivendo:

$$a = b \quad (4.2)$$

Analogamente, in presenza di un tratto rigido soggetto a tre forze  $a$ ,  $b$  e  $c$ , scriveremo la condizione di equilibrio come:

$$a + b + c = 0 \quad (4.3)$$

indicando in tal modo che esse dovranno concorrere in un punto. Alternativamente, faremo uso di espressioni del tipo:

$$a + (b + c) = 0 \quad (4.4)$$

per significare che la risultante di  $b$  e di  $c$  dovrà avere la stessa retta d'azione di  $a$ .

Se il tratto rigido è soggetto a quattro forze, l'equazione di equilibrio diviene:

$$a + b + c + d = 0 \quad (4.5)$$

che molto spesso viene utilizzata nella forma:

$$a + b = c + d \quad (4.6)$$

a significare che la risultante di  $a$  e  $b$  deve avere la stessa retta d'azione della risultante di  $c$  e  $d$ .

La quarta situazione, in cui agiscono sul tratto le due forze  $a$  e  $b$  insieme alla coppia  $\mathcal{M}$ , porta a scrivere:

$$a + b = \mathcal{M} \quad (4.7)$$

indicando quindi che le due forze  $a$  e  $b$  devono formare una coppia, ossia devono essere parallele tra loro.

Infine, se il tratto rigido è soggetto a tre forze ed una coppia, si scriverà la condizione di equilibrio nella forma:

$$a + (b + c) = \mathcal{M} \quad (4.8)$$

ad indicare che la risultante di  $b$  e  $c$  deve essere parallela ad  $a$ .

## 4.1 Portale con bipendolo interno

Si consideri il semplice portale di Figura 4.3, e si vogliono ricavare le reazioni con il metodo grafico. Il primo tratto è soggetto ad una forza  $a$  passante per l'appoggio in  $A$ , alla forza  $F$ , e ad una forza orizzontale  $b$ , che rappresenta la reazione del bipendolo, senza che peraltro si conosca l'inclinazione della forza passante per  $A$ , nè l'effettiva posizione della forza orizzontale.

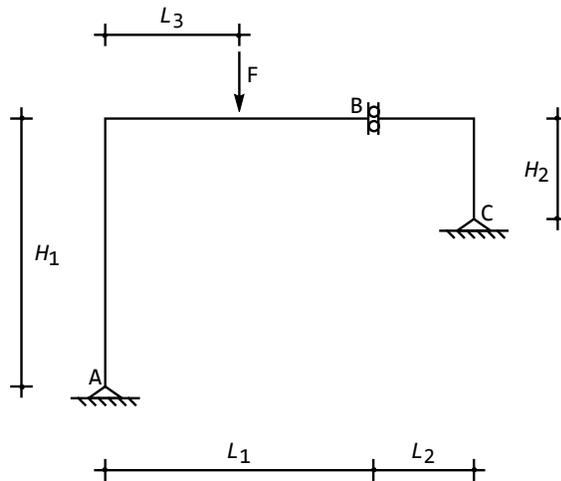


Figura 4.3: Un portale zoppo con bipendolo interno

Il secondo tratto è invece soggetto a due forze, la prima sicuramente orizzontale, la seconda,  $c$  sicuramente passante per l'appoggio  $C$ . Le equazioni di equilibrio dei due tratti si scrivono quindi:

$$\begin{aligned} a + b + F &= 0 \\ b + c &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

La seconda equazione permette di ricavare le rette d'azione di  $b$  e  $c$ , in quanto esse dovranno essere orizzontali, e passare per l'appoggio in  $C$ . La prima equazione permette di ricavare la retta d'azione di  $a$ , in quanto essa dovrà passare per l'appoggio in  $A$ , e per l'intersezione tra le rette d'azione della forza  $F$  e della reazione  $b$  del bipendolo.

Un banale triangolo di equilibrio fornisce il verso e l'effettivo valore delle reazioni vincolari, come illustrato in Figura 4.4.

## 4.2 Portale con due bipendoli

La struttura di Figura 4.5 rappresenta un telaio isostatico vincolato al piede con un bipendolo ed un appoggio, e con un bipendolo ad asse di scorrimento

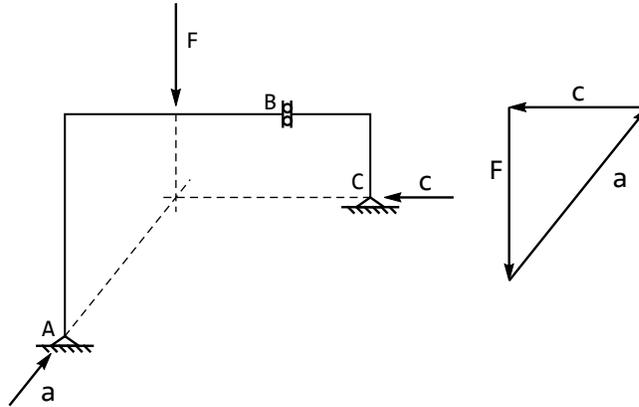


Figura 4.4: La determinazione grafica delle reazioni per il telaio di Figura 4.3

verticale agente sul traverso. Il carico è rappresentato da una forza  $F$  inclinata. Le equazioni di equilibrio restano le stesse dell'esempio precedente, ma stavolta l'equilibrio del primo tratto impone alla reazione  $a$  del bipendolo di essere verticale, e di passare per l'intersezione tra la retta d'azione della forza e l'orizzontale per l'appoggio, come riportato in 4.6

### 4.3 Portale soggetto ad una coppia

Lo stesso portale zoppo del primo esercizio sia ora soggetto ad una coppia  $\mathcal{M}$  agente sul primo tratto. Per il calcolo grafico delle reazioni si deve esaminare prima il secondo tratto, dove agiscono solo due forze, la reazione dell'appoggio  $C$ , che deve passare per il punto  $C$ , e la reazione del bipendolo, che dovrà essere necessariamente orizzontale. Per l'equilibrio, quindi, esse dovranno passare ambedue per  $C$ , ed essere uguali e contrarie.

L'equilibrio dell'intera struttura impone poi che anche la reazione in  $A$  sia orizzontale, uguale e contraria ad  $R_C$  (per l'equilibrio alla traslazione orizzontale). Le equazioni simboliche di equilibrio dei due tratti si scrivono:

$$\begin{aligned} a + b + \mathcal{M} &= 0 \\ b + c &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Il valore effettivo delle reazioni si ottiene infine considerando che esse dovranno generare una coppia reattiva uguale e contraria alla coppia applicata  $\mathcal{M}$ , ossia oraria. Ne segue che sarà:

$$c = -a = \frac{\mathcal{M}}{d} \quad (4.11)$$

Si noti che se i due appoggi sono situati allo stesso livello, per cui  $H_1 = H_2$ , il braccio  $d$  della coppia reattiva si annulla e l'equilibrio non è più possibile.

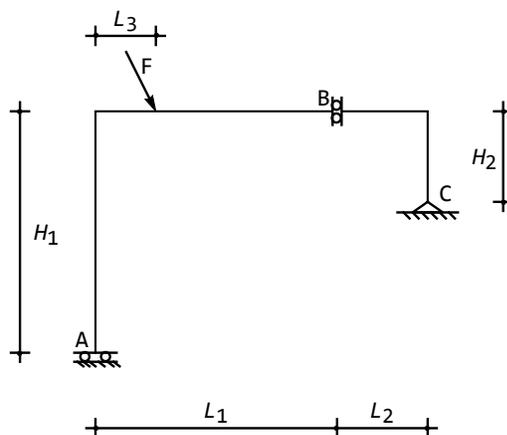


Figura 4.5: Un secondo portale zoppo con bipendolo interno

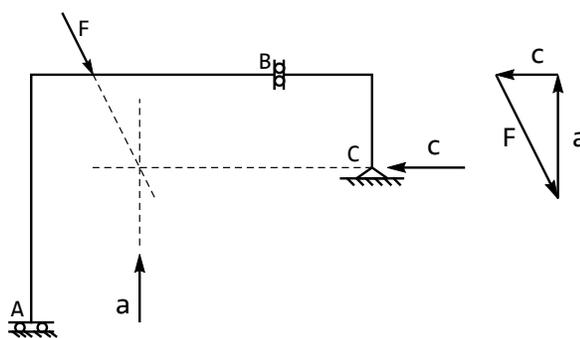


Figura 4.6: La determinazione grafica delle reazioni per il telaio di Figura 4.5

### Verifica analitica

La struttura è divisa in due tratti, connessi da un bipendolo. Le equazioni di equilibrio si scrivono, nelle usuali notazioni:

$$\begin{aligned}
 R_{Ah} + N_B &= 0 \\
 R_{Av} &= 0 \\
 \mathcal{M} - N_B H_1 + M_B &= 0 \\
 R_{Ch} - N_B &= 0 \\
 R_{Cv} &= 0 \\
 -M_B + N_B H_2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

e se  $H_2 = H_1$  la terza e sesta equazione non sono risolvibili.

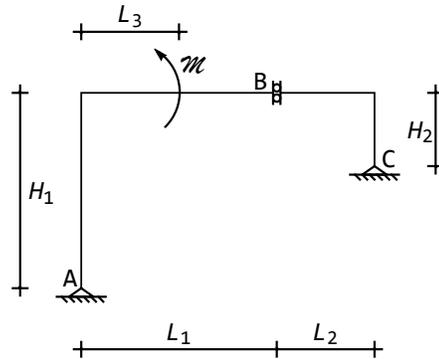


Figura 4.7: Un portale zoppo soggetto ad una coppia concentrata

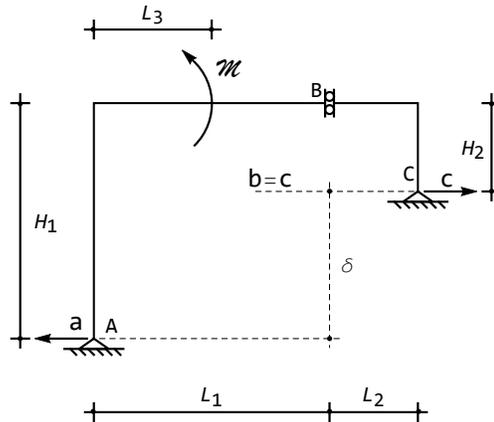


Figura 4.8: Le reazioni per il telaio zoppo di Figura 4.7

#### 4.4 Arco a quattro cerniere con pendolo

Si consideri ora l'arco a quattro cerniere con pendolo di Figura 4.9, soggetto ad una forza sul primo tratto rigido. Sul tratto  $AB$  agiscono le reazioni  $a$  e  $b$ , la reazione  $p$  del pendolo, e la forza  $F$ , sul tratto  $BC$  agiscono le due reazioni  $b$  e  $c$ , sul terzo tratto agiscono le reazioni  $c$  ed  $d$ , e la reazione  $p$  del pendolo. Simbolicamente si avrà quindi:

$$\begin{aligned} a + b + p + F &= 0 \\ b + c &= 0 \\ c + d + p &= 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

E' quindi ovvio iniziare l'analisi dal secondo tratto, per cui può farsi riferimento alla situazione di Figura 4.1a).

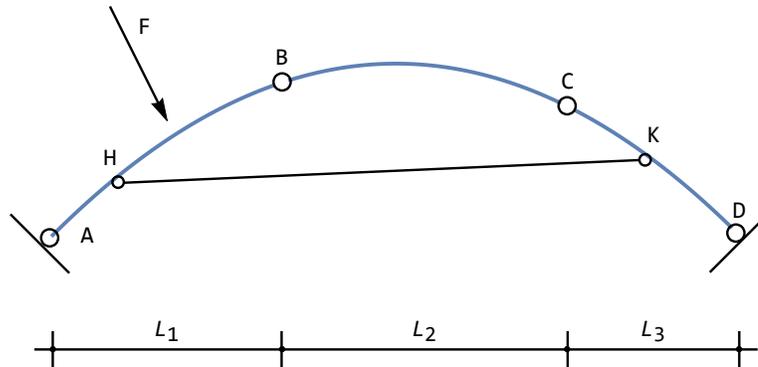


Figura 4.9: Un arco a quattro cerniera e pendolo

Per l'equilibrio, le reazioni  $b$  e  $c$  devono essere uguali e contrarie, quindi la loro retta d'azione non può che essere la congiungente  $B$  e  $C$ . E' usuale parlare, in questi casi, di un comportamento "a pendolo" del tratto  $BC$ . Conosciuta la retta d'azione delle reazioni  $b$  e  $c$ , la terza equazione di equilibrio fornisce la reazione dell'appoggio in  $D$ , che dovrà passare per l'appoggio stesso, e per l'intersezione tra le rette d'azione di  $p$  e di  $c$ .

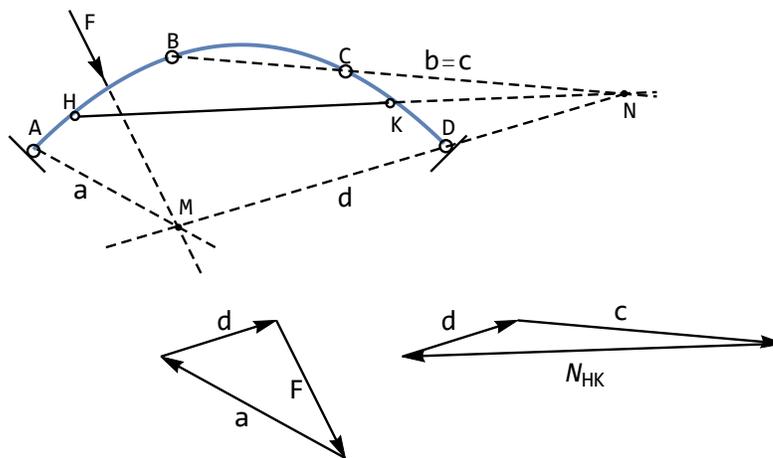


Figura 4.10: Le reazioni per l'arco di Figura 4.9

L'equazione di equilibrio globale della struttura si scrive come:

$$a + d + F = 0 \quad (4.14)$$

e permette di dedurre immediatamente la retta d'azione di  $a$ , che dovrà passare per l'appoggio in  $A$  e per l'intersezione tra  $F$  e  $d$ , come riportato in Figura 4.10. Nella stessa figura è riportato il triangolo di equilibrio tra la forza  $F$  e le reazioni esterne, nonché il triangolo di equilibrio delle tre forze agenti sul terzo tratto.

Ne segue che il pendolo  $HK$  è teso, mentre il tratto  $BC$  si comporta come un pendolo compresso.

## 4.5 Maglia chiusa a quattro cerniere e pendolo

La maglia chiusa non vincolata di Figura 4.11 è costituita da quattro tratti rigidi connessi tra loro attraverso quattro cerniere, ed un pendolo  $HK$  collega il terzo e quarto tratto.

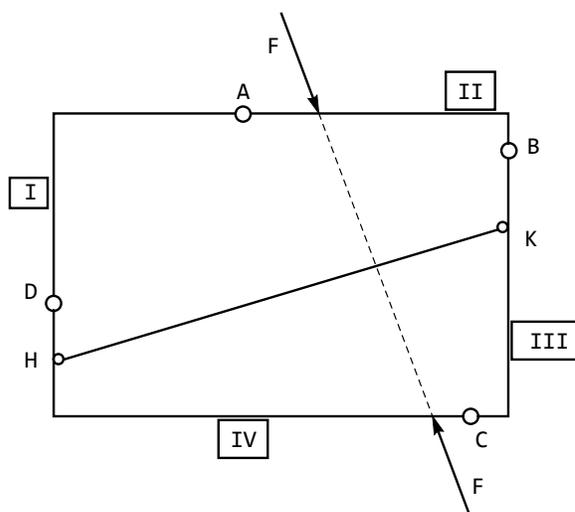


Figura 4.11: Una maglia chiusa a quattro cerniere e pendolo

Poichè non esistono vincoli esterni, le forze esterne devono farsi equilibrio: nel caso specifico si tratta di due forze uguali e contrarie agenti sul tratto 2 e sul tratto 4. Le equazioni di equilibrio dei quattro tratti si sintetizzano in:

$$\begin{aligned}
 a + d &= 0 \\
 a + b + F &= 0 \\
 b + p + c &= 0 \\
 d + p + c + F &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Esaminando il primo tratto si nota che — al solito — esso è scarico, e quindi le reazioni in  $A$  e  $D$  devono farsi equilibrio, il tratto si comporta da pendolo, e la retta d'azione della reazione delle due cerniere è nota. Passando al secondo

tratto, esso è soggetto alla reazione della cerniera  $A$ , la cui retta d'azione è nota, alla forza  $F$ , nota, ed alla reazione  $b$  della cerniera in  $B$ , che dovrà passare per la cerniera in  $B$ . Ne segue che basta prolungare la retta d'azione di  $a$  fino ad intersecare la retta d'azione della forza, nel punto  $M$ , e si ottiene il secondo punto per cui dovrà passare la  $b$ .

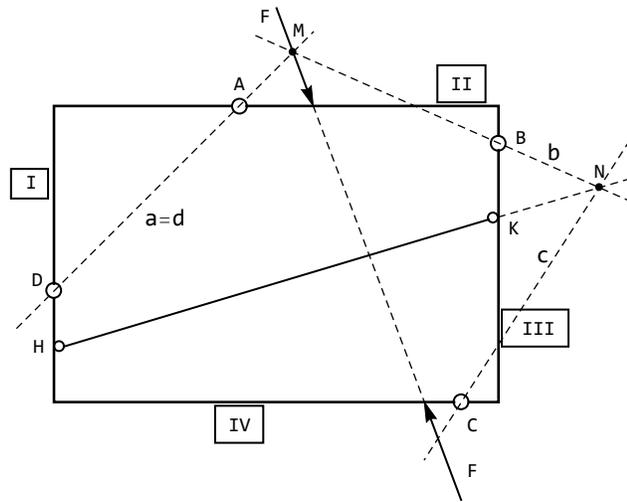


Figura 4.12: Una maglia chiusa a quattro cerniere e pendolo: la ricerca delle reazioni

Il terzo tratto è anch'esso soggetto a tre forze, due delle quali note in direzione ( $b$  e lo sforzo normale  $p$  nel pendolo), mentre la terza deve passare per la cerniera  $C$ . Imponendo l'equilibrio del tratto si trova il secondo punto per cui  $c$  dovrà passare: basta, allo scopo, prolungare le rette d'azione del pendolo e di  $bB$  fino alla loro intersezione in  $N$ . L'intero procedimento è riportato in Figura 4.12.

Ottenute le rette d'azione di tutte le reazioni, si può passare alla determinazione del loro valore: a partire dalla forza  $F$  si disegna il triangolo di equilibrio  $OPR$ , ottenendo la reazione  $a$  e la reazione  $b$ . Ciò fatto, la reazione  $b$  si scompone secondo le due rette d'azione del pendolo e della cerniera in  $C$ . L'equilibrio del tratto  $IV$  può leggersi sullo stesso diagramma, considerando che esso è soggetto a  $-F$ , ad  $d = -a$ ,  $p$  e  $c$ . Il procedimento si ritrova in Figura 4.13

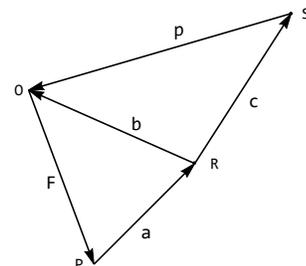


Figura 4.13: Le reazioni

## 4.6 Maglia chiusa a tre cerniere: caso semplice

Si consideri ora la maglia chiusa a tre cerniere di Figura 4.14, caricata da tre forze, che per l'equilibrio devono necessariamente passare per un punto di intersezione comune. In questo esercizio si esamina il caso più semplice, in cui uno dei tratti è scarico, mentre un'altro è caricato da una sola forza, ed il tratto tratto è soggetto a due forze.

Le equazioni di equilibrio si leggono subito come:

$$\begin{aligned} a + F_1 + b &= 0 \\ b + c &= 0 \\ a + F_3 + F_2 + b &= 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

La ricerca delle reazioni parte proprio dall'esame del tratto scarico, che come usuale si comporta da pendolo, e quindi le due reazioni delle cerniere  $B$  e  $C$  sono uguali e contrarie. Si passa poi al tratto soggetto ad una forza, ossia al tratto  $I$ : esso è in equilibrio in presenza della forza  $F$ , delle reazioni della cerniera in  $B$ , ambedue di direzione nota, e della reazione in  $A$ , che deve passare per  $A$ . Ne segue che basta prolungare le rette d'azione di  $F_1$  e di  $b$  per ottenere, con la loro intersezione  $H$ , il secondo punto che definisce la direzione di  $a$ .

Nella Figura 4.16 è riportato il triangolo di equilibrio delle tre forze, e la scomposizione di  $F_1$  secondo le sue componenti  $a$  e  $b$ . Si noti che l'equilibrio del terzo tratto può verificarsi percorrendo il quadrilatero PROSP in senso antiorario.

## 4.7 Maglia chiusa a tre cerniere: caso complesso

Nel caso in esame, la maglia chiusa a tre cerniere di Figura 4.17 è soggetta a tre forze autoequilibrate, ciascuna agente su un tratto diverso. Ne segue che non esistono tratti scarichi, ed ognuno di essi è soggetto ad una forza e a due reazioni che devono passare per le cerniere, ma di direzione incognita.

Le equazioni di equilibrio divengono ora:

$$\begin{aligned} a + F_1 + b &= 0 \\ b + F_2 + c &= 0 \\ a + F_3 + c &= 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

ed è immediato constatare che non si rientra in alcuno dei casi illustrati prima.

### 4.7.1 Una escursione nel campo della Geometria Analitica

Si risolverà il problema del calcolo delle reazioni applicando i dettami della geometria analitica. Siano allora  $(x_{3A}, x_{2A})$ ,  $(x_{3B}, x_{2B})$  e  $(x_{3C}, x_{2C})$  le coordinate

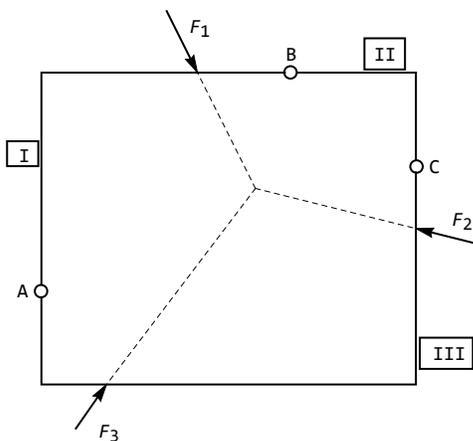


Figura 4.14: Una maglia chiusa a tre cerniere soggetta ad un carico auto-equilibrato

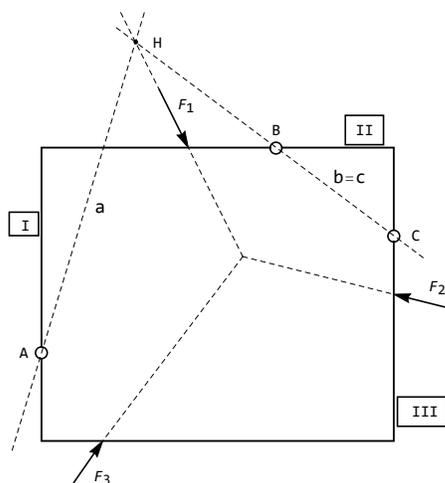


Figura 4.15: La ricerca delle reazioni per la maglia di Figura 4.14

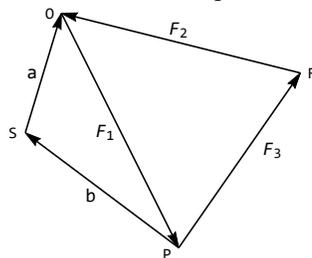


Figura 4.16: Le reazioni

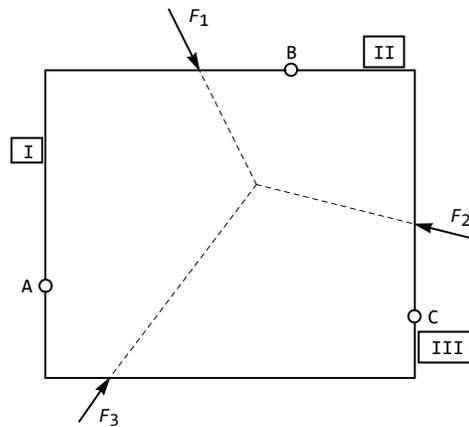


Figura 4.17: Una maglia chiusa a tre cerniere soggetta ad un carico auto-equilibrato

delle tre cerniere, e definiamo le tre rette d'azione delle tre forze:

$$\begin{aligned} x_2(x_3) &= m_{F_1}x_3 + n_{F_1} \\ x_2(x_3) &= m_{F_2}x_3 + n_{F_2} \\ x_2(x_3) &= m_{F_3}x_3 + n_{F_3} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Si noti che poichè le tre forze concorrono in un punto, dovrà essere necessariamente:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_1} & n_{F_1} & 1 \\ m_{F_2} & n_{F_2} & 1 \\ m_{F_3} & n_{F_3} & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.19)$$

Siano ora:

$$\begin{aligned} x_{2a}(x_3) &= m_Ax_3 + n_A \\ x_{2b}(x_3) &= m_Bx_3 + n_B \\ x_{2c}(x_3) &= m_Cx_3 + n_C \end{aligned} \quad (4.20)$$

le equazioni delle rette cui devono appartenere le tre reazioni incognite. Si hanno quindi sei parametri incogniti, che verranno calcolati imponendo:

1. le condizioni che le rette passino per  $A$ ,  $B$  e  $C$ , rispettivamente:

$$\begin{aligned} x_{2A} &= m_Ax_{3A} + n_A \\ x_{2B} &= m_Bx_{3B} + n_B \\ x_{2C} &= m_Cx_{3C} + n_C \end{aligned} \quad (4.21)$$

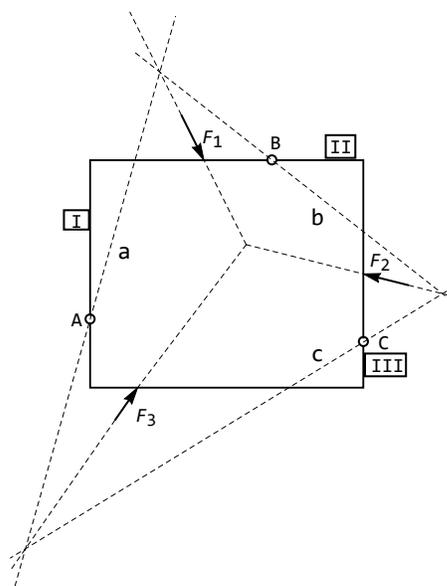


Figura 4.18: La ricerca delle reazioni per la maglia di Figura 4.17

2. la condizione che — per l'equilibrio del tratto *I* — la forza  $F_1$ , la reazione  $a$  e la reazione  $b$  debbano concorrere in un punto:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_1} & n_{F_1} & 1 \\ m_A & n_A & 1 \\ m_B & n_B & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.22)$$

3. la condizione che — per l'equilibrio del tratto *II* — la forza  $F_2$ , la reazione  $R_B$  e la reazione  $R_C$  debbano concorrere in un punto:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_2} & n_{F_2} & 1 \\ m_B & n_B & 1 \\ m_C & n_C & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.23)$$

4. la condizione che — per l'equilibrio del tratto *III* — la forza  $F_3$ , la reazione  $R_C$  e la reazione  $R_A$  debbano concorrere in un punto:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_3} & n_{F_3} & 1 \\ m_C & n_C & 1 \\ m_A & n_A & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.24)$$

Queste sei equazioni in sei incognite permettono la definizione delle rette d'azione delle reazioni, come illustrato in Figura 4.18

L'intensità delle reazioni può ora essere dedotta scomponendo  $F_1$  secondo le rette d'azione delle reazioni  $a$  ed  $b$ , la forza  $F_2$  secondo le rette d'azione delle

reazioni  $b$  e  $c$ , e per verifica la forza  $F_3$  secondo le rette d'azione delle reazioni  $a$  e  $c$ . Si ha quindi il diagramma di Figura 4.19

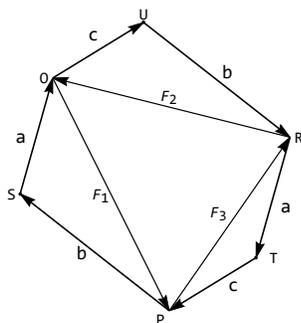


Figura 4.19: Le reazioni per la maglia di Figura 4.17

## 4.8 Maglia chiusa con cerniera e due bipendoli

Si consideri ora la maglia chiusa di Figura 4.20, in cui tre tratti rigidi sono collegati tra loro tramite una cerniera e due bipendoli. Non essendovi vincoli esterni, le tre forze concorrono in un punto, garantendo l'equilibrio.

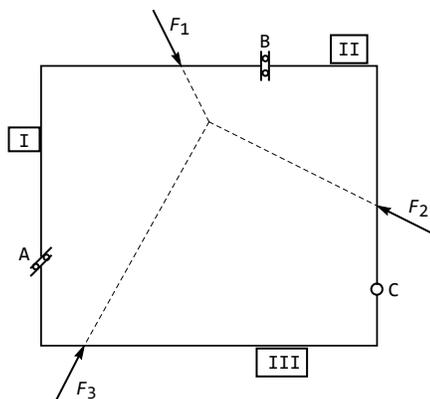


Figura 4.20: Una maglia chiusa a due bipendoli ed una cerniera soggetta ad un carico auto-equilibrato

Le equazioni di equilibrio sono identiche alle (4.17), e quindi anche in questo caso si è nell'impossibilità di calcolare le reazioni in via elementare.

Applicando i dettami della geometria analitica, siano quindi  $(x_{3A}, x_{2A})$ ,  $(x_{3B}, x_{2B})$  e  $(x_{3C}, x_{2C})$  le coordinate dei due bipendoli e della cerniera, e siano  $\alpha$  e  $\beta$  gli angoli che l'orizzontale forma — in senso antiorario —, per sovrapporsi

al piano di scorrimento del bipendolo in  $A$  ed in  $B$ , rispettivamente. Nel caso di Figura si è scelto  $\alpha = \pi/4$  e  $\beta = \pi/2$ .

Si definiscano le rette d'azione delle tre forze (cfr. 4.18), e si imponga la condizione di equilibrio, secondo la (4.18). Infine, siano:

$$\begin{aligned}x_{2a}(x_3) &= m_A x_3 + n_A \\x_{2b}(x_3) &= m_B x_3 + n_B \\x_{2c}(x_3) &= m_C x_3 + n_C\end{aligned}\tag{4.25}$$

le equazioni delle rette cui devono appartenere la tre reazioni incognite. Le reazioni  $a$  e  $b$  hanno direzione nota, in quanto devono essere dirette secondo gli assi dei bipendoli, ossia devono essere inclinate di  $\alpha + \pi/2$  e  $\beta + \pi/2$  rispetto all'orizzontale. Se ne può dedurre:

$$\begin{aligned}m_A &= \tan(\alpha + \pi/2) \\m_B &= \tan(\beta + \pi/2)\end{aligned}\tag{4.26}$$

La terza reazione è invece costretta a passare per il punto  $C$ :

$$x_{2C} = m_C x_{3C} + n_C\tag{4.27}$$

A queste tre condizioni vanno aggiunte le tre condizioni di equilibrio dei tre tratti: la condizione che — per l'equilibrio del tratto  $I$  — la forza  $F_1$ , la reazione  $a$  e la reazione  $b$  debbono concorrere in un punto:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_1} & n_{F_1} & 1 \\ m_A & n_A & 1 \\ m_B & n_B & 1 \end{pmatrix} = 0\tag{4.28}$$

la condizione che — per l'equilibrio del tratto  $II$  — la forza  $F_2$ , la reazione  $b$  e la reazione  $c$  debbono concorrere in un punto:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_2} & n_{F_2} & 1 \\ m_B & n_B & 1 \\ m_C & n_C & 1 \end{pmatrix} = 0\tag{4.29}$$

e la condizione che — per l'equilibrio del tratto  $III$  — la forza  $F_3$ , la reazione  $c$  e la reazione  $a$  debbono concorrere in un punto:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} m_{F_3} & n_{F_3} & 1 \\ m_C & n_C & 1 \\ m_A & n_A & 1 \end{pmatrix} = 0\tag{4.30}$$

Queste sei equazioni in sei incognite permettono la definizione delle rette d'azione delle reazioni, come illustrato in Figura 4.21. Si noti che l'intersezione tra  $c$ ,  $b$  ed  $F_2$  non è stata disegnata in quanto non rientrante nell'area del disegno.

La forza  $F_1$  si scompone secondo le rette d'azione dei due bipendoli, ossia — in questo caso — secondo la retta orizzontale e la retta inclinata di  $3\pi/4$ ,

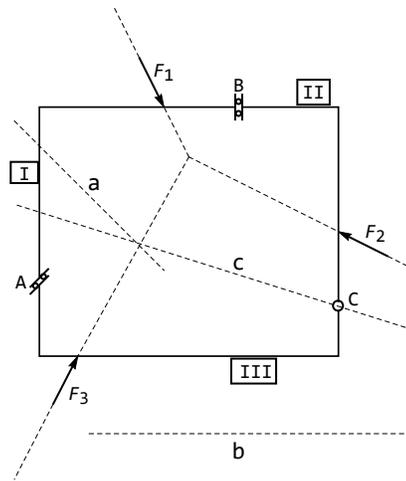


Figura 4.21: La ricerca delle reazioni per la maglia di Figura 4.20

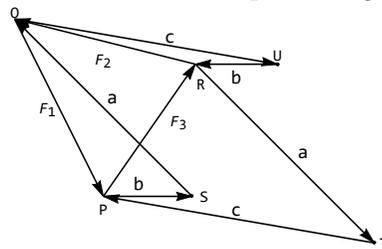


Figura 4.22: Le reazioni per la maglia di Figura 4.20

ottenendo le reazioni  $a$  e  $b$ . La forza  $F_2$  si scompone secondo le rette d'azione della reazione del bipendolo in  $B$  e della reazione in  $C$ , ottenendo  $c$ . Infine, la terza forza deve essere equilibrata in presenza di  $a$  e  $c$ . Ne segue il diagramma di Figura 4.22



## Capitolo 5

# Sul grado di labilità ed iperstaticità

Una struttura è labile se presenta una possibilità di meccanismo rigido, è isostatica se è possibile calcolare le reazioni vincolari con l'ausilio delle sole equazioni della statica, è iperstatica se presenta una sovrabbondanza di vincoli, e le equazioni della statica non sono sufficienti per la determinazione delle reazioni.

Si è visto che la classificazione delle strutture in base al loro grado di labilità  $l$  ed iperstaticità  $i$  è usualmente molto agevole: basta contare i  $t$  tratti rigidi in cui la struttura è suddivisa dai vincoli interni, contare gli  $s$  gradi di libertà soppressi da ciascun vincolo — esterno ed interno — e valutare la differenza  $3t - s$ . Se tale differenza è maggiore di zero, la struttura è labile, se è minore di zero, la struttura è iperstatica:

$$\begin{aligned} 3t - s > 0 &\quad \rightarrow \text{struttura labile} \\ 3t - s < 0 &\quad \rightarrow \text{struttura iperstatica} \\ 3t - s = 0 &\quad \leftarrow \text{struttura isostatica} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Queste tre implicazioni valgono solo nel verso indicato, perchè una struttura può essere contemporaneamente labile — ossia presentare la possibilità di un meccanismo rigido — ed iperstatica, ossia presentare una ridondanza di vincoli. In tal caso diviene necessario uno studio più approfondito della struttura, e non ci si può più limitare ad un semplice computo di tratti, vincoli e gradi di libertà. A questo tipo di strutture verrà dedicata la prima parte del presente Capitolo.

Si è poi finora presupposto che i vincoli fossero ben disposti, e che quindi le equazioni che li definiscono fossero (linearmente) indipendenti, dando luogo ad una matrice cinematica (o di equilibrio) di rango massimo. In questo Capitolo si illustreranno alcuni casi in cui i vincoli sono mal disposti, e quindi inefficaci.

Un cenno meritano anche i cosiddetti *vincoli multipli*, come — ad esempio — una cerniera in cui convergono più di due tratti rigidi, che possono talvolta generare confusione, ed a cui vengono dedicati alcuni esempi.

Infine, si introducono alcune semplificazioni per casi speciali: il riconoscimento del carattere di una struttura attraverso la similitudine con casi già noti, il caso classico di trave ad asse rettilineo soggetto a forze trasversali e coppie, introducendo un conteggio *ad hoc* del numero di gradi di libertà e del numero di vincoli, e lo studio delle travature reticolari a maglie triangolari.

## 5.1 Un portale labile ed iperstatico

Si consideri il portale di Figura 5.1, costituito da tre tratti rigidi connessi tra loro con due cerniere in  $B$  ed  $E$ , ed al suolo con due appoggi in  $A$  ed  $F$ . Senza il pendolo  $CD$ , la struttura è manifestamente labile, in quanto possiede  $3t = 9$  gradi di libertà, e possono scriversi solo  $s = 8$  equazioni di vincolo. Introducendo il pendolo  $CD$ , si introduce anche una equazione di vincolo, sicchè  $3t - s = 0$ , e la struttura è *potenzialmente* isostatica; tuttavia, se il pendolo collega due punti di uno stesso tratto rigido, come in Figura, esso è inefficace, come può facilmente controllarsi scrivendo le equazioni di equilibrio del secondo tratto. Ne segue che la struttura di Figura 5.1 è una volta labile ed una volta iperstatica.

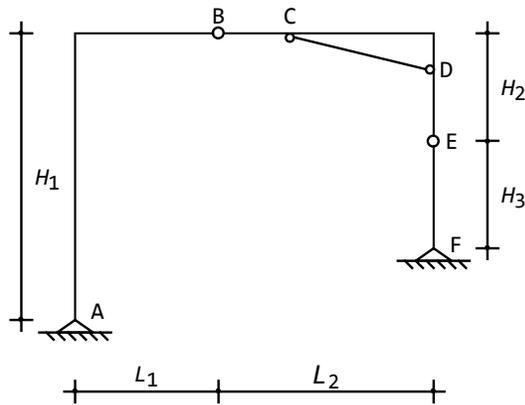


Figura 5.1: Un portale a quattro cerniere con pendolo inefficace,  $l=1$ ,  $i=1$

## 5.2 Un portale con pendolo inefficace

Il portale di Figura 5.2 è costituito da quattro tratti rigidi, connessi al suolo da un appoggio sulla sinistra ed un incastro a destra. In assenza del pendolo  $HK$  si ha  $3t = 12$ , mentre i vincoli sopprimono 11 gradi di libertà, due in ciascuna delle cerniere e nell'appoggio in  $A$ , tre nell'incastro in  $E$ . Introducendo il pendolo si ottiene quindi la relazione  $3t - s = 0$ , ma nella situazione di Figura esso è palesemente inefficace, in quanto il punto  $K$  appartiene al tratto  $DE$ , che non si muove a causa dell'incastro, e quindi la reazione del pendolo è nulla.

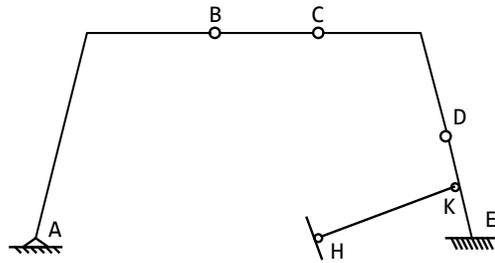


Figura 5.2: Un portale a quattro cerniere ed incastro, con pendolo inefficace,  $l=1$ ,  $i=1$

### 5.3 Un portale con cerniere mal disposte

Il portale di Figura 5.3 è incastrato al piede, e vede tre cerniere a dividere la struttura in quattro tratti. Un veloce computo dei vincoli porta a scrivere  $3t = 12$ , ed  $s = 12$ , quindi la relazione necessaria di isostaticità è soddisfatta,  $3t - s = 0$ . Tuttavia, la presenza di tre cerniere allineate lungo il traverso implica la possibilità di un meccanismo rigido con abbassamento della cerniera centrale, e quindi la struttura è labile ed iperstatica allo stesso tempo.

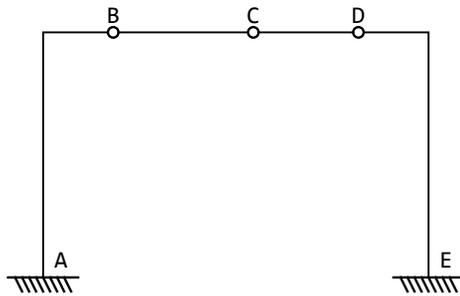


Figura 5.3: Un portale incastrato al piede, con tre cerniere mal disposte

### 5.4 Un portale doppio

Un esempio più complesso è riportato nelle Figure 5.4–5.5.

Si possono agevolmente identificare quattro tratti rigidi, e quindi  $3t = 12$ , mentre i vincoli sopprimono 13 gradi di libertà, e quindi la struttura è sicuramente iperstatica. La differenza tra i due schemi risiede nella disposizione dei due pendoli: nel primo caso si può rimuovere il pendolo  $HK$ , giungendo ad una struttura isostatica, e quindi la struttura di Figura 5.4 è una volta iperstatica,  $l = 0$ ,  $i = 1$ . Nel secondo caso, invece, la presenza dell'arco a quattro cerniere

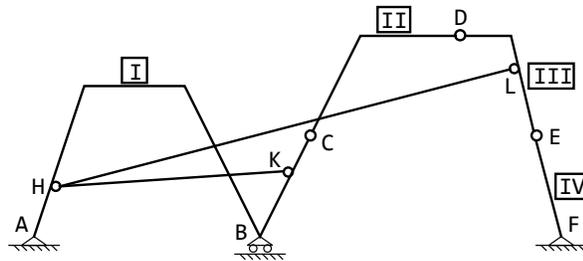


Figura 5.4: Un portale doppio una volta iperstatico: il pendolo  $HK$  può essere rimosso senza pregiudicare l'equilibrio

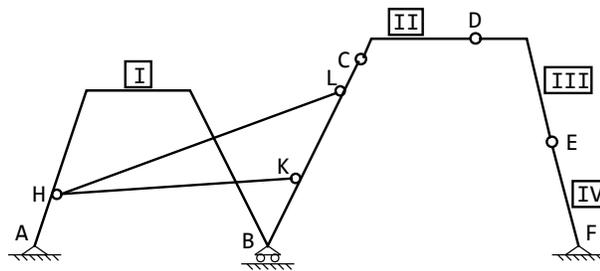


Figura 5.5: Un portale doppio una volta labile e due volte iperstatico: la labilità risiede nell'arco a quattro cerniere  $CDEF$

$CDEF$  implica la presenza di una labilità, e quindi la struttura di Figura 5.5 è una volta labile e due volte iperstatica,  $l = 1$  ed  $i = 2$ .

## 5.5 Vincoli multipli

Si considerano in questa sezione alcuni vincoli multipli, che potrebbero generare perplessità nel calcolo dei gradi di libertà soppressi. Un primo caso, in Figura 5.6a), è quello di una cerniera interna in cui concorrono  $n$  tratti rigidi. Considerando che per ogni coppia di tratti possono imporsi due condizioni di vincolo, esprimenti l'annullarsi degli spostamenti relativi, sembrerebbe che la cerniera multipla sopprima  $2n$  gradi di libertà. Tuttavia, l'annullarsi degli spostamenti relativi tra il primo e l'ultimo tratto è già implicito nelle precedenti equazioni di vincolo, e quindi una cerniera interna che connette  $n$  aste, sopprime un totale di  $2(n - 1)$  gradi di libertà. Nel caso in Figura 5.6a),  $n = 8$ , e quindi i gradi di libertà soppressi sono 14.

In Figura 5.6b) è presentato un vincolo misto, ossia una cerniera cui sono connessi  $n$  tratti, riposante su un carrello a piano di scorrimento orizzontale.

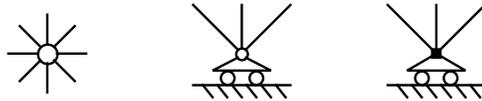


Figura 5.6: Alcuni vincoli multipli e vincoli misti

Analizzando separatamente la cerniera multipla, ed il carrello, si vede che il vincolo sopprime globalmente  $2n - 1$  gradi di libertà.

In Figura 5.6c), invece, gli  $n$  tratti convergono in un punto, vincolato con un carrello. In questo caso il punto di intersezione degli  $n$  tratti è da considerare un incastro, e per esso possono scriversi  $3(n - 1)$  equazioni di vincolo linearmente indipendenti, cui va aggiunto il grado di libertà soppresso dal carrello. In totale, quindi, il vincolo di Figura 5.6c) sopprime  $3n - 2$  gradi di libertà. Situazioni simili possono essere esaminate secondo queste linee guida.

## 5.6 Le travi ad asse rettilineo in assenza di forze orizzontali

E' opportuno accennare ora ad alcune strutture particolari, per cui talvolta viene utilizzata una formula semplificata di calcolo del grado di labilità/iperstaticità. Si consideri infatti una trave ad asse rettilineo, soggetta a forze trasversali e/o coppie concentrate agenti nel piano della trave, mentre si suppongono assenti le forze agenti secondo l'asse della trave. In tale ipotesi, le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale sono automaticamente soddisfatte, e per ciascun tratto possono scriversi due equazioni di equilibrio non banali. Corrispondentemente, i vincoli vanno ripensati, eliminando dal computo dei gradi di libertà soppressi quelli relativi agli spostamenti orizzontali; ne segue che scompare la differenza tra appoggio e carrello a piano di scorrimento orizzontale, che una cerniera interna è definita da due forze verticali uguali e contrarie, che un bipendolo interno reagisce con due coppie, che l'incastro elimina due gradi di libertà, e così via.

### Una trave a più luci

La trave di Figura 5.7 può essere facilmente analizzata secondo la classica e generale formula  $3t - s = l - i$ : considerato che essa è costituita da 4 tratti, si potranno scrivere dodici equazioni di equilibrio. Corrispondentemente, il carrello in  $A$  identifica una reazione verticale, le due cerniere in  $B$  e  $D$  identificano due reazioni ciascuna, il bipendolo esterno in  $C$  è definito dalla corrispondente coppia reattiva, il bipendolo interno equivale ad una coppia ed una forza orizzontale reattiva, i due appoggi a due reazioni ciascuno. In totale si possono quindi identificare dodici reazioni, e la condizione necessaria di isostaticità è soddisfatta:  $3t - s = 0$ . Tuttavia, è immediato realizzare che la trave in oggetto

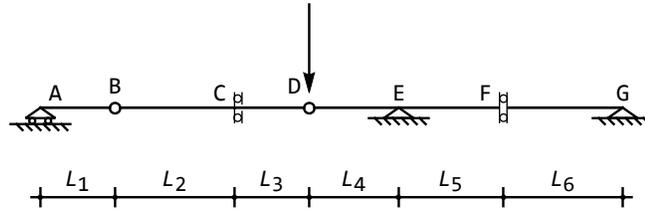


Figura 5.7: Una trave ad asse rettilineo

è una volta labile, e quindi anche una volta iperstatica. Scrivendo infatti le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale, si ha un sistema di quattro equazioni in cinque incognite:

$$\begin{aligned}
 R_{Bh} &= 0 \\
 -R_{Bh} + R_{Dh} &= 0 \\
 -R_{Dh} + R_{Eh} + R_{Fh} &= 0 \\
 -R_{Fh} + R_{Gh} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Non essendoci forze orizzontali applicate, le cinque reazioni possono essere supposte nulle. Se si utilizza la formula semplificata  $2t - s = l - i$ , si scrivono otto equazioni di equilibrio, quattro alla traslazione verticale e quattro di rotazione, mentre le incognite reattive sono le tre reazioni verticali dei tre appoggi  $A$ ,  $B$  e  $G$  (scompare la differenza tra carrello ed appoggio), le forze verticali reattive in  $B$  e  $D$ , le coppie reattive in  $C$  ed  $F$ , per un totale di sette incognite. Si ha così  $2t - s = 1$ , e la struttura è una volta labile.

## 5.7 Il caso delle travature reticolari

Un altro caso di particolare interesse è quello delle travature reticolari, intendendosi per tali le strutture costituite da tratti rigidi collegati tra loro tramite cerniere, e caricate solo con forze concentrate nelle cerniere. Per esse il calcolo del grado di labilità/iperstaticità può essere certamente condotto attraverso la formula generale. Ad esempio, nel caso di Figura 5.8, si hanno 15 tratti e quindi la struttura non vincolata ha 45 gradi di libertà. I vincoli sono rappresentati da due cerniere in cui concorrono due tratti, due cerniere in cui concorrono tre tratti, e cinque cerniere in cui concorrono quattro tratti. In totale i vincoli interni sopprimono  $2 \times 2 + 2 \times 4 + 5 \times 6 = 42$  gradi di libertà, cui andranno aggiunti i tre gradi di libertà soppressi dai vincoli esterni. Ne segue che è soddisfatta la condizione necessaria di isostaticità. E' però possibile semplificare il calcolo riguardando la travatura reticolare come un insieme di  $c$  punti materiali, le cerniere, connesse da  $a$  aste, che si comportano da pendoli. In tal modo la struttura non vincolata avrà  $2c$  gradi di libertà, cui andranno sottratti gli  $a$  gradi di libertà dei vincoli interni, ed i  $v$  gradi di libertà dei vincoli esterni. Si ha quindi la formula semplificata:

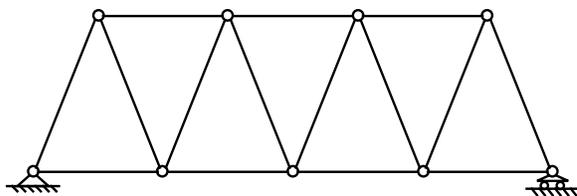


Figura 5.8: Una travatura reticolare

$$2c - a - v = l - i \quad (5.3)$$

sicuramente molto più agevole della formula generale. Nella struttura di Figura 5.8, ad esempio, si ha  $c = 9$ ,  $a = 15$  e  $v = 3$ , per cui subito:  $18 - 15 - 3 = 0$ .



## Capitolo 6

# Il procedimento di Lagrange

In questo Capitolo si utilizza il principio dei lavori virtuali per il calcolo di una reazione o di una caratteristica della sollecitazione interna su una struttura isostatica. Il metodo, noto come *procedimento di Lagrange*, si articola nelle seguenti fasi:

- Sia  $S$  una struttura isostatica, soggetta a determinati carichi, e sia  $R_i$  una generica reazione vincolare, corrispondente ad un vincolo  $V_i$ . Si elimina il vincolo  $V_i$ , rendendo quindi la struttura una volta labile
- si traccia la deformata della struttura labile, e si scrive il lavoro (virtuale) delle forze e della reazione causato da questo cinematismo
- si impone la condizione di equilibrio, annullando il lavoro calcolato al passo precedente, e quindi ricavando il valore della reazione incognita.

Del tutto analogo è il procedimento per il calcolo di una caratteristica della sollecitazione interna in una sezione  $\Sigma$  di una struttura isostatica:

- Sia  $S$  una struttura isostatica, soggetta a determinati carichi, e sia  $\Sigma$  una generica sezione in cui si voglia conoscere una caratteristica della sollecitazione interna. Si opera una sconnessione in  $\Sigma$ , secondo il seguente schema:
  - se si ricerca il momento flettente, si introduce una sconnessione di rotazione relativa, cosicchè la sezione  $\Sigma$  diviene una cerniera, soggetta al momento flettente  $M$  incognito
  - se si ricerca lo sforzo normale, si introduce una sconnessione di scorrimento assiale relativa, cosicchè la sezione  $\Sigma$  diviene un bipendolo ad asse ortogonale all'asse della trave, soggetto allo sforzo normale  $N$

- se si ricerca lo sforzo di taglio, si introduce una sconnessione di scorrimento trasversale relativa, cosicchè la sezione  $\Sigma$  diviene un bipendolo ad asse parallelo all'asse della trave, soggetto allo sforzo di taglio  $T$
- si traccia il meccanismo della struttura labile, e si scrive il lavoro (virtuale) delle forze e della caratteristica, causato da questo cinematismo
- si impone la condizione di equilibrio, annullando il lavoro calcolato al passo precedente, e quindi ricavando il valore della caratteristica incognita.

E' evidente che il procedimento di Lagrange è tanto più conveniente quanto più è semplice tracciare il relativo cinematismo.

## 6.1 Il calcolo delle reazioni

Si inizia con un esempio banale, su una trave ad una sola campata ad asse rettilineo

### 6.1.1 Una trave appoggiata

Si consideri la trave a mensola di Figura 6.1, di luce  $L$ , soggetta ad una forza in mezzeria, ad una forza nell'estremo libero, e ad una coppia concentrata nell'estremo libero. Si voglia conoscere il valore della coppia reattiva dell'incastro. Rimuovendo il vincolo rotazionale in  $A$ , l'incastro si riduce ad un appoggio, ca-

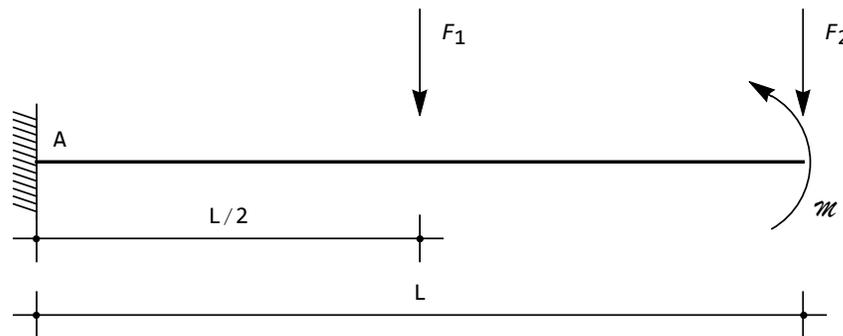


Figura 6.1: Una trave a mensola

ricato dalla coppia reattiva  $\mathcal{M}_{rA}$ , il cui valore dovrà essere calcolato attraverso la scrittura del principio dei lavori virtuali. A ciò fare, si osservi che la struttura è divenuta una volta labile, ed è possibile tracciarne un cinematismo, come in Figura 6.2.

Il principio dei lavori virtuali esprime la condizione di equilibrio della struttura, imponendo che sia nulla la parte del primo ordine del lavoro svolto da

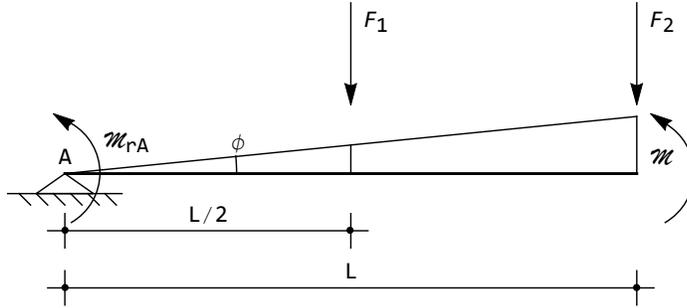


Figura 6.2: Lo schema per il calcolo della coppia reattiva dell'incastro

forze e reazioni:

$$L_v = \mathcal{M}_{rA}\phi + F_1 u_2\left(\frac{L}{2}\right) + F_2 u_2(L) + \mathcal{M}\phi = 0 \quad (6.1)$$

Si devono ora esprimere le quantità cinematiche in funzione di una singola coordinata lagrangiana, ad esempio l'angolo  $\phi$ . Dovrà allora essere:

$$u_2\left(\frac{L}{2}\right) = -\phi \frac{L}{2} \quad (6.2)$$

$$u_2(L) = -\phi L \quad (6.3)$$

dove il segno negativo si giustifica in quanto a rotazioni positive (antiorarie) corrispondono spostamenti negativi (verso l'alto). Si noti che il principio dei lavori virtuali impone la scrittura delle relazioni precedenti, al posto delle corrispondenti relazioni trigonometriche:

$$u_2\left(\frac{L}{2}\right) = -\tan(\phi) \frac{L}{2} \quad (6.4)$$

$$u_2(L) = -\tan(\phi)L \quad (6.5)$$

in quanto si deve annullare solo la parte del primo ordine dello spostamento (atto di moto). La (6.1) diviene allora:

$$L_v = \mathcal{M}_{rA}\phi - F_1 \frac{L}{2}\phi - F_2 L\phi + \mathcal{M}\phi = 0 \quad (6.6)$$

ed attesa l'arbitrarietà di  $\phi$ , si potrà dedurre il valore della coppia reattiva:

$$\mathcal{M}_{rA} = F_1 \frac{L}{2} + F_2 L - \mathcal{M} = 0 \quad (6.7)$$

### 6.1.2 Trave Gerber

Si consideri ora la trave a tre luci di Figura 6.3, ovviamente isostatica, e si voglia calcolare la reazione dell'appoggio in  $B$ . Rimuovendo l'appoggio stesso,

e sostituendolo con la reazione incognita  $R_B$ , la struttura diviene una volta labile, il centro  $C_1$  del primo tratto è situato in corrispondenza dell'appoggio in  $A$ , il centro relativo  $C_{12}$  è situato nella cerniera, ed infine il centro assoluto  $C_2$  del secondo tratto si situa nell'appoggio in  $D$ . E' allora possibile tracciare

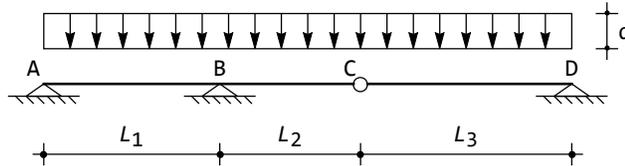


Figura 6.3: Una trave a tre appoggi e cerniera

una deformata, su cui calcolare il lavoro virtuale del carico distribuito e della reazione  $R_B$ . Sullo schema di Figura 6.4 si scrive:

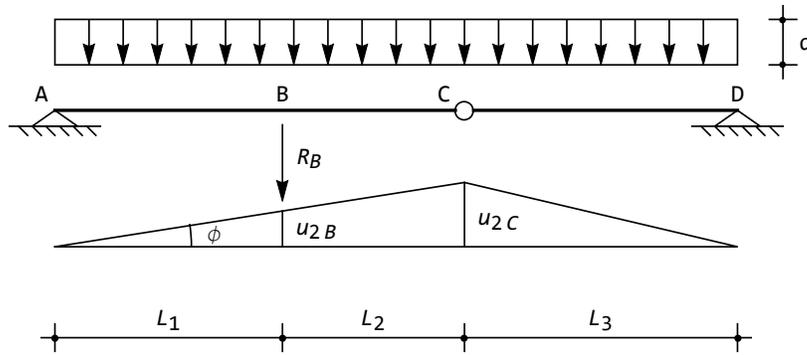


Figura 6.4: Lo schema per il calcolo della reazione dell'appoggio in  $B$

$$L_v = R_B u_{2B} + q \int_0^{L_1+L_2+L_3} u_2(x_3) dx_3 = 0 \quad (6.8)$$

Nel caso in esame, è possibile ricavare, dalla stessa Figura 6.4:

$$u_{2B} = -L_1 \phi \quad (6.9)$$

$$u_{2C} = -(L_1 + L_2) \phi \quad (6.10)$$

$$\int_0^{L_1+L_2+L_3} u_2(x_3) dx_3 = -\frac{1}{2} (L_1 + L_2)^2 \phi - \frac{1}{2} (L_1 + L_2) L_3 \phi \quad (6.11)$$

e quindi:

$$R_B L_1 + q \left( \frac{1}{2} (L_1 + L_2)^2 + \frac{1}{2} (L_1 + L_2) L_3 \right) = 0 \quad (6.12)$$

da cui la richiesta reazione:

$$R_B = -\frac{q}{2} (L_1 + L_2) \left( 1 + \frac{L_2}{L_1} + \frac{L_3}{L_1} \right) \quad (6.13)$$

### Verifica

Utilizzando le equazioni cardinali della statica, dovranno scriversi le quattro condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_A + R_B + T_C + q(L_1 + L_2) &= 0 \\ -R_B L_1 - T_C (L_1 + L_2) - q \frac{(L_1 + L_2)^2}{2} &= 0 \\ -T_C + R_D + q L_3 &= 0 \\ -T_C L_3 + \frac{q L_3^2}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

dalla quarta può ricavarsi il taglio in  $C$ , che sostituito nella seconda fornisce la (6.13).

### 6.1.3 Arco a quattro cerniere con pendolo

Si vuole ora calcolare la reazione del pendolo  $EF$  sull'arco di Figura 6.5.

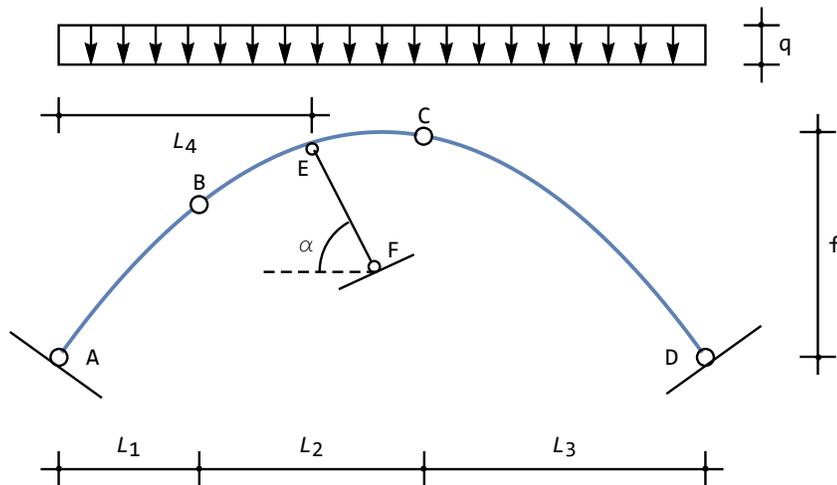


Figura 6.5: Un arco a quattro cerniere e pendolo esterno

Si tratta di un arco parabolico di luce  $L$  e freccia  $f$ , incernierato alle imposte e diviso in tre tratti dalla presenza di due cerniere poste a distanza  $L_1$  ed  $L_1 + L_2$  dalla cerniera di sinistra. Il pendolo  $EF$  insiste sul secondo tratto, ed è inclinato

di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale. La struttura è soggetta ad un carico verticale uniformemente distribuito su tutta la luce, di intensità  $q$ . La curva dell'arco è quindi descritta dalla funzione parabolica:

$$g(x_3) = 4 \frac{f}{L^2} x_3(L - x_3) \quad (6.15)$$

La struttura è isostatica, in quanto possono scriversi nove equazioni di equilibrio nelle nove incognite (cinque reazioni esterne, due tagli e due sforzi normali nelle due cerniere interne), sicchè la reazione del pendolo può calcolarsi applicando il procedimento di Lagrange: si rimuove il pendolo, sostituendo ad esso la reazione incognita  $R_p$ , si traccia il cinematismo per la struttura labile così ottenuta, e si annulla il lavoro virtuale del carico e della reazione  $R_p$ .

### Il tracciamento della deformata

La ricerca dei centri di rotazione non presenta alcun problema: il centro di rotazione assoluto  $C_1$  del primo tratto e  $C_3$  del terzo tratto sono situati nelle cerniere  $A$  e  $D$ , rispettivamente, i due centri relativi  $C_{12}$  e  $C_{23}$  sono individuati nelle due cerniere interne  $B$  e  $C$ , mentre il centro di rotazione assoluto  $C_2$  è individuabile intersecando la retta che congiunge  $C_1$  e  $C_{12}$  con la retta che congiunge  $C_{23}$  e  $C_3$ . Si può quindi tracciare la deformata in Figura 6.6.

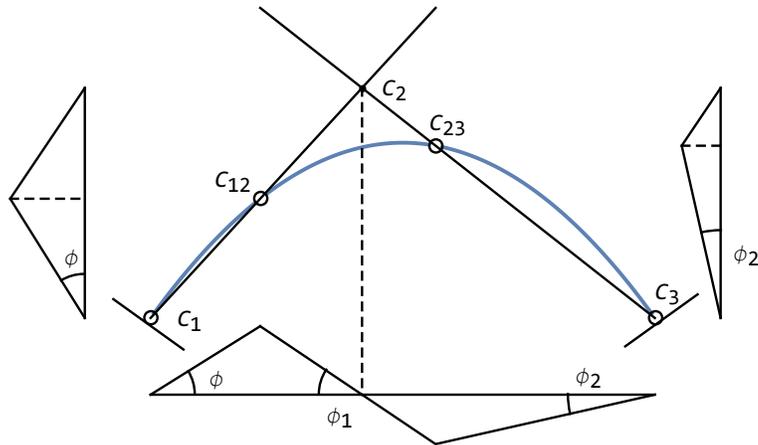


Figura 6.6: Le deformate per l'arco a quattro cerniere

La retta  $a$  che passa per  $C_1$  e  $C_{12}$  è identificabile analiticamente come la retta che passa per i punti di coordinate  $(0,0)$  ed  $(L_1, g(L_1))$ , e quindi avrà equazione:

$$y_a(x_3) = \frac{g(L_1)}{L_1} x_3 \quad (6.16)$$

mentre la retta  $b$  che passa per i punti  $C_{23}$  e  $C_3$  è identificabile analiticamente come la retta che passa per i punti di coordinate  $(L_1 + L_2, g(L_1 + L_2))$  ed  $(L, 0)$ , e quindi avrà equazione:

$$y_b(x_3) = \frac{g(L_1 + L_2)}{L_3}(L - x_3) \quad (6.17)$$

Infine, le coordinate del centro di rotazione assoluto  $C_2$  si ottengono intersecando le rette  $a$  e  $b$ , e quindi può scriversi<sup>1</sup>:

$$x_{3C_2} = L_1 \frac{Lg(L_1 + L_2) - L_1 - L_2}{L_3g(L_1) + L_1g(L_1 + L_2)} \quad (6.21)$$

$$x_{2C_2} = \frac{g(L_1)}{L_1} x_{3C_2} \quad (6.22)$$

Si traccia ora il diagramma delle componenti verticali di spostamento, partendo dalla cerniera di sinistra, ed assegnando al primo tratto una rotazione arbitraria di ampiezza  $\phi$ , positiva se antioraria. Lo spostamento verticale della cerniera in  $B$  sarà quindi pari a  $-\phi L_1$ , e la conoscenza di tale spostamento permette il tracciamento della deformata del secondo tratto, in quanto si conosce il punto di nullo, sulla verticale per  $C_2$ . L'angolo  $\phi_1$  di cui ruota il secondo tratto è pari allora a:

$$\phi_1 = -\phi \frac{L_1}{x_{3C_2} - L_1} \quad (6.23)$$

Lo spostamento verticale della cerniera in  $C$  è calcolabile come:

$$u_{2C} = -\phi_1 \frac{L_1 + L_2}{x_{3C_2}} = \phi \frac{L_1}{x_{3C_2} - L_1} \frac{L_1 + L_2}{x_{3C_2}} \quad (6.24)$$

e quindi l'angolo  $\phi_2$  di cui ruota il terzo tratto è pari a:

$$\phi_2 = \frac{u_{2C}}{L_3} = -\phi_1 \frac{L_1 + L_2}{L_3 x_{3C_2}} = \phi \frac{L_1}{L_3} \frac{L_1 + L_2}{(x_{3C_2} - L_1) x_{3C_2}} \quad (6.25)$$

<sup>1</sup>Si ricorda che la retta passante per i punti di coordinate  $(z_1, y_1)$  e  $(z_2, y_2)$  è esprimibile come:

$$y(z) = \frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1} z + \frac{z_2 y_1 - z_1 y_2}{z_2 - z_1} \quad (6.18)$$

mentre l'intersezione tra le due rette di equazioni:

$$\begin{aligned} y_a(z) &= m_a z + n_a \\ y_b(z) &= m_b z + n_b \end{aligned} \quad (6.19)$$

ha coordinate:

$$\begin{aligned} z_I &= \frac{n_b - n_a}{m_a - m_b} \\ y_I &= m_a \frac{n_b - n_a}{m_a - m_b} + n_a \end{aligned} \quad (6.20)$$

Il diagramma delle componenti orizzontali di spostamento può tracciarsi analogamente: il primo tratto ruota dell'angolo  $\phi$ , provocando uno spostamento orizzontale verso sinistra della cerniera  $B$  pari a:

$$u_{3B} = -\phi g(L_1) \quad (6.26)$$

Il diagramma relativo al secondo tratto può tracciarsi dalla conoscenza di questo valore, e dalla conoscenza dell'ordinata del centro  $C_2$ , dove lo spostamento si annulla. Si otterrà una retta inclinata dell'angolo  $\phi_1$ , che permetterà anche di leggere lo spostamento orizzontale della cerniera in  $C$ . Si può quindi tracciare anche la deformata relativa al terzo tratto, congiungendo tale valore con il punto di nullo in  $D$ , ed ottenendo una retta inclinata dell'angolo  $\phi_2$ .

### La scrittura del lavoro virtuale

Se  $u_{3E}$  e  $u_{2E}$  indicano gli spostamenti orizzontali e verticali del punto di applicazione del pendolo, si avrà:

$$L_v = q \int_0^L u_2(x_3) dz x_3 + R_{pv} u_{2E} + R_{ph} u_{3E} = 0 \quad (6.27)$$

dove:

$$R_{pv} = R_p \sin(\alpha) \quad (6.28)$$

$$R_{ph} = R_p \cos(\alpha) \quad (6.29)$$

Dalla Figura 6.6 si evince:

$$\int_0^L u_2(x_3) dx_3 = \frac{L_1}{2} u_{2B} + \frac{x_{3C_2} - L_1}{2} u_{2B} + \frac{1}{2} (L_2 + L_1 - x_{3C_2}) u_{2C} + \frac{L_3}{2} u_{2C} \quad (6.30)$$

ossia, in funzione dell'angolo arbitrario  $\phi$ :

$$\int_0^L u_2(x_3) dx_3 = -\frac{L_1^2}{2} \phi - \frac{L_1}{2} (x_{3C_2} - L_1) \phi + (L - x_{3C_2}) \phi \frac{L_1}{2L_3} \frac{L_1 + L_2}{(x_{3C_2} - L_1) x_{3C_2}} \quad (6.31)$$

Per quanto concerne invece le componenti di spostamento del punto di applicazione del pendolo, si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} u_{2E} &= -\phi_1 (x_{3C_2} - x_{3E}) = \phi \frac{L_1}{x_{3C_2} - L_1} (x_{3C_2} - x_{3E}) \\ u_{3E} &= -\phi_1 (x_{2C_2} - x_{2E}) = \phi \frac{L_1}{x_{3C_2} - L_1} (x_{2C_2} - x_{2E}) \end{aligned} \quad (6.32)$$

Ne segue, dalla (6.27):

$$\begin{aligned} L_v &= q \left( -\frac{L_1^2}{2} - \frac{L_1}{2} (x_{3C_2} - L_1) + \frac{1}{2} (L - x_{3C_2}) \frac{L_1}{L_3} \frac{L_1 + L_2}{(x_{3C_2} - L_1) x_{3C_2}} \right) + \\ &R_{pv} \frac{L_1}{x_{3C_2} - L_1} (x_{3C_2} - x_{3E}) + R_{ph} \frac{L_1}{x_{3C_2} - L_1} (x_{2C_2} - x_{2E}) = 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

ossia ancora:

$$q \left( -\frac{1}{2}L_1^2 - \frac{1}{2}(x_{3C_2} - L_1)L_1 + \frac{1}{2}(L - x_{3C_2}) \frac{L_1}{L_3} \frac{L_1 + L_2}{(x_{3C_2} - L_1)x_{3C_2}} \right) + R_{ph} \tan(\alpha) \frac{L_1}{x_{3C_2} - L_1} (x_{3C_2} - x_{3E}) + R_{ph} \frac{L_1}{x_{3C_2} - L_1} (x_{2C_2} - x_{2E}) = 0 \quad (6.34)$$

da cui subito la componente orizzontale della reazione:

$$R_{ph} = \frac{q}{2} \frac{(x_{3C_2} - L_1) \left( x_{3C_2} - (L - x_{3C_2}) \frac{L_1 + L_2}{L_3 (x_{3C_2} - L_1) x_{3C_2}} \right)}{(\tan(\alpha) (x_{3C_2} - x_{3E}) + (x_{2C_2} - x_{2E}))} \quad (6.35)$$

ed infine:

$$\begin{aligned} R_{pv} &= R_{ph} \tan(\alpha) \\ R_p &= \sqrt{R_{pv}^2 + R_{ph}^2} \end{aligned} \quad (6.36)$$

### Un esempio numerico

Si consideri ora un arco con luce di 20 metri e freccia 5 metri, ipotizzando che le cerniere intermedie siano situate a 6 metri ed a 12 metri dall'imposta di sinistra. Il pendolo agisca invece all'imposta di sinistra, e sia inclinato di un angolo  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ . Il carico  $q$  abbia valore unitario.

Le coordinate del punto  $C$  saranno fornite da:

$$\begin{aligned} x_{3C} &= L_1 \frac{(Lg[L_1 + L_2] - L_1 - L_2)}{L_3g[L_1] + L_1g[L_1 + L_2]} = 8.269 \\ x_{2C} &= \frac{g[L_1]}{L_1} x_{3C} = 6.946 \end{aligned} \quad (6.37)$$

mentre le reazioni sono fornite da:

$$\begin{aligned} R_{pz} &= 3.454q \\ R_{py} &= 2.5095q \\ R_p &= 4.2695q \end{aligned} \quad (6.38)$$

### 6.1.4 Arco con bipendolo all'imposta

Si considera ora lo stesso arco parabolico dell'esempio precedente, ma vincolato a sinistra con un bipendolo a piano di scorrimento normale alla curva dell'asse, come in Figura 6.7. Inoltre, esso è caricato da una forza  $F$  concentrata in corrispondenza della seconda cerniera, e da una coppia concentrata  $\mathcal{M}$  agente sul terzo tratto.

Eliminato il pendolo  $EF$ , la struttura diviene labile, e si deve tracciare il relativo cinematismo, individuando i centri e tracciando le relative deformate.

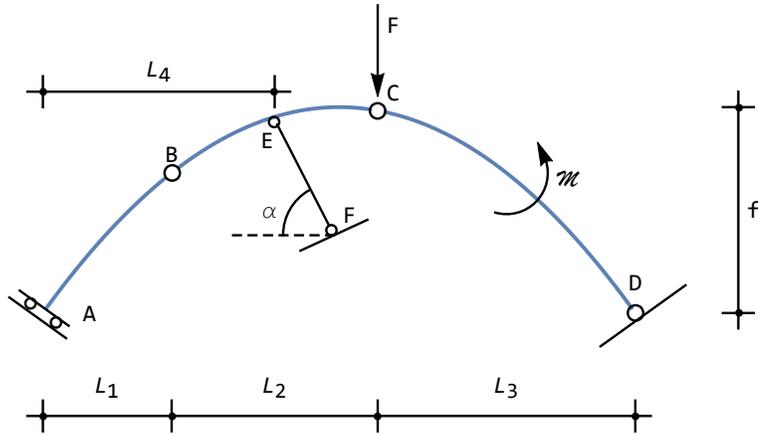


Figura 6.7: Arco parabolico con bipendolo, tre cerniere e pendolo esterno

La presenza del bipendolo fissa il centro di rotazione  $C_1$  nel punto improprio della retta tangente all'asse in A, ossia lungo la retta:

$$y_1(x_3) = 4\frac{f}{L}x_3 \quad (6.39)$$

mentre i centri  $C_{12}$ ,  $C_{23}$  e  $C_3$  sono immediatamente situabili in corrispondenza delle cerniere in B, C e D. Ne segue che il centro di rotazione assoluto  $C_2$  deve trovarsi sull'intersezione della retta  $a$  parallela alla (6.39), e passante per B, e la retta  $b$  passante per C e D. La retta  $a$  avrà equazione<sup>2</sup>:

$$y_a(x_3) = x_{2B} + (x_3 - x_{3B})\frac{4f}{L} = g(L_1) + (x_3 - L_1)\frac{4f}{L} \quad (6.41)$$

mentre la retta  $b$  avrà equazione fornita dalla (6.17):

$$y_b(x_3) = \frac{g(L_1 + L_2)}{L_3}(L - x_3) \quad (6.42)$$

L'intersezione fornisce le coordinate del centro  $C_2$ :

$$x_{3C_2} = \frac{L^2g[L_1 + L_2] + (-Lg[L_1] + 4fL_1)L_3}{Lg[L_1 + L_2] + 4fL_3} \quad (6.43)$$

$$x_{2C_2} = \frac{g[L_1 + L_2](Lg[L_1] + 4f(L - L_1))}{Lg[L_1 + L_2] + 4fL_3} \quad (6.44)$$

Si inizia ad imporre una componente verticale arbitraria  $\delta$  allo spostamento del

<sup>2</sup>Si ricorda che una retta, passante per un punto di coordinate  $(x_1, y_1)$  e parallela alla retta di equazione  $y(x) = mx + n$ , avrà equazione:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (6.40)$$

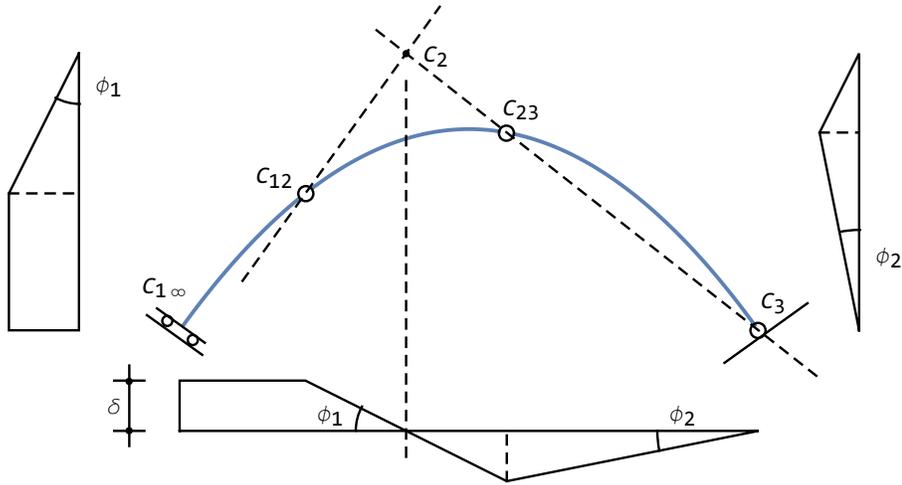


Figura 6.8: Il cinematiso per l'arco parabolico con bipendolo, tre cerniere e pendolo esterno

bipendolo, assumendo quindi  $\delta$  come coordinata lagrangiana. I punti del tratto *I* subiscono lo stesso abbassamento, sicchè il diagramma prosegue costante fino a  $C_{12}$ . Per tracciare la deformata del secondo tratto, basta poi connettere questo valore con il punto di nullo in corrispondenza di  $C_2$ , e proseguendo fino a  $C_{23}$ . Il tratto *II* ruota quindi di un angolo:

$$\phi_1 = \frac{\delta}{x_{3C_2} - L_1} \quad (6.45)$$

e quindi lo spostamento verticale della cerniera  $C$  è pari a:

$$u_{2C} = \phi_1 (L_1 + L_2 - x_{3C_2}) = \delta \frac{(L_1 + L_2 - x_{3C_2})}{x_{3C_2} - L_1} \quad (6.46)$$

Infine, il diagramma delle componenti verticali di spostamento lungo il terzo tratto non presenta difficoltà, dovendosi semplicemente congiungere l'abbassamento in  $C_{23}$  con il valore nullo in corrispondenza di  $C_3$ . Il tratto *III* quindi ruota di un angolo:

$$\phi_2 = \frac{u_{2C}}{L_3} = \frac{\delta}{L_3} \frac{(L_1 + L_2 - x_{3C_2})}{x_{3C_2} - L_1} \quad (6.47)$$

Per tracciare i diagrammi delle componenti orizzontali di spostamento, si parte dal tratto *III*, che ruota di  $\phi_2$ . Ne segue che lo spostamento orizzontale della cerniera  $C$  è pari a:

$$u_{3C} = \phi_2 g (L_1 + L_2) \quad (6.48)$$

Da qui in poi, si può tracciare la retta che giunge a zero in corrispondenza di  $x_{2C_2}$ , fermo restando che tale diagramma ha significato solo fino alla chiave dell'arco. Infine, la parte di sinistra ruota dell'angolo  $\phi_1$ , permettendo il tracciamento del primo tratto di diagramma, da  $x_{2C_2}$  a  $g[L_1]$ , per poi proseguire costante, in quanto il tratto  $I$  non ruota. Il diagramma finale si presenta come in Figura 6.8

### La scrittura del lavoro virtuale

Se  $u_{3E}$  e  $u_{2E}$  indicano gli spostamenti orizzontali e verticali del punto di applicazione del pendolo, si avrà:

$$L_v = F u_{2C} + \mathcal{M} \phi_2 + R_{pv} u_{2E} + R_{ph} u_{3E} = 0 \quad (6.49)$$

dove:

$$R_{pv} = R_p \sin(\alpha) \quad (6.50)$$

$$R_{ph} = R_p \cos(\alpha) \quad (6.51)$$

Dalla Figura 6.8 si evince:

$$u_{2E} = -\phi_1 (x_{3C_2} - x_{3E}) = \frac{\delta}{x_{3C_2} - L_1} (x_{3C_2} - x_{3E}) \quad (6.52)$$

$$u_{3E} = -\phi_1 (x_{2C_2} - x_{2E}) = \frac{\delta}{x_{2C_2} - L_1} (x_{2C_2} - x_{2E})$$

e quindi, utilizzando anche la (6.45) e la (6.46), il lavoro virtuale (6.49) si scrive:

$$L_v = F \delta \frac{(L_1 + L_2 - x_{3C_2})}{x_{3C_2} - L_1} + \mathcal{M} \frac{\delta}{L_3} \frac{(L_1 + L_2 - x_{3C_2})}{x_{3C_2} - L_1} + R_{pv} \frac{\delta}{x_{3C_2} - L_1} (x_{3C_2} - x_{3E}) + R_{ph} \frac{\delta}{x_{3C_2} - L_1} (x_{2C_2} - x_{2E}) = 0 \quad (6.53)$$

ossia ancora:

$$L_v = F(L_1 + L_2 - x_{3C_2}) + \frac{\mathcal{M}}{L_3} (L_1 + L_2 - x_{3C_2}) + R_{pv} \tan(\alpha) (x_{3C_2} - x_{3E}) + R_{ph} (x_{2C_2} - x_{2E}) = 0 \quad (6.54)$$

da cui subito la componente orizzontale della reazione:

$$R_{ph} = - \left( F + \frac{\mathcal{M}}{L_3} \right) \frac{(L_1 + L_2 - x_{3C_2})}{(\tan(\alpha) (x_{3C_2} - x_{3E}) + (x_{2C_2} - x_{2E}))} \quad (6.55)$$

ed infine:

$$R_{pv} = R_{ph} \tan(\alpha) \quad (6.56)$$

$$R_p = \sqrt{R_{pv}^2 + R_{ph}^2}$$

### Un esempio numerico

Si consideri ora un arco con luce di 20 metri e freccia 5 metri, ipotizzando che le cerniere intermedie siano situate a 6 metri ed a 12 metri dall'imposta di sinistra. Il pendolo agisca invece all'imposta di sinistra, e sia inclinato di un angolo  $\alpha = \pi/5$ . Il carico sia unitario.

Le coordinate del punto  $C$  saranno fornite da:

$$\begin{aligned} x_{3C} &= 8.625 \\ x_{2C} &= 8.19 \end{aligned} \quad (6.57)$$

mentre le reazioni sono fornite da:

$$\begin{aligned} R_{ph} &= -1.07879 q \\ R_{pv} &= -0.783787 q \\ R_p &= 1.33346 q \end{aligned} \quad (6.58)$$

### 6.1.5 Un portale zoppo

Si consideri il portale zoppo di Figura 6.9, incernierato a sinistra e con carrello a destra, soggetto ad una forza verticale  $F$  agente a distanza  $L_1$  dalla cerniera a sinistra, e ad una forza orizzontale  $F_1$  agente in sommità del ritto di sinistra. Si voglia la reazione del carrello di destra.

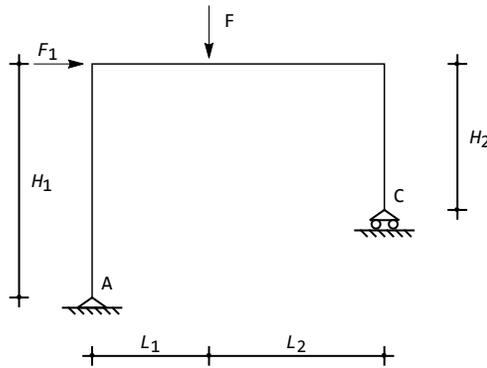


Figura 6.9: Un portale zoppo

La struttura è manifestamente isostatica, ed eliminando il carrello in  $C$  essa si trasforma in una struttura labile, il cui cinematismo può essere disegnato come in Figura 6.10. La scrittura del lavoro virtuale risulta immediata:

$$L_v = -F\phi L_1 - R_C\phi(L_1 + L_2) - F_1\phi H_1 = 0 \quad (6.59)$$

da cui subito la reazione del carrello:

$$R_C = -F \frac{L_1}{L_1 + L_2} - F_1 \frac{H_1}{L_1 + L_2} \quad (6.60)$$

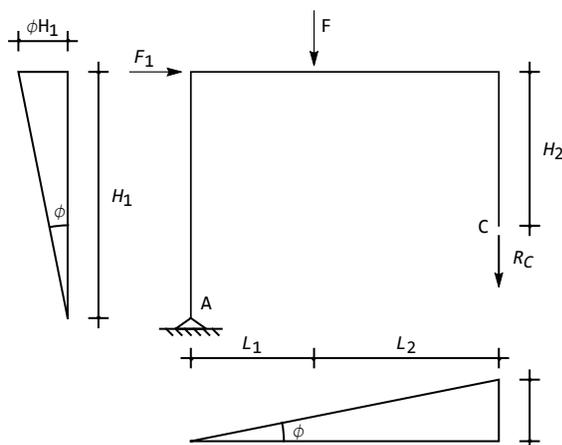


Figura 6.10: Il cinematiso per il portale zoppo di Figura 6.9

## 6.2 Il calcolo delle caratteristiche della sollecitazione

Si illustrano ora alcuni esempi di applicazione del metodo di Lagrange per il calcolo di una caratteristica della sollecitazione interna.

### 6.2.1 Trave a due campate

Come primo, immediato esempio, si consideri la trave di Figura 6.11, incastrata a sinistra, appoggiata a destra, e con cerniera intermedia a distanza  $L_1$  dall'incastro. Si voglia calcolare il momento flettente nella generica sezione  $S$  appartenente alla semiluce di sinistra della trave, ossia posta a distanza  $x_3$  dall'incastro, con  $x_3 < L_1$ .

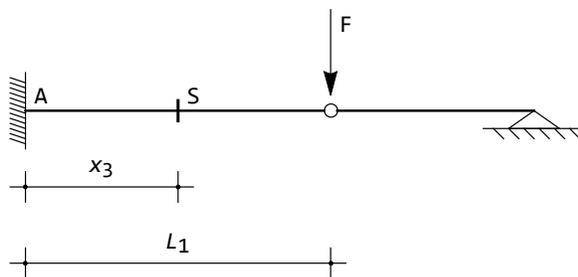


Figura 6.11: Una semplice trave con incastro ed appoggio, e cerniera intermedia

Secondo la procedura sopra illustrata, si inserisce una cerniera in  $S$ , insieme al momento flettente  $M(x_3)$  incognito, e si traccia un possibile cinematismo della risultante struttura labile, come in Figura 6.12.

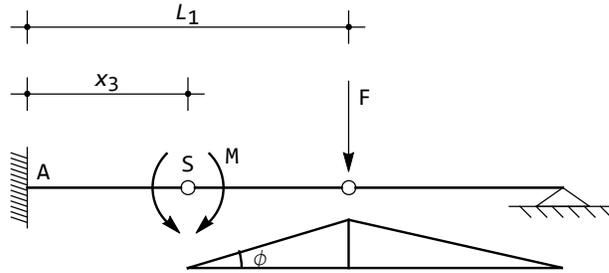


Figura 6.12: Il cinematismo della trave di Figura 6.11

La scrittura del principio dei lavori virtuali è immediata:

$$L_v = -M\phi - F\phi(L_1 - x_3) = 0 \quad (6.61)$$

da cui:

$$M(x_3) = -F(L_1 - x_3) \quad (6.62)$$

Si noti che quando la sezione  $S$  coincide con la sezione di incastro, si ottiene  $M(0) = -FL_1$ , mentre in corrispondenza della forza si ritrova un momento nullo. Si può quindi tracciare il diagramma del momento per l'intera semiluce di sinistra.

Come utile esercizio, si calcoli il taglio nella stessa sezione  $S$ .

## 6.2.2 Trave appoggiata con sbalzo

Si voglia ora conoscere il diagramma del taglio per la trave appoggiata con sbalzo di Figura 6.13, soggetta ad un carico uniformemente distribuito su tutta la luce. A far ciò, si scelga una sezione all'ascissa generica  $x_3 < L_1$ , e si introduca in  $x_3$  un bipendolo ad asse verticale, insieme alla forza di taglio  $T(x_3)$ . La risultante struttura presenta una labilità, ed un suo possibile cinematismo è disegnato in Figura 6.14: assegnata una rotazione di ampiezza arbitraria  $\phi$  al primo tratto, la faccia di sinistra del bipendolo si alzerà della quantità  $\phi x_3$ . Il secondo tratto sarà anch'esso ruotato dello stesso angolo  $\phi$ , e quindi la faccia di destra del bipendolo si abbasserà di  $\phi(L_1 - x_3)$ . La scrittura del principio dei lavori virtuali non presenta difficoltà:

$$L_v = -T(x_3)\phi x_3 - T(x_3)\phi(L_1 - x_3) + \int_0^{x_3} qu_2(\zeta) d\zeta + \int_{x_3}^{L_1} qu_2(\zeta) d\zeta + \int_{L_1}^{L_1+L_2} qu_2(\zeta) d\zeta = 0 \quad (6.63)$$

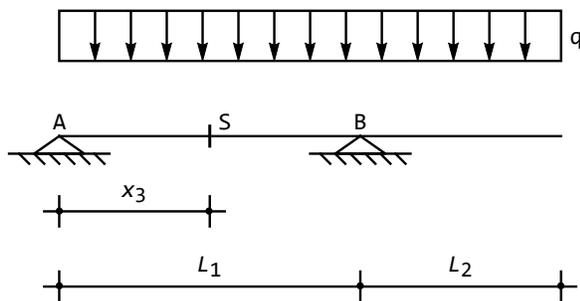


Figura 6.13: Una trave appoggiata con sbalzo

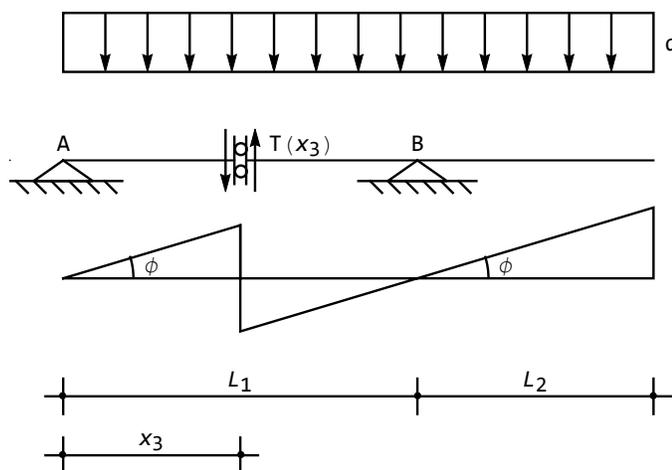


Figura 6.14: Il cinematismo della trave di Figura 6.13

e semplificando:

$$L_v = -T(x_3)\phi L_1 + q \int_0^{x_3} u_2(\zeta) d\zeta + q \int_{x_3}^{L_1} u_2(\zeta) d\zeta + q \int_{L_1}^{L_1+L_2} u_2(\zeta) d\zeta = 0 \quad (6.64)$$

e svolgendo gli integrali:

$$L_v = -T(x_3)\phi L_1 - q\phi \frac{x_3^2}{2} + q\phi \frac{(L_1 - x_3)^2}{2} - q\phi \frac{L_2^2}{2} = 0 \quad (6.65)$$

da cui:

$$T(x_3) = -\frac{q}{2} \left( L_1 - 2x_3 - \frac{L_2^2}{L_1} \right) \quad (6.66)$$

Si completi l'esercizio individuando una sezione  $S$  sullo sbalzo.

### 6.2.3 Portale con quattro cerniere e pendolo

Si consideri il portale a quattro cerniere con pendolo interno di Figura 6.15, sollecitato da una coppia agente in corrispondenza dell'appoggio di sinistra. Si voglia calcolare lo sforzo normale nel pendolo.

Sopprimendo il pendolo, la struttura diviene labile, ed il corrispondente cinematismo è riportato in Figura 6.16, insieme ai centri di rotazione necessari al suo tracciamento. Il centro  $C_2$ , con semplici considerazioni di similitudine geometrica, avrà coordinate  $(3L, 6H)$ , dovendo situarsi all'intersezione delle due rette passanti per  $C_1$  e  $C_{12}$ , e  $C_{23}$  e  $C_3$ , rispettivamente.

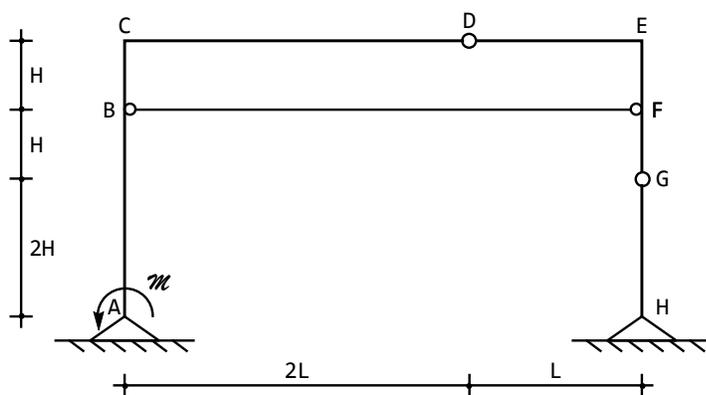


Figura 6.15: Un portale a quattro cerniere con pendolo

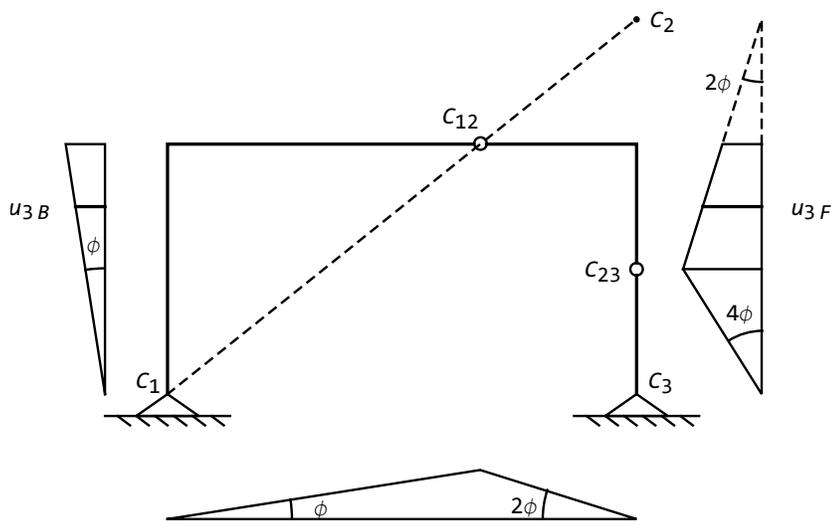


Figura 6.16: Il cinematismo del portale con pendolo soppresso

Assegnata la coordinata lagrangiana  $\phi$ , e tracciato il diagramma degli spostamenti verticali del primo tratto, si giunge in corrispondenza di  $C_{12}$ . Si prosegue poi lungo il secondo tratto, annullando gli spostamenti in corrispondenza del centro  $C_2$ . Ne segue che il secondo tratto ruota di  $-2\phi$ . Gli spostamenti orizzontali del primo tratto si tracciano considerando che il tratto ruota di  $\phi$ , a partire da  $C_1$ . Gli spostamenti orizzontali del secondo tratto si ottengono ruotando il tratto di  $-2\phi$  intorno al punto  $C_2$ , ottenendo così lo spostamento orizzontale del centro  $C_{23}$ . Infine, si prosegue annullando gli spostamenti in corrispondenza di  $C_3$ . Poichè la cerniera in  $C_{23}$  ha uno spostamento pari a  $-8\phi H$ , il terzo tratto ruoterà di  $4\phi$ .

Nella stessa Figura sono anche indicati gli spostamenti orizzontali dei punti  $B$  ed  $F$ , dove agisce il pendolo:

$$u_{3B} = -3H\phi u_{3F} = -6H\phi \quad (6.67)$$

per cui lo spostamento relativo sarà pari a:

$$\Delta u_{3BF} = u_{3F} - u_{3B} = -3H\phi \quad (6.68)$$

La scrittura del principio dei lavori virtuali porta a scrivere:

$$\mathcal{M}\phi - 3HN_{BF}\phi = 0 \quad (6.69)$$

da cui lo sforzo normale:

$$N_{BF} = \frac{\mathcal{M}}{3H} \quad (6.70)$$

## Capitolo 7

# Calcolo delle caratteristiche per strutture isostatiche

In questo Capitolo si illustrano alcuni metodi per tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione interna, limitatamente al caso di strutture isostatiche. Qualunque sia l'approccio usato, analitico, geometrico o grafico, si dovrà far uso delle equazioni di equilibrio, che impongono le seguenti relazioni tra carichi applicati e caratteristiche della sollecitazione interna (c.s.i.):

$$\frac{dN(x_3)}{dx_3} = -t(x_3) \quad (7.1)$$

$$\frac{dT(x_3)}{dx_3} = -p(x_3) \quad (7.2)$$

$$\frac{dM(x_3)}{dx_3} = T(x_3) \quad (7.3)$$

Ne segue che la distribuzione dei carichi assiali e trasversali fornisce una indicazione sull'andamento del diagramma di sforzo normale e taglio:

- tratto scarico  $\rightarrow$  caratteristica costante
- tratto caricato da un carico uniformemente distribuito  $\rightarrow$  caratteristica lineare
- tratto caricato da un carico distribuito con legge lineare  $\rightarrow$  caratteristica quadratica

Inoltre, nei tratti dove il carico è positivo, la caratteristica corrispondente dovrà essere una funzione decrescente

Per il momento flettente, in base alle (7.3) potrà dirsi:

- tratto scarico  $\rightarrow$  taglio costante  $\rightarrow$  momento lineare

- tratto caricato da un carico uniformemente distribuito  $\rightarrow$  taglio lineare  $\rightarrow$  momento quadratico

Inoltre, nei tratti dove il taglio è positivo, il momento dovrà essere una funzione crescente.

Conosciuto l'andamento dei diagrammi, alcuni valori potranno dedursi in base alle condizioni ai limiti di equilibrio. Ad esempio, in corrispondenza di un estremo libero non caricato le caratteristiche dovranno annullarsi, in corrispondenza di una cerniera il momento sarà nullo, etc. Infine, si consideri che dove il taglio è nullo il momento avrà un minimo, un massimo, o un punto di flesso, e che — in generale — potranno trarsi tutte le deduzioni note dall'Analisi Matematica e dallo studio delle funzioni.

In corrispondenza dei vincoli interni e delle forze concentrate intermedie sorgono discontinuità nei diagrammi: in particolare, una forza assiale concentrata causa una discontinuità nello sforzo normale, una forza trasversale causa una discontinuità nel taglio, ed una discontinuità angolare nel momento, una coppia causa una discontinuità nel diagramma del momento. Analogamente, i vincoli introducono reazioni concentrate, e quindi altrettante discontinuità.

Nel tracciamento dei diagrammi, a ciascun tratto viene assegnato un sistema di riferimento, identificando un nodo iniziale (sia esso  $A$ ) ed un nodo finale (sia esso  $B$ ), e quindi un verso di percorrenza. L'origine viene scelta in corrispondenza del nodo iniziale, l'asse  $X_3$  viene scelto coincidente con il segmento  $AB$ , l'asse  $X_2$  viene orientato in modo da formare un angolo antiorario di novanta gradi con l'asse  $X_3$ . Ciò fatto, il taglio positivo viene riportato nel semipiano con  $x_2$  negative, mentre il momento positivo viene riportato nel semipiano con  $x_2$  positive. Qualora necessario, il verso di percorrenza viene indicato tramite apici, sicché — ad esempio —  $t^{AB}(x_3)$  viene ad indicare il diagramma del taglio lungo il tratto  $AB$ , con verso di percorrenza da  $A$  verso  $B$ .

Nel seguito si inizia con l'esaminare alcune strutture semplicissime, per poi studiare telai man mano più complessi.

## 7.1 Trave a mensola

Come primo, banale esempio, si consideri la mensola di Figura 7.1, soggetta ad un carico trasversale uniformemente distribuito.

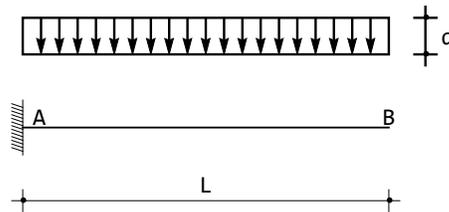


Figura 7.1: Un primo esempio elementare

## Metodo grafico

Il tracciamento dei diagrammi di taglio e momento si effettua secondo i seguenti passi:

- calcolo delle reazioni, che in questo caso risulta immediato:

$$\begin{aligned} R_A &= -qL \\ \mathcal{M}_{rA} &= \frac{qL^2}{2} \end{aligned} \quad (7.4)$$

- ad un carico uniformemente distribuito corrisponde un taglio variabile con legge lineare. Si conoscono i due valori agli estremi, in quanto:

$$\begin{aligned} t(0) &= -R_A = qL \\ t(L) &= 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

ed è quindi possibile tracciare la retta che congiunge i due punti. Si osservi che — come previsto — il taglio è una funzione decrescente con pendenza pari al carico (cfr. Figura 7.2).

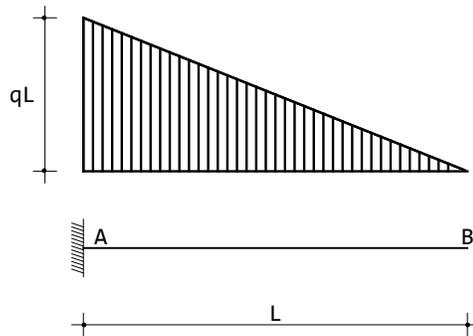


Figura 7.2: Il diagramma del taglio per la trave di Figura 7.1

- il diagramma del momento varierà con legge quadratica, e si conoscono i due valori estremi:

$$\begin{aligned} m(0) &= -\mathcal{M}_{rA} = -\frac{qL^2}{2} \\ m(L) &= 0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Inoltre, in  $L$  il diagramma del momento avrà tangenza orizzontale, in quanto la sua derivata (ossia il taglio) è nulla. Tutto ciò permette il disegno della parabola quadratica di Figura 7.3, che rappresenta il momento. Si noti che, in accordo con quanto detto in precedenza, il diagramma del momento è stato disegnato nel semipiano delle  $x_2$  negative, e quindi rappresenta una funzione crescente.

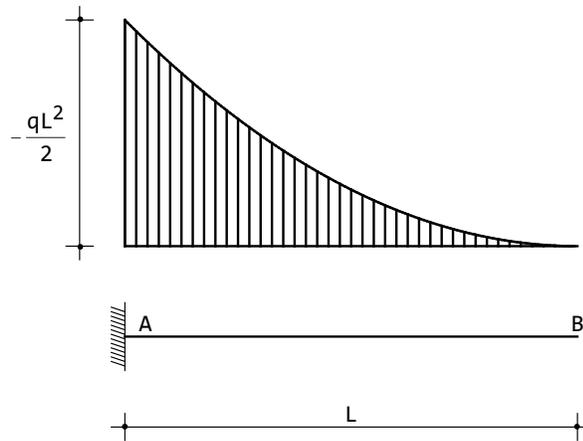


Figura 7.3: Il diagramma del momento per la trave di Figura 7.1

### Metodo analitico

Se si vogliono ottenere le formule che descrivono l'andamento dei diagrammi delle c.s.i., si consideri che, poichè il taglio è lineare, si potrà scrivere:

$$t(x_3) = a_0 + a_1 x_3 \quad (7.7)$$

e le due costanti potranno dedursi imponendo le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} t(0) &= qL \longrightarrow a_0 = qL \\ t(L) &= 0 \longrightarrow a_0 + a_1 L = 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

e quindi:

$$t(x_3) = qL \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \quad (7.9)$$

Analogamente, il momento è quadratico, e quindi si potrà scrivere:

$$m(x_3) = b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 \quad (7.10)$$

e le tre costanti dovranno dedursi a partire dalle tre condizioni:

$$\begin{aligned} m(0) &= -\frac{qL^2}{2} \longrightarrow b_0 = -\frac{qL^2}{2} \\ m(L) &= 0 \longrightarrow b_0 + b_1 L + b_2 L^2 = 0 \\ \frac{dm}{dx_3}(L) &= 0 \longrightarrow b_1 + 2b_2 L = 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} b_0 &= -\frac{qL^2}{2} \\ b_1 &= qL \\ b_2 &= -\frac{q}{2} \end{aligned} \quad (7.12)$$

e quindi il momento è esprimibile analiticamente come:

$$m(x_3) = -\frac{q}{2}(L^2 - 2Lx_3 + x_3^2) \quad (7.13)$$

## 7.2 Trave a due campate

Un secondo esempio elementare è proposto in Figura 7.4, dove una trave costituita da due tratti collegati da una cerniera è soggetta ad una stesa di carico uniforme limitatamente al tratto di destra.

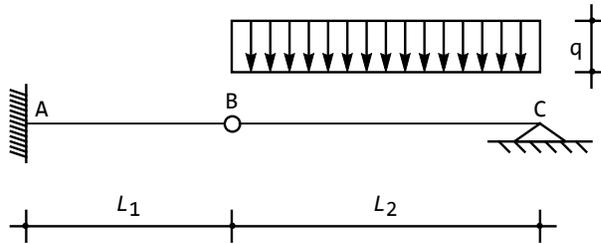


Figura 7.4: Una trave isostatica a due tratti

Poichè la trave è vincolata a sinistra con un incastro, ed a destra con un appoggio, essa risulta isostatica, e le reazioni possono calcolarsi immediatamente risolvendo le quattro equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_A + T_B &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} - T_B L_1 &= 0 \\ -T_B + R_C + qL_2 &= 0 \\ -T_B L_2 + \frac{qL_2^2}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Si ha:

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{qL_2}{2} \\ R_C &= -\frac{qL_2}{2} \\ R_A &= -\frac{qL_2}{2} \\ \mathcal{M}_{rA} &= \frac{qL_2}{2} L_1 \end{aligned} \quad (7.15)$$

Il diagramma del taglio sarà costante lungo il primo tratto, e lineare nel secondo, e poichè si conoscono i valori:

$$\begin{aligned} t(0) &= \frac{qL_2}{2} \\ t(L_1 + L_2) &= -\frac{qL_2}{2} \end{aligned} \quad (7.16)$$

si può subito tracciare il diagramma di Figura 7.5.

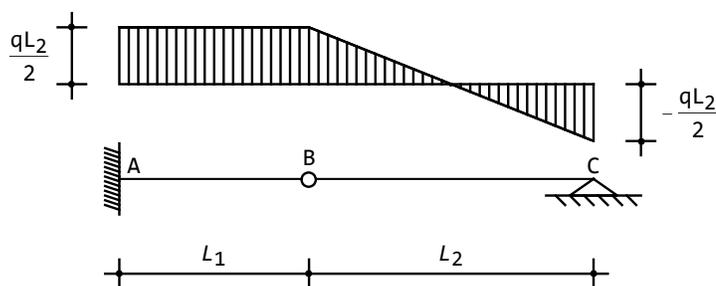


Figura 7.5: Il diagramma del taglio per la trave di Figura 7.4

Il momento varierà linearmente lungo la prima campata, e quadraticamente nella seconda. E' anche noto che esso dovrà annullarsi sia in  $B$  che in  $C$ , e che in mezzeria della seconda campata (dove il taglio è nullo) dovrà presentare una tangenza orizzontale, permettendo il tracciamento del diagramma di Figura 7.6.

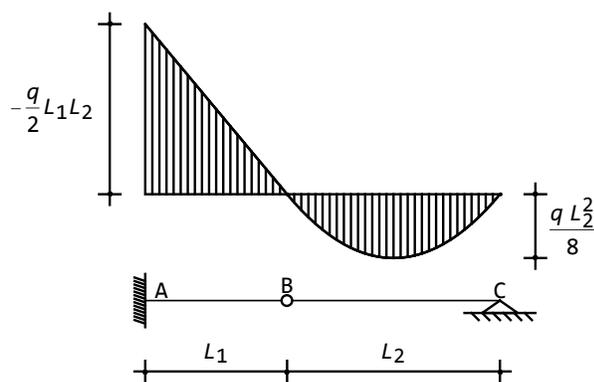


Figura 7.6: Il diagramma del momento per la trave di Figura 7.4

### Metodo analitico

Lungo il primo tratto, dove il taglio è costante ed il momento varia linearmente tra  $-\mathcal{M}_{rA}$  e zero, si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} t^{AB}(x_3) &= \frac{qL_2}{2} \\ m^{AB}(x_3) &= -\frac{qL_2}{2}L_1 \left(1 - \frac{x_3}{L_1}\right) \end{aligned} \quad (7.17)$$

assumendo un sistema di riferimento con origine in  $A$ . Nel secondo tratto il taglio varia linearmente assumendo agli estremi i valori  $\frac{qL_2}{2}$  a sinistra e  $-\frac{qL_2}{2}$  a destra. Si potrà quindi scrivere, assumendo ora un sistema di riferimento con origine in  $B$ :

$$t^{BC}(x_3) = \frac{qL_2}{2} \left(1 - 2\frac{x_3}{L_2}\right) \quad (7.18)$$

Nello stesso sistema di riferimento, il momento potrà scriversi come un polinomio quadratico:

$$m^{BC}(x_3) = b_0 + b_1x_3 + b_2x_3^2 \quad (7.19)$$

i cui coefficienti potranno calcolarsi dalle tre condizioni:

$$\begin{aligned} m^{BC}(0) &= 0 \longrightarrow b_0 = 0 \\ m^{BC}(L_2) &= 0 \longrightarrow b_0 + b_1L_2 + b_2L_2^2 = 0 \\ \frac{dm^{BC}}{dx_3}(0) &= \frac{qL_2}{2} \longrightarrow b_1 = \frac{qL_2}{2} \end{aligned} \quad (7.20)$$

In definitiva sarà:

$$m^{BC}(x_3) = \frac{qx_3}{2}(L_2 - x_3) \quad (7.21)$$

## 7.3 Mensola con sbalzo

Si consideri ora la mensola con sbalzo di Figura 7.7: per essa, si vogliono tracciare i diagrammi di taglio, momento e sforzo normale.

La struttura è composta da un ritto di altezza  $H$  e da un traverso di lunghezza  $L$ . Per il ritto, si adotta un sistema di riferimento con origine nel punto  $A$ , l'asse  $X_3$  diretto secondo l'asse della trave, verso il nodo  $B$ , e l'asse  $X_2$  diretto verso destra, mentre per il traverso si sceglie l'origine in  $B$ , l'asse  $X_3$  diretto lungo l'asse del tratto, verso il nodo  $C$ , e l'asse  $X_2$  verso il basso.

Le equazioni differenziali di equilibrio per i due tratti forniscono:

$$\begin{aligned} \frac{d^2m^{AB}}{d^2x_3} &= 0 \\ \frac{d^2m^{BC}}{d^2x_3} &= -q \end{aligned} \quad (7.22)$$

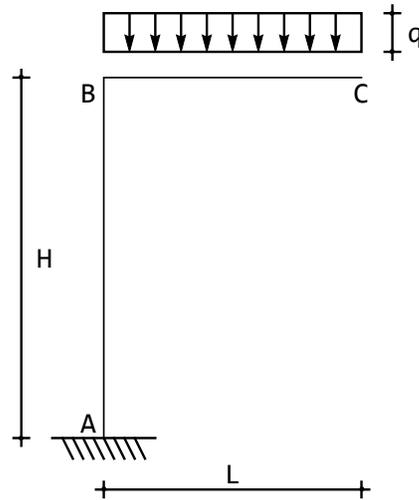


Figura 7.7: Un semplice telaio a mensola con sbalzo

ed integrando si ottiene:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 \\ m^{BC}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 - q \frac{x_3^2}{2} \end{aligned} \quad (7.23)$$

I tagli  $t^{AB}$  e  $t^{BC}$  sono forniti dalle derivate di queste espressioni:

$$\begin{aligned} t^{AB}(x_3) &= a_1 \\ t^{BC}(x_3) &= b_1 - qx_3 \end{aligned} \quad (7.24)$$

Gli sforzi normali si ottengono a partire dalle equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \frac{dn^{AB}}{dx_3} &= 0 \\ \frac{dn^{BC}}{dx_3} &= 0 \end{aligned} \quad (7.25)$$

e sono quindi costanti su ciascun tratto:

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= c_0 \\ n^{BC}(x_3) &= d_0 \end{aligned} \quad (7.26)$$

Le sei costanti di integrazione si ottengono imponendo le condizioni di equilibrio nei nodi. Nell'incastro in  $A$  non potrà scriversi nulla, in quanto il nodo triplo genera tre reazioni incognite, che andranno dedotte a posteriori. In  $B$  occorre

imporre l'equilibrio alla traslazione verticale ed orizzontale, ed alla rotazione. Sullo schema di Figura 7.8 si legge quindi:

$$\begin{aligned} n^{AB}(H) + t^{BC}(0) &= 0 \\ -t^{AB}(H) + n^{BC}(0) &= 0 \\ -m^{AB}(H) + m^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.27)$$

Per quanto riguarda i segni delle caratteristiche nei nodi, si osservi che lo sforzo normale è positivo se esce dal nodo, mentre il taglio è positivo se tende a far ruotare il concio in senso orario: ciò indipendentemente dalla scelta del sistema di riferimento. Il momento flettente, invece, è antiorario se il nodo è di partenza, orario se il nodo è di arrivo.

Nell'estremo libero  $C$ , le caratteristiche dovranno annullarsi, e quindi:

$$\begin{aligned} t^{BC}(L) &= 0 \\ n^{BC}(L) &= 0 \\ m^{BC}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (7.28)$$

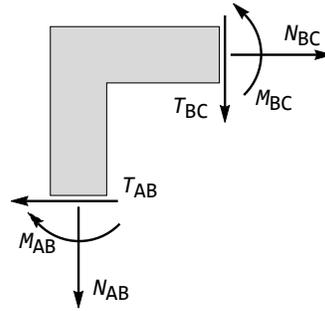


Figura 7.8: L'equilibrio del concio in  $B$

In base alle espressioni (7.23), (7.24) e (7.26), pertanto, si ottengono le sei equazioni lineari nelle sei costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} b_1 + c_0 &= 0 \\ a_1 + d_0 &= 0 \\ -a_0 - Ha_1 + b_0 &= 0 \\ -Lq + b_1 &= 0 \\ -\frac{L^2q}{2} + b_0 + Lb_1 &= 0 \\ d_0 &= 0 \end{aligned} \quad (7.29)$$

immediatamente risolvibili a fornire le costanti richieste:

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{qL^2}{2} \\ a_1 &= 0 \\ b_0 &= -\frac{qL^2}{2} \\ b_1 &= qL \\ c_0 &= -qL \\ d_0 &= 0 \end{aligned} \quad (7.30)$$

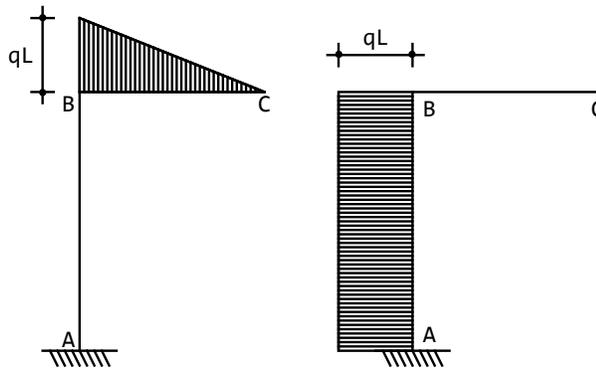


Figura 7.9: I diagrammi di sforzo normale e taglio

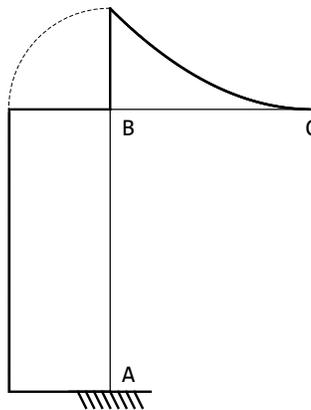


Figura 7.10: Il diagramma del momento flettente

I momenti ed i tagli saranno quindi forniti da:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{qL^2}{2} \\
 m^{BC}(x_3) &= -\frac{1}{2}q(L-x_3)^2 \\
 t^{AB}(x_3) &= 0 \\
 t^{BC}(x_3) &= q(L-x_3)
 \end{aligned}
 \tag{7.31}$$

mentre gli sforzi normali sono pari a:

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= -qL \\
 n^{BC}(x_3) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.32}$$

I diagrammi di sforzo normale e taglio sono riportati in Figura 7.9, ricordando che per convenzione il taglio si riporta dalla parte delle  $x_2$  negative, mentre lo sforzo normale si riporta dalla parte delle  $x_2$  positive.

Il diagramma del momento flettente è consegnato nella Figura 7.10, e per convenzione è riportato dalla parte delle  $x_2$  positive.

Come utile esercizio, si adotti un diverso sistema di riferimento per il ritto, con origine in  $B$ . Si verifichi che il diagramma del momento non muta, e si controlli che esso si dispone secondo le fibre tese di una possibile deformata.

Infine, se si desiderano le reazioni vincolari nell'incastro, non resta che imporre l'equilibrio del concio in  $A$ , secondo lo schema di Figura 7.11:

$$\begin{aligned} R_{Ah} + t^{AB}(0) &= 0 \\ R_{Av} - n^{AB}(0) &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} + m^{AB}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.33)$$

da cui le richieste reazioni:

$$\begin{aligned} R_{Ah} &= 0 \\ R_{Av} &= -qL \\ \mathcal{M}_{rA} &= \frac{qL^2}{2} \end{aligned} \quad (7.34)$$

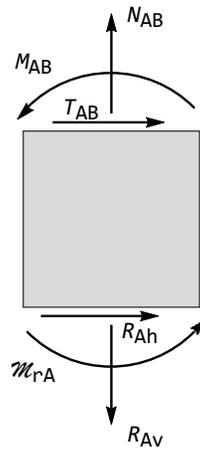


Figura 7.11: L'equilibrio del concio in  $A$

Si ricordi che le reazioni vincolari sono positive se concordi con gli assi globali, quindi se dirette verso destra, verso il basso, e se antiorarie.

## 7.4 Portale a tre cerniere con sbalzo

Si voglia ora studiare il telaio di Figura 7.12, costituito da un portale a tre cerniere con uno sbalzo, su cui agisce la forza verticale  $P$ . L'isostaticità è ovvia.

Si scrivano le equazioni di equilibrio dei due tratti:

$$\begin{aligned} R_{Av} + P + T_D &= 0 \\ R_{Aw} + N_D &= 0 \\ PL_1 - T_D L_2 - N_D H_1 &= 0 \\ R_{Ev} - T_D &= 0 \\ R_{Ew} - N_D &= 0 \\ -T_D L_3 + N_D H_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7.35)$$

avendo scelto i due poli in  $A$  ed  $F$ , rispettivamente. La soluzione delle equazioni può scriversi come:

$$\begin{aligned}
 R_{Av} &= -P \left( 1 + \frac{H_2 L_1}{H_2 L_2 + H_1 L_3} \right) \\
 R_{Aw} &= -P \frac{L_1 L_3}{H_2 L_2 + H_1 L_3} \\
 R_{Ev} &= P \frac{H_2 L_1}{H_2 L_2 + H_1 L_3} \\
 R_{Ew} &= P \frac{L_1 L_3}{H_2 L_2 + H_1 L_3} \\
 T_D &= P \frac{H_2 L_1}{H_2 L_2 + H_1 L_3} \\
 N_D &= P \frac{L_1 L_3}{H_2 L_2 + H_1 L_3}
 \end{aligned} \tag{7.36}$$

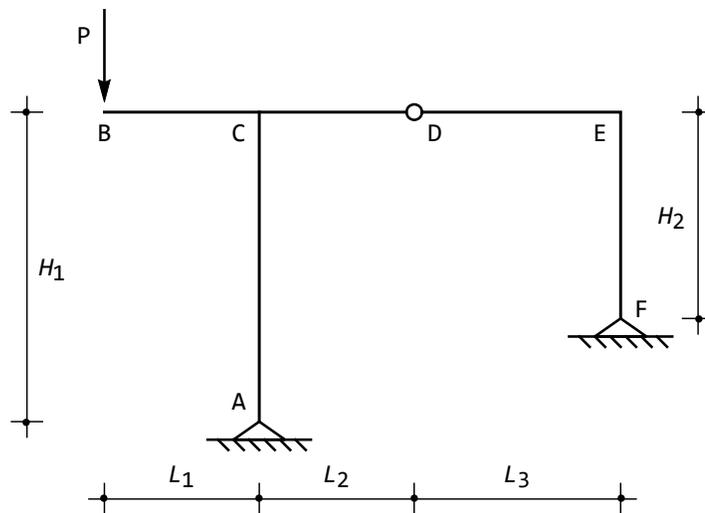


Figura 7.12: Portale a tre cerniere con sbalzo

### Metodo analitico

Per il telaio di Figura si possono individuare cinque tratti, e non essendovi carichi distribuiti, il momento è distribuito con legge lineare. Si potrà quindi porre:

$$\begin{aligned}
 m^{AC}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 \\
 m^{BC}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

$$\begin{aligned} m^{CD}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 \\ m^{DE}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\ m^{FE}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 \end{aligned}$$

mentre tagli e sforzi normali sono costanti lungo ciascun tratto. Si hanno quindi tre costanti di integrazione per ciascun tratto, per un totale di quindici incognite. Occorre quindi scrivere altrettante condizioni di equilibrio:

— nell'appoggio in  $A$ , occorre annullare il momento flettente:

$$m^{AC}(0) = 0 \quad (7.38)$$

— nell'estremo libero in  $B$ , caricato da una forza verticale  $F$ , occorre annullare momenti e sforzi normali, mentre il taglio dovrà essere uguale e contrario alla forza applicata:

$$\begin{aligned} t^{BC}(0) + F &= 0 \\ n^{BC}(0) &= 0 \\ m^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.39)$$

— nel nodo triplo in  $C$  si dovrà scrivere:

$$\begin{aligned} -n^{BC}(L_1) + n^{CD}(0) - t^{AC}(H_1) &= 0 \\ -t^{BC}(L_1) + t^{CD}(0) + n^{AC}(H_1) &= 0 \\ -m^{BC}(L_1) + m^{CD}(0) - m^{AC}(H_1) &= 0 \end{aligned} \quad (7.40)$$

— nella cerniera in  $D$ , sforzi normali e tagli devono essere continui, e devono annullarsi i momenti flettenti. Si hanno quindi le quattro condizioni:

$$\begin{aligned} -n^{CD}(L_2) + n^{DE}(0) &= 0 \\ -t^{CD}(L_2) + t^{DE}(0) &= 0 \\ m^{CD}(L_2) &= 0 \\ m^{DE}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.41)$$

— nel nodo d'angolo  $E$  si hanno le condizioni:

$$\begin{aligned} -n^{DE}(L_3) - t^{FE}(H_2) &= 0 \\ -t^{DE}(L_3) + n^{FE}(H_2) &= 0 \\ -m^{DE}(L_3) - m^{FE}(H_2) &= 0 \end{aligned} \quad (7.42)$$

— infine, nell'appoggio in  $F$  sarà da annullare il momento flettente:

$$m^{FE}(0) = 0 \quad (7.43)$$

Le risultanti equazioni si possono risolvere facilmente, ottenendo le costanti di integrazione, e quindi i momenti flettenti:

$$\begin{aligned}
 m^{AC}(x_3) &= \frac{FL_1L_3x_3}{H_2L_2 + H_1L_3} \\
 m^{BC}(x_3) &= -Fx_3 \\
 m^{CD}(x_3) &= \frac{FH_2L_1(-L_2 + x_3)}{H_2L_2 + H_1L_3} \\
 m^{DE}(x_3) &= \frac{FH_2L_1x_3}{H_2L_2 + H_1L_3} \\
 m^{FE}(x_3) &= -\frac{FL_1L_3x_3}{H_2L_2 + H_1L_3}
 \end{aligned} \tag{7.44}$$

Gli sforzi di taglio sono immediatamente leggibili come derivate dei momenti, mentre gli sforzi normali sono pari a :

$$\begin{aligned}
 n^{AC}(x_3) &= -F \left( 1 + \frac{H_2L_1}{H_2L_2 + H_1L_3} \right) \\
 n^{BC}(x_3) &= 0 \\
 n^{CD}(x_3) &= n^{DE}(x_3) = \frac{FL_1L_3}{H_2L_2 + H_1L_3} \\
 n^{FE}(x_3) &= \frac{FH_2L_1}{H_2L_2 + H_1L_3}
 \end{aligned} \tag{7.45}$$

Il diagramma dei momenti flettenti è riportato in Figura 7.13.

Le reazioni vincolari sono deducibili dall'equilibrio dei concetti in  $A$  ed in  $M$ . Si avrà quindi, in  $A$ :

$$\begin{aligned}
 R_{Ah} &= -t^{AC}(0) = -\frac{FL_1L_3}{H_2L_2 + H_1L_3} \\
 R_{Av} &= n^{AC}(0) = -F \left( 1 + \frac{H_2L_1}{H_2L_2 + H_1L_3} \right)
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

mentre in  $F$  si avrà:

$$\begin{aligned}
 R_{Fh} &= -t^{FE}(0) = \frac{FL_1L_3}{H_2L_2 + H_1L_3} \\
 R_{Fv} &= n^{FE}(0) = \frac{FH_2L_1}{H_2L_2 + H_1L_3}
 \end{aligned} \tag{7.47}$$

## Il caso del bipendolo

Si consideri ora il caso in cui la cerniera in  $D$  è sostituita da un bipendolo ad asse di scorrimento verticale, come illustrato in Figura 7.14. Rispetto al caso precedente occorre solo modificare le condizioni in corrispondenza del punto  $D$ , imponendo che sforzo normale e momento flettente siano continui, mentre il taglio dovrà annullarsi:

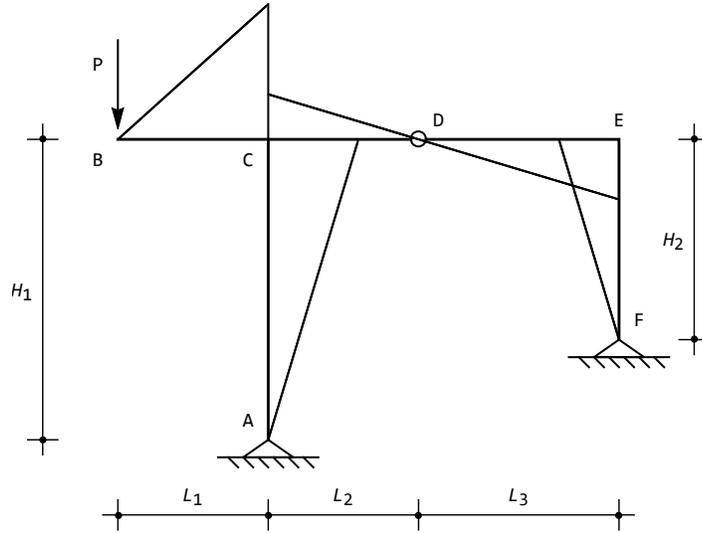


Figura 7.13: Il diagramma dei momenti

$$\begin{aligned}
 -n^{CD}(L_2) + n^{DE}(0) &= 0 \\
 -m^{CD}(L_2) + m^{DE}(0) &= 0 \\
 t^{CD}(L_2) &= 0 \\
 t^{DE}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.48}$$

Le altre condizioni ai limiti restano inalterate, e portano ai momenti flettenti:

$$\begin{aligned}
 m^{AC}(x_3) &= \frac{FL_1 x_3}{H_1 - H_2} \\
 m^{BC}(x_3) &= -Fx_3 \\
 m^{CD}(x_3) &= \frac{FH_2 L_1}{H_1 - H_2} \\
 m^{DE}(x_3) &= \frac{FH_2 L_1}{H_1 - H_2} \\
 m^{FE}(x_3) &= -\frac{FL_1 x_3}{H_1 - H_2}
 \end{aligned}
 \tag{7.49}$$

ed agli sforzi normali:

$$\begin{aligned}
 n^{AC}(x_3) &= -F \\
 n^{BC}(x_3) &= 0 \\
 n^{CD}(x_3) = n^{DE}(x_3) &= \frac{FL_1}{H_1 - H_2} \\
 n^{FE}(x_3) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.50}$$

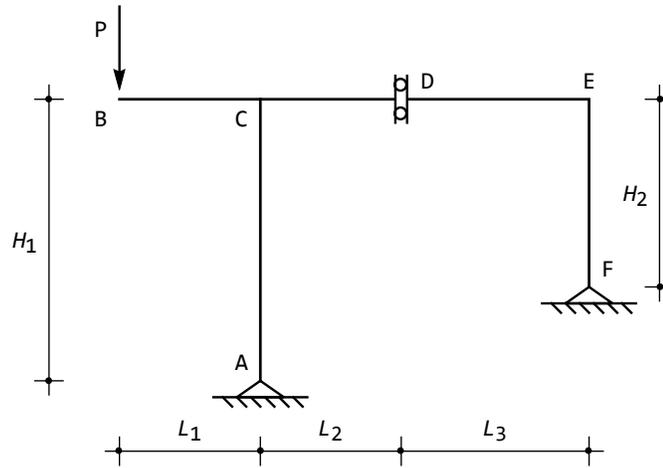


Figura 7.14: Un telaio a due cerniere e bipendolo con sbalzo

Il diagramma dei momenti flettenti è riportato in Figura 7.15.

Le reazioni vincolari sono deducibili dall'equilibrio dei conci in  $A$  ed in  $F$ . Si avrà quindi, in  $A$ :

$$\begin{aligned} R_{Ah} &= -t^{AC}(0) = -\frac{FL_1}{H_1 - H_2} \\ R_{Av} &= n^{AC}(0) = -F \end{aligned} \quad (7.51)$$

mentre in  $F$  si avrà :

$$\begin{aligned} R_{Fh} &= -t^{FE}(0) = \frac{FL_1}{H_1 - H_2} \\ R_{Fv} &= n^{FE}(0) = 0 \end{aligned} \quad (7.52)$$

### Soluzione grafica

Per lo schema con cerniera di Figura 7.12 si vuole ora illustrare la via grafica per il tracciamento del diagramma del momento. Si inizia a determinare le reazioni, partendo dall'ovvia constatazione che l'equilibrio del tratto  $DF$  impone che la retta d'azione delle cerniere in  $D$  ed  $F$  coincida con la congiungente le due cerniere. Per l'equilibrio del tratto  $BAD$  si può scrivere:

$$p + a + d = 0 \quad (7.53)$$

e conoscendo le rette d'azione  $p$  della forza  $P$ , e  $d$  della reazione nella cerniera, si può dedurre la retta d'azione della reazione in  $A$ : basta infatti intersecare  $p$  e  $d$ , identificando il punto  $G$ , e la reazione  $a$  della cerniera sarà la retta passante per  $A$  e per  $G$ . Si ottengono così le direzioni delle reazioni di Figura 7.16,

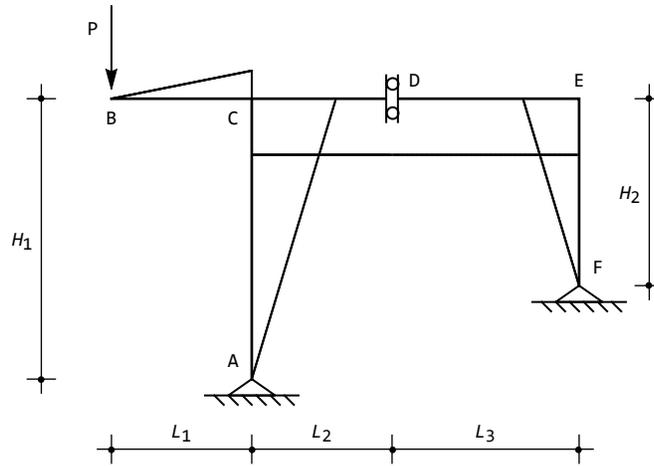


Figura 7.15: I momenti per il telaio a due cerniere e bipendolo con sbalzo

Ciò fatto, può tracciarsi il diagramma del momento, iniziando dal punto  $B$ , sotto la forza, in cui il momento è nullo. Si traccia quindi un segmento inclinato di un angolo arbitrario — così assegnando implicitamente una scala — fino al nodo triplo  $C$ . Per proseguire lungo il traverso, si noti che nel punto  $N$ , laddove la reazione  $A$  interseca il traverso, il momento è dovuto alla sola forza  $P$ , e quindi il punto  $M$  è un punto valido del richiesto diagramma. Ne segue che basta congiungere  $M$  con la cerniera in  $D$  per ottenere il diagramma lungo  $CE$ .

Ciò fatto, si ribalta il diagramma in  $E$  e si congiunge con la cerniera in  $F$ , ottenendo il diagramma anche in  $EF$ . Infine, il solito equilibrio del nodo  $C$  permette di ottenere il valore del momento in  $C$  sul ritto  $AC$ , completando il diagramma di Figura 7.17.

## 7.5 Telaio a due campate

Si consideri il telaio di Figura 7.18, costituito da tre tratti rigidi collegati da due cerniere. Per esso, si possono scrivere  $3t = 9$  equazioni di equilibrio nelle nove incognite  $R_{Aw}, R_{Av}, R_{Lw}, R_{Lv}, T_C, N_C, T_G, N_G$ .

### Ricerca delle reazioni

Esplicitamente, si ha, per il primo tratto:

$$\begin{aligned} R_{Ah} + N_C &= 0 \\ R_{Av} + T_C &= 0 \\ -4T_C L - 6N_C L &= 0 \end{aligned} \tag{7.54}$$

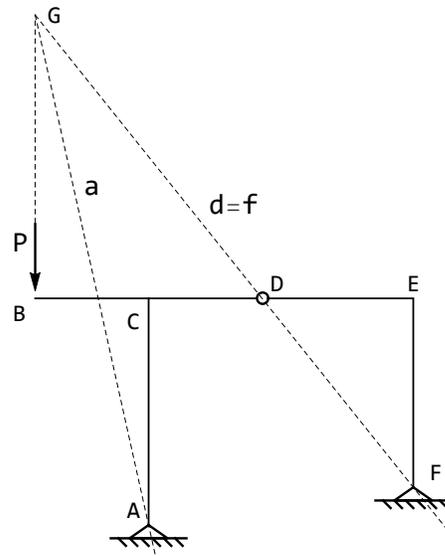


Figura 7.16: Il calcolo grafico delle reazioni

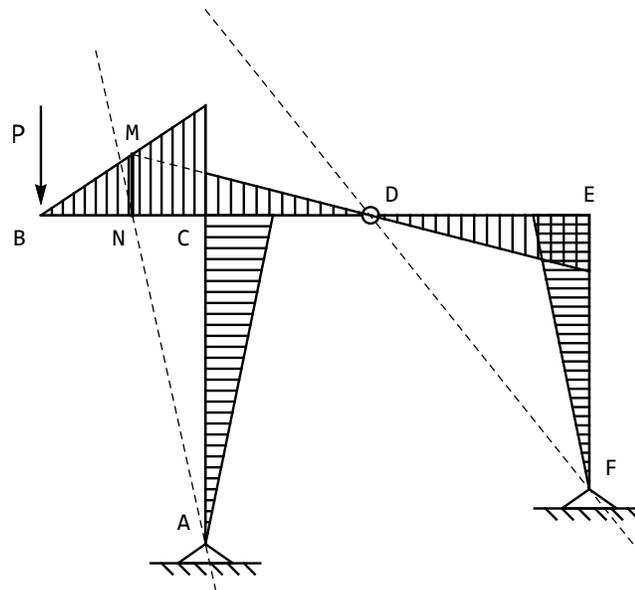


Figura 7.17: Tracciamento del diagramma del momento

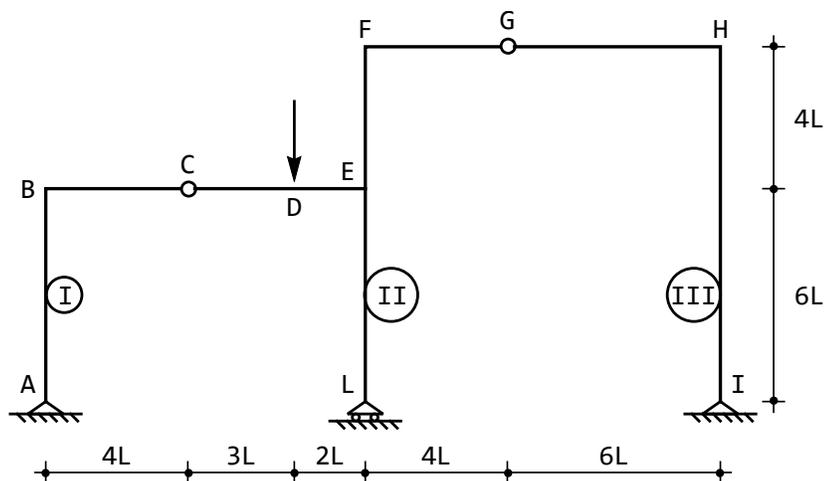


Figura 7.18: Un telaio a due campate asimmetrico

avendo scelto il punto  $A$  come polo, mentre per il secondo tratto:

$$\begin{aligned}
 -N_C + N_G &= 0 \\
 -T_C + F + R_{Lv} + T_G &= 0 \\
 3FL + 5R_{Lv}L + 9T_GL + 4N_GL &= 0
 \end{aligned} \tag{7.55}$$

avendo scelto il punto  $C$  come polo. Infine, per il terzo tratto:

$$\begin{aligned}
 R_{Ih} - N_G &= 0 \\
 R_{Iv} - T_G &= 0 \\
 -6T_GL + 10N_GL &= 0
 \end{aligned} \tag{7.56}$$

avendo scelto  $I$  come terzo polo.

Risolvendo il semplice sistema cui si è giunti si trovano le reazioni:

$$\begin{aligned}
 R_{Ah} &= -R_{Ih} = -\frac{12}{19}F \\
 R_{Av} &= \frac{18}{19}F \\
 R_{Iv} &= \frac{20}{19}F \\
 R_{Lv} &= -3F
 \end{aligned} \tag{7.57}$$

nonchè gli sforzi normali ed i tagli nelle due cerniere:

$$\begin{aligned} N_C = N_G &= \frac{12}{19}F \\ T_C &= -\frac{18}{19}F \\ T_G &= \frac{20}{19}F \end{aligned} \quad (7.58)$$

## Metodo analitico

Per il telaio di Figura 7.18 si possono individuare nove tratti, e non essendovi carichi distribuiti, il momento è distribuito con legge lineare. Si potrà quindi porre:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 \\ m^{BC}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\ m^{CD}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 \\ m^{DE}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 \\ m^{LE}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 \\ m^{EF}(x_3) &= f_0 + f_1x_3 \\ m^{FG}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 \\ m^{GH}(x_3) &= h_0 + h_1x_3 \\ m^{IH}(x_3) &= h_0 + h_1x_3 \end{aligned} \quad (7.59)$$

mentre tagli e sforzi normali sono costanti lungo ciascun tratto. Si hanno quindi tre costanti di integrazione per ciascun tratto, per un totale di ventisette incognite. Occorre quindi scrivere altrettante condizioni di equilibrio:

— nell'appoggio in  $A$  si annullerà il momento flettente:

$$m^{AB}(0) = 0 \quad (7.60)$$

— nel nodo d'angolo  $B$  si hanno le usuali condizioni:

$$\begin{aligned} n^{AB}(6L) + t^{BC}(0) &= 0 \\ -t^{AB}(6L) + n^{BC}(0) &= 0 \\ -m^{AB}(6L) + m^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.61)$$

— nella cerniera in  $C$ , sforzi normali e tagli devono essere continui, e devono annullarsi i momenti flettenti. Si hanno quindi le quattro condizioni:

$$\begin{aligned} -n^{BC}(4L) + n^{CD}(0) &= 0 \\ -t^{BC}(4L) + t^{CD}(0) &= 0 \\ m^{BC}(4L) &= 0 \\ m^{CD}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.62)$$

— in corrispondenza della forza  $F$ , sforzi normali e momenti flettenti dovranno essere continui, mentre il taglio dovrà subire una discontinuità pari alla forza applicata:

$$\begin{aligned} -n^{CD}(3L) + n^{DE}(0) &= 0 \\ -t^{CD}(3L) + t^{DE}(0) + F &= 0 \\ -m^{CD}(3L) + m^{DE}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.63)$$

— nel nodo triplo in  $E$  si dovrà scrivere:

$$\begin{aligned} -n^{DE}(2L) + t^{EF}(0) - t^{LE}(6L) &= 0 \\ -t^{DE}(2L) - n^{EF}(0) + n^{LE}(6L) &= 0 \\ -m^{DE}(2L) + m^{EF}(0) - m^{LE}(6L) &= 0 \end{aligned} \quad (7.64)$$

— nel nodo in  $F$  si avrà:

$$\begin{aligned} n^{EF}(4L) + t^{FG}(0) &= 0 \\ -t^{EF}(4L) + n^{FG}(0) &= 0 \\ -m^{EF}(4L) + m^{FG}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.65)$$

— nella cerniera in  $G$ , sforzi normali e tagli devono essere continui, e devono annullarsi i momenti flettenti. Si hanno quindi le quattro condizioni:

$$\begin{aligned} -n^{FG}(4L) - t^{GH}(0) &= 0 \\ -t^{FG}(4L) + n^{GH}(0) &= 0 \\ -m^{FG}(4L) - m^{GH}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.66)$$

— nel nodo in  $H$  si avrà:

$$\begin{aligned} -n^{GH}(6L) - t^{IH}(10L) &= 0 \\ -t^{GH}(6L) + n^{IH}(10L) &= 0 \\ -m^{GH}(6L) - m^{IH}(10L) &= 0 \end{aligned} \quad (7.67)$$

Nel carrello a piano di scorrimento orizzontale in  $L$  si annulleranno il momento flettente ed il taglio:

$$\begin{aligned} m^{LE}(0) &= 0 \\ t^{LE}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.68)$$

Infine, nell'appoggio in  $I$  si annullerà il momento flettente:

$$m^{IH}(0) = 0 \quad (7.69)$$

Le risultanti ventisette equazioni si possono risolvere con un qualsiasi programma di calcolo simbolico, ottenendo i momenti flettenti:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{12Fx_3}{19} \\
 m^{BC}(x_3) &= \frac{18}{19}F(4L - x_3) \\
 m^{CD}(x_3) &= -\frac{18Fx_3}{19} \\
 m^{DE}(x_3) &= -\frac{1}{19}F(54L + 37x_3) \\
 m^{LE}(x_3) &= 0 \\
 m^{EF}(x_3) &= -\frac{4}{19}F(32L - 3x_3) \\
 m^{FG}(x_3) &= -\frac{20}{19}F(4L - x_3) \\
 m^{GH}(x_3) &= \frac{20Fx_3}{19} \\
 m^{IH}(x_3) &= -\frac{12Fx_3}{19}
 \end{aligned} \tag{7.70}$$

Gli sforzi di taglio sono immediatamente leggibili come derivate dei momenti, mentre gli sforzi normali sono pari a:

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= \frac{18F}{19} \\
 n^{BC}(x_3) &= n^{CD}(x_3) = n^{DE}(x_3) = \frac{12F}{19} \\
 n^{LE}(x_3) &= -3F \\
 n^{EF}(x_3) &= -\frac{20F}{19} \\
 n^{FG}(x_3) &= n^{GH}(x_3) = \frac{12F}{19} \\
 n^{IH}(x_3) &= \frac{20F}{19}
 \end{aligned} \tag{7.71}$$

I diagrammi dei tagli e dei momenti flettenti sono consegnati in Figura 7.19 ed in Figura 7.20, rispettivamente.

### Soluzione grafica

Il primo ed il terzo tratto sono scarichi: le rette d'azione delle due reazioni esterne dei carrelli in  $A$  ed  $I$  sono immediatamente deducibile dall'equilibrio dei tratti, che detta:

$$\begin{aligned}
 a + c &= 0 \\
 g + i &= 0
 \end{aligned} \tag{7.72}$$

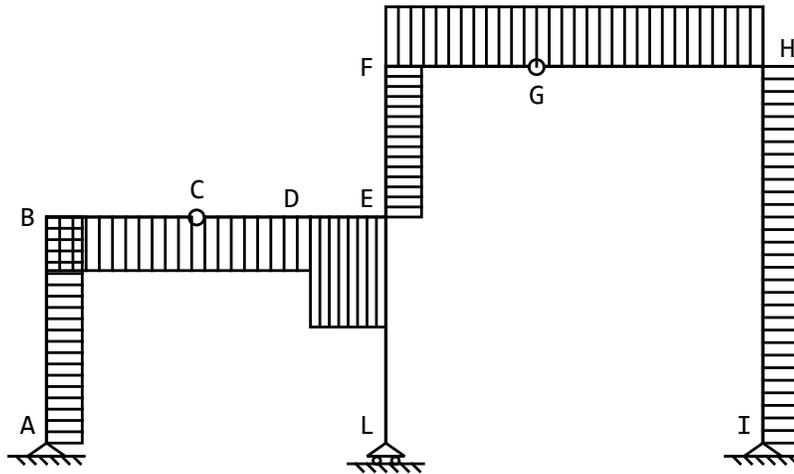


Figura 7.19: Il diagramma dei tagli

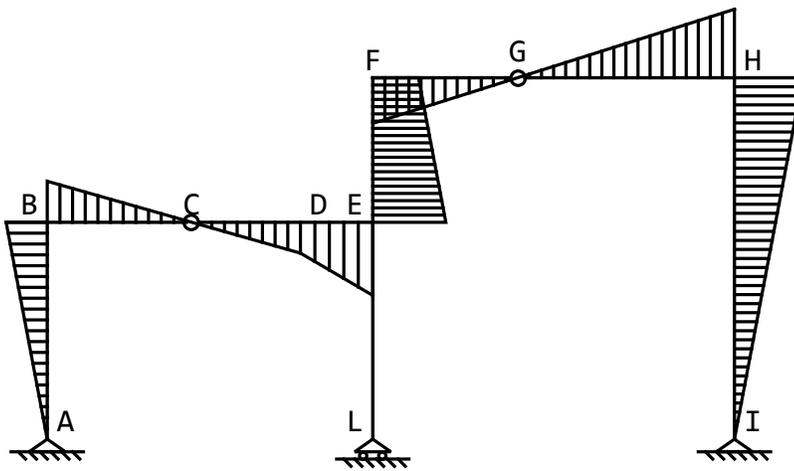


Figura 7.20: Il diagramma dei momenti flettenti

e quindi le loro rette d'azione coincidono con le rette passanti per  $A$  e  $C$ , e per  $I$  e  $G$ , rispettivamente. La retta d'azione della reazione del carrello è invece verticale.

Ciò basta per iniziare il diagramma, tracciando il momento nel tratto  $AB$ , ed utilizzando il valore così raggiunto in  $B$  come unità di misura. In  $B$  il diagramma si ribalta, proseguendo lungo il traverso, fino all'ascissa di applicazione della forza  $F$ , ed annullandosi in corrispondenza della cerniera  $C$ .

Per proseguire, occorre studiare l'equilibrio del secondo tratto, soggetto alla reazione  $C$ , alla reazione  $G$ , alla forza  $F$  ed alla reazione  $R_{Lv}$ . Dovrà aversi quindi:

$$c + f + l + g = 0 \quad (7.73)$$

Si conoscono le rette d'azione di ciascuna di queste quattro forze, sicchè è possibile costruire la retta ausiliaria  $c + f = l + g$ , che dovrà passare per il punto  $M$ , (intersezione di  $c$  ed  $f$ ) e per punto  $N$  (intersezione di  $l$  e  $g$ ), come illustrato in Figura 7.21.

Costruita la retta ausiliaria, si può proseguire il diagramma del momento nel tratto  $DE$ , poichè esso dovrà passare per il punto  $K$ , laddove  $MN$  incontra il traverso  $BE$ .

In  $E$  il diagramma semplicemente si ribalta, in quanto il tratto  $EL$  non è soggetto a momento. Inoltre, il momento nel tratto  $EF$  dovrà annullarsi in  $N$ , e quindi può tracciarsi il diagramma nel tratto  $EF$ , per poi proseguire — previo ribaltamento — lungo  $EH$ , con punto di nullo in  $G$ .

Infine, giunti in  $H$ , il diagramma si ribalta ancora, e si ottiene l'ultimo tratto giungendo in  $I$ , dove il momento si annulla. Il diagramma si presenta come in Figura 7.22, ed è sovrapponibile a quello ottenuto in precedenza.

## 7.6 Telaio a quattro cerniere e pendolo interno

Si consideri il telaio di Figura 7.23, palesemente isostatico, in quanto assimilabile ad un arco a quattro cerniere con pendolo intermedio, e si voglia tracciare il diagramma del momento flettente.

### Metodo analitico

Per il telaio di Figura 7.23 si possono individuare otto tratti ed un pendolo interno. Non essendovi carichi distribuiti, il momento è distribuito con legge

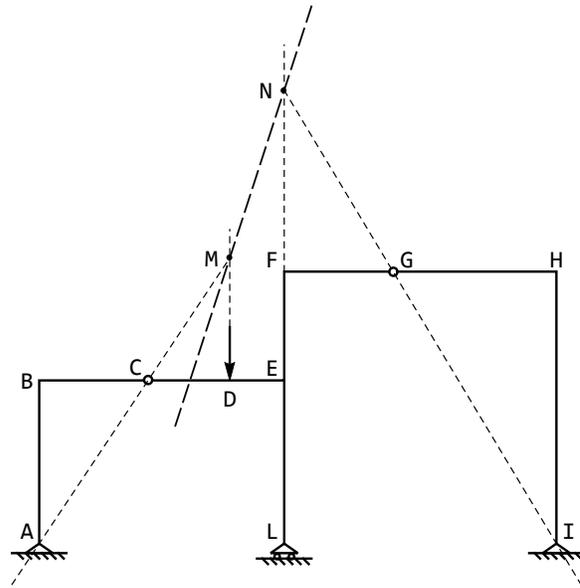


Figura 7.21: Un telaio a due campate asimmetrico: la costruzione della risultante  $MN$  per l'equilibrio di quattro forze

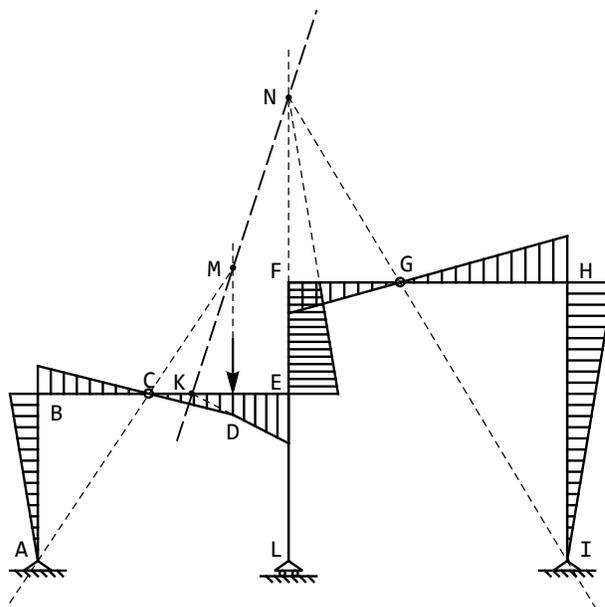


Figura 7.22: Un telaio a due campate asimmetrico: il diagramma del momento

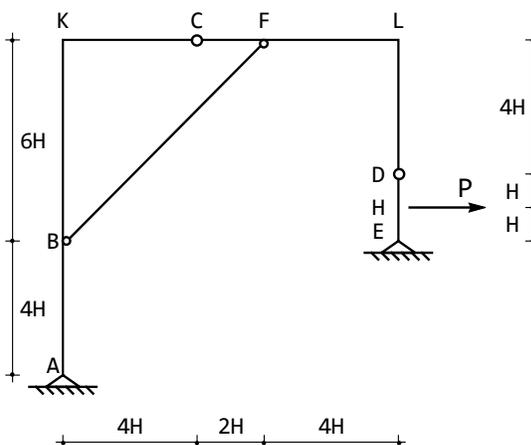


Figura 7.23: Un telaio a quattro cerniere e pendolo interno

lineare, e quindi si potrà porre:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 \\
 m^{BK}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\
 m^{KC}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 \\
 m^{CF}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\
 m^{FL}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 \\
 m^{DL}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3 \\
 m^{HD}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 \\
 m^{EH}(x_3) &= h_0 + h_1 x_3
 \end{aligned} \tag{7.74}$$

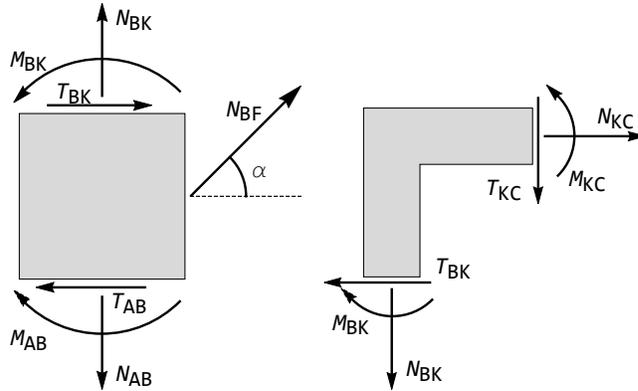
mentre tagli e sforzi normali sono costanti lungo ciascun tratto. Si hanno quindi tre costanti di integrazione per ciascun tratto, cui occorre aggiungere lo sforzo normale  $n^{BF}$  nel pendolo, per un totale di venticinque incognite. Occorre quindi scrivere altrettante condizioni di equilibrio:

— nell'appoggio in  $A$  si annullerà il momento flettente:

$$m^{AB}(0) = 0 \tag{7.75}$$

— nel nodo in  $B$  le condizioni di equilibrio possono leggersi dal diagramma di Figura 7.24:

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(4H) - n^{BK}(0) - n_{BF} \sin(\alpha) &= 0 \\
 -t^{AB}(4H) + t^{BK}(0) + n_{BF} \cos(\alpha) &= 0 \\
 -m^{AB}(4H) + m^{BK}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{7.76}$$


 Figura 7.24: Le forze agenti sul nodo  $B$  e sul nodo  $C$ 

— nel nodo d'angolo  $K$  si ha il secondo diagramma di Figura 7.24, e quindi:

$$\begin{aligned}
 n^{BK}(6H) + t^{KC}(0) &= 0 \\
 -t^{BK}(6H) + n^{KC}(0) &= 0 \\
 -m^{BK}(6H) + m^{KC}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{7.77}$$

— nella cerniera in  $C$ , sforzi normali e tagli devono essere continui, e devono annullarsi i momenti flettenti. Si hanno quindi le quattro condizioni:

$$\begin{aligned}
 -n^{KC}(4H) + n^{CF}(0) &= 0 \\
 -t^{KC}(4H) + t^{CF}(0) &= 0 \\
 m^{KC}(4H) &= 0 \\
 m^{CF}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{7.78}$$

— nel nodo  $F$  si ha una situazione analoga a quella del nodo  $B$ , come illustrato in Figura 7.25, sicchè potrà scriversi:

$$\begin{aligned}
 n^{CF}(2H) - n^{FL}(0) - n_{BF} \cos(\alpha) &= 0 \\
 -t^{CF}(2H) + t^{FL}(0) + n_{BF} \sin(\alpha) &= 0 \\
 -m^{CF}(2H) + m^{FL}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{7.79}$$

— nel nodo d'angolo destro  $L$  si ha la seconda situazione di Figura 7.25, e quindi potrà scriversi:

$$\begin{aligned}
 -n^{FL}(4H) - t^{DL}(4H) &= 0 \\
 -t^{FL}(4H) + n^{DL}(4H) &= 0 \\
 -m^{FL}(4H) + m^{DL}(4H) &= 0
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

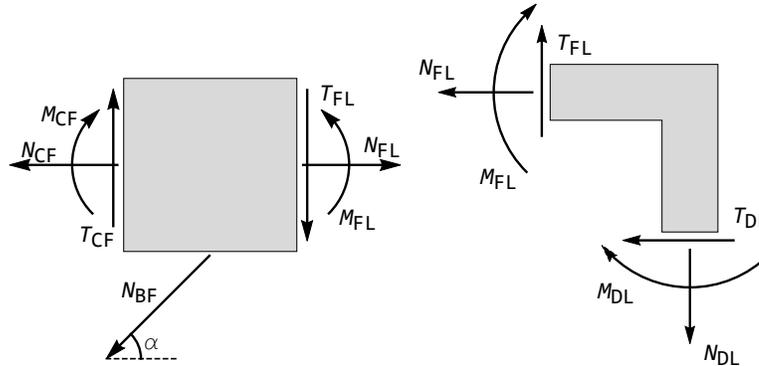


Figura 7.25: Le forze agenti sul nodo  $F$  e sul nodo  $L$

— nella cerniera in  $D$ , sforzi normali e tagli devono essere continui, e devono annullarsi i momenti flettenti. Si hanno quindi le quattro condizioni:

$$\begin{aligned}
 -n^{DL}(0) + n^{HD}(H) &= 0 \\
 -t^{DL}(0) + t^{CF}(H) &= 0 \\
 m^{DL}(0) &= 0 \\
 m^{HD}(H) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.81}$$

— in corrispondenza della forza  $P$ , sforzi normali e momenti flettenti dovranno essere continui, mentre il taglio dovrà subire una discontinuità pari alla forza applicata, come può leggersi dal diagramma di Figura 7.26:

$$\begin{aligned}
 -n^{HD}(0) + n^{EH}(H) &= 0 \\
 t^{HD}(0) - t^{EH}(H) + P &= 0 \\
 m^{HD}(0) - m^{EH}(H) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.82}$$

Infine, nell' appoggio in  $E$  si annullerà il momento flettente:

$$m^{EH}(0) = 0
 \tag{7.83}$$

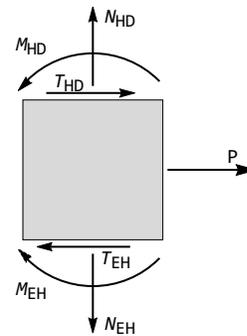


Figura 7.26: L'equilibrio del concio in corrispondenza della forza  $P$

Le risultanti venticinque equazioni si possono risolvere con un qualsiasi programma di calcolo simbolico, ottenendo i momenti flet-

tenti:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{Px_3}{2} \\
 m^{BK}(x_3) &= 2HP - \frac{7Px_3}{5} \\
 m^{KC}(x_3) &= \frac{8}{5}P(-4H + x_3) \\
 m^{CF}(x_3) &= \frac{8Px_3}{5} \\
 m^{FL}(x_3) &= \frac{1}{10}P(32H - 3x_3) \\
 m^{DL}(x_3) &= -\frac{Px_3}{2} \\
 m^{HD}(x_3) &= \frac{1}{2}P(H - x_3) \\
 m^{EH}(x_3) &= \frac{Px_3}{2}
 \end{aligned} \tag{7.84}$$

Gli sforzi di taglio sono immediatamente leggibili come derivate dei momenti, mentre gli sforzi normali sono pari a:

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(x_3) &= \frac{3P}{10} \\
 n^{BK}(x_3) &= -\frac{8P}{5} \\
 n^{KC}(x_3) &= n^{CF}(x_3) = -\frac{7P}{5} \\
 n^{FL}(x_3) &= \frac{P}{2} \\
 n^{DL}(x_3) &= n^{HD}(x_3) = n^{EH}(x_3) = -\frac{3P}{10}
 \end{aligned} \tag{7.85}$$

e nel pendolo:

$$n^{BF} = \frac{19P}{5\sqrt{2}} \tag{7.86}$$

Il diagramma del momento flettente è consegnato nella Figura 7.27. Da esso si evince che il momento massimo viene attinto nel nodo  $K$ , e vale:

$$M_K = m^{BK}(4H) = m^{KC}(0) = -\frac{32PH}{5} \tag{7.87}$$

### Soluzione grafica

Per la ricerca delle reazioni, si osservi che l'equilibrio del tratto di telaio da  $A$  a  $C$  impone che la reazione  $a$  dell'appoggio in  $A$ , la reazione  $b$  del pendolo e la

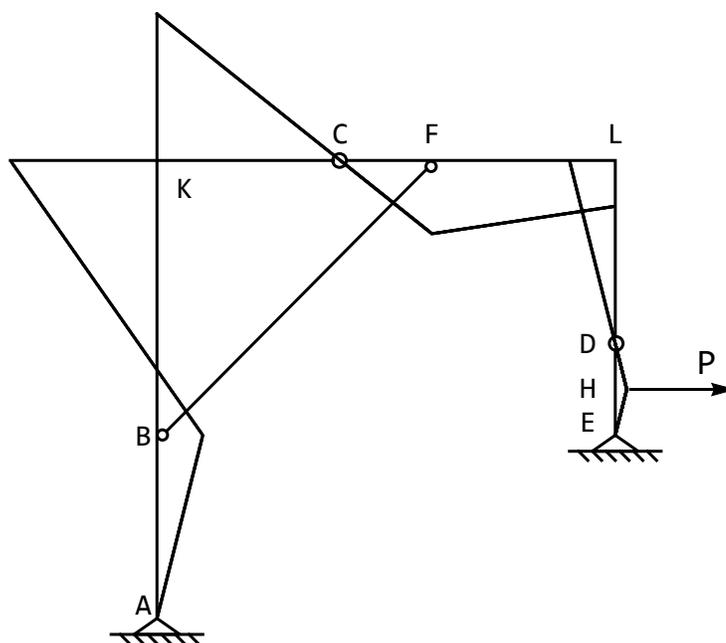


Figura 7.27: Il diagramma del momento flettente

reazione  $c$  della cerniera in  $C$  soddisfino la relazione:

$$a + b + c = 0 \quad (7.88)$$

mentre l'equilibrio del secondo tratto detta una relazione simile:

$$b + c + d = 0 \quad (7.89)$$

da cui  $a = d$ . Quindi, la retta d'azione della reazione  $a$  in  $A$ , e la retta d'azione della reazione  $d$  della cerniera in  $D$  devono coincidere, e poichè  $a$  deve passare per  $A$ , e  $d$  deve passare per  $D$ , le loro direzioni sono note. Inoltre, l'equilibrio del terzo tratto:

$$d + P + e = 0 \quad (7.90)$$

permette di conoscere la retta d'azione  $e$  di  $R_E$ , che dovrà passare per  $E$ , e per il punto  $M$ , intersezione tra la retta d'azione di  $P$  ed  $R_D$ . Infine, la retta d'azione  $c$  di  $R_C$  si ottiene congiungendo la cerniera in  $C$  con il punto  $N$ , intersezione tra  $R_A$  ed il prolungamento del pendolo. Tutto ciò è sintetizzato in Figura 7.28.

Ottenute le rette d'azione delle reazioni, un triangolo di equilibrio permette di ottenere la loro intensità, come illustrato in Figura 7.29.

Per il tracciamento del diagramma del momento, si parte dal punto  $E$ , assegnando una inclinazione iniziale al diagramma, e giungendo fino alla retta di applicazione della forza. Si prosegue poi fino ad  $L$ , annullando il momento nella

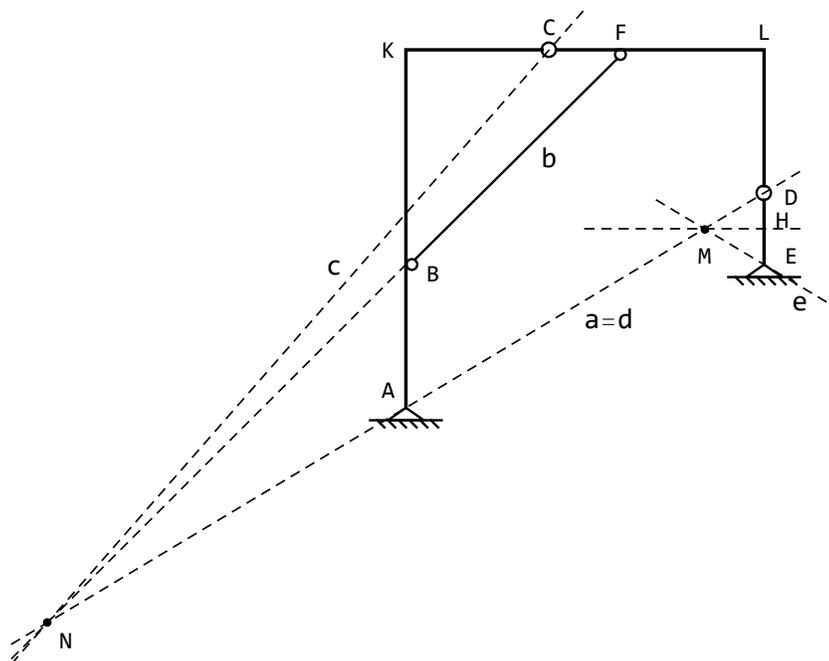


Figura 7.28: Ricerca grafica delle reazioni

cerniera  $D$ . In  $L$  il diagramma deve essere ribaltato, per rispettare l'equilibrio del nodo, per poi proseguire con una pendenza dettata dal punto di intersezione tra l'orizzontale e la retta d'azione  $d$  della cerniera  $D$ . Si giunge in  $F$ , per poi proseguire fino a  $K$  annullando il diagramma in  $C$ . In  $K$  il diagramma va ancora ribaltato, per poi proseguire fino a  $B$ , annullandosi laddove la retta d'azione  $c$  della cerniera  $C$  incontra la verticale. Infine, da  $B$  si prosegue annullando il momento in  $A$ . Il diagramma finale si presenta come in Figura 7.30

## 7.7 Un portale con pendolo inclinato

Si voglia ora studiare il telaio di Figura 7.31, costituito da tre tratti rigidi vincolati al suolo da un bipendolo con asse inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale, e da un pendolo con asse inclinato di un angolo  $\beta$ .

Per esso, possono scriversi le equazioni di equilibrio dell'intera struttura:

$$\begin{aligned}
 R_{Av} + F + R_{Mv} &= 0 \\
 R_{Ah} + R_{Mh} &= 0 \\
 \mathcal{M}_{rA} + 14R_{Av}L + 4R_{Ah}L + 5FL &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.91}$$

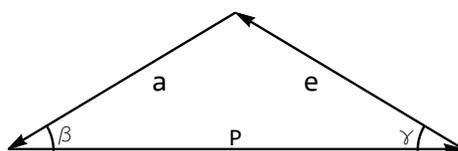


Figura 7.29: Il poligono di equilibrio per il calcolo delle reazioni

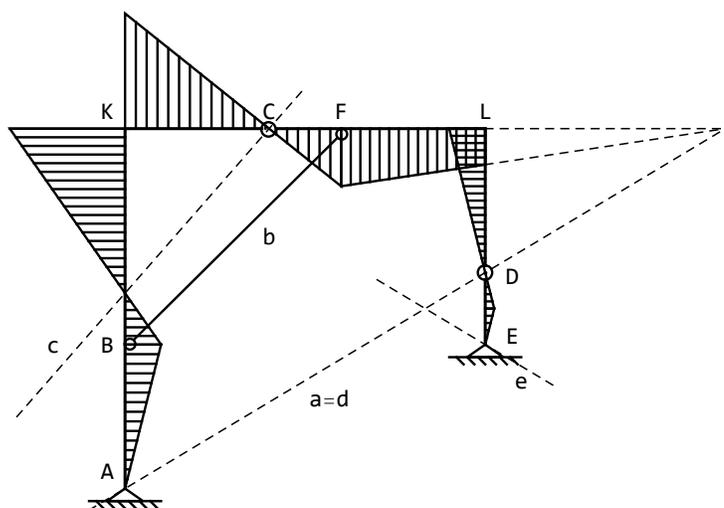


Figura 7.30: Il diagramma del momento per via grafica

con polo in  $M$ . Assumendo — per semplicità — che il bipendolo in  $A$  abbia piano di scorrimento inclinato di 45 gradi, si potrà scrivere:

$$R_{Av} = R_{Ah} \quad (7.92)$$

Se poi anche il pendolo in  $M$  agisce secondo una retta inclinata di 45 gradi, allora esso esplicherà una reazione diretta secondo tale retta, per cui dovrà essere:

$$R_{Mv} = -R_{Mh} \quad (7.93)$$

Per il secondo e terzo tratto, si può scrivere:

$$\begin{aligned} -T_D + N_F &= 0 \\ N_D + T_F &= 0 \\ -4T_FL - N_FL &= 0 \\ -T_F + F + N_I &= 0 \\ -N_F - T_I &= 0 \\ 2N_FL - 4T_FL + 2FL &= 0 \end{aligned} \quad (7.94)$$

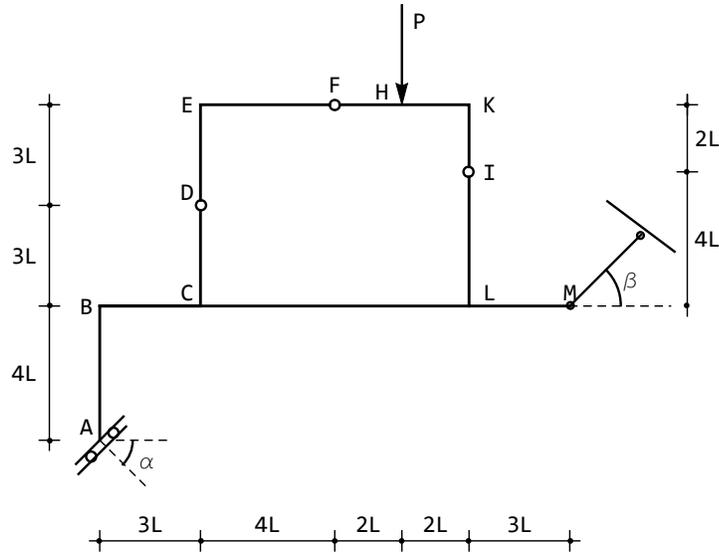


Figura 7.31: Un portale con pendolo inclinato

con poli in  $D$  ed  $I$ , rispettivamente. Si hanno quindi nove equazioni di equilibrio in nove incognite, la cui soluzione può ottenersi facilmente considerando che la terza e la sesta delle (7.94) forniscono subito lo sforzo di taglio e lo sforzo normale in  $F$ :

$$\begin{aligned} N_F &= -\frac{2}{5}F \\ T_F &= \frac{3}{10}F \end{aligned} \quad (7.95)$$

da cui seguono immediatamente i tagli e gli sforzi normali in  $D$  ed in  $I$ :

$$\begin{aligned} T_D &= -T_I = -\frac{2}{5}F \\ N_D &= -\frac{3}{10}F \\ N_I &= -\frac{7}{10}F \end{aligned} \quad (7.96)$$

Le altre equazioni permettono il calcolo delle reazioni esterne:

$$\begin{aligned} R_{Av} &= R_{Mv} = -\frac{F}{2} \\ R_{Ah} &= -R_{Mh} = -\frac{F}{2} \\ \mathcal{M}_{rA} &= 4FL \end{aligned} \quad (7.97)$$

e quindi la struttura può considerarsi isostatica.

### Soluzione analitica

Per il telaio di Figura 7.31 si possono individuare undici tratti, e non essendovi carichi distribuiti, il momento è distribuito con legge lineare. Si potrà quindi porre:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 \\
 m^{BC}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\
 m^{CD}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 \\
 m^{DE}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\
 m^{EF}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 \\
 m^{FH}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3 \\
 m^{HK}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 \\
 m^{IK}(x_3) &= h_0 + h_1 x_3 \\
 m^{LI}(x_3) &= h_0 + h_1 x_3 \\
 m^{CL}(x_3) &= k_0 + k_1 x_3 \\
 m^{LM}(x_3) &= i_0 + i_1 x_3
 \end{aligned} \tag{7.98}$$

mentre tagli e sforzi normali sono costanti lungo ciascun tratto. Si hanno quindi tre costanti di integrazione per ciascun tratto, per un totale di trentatré incognite. Occorre quindi scrivere altrettante condizioni di equilibrio:

— nel bipendolo in  $A$ , inclinato di un angolo  $\alpha$ , la reazione dovrà avere la direzione dei pendoli, e quindi occorrerà che la risultante di taglio e sforzo normale abbia la stessa inclinazione. Pertanto, se  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ , occorrerà che taglio e sforzo normale siano uguali e contrari:

$$t^{AB}(0) + n^{AB}(0) = 0 \tag{7.99}$$

— nel nodo d'angolo  $B$  si hanno le usuali condizioni:

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(4L) + t^{BC}(0) &= 0 \\
 -t^{AB}(4L) + n^{BC}(0) &= 0 \\
 -m^{AB}(4L) + m^{BC}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{7.100}$$

— nel nodo triplo in  $C$  si dovrà scrivere:

$$\begin{aligned}
 -n^{BC}(3L) + n^{CL}(0) + t^{CD}(0) &= 0 \\
 -t^{BC}(3L) + t^{CL}(0) - n^{CD}(0) &= 0 \\
 -m^{BC}(3L) + m^{CL}(0) + m^{CD}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{7.101}$$

— nella cerniera in  $D$ , sforzi normali e tagli devono essere continui, e devono annullarsi i momenti flettenti. Si hanno quindi le quattro condizioni:

$$\begin{aligned} -n^{CD}(3L) + n^{DE}(0) &= 0 \\ -t^{CD}(3L) + t^{DE}(0) &= 0 \\ m^{CD}(3L) &= 0 \\ m^{DE}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{7.102}$$

— nel nodo d'angolo  $E$  si hanno le condizioni simili a quelle del nodo in  $B$ :

$$\begin{aligned} n^{DE}(3L) + t^{EF}(0) &= 0 \\ -t^{DE}(3L) + n^{EF}(0) &= 0 \\ -m^{DE}(3L) + m^{EF}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{7.103}$$

— in corrispondenza della forza  $F$ , sforzi normali e momenti flettenti dovranno essere continui, mentre il taglio dovrà subire una discontinuità pari alla forza applicata:

$$\begin{aligned} -n^{EF}(2L) + n^{DE}(0) &= 0 \\ -t^{EF}(2L) + t^{DE}(0) + F &= 0 \\ -m^{EF}(2L) + m^{DE}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{7.104}$$

— nel nodo in  $K$  si avrà:

$$\begin{aligned} -n^{HK}(2L) - t^{IK}(2L) &= 0 \\ -t^{HK}(2L) + n^{IK}(2L) &= 0 \\ -m^{HK}(2L) - m^{IK}(2L) &= 0 \end{aligned} \tag{7.105}$$

— nella cerniera in  $I$ , sforzi normali e tagli devono essere continui, e devono annullarsi i momenti flettenti. Si hanno quindi le quattro condizioni:

$$\begin{aligned} -n^{IK}(0) + n^{LI}(4L) &= 0 \\ -t^{IK}(0) + t^{LI}(4L) &= 0 \\ m^{IK}(0) &= 0 \\ m^{LI}(10L) &= 0 \end{aligned} \tag{7.106}$$

— nel nodo triplo in  $L$  la situazione è analoga al nodo triplo in  $C$ :

$$\begin{aligned} -n^{CL}(8L) + n^{LM}(0) + t^{LI}(0) &= 0 \\ -t^{CL}(8L) + t^{LM}(0) - n^{LI}(0) &= 0 \\ -m^{CL}(8L) + m^{LM}(0) + m^{LI}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{7.107}$$

Infine, in  $M$  un pendolo inclinato impone che il momento sia nullo e che la risultante di taglio e sforzo normale sia inclinata secondo l'asse del pendolo. Per

$\beta = \frac{\pi}{4}$  si avrà quindi:

$$\begin{aligned} m^{LM}(3L) &= 0 \\ t^{LM}(3L) + n^{LM}(3L) &= 0 \end{aligned} \quad (7.108)$$

Le risultanti equazioni si possono risolvere con un qualsiasi programma di calcolo simbolico, ottenendo i momenti flettenti:

$$\begin{aligned} m^{AB}(x_3) &= \frac{1}{2}F(-8L + x_3) \\ m^{BC}(x_3) &= \frac{1}{2}F(-4L + x_3) \\ m^{CD}(x_3) &= \frac{2}{5}F(3L - x_3) \\ m^{DE}(x_3) &= -\frac{2Fx_3}{5} \\ m^{EF}(x_3) &= \frac{3}{10}F(-4L + x_3) \\ m^{FH}(x_3) &= \frac{3Fx_3}{10} \\ m^{HK}(x_3) &= \frac{1}{10}F(6L - 7x_3) \\ m^{IK}(x_3) &= \frac{2Fx_3}{5} \\ m^{LI}(x_3) &= \frac{2}{5}F(-4L + x_3) \\ m^{CL}(x_3) &= \frac{1}{10}F(-17L + 2x_3) \\ m^{LM}(x_3) &= \frac{1}{2}F(3L - x_3) \end{aligned} \quad (7.109)$$

$$\begin{aligned} m^{LI}(x_3) &= \frac{2}{5}F(-4L + x_3) \\ m^{CL}(x_3) &= \frac{1}{10}F(-17L + 2x_3) \\ m^{LM}(x_3) &= \frac{1}{2}F(3L - x_3) \end{aligned} \quad (7.110)$$

Gli sforzi di taglio sono immediatamente leggibili come derivate dei momenti, mentre gli sforzi normali sono pari a:

$$\begin{aligned} n^{AB}(x_3) &= -\frac{F}{2} \\ n^{BC}(x_3) &= \frac{F}{2} \\ n^{CD}(x_3) &= n^{DE}(x_3) = -\frac{3F}{10} \\ n^{EF}(x_3) &= n^{FH}(x_3) = n^{HK}(x_3) = -\frac{2F}{5} \\ n^{IK}(x_3) &= n^{LI}(x_3) = -\frac{7F}{10} \\ n^{CL}(x_3) &= \frac{9F}{10} \\ n^{LM}(x_3) &= \frac{F}{2} \end{aligned} \quad (7.111)$$

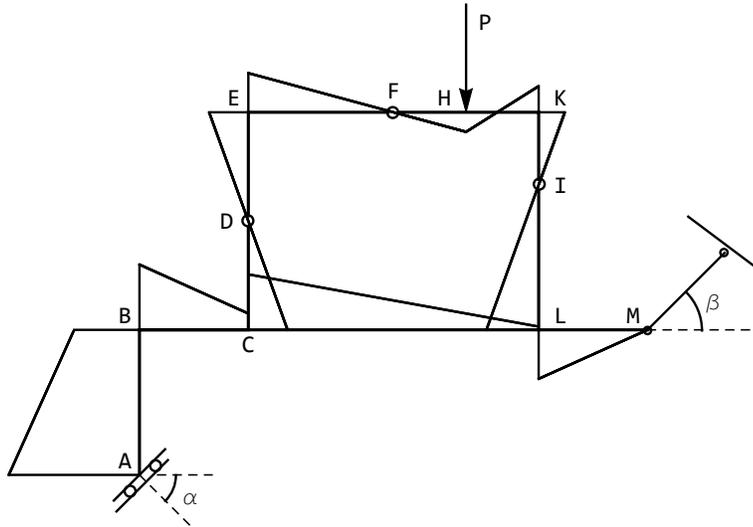


Figura 7.32: Il diagramma dei momenti per il portale con pendolo inclinato

Il diagramma dei momenti flettenti è riportato in Figura 7.32.

Le reazioni vincolari sono deducibili dall'equilibrio dei conci in  $A$  ed in  $M$ . Si avrà quindi, in  $A$ :

$$\begin{aligned} M_{rA} &= -m^{AB}(0) = 4FL \\ R_{Ah} &= -t^{AB}(0) = -\frac{F}{2} \\ R_{Av} &= n^{AB}(0) = -\frac{F}{2} \end{aligned} \quad (7.112)$$

mentre in  $M$  si avrà :

$$\begin{aligned} R_{Mh} &= n^{LM}(3H) = \frac{F}{2} \\ R_{Mv} &= t^{LM}(3H) = -\frac{F}{2} \end{aligned} \quad (7.113)$$

Si noti che in  $A$  le due componenti reattive possono comporsi in una forza di intensità  $\frac{F}{\sqrt{2}}$  diretta secondo gli assi del bipendolo, mentre in  $M$  le due componenti danno luogo ad una forza di pari intensità, ma diretta secondo l'asse del pendolo.

### Soluzione grafica

Si inizia a determinare graficamente le reazioni, partendo dall'ovvia constatazione che l'equilibrio del tratto  $II$  impone che la retta d'azione delle cerniere in

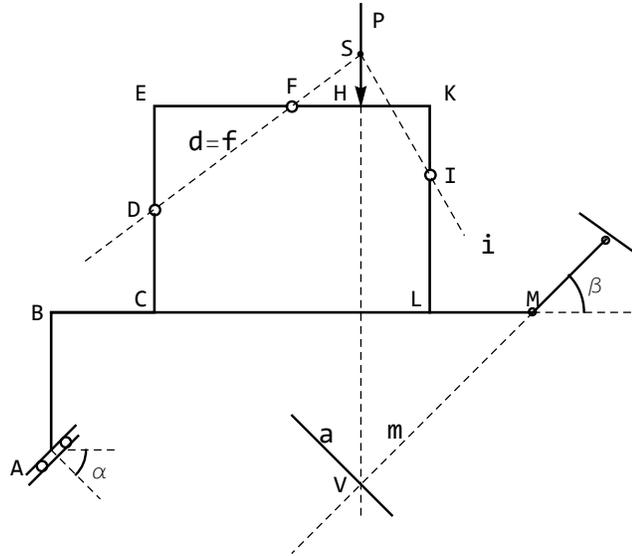


Figura 7.33: Il calcolo grafico delle reazioni

$D$  ed  $F$  coincide con la congiungente le due cerniere. Per l'equilibrio del tratto  $III$  si può scrivere:

$$f + p + i = 0 \quad (7.114)$$

e conoscendo le rette d'azione di  $f$  e di  $p$ , si può dedurre la reazione della cerniera  $I$ : basta infatti intersecare  $f$  e  $p$ , identificando il punto  $S$ , e la reazione  $i$  della cerniera sarà la retta passante per  $I$  e per  $S$ . Infine, l'equilibrio esterno impone che sia:

$$a + p + m = 0 \quad (7.115)$$

Le rette d'azione  $p$  della forza ed  $m$  del pendolo sono note, così come è nota l'inclinazione della retta d'azione  $a$  del bipendolo. Ne segue che basta identificare l'intersezione  $V$  tra la retta d'azione del pendolo  $m$ , e la verticale per la forza, per definire completamente la reazione del bipendolo, che dovrà passare per  $V$ , ed essere ortogonale all'asse del bipendolo. Tutto ciò è sintetizzato in Figura 7.33.

Determinate le reazioni, può tracciarsi il diagramma del momento, iniziando dal pendolo in  $M$ , e dal tratto  $ML$ . Per proseguire, si noti che l'equilibrio del tratto  $I$  impone che sia:

$$a + d + i + m = 0 \quad (7.116)$$

ossia:

$$a + d = i + m \quad (7.117)$$

Si costruisce allora la retta ausiliaria che passa per l'intersezione  $U$  tra  $a$  e  $d$ , e per l'intersezione  $T$  tra  $i$  ed  $m$ ., così come riportato in Figura 7.34.

Ciò fatto, si consideri che in un punto generico del tratto  $CL$  le forze agenti sul tratto  $I$ , a destra del punto, sono  $i+m$ , e quindi il momento si annullerà in  $W$ , ossia in corrispondenza dell'intersezione della risultante appena costruita con il trasverso.

Per conoscere un altro punto del diagramma, si consideri la sezione  $M_1$  in cui la reazione  $i$  incontra il trasverso: in essa, il momento è dovuto alla sola reazione  $m$  del pendolo, e quindi il diagramma del momento nel tratto  $CL$ , se proseguito idealmente, dovrà passare per  $M_2$ . Ciò permette il tracciamento del diagramma del momento fino all'altro nodo triplo  $C$ , come illustrato in Figura 7.35.

Per proseguire lungo  $BC$ , si consideri che il diagramma dovrà annullarsi in  $A_1$ , laddove la reazione  $R_A$  del bipendolo incontra il trasverso. Inoltre, le forze agenti a destra di un generico punto lungo  $BC$  sono  $(i+m)+d$ . Nella sezione  $A_2$ , dove il trasverso incontra la reazione  $d$ , il momento sarà dovuto alla sola  $(i+m)$ , e quindi l'ordinata  $A_3$  è valida, permettendo di completare il diagramma in  $BC$ , come sintetizzato in Figura 7.36.

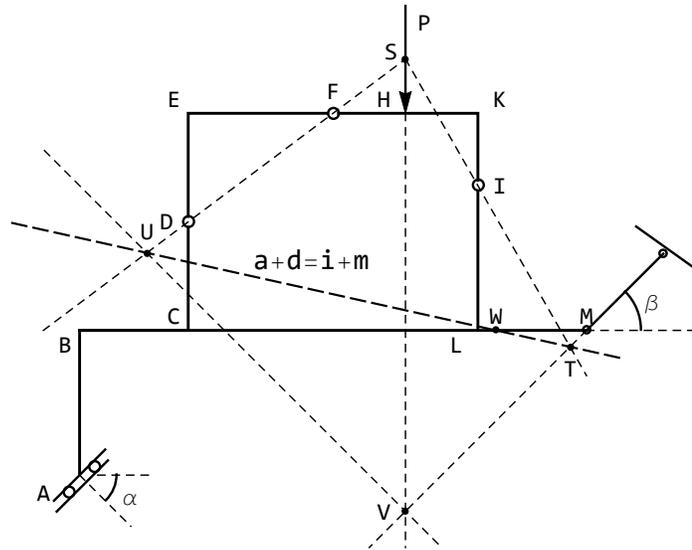
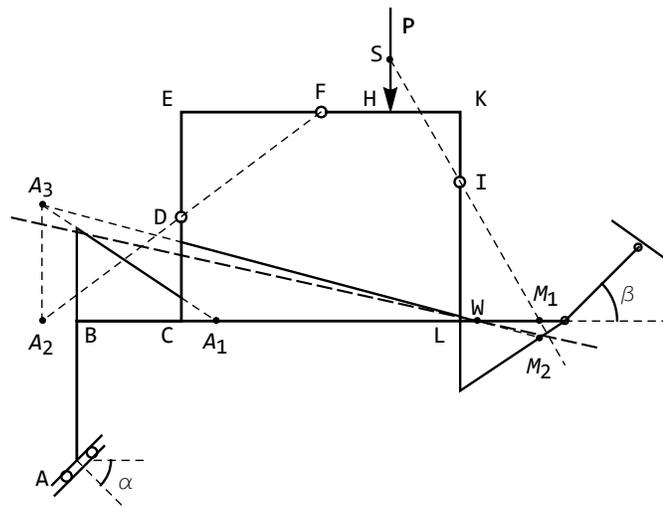
In  $B$  il diagramma del momento può essere ribaltato, e lungo  $AB$  si può proseguire considerando che il momento dovrà annullarsi in  $B_1$ , intersezione tra la verticale per  $A$  e la reazione del bipendolo. In definitiva, il diagramma del momento si presenta come in Figura 7.37.

## 7.8 Maglia chiusa

Si voglia ora studiare la maglia chiusa di Figura 7.38, non vincolata esternamente, ma soggetta a due forze auto-equilibrate. Essa è costituita da tre tratti rigidi, e per ciascuno di essi possono scriversi le usuali equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned}
 N_G - T_I &= 0 \\
 N_I + T_G &= 0 \\
 -2T_G L - 3N_G L &= 0 \\
 -T_G + P + N_D &= 0 \\
 -N_G - T_D &= 0 \\
 -8T_G L + 5PL + 2N_G L &= 0 \\
 -N_I - N_D - P &= 0 \\
 T_I + T_D &= 0 \\
 -3T_I L - 5N_I L + 5N_D L - 4T_D L &= 0
 \end{aligned} \tag{7.118}$$

Si sono scelti i tre poli in  $I$ , in  $D$  ed in  $B$ , rispettivamente. Si ottengono quindi nove equazioni in sei incognite, ma è immediato constatare che tre equazioni sono linearmente dipendenti dalle altre sei, in quanto basta soddisfare l'equilibrio di due tratti per imporre l'equilibrio del tratto restante. Riscrivendo

Figura 7.34: Tracciamento della ausiliaria  $a + d = i + m$ Figura 7.35: Tracciamento del momento nel traverso inferiore  $BM$

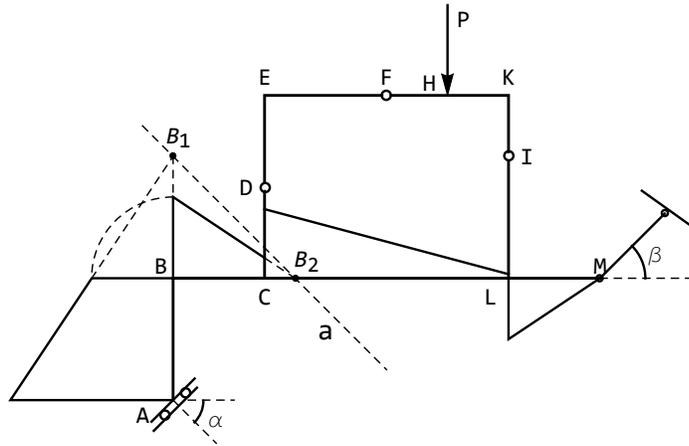


Figura 7.36: Il tracciamento del momento nel ritto  $AB$

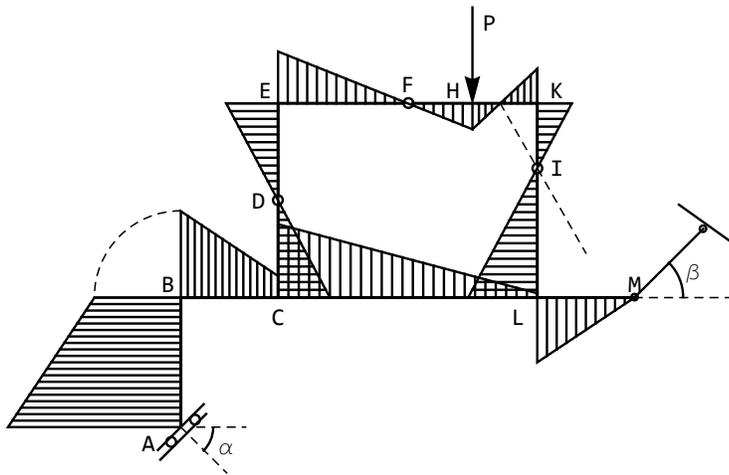


Figura 7.37: Il diagramma del momento dedotto graficamente

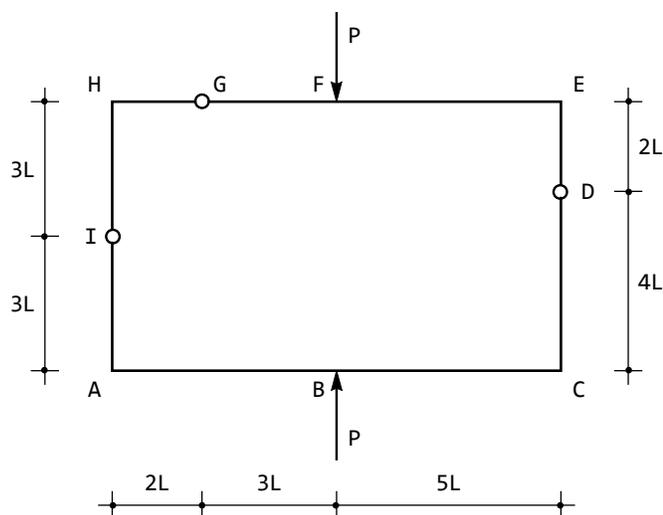


Figura 7.38: Una maglia chiusa auto-equilibrata

le prime sei equazioni, ad esempio, si ha:

$$\begin{aligned}
 T_I &= N_G \\
 N_I &= -T_G \\
 T_D &= -N_G \\
 -2T_G - 3N_G &= 0 \\
 -T_G + N_D &= -P \\
 -8T_G + 2N_G &= -5P
 \end{aligned}
 \tag{7.119}$$

Dalle ultime tre equazioni si ottiene subito:

$$\begin{aligned}
 N_G &= -\frac{5}{14}P \\
 T_G &= \frac{15}{28}P \\
 N_D &= -\frac{13}{28}P
 \end{aligned}
 \tag{7.120}$$

e le prime tre forniscono il taglio in  $D$ , lo sforzo normale ed il taglio in  $I$ :

$$\begin{aligned}
 T_I &= N_G = -\frac{5}{14}P \\
 N_I &= -T_G = -\frac{15}{28}P \\
 T_D &= -N_G = \frac{5}{14}P
 \end{aligned}
 \tag{7.121}$$

È facile constatare che le ultime tre equazioni sono identicamente soddisfatte.

## Metodo analitico

Per la maglia chiusa di Figura 7.38 si possono individuare nove tratti, e non essendovi carichi distribuiti, il momento è distribuito con legge lineare. Si potrà quindi porre:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 \\
 m^{BC}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\
 m^{CD}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 \\
 m^{DE}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\
 m^{AI}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 \\
 m^{IH}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3 \\
 m^{HG}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 \\
 m^{GF}(x_3) &= h_0 + h_1 x_3 \\
 m^{FE}(x_3) &= i_0 + i_1 x_3
 \end{aligned} \tag{7.122}$$

mentre tagli e sforzi normali sono costanti lungo ciascun tratto. Si hanno quindi tre costanti di integrazione per ciascun tratto, per un totale di ventisette incognite. Si andranno ora a scrivere le condizioni di equilibrio nei nodi, tre in corrispondenza dei vertici, ed al di sotto delle forze, e quattro nelle tre cerniere. Si hanno quindi in totale trenta equazioni, linearmente dipendenti in quanto la struttura non è vincolata al suolo, e che possono dar luogo ad una soluzione equilibrata.

— nel nodo in  $A$  l'equilibrio impone:

$$\begin{aligned}
 n^{AB}(0) + t^{AI}(0) &= 0 \\
 t^{AB}(0) - n^{AI}(0) &= 0 \\
 m^{AB}(0) + m^{AI}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{7.123}$$

— nel nodo in  $B$ , caricato da una forza verticale  $P$  diretta verso l'alto, occorre imporre la continuità di momenti e sforzi normali, mentre il taglio dovrà subire una discontinuità pari a  $-P$ :

$$\begin{aligned}
 -n^{AB}(5L) + n^{BC}(0) &= 0 \\
 -m^{AB}(5L) + m^{BC}(0) &= 0 \\
 -t^{AB}(5L) + t^{BC}(0) - P &= 0
 \end{aligned} \tag{7.124}$$

— nel vertice in  $C$  si dovrà scrivere:

$$\begin{aligned}
 -n^{BC}(5L) + t^{CD}(0) &= 0 \\
 -t^{BC}(5L) - n^{CD}(0) &= 0 \\
 -m^{BC}(5L) + m^{CD}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{7.125}$$

— nella cerniera in  $D$ , sforzi normali e tagli devono essere continui, e devono annullarsi i momenti flettenti. Si hanno quindi le quattro condizioni:

$$\begin{aligned} n^{CD}(4L) - n^{DE}(0) &= 0 \\ -t^{CD}(4L) + t^{DE}(0) &= 0 \\ m^{CD}(4L) &= 0 \\ m^{DE}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{7.126}$$

— nel nodo d'angolo  $E$  si hanno le condizioni:

$$\begin{aligned} -n^{FE}(5L) - t^{DE}(2L) &= 0 \\ -t^{FE}(5L) + n^{DE}(2L) &= 0 \\ -m^{FE}(5L) - m^{DE}(2L) &= 0 \end{aligned} \tag{7.127}$$

— nel nodo in  $F$ , caricato da una forza verticale  $P$  diretta verso l'alto, occorre imporre la continuità di momenti e sforzi normali, mentre il taglio dovrà subire una discontinuità pari a  $-P$ :

$$\begin{aligned} -n^{GF}(3L) + n^{FE}(0) &= 0 \\ -m^{GF}(3L) + m^{FE}(0) &= 0 \\ -t^{GF}(3L) + t^{GF}(0) + P &= 0 \end{aligned} \tag{7.128}$$

— nella cerniera in  $G$ , sforzi normali e tagli devono essere continui, e devono annullarsi i momenti flettenti. Si hanno quindi le quattro condizioni:

$$\begin{aligned} -n^{HG}(2L) + n^{GF}(0) &= 0 \\ -t^{HG}(2L) + t^{GF}(0) &= 0 \\ m^{HG}(2L) &= 0 \\ m^{GF}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{7.129}$$

— nel nodo d'angolo  $H$  si hanno le condizioni:

$$\begin{aligned} -t^{IH}(3L) + n^{HG}(0) &= 0 \\ n^{IH}(3L) + t^{HG}(0) &= 0 \\ -m^{IH}(3L) + m^{HG}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{7.130}$$

— infine, nella cerniera in  $I$ , sforzi normali e tagli devono essere continui, e devono annullarsi i momenti flettenti. Si hanno quindi le quattro condizioni:

$$\begin{aligned} -n^{IH}(0) + n^{AI}(3L) &= 0 \\ t^{IH}(0) - t^{AI}(3L) &= 0 \\ m^{IH}(0) &= 0 \\ m^{AI}(3L) &= 0 \end{aligned} \tag{7.131}$$

Le risultanti equazioni si possono risolvere con un qualsiasi programma di calcolo simbolico, ottenendo i momenti flettenti:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{15}{28}F(2L + x_3) \\
 m^{BC}(x_3) &= -\frac{15FL}{4} + \frac{13Fx_3}{28} \\
 m^{CD}(x_3) &= \frac{5}{14}F(-4L + x_3) \\
 m^{DE}(x_3) &= \frac{5Fx_3}{14} \\
 m^{AI}(x_3) &= \frac{5}{14}F(3L - x_3) \\
 m^{IH}(x_3) &= -\frac{5Fx_3}{14} \\
 m^{HG}(x_3) &= -\frac{15}{28}F(2L - x_3) \\
 m^{GF}(x_3) &= \frac{15Fx_3}{28} \\
 m^{FE}(x_3) &= \frac{1}{28}F(45L - 13x_3)
 \end{aligned} \tag{7.132}$$

Gli sforzi di taglio sono immediatamente leggibili come derivate dei momenti, mentre gli sforzi normali sono pari a:

$$n^{AB}(x_3) = n^{BC}(x_3) = \frac{5F}{14} \tag{7.133}$$

lungo il tratto inferiore, che quindi risulta teso, sono pari a:

$$n^{HG}(x_3) = n^{GF}(x_3) = n^{FE}(x_3) = -\frac{5F}{14} \tag{7.134}$$

lungo il tratto superiore, che quindi risulta compresso, così come compressi sono i due tratti verticali, con sforzi normali pari:

$$\begin{aligned}
 n^{CD}(x_3) &= n^{DE}(x_3) = -\frac{13F}{28} \\
 n^{AI}(x_3) &= n^{IH}(x_3) = -\frac{15F}{28}
 \end{aligned} \tag{7.135}$$

Il diagramma dei momenti flettenti è riportato in Figura 7.39.

## Il caso del bipendolo

Si immagini ora che la cerniera in  $I$  venga sostituita da un bipendolo con asse di scorrimento orizzontale, come illustrato in Figura 7.40. Le condizioni ai limiti dovranno ora imporre che momenti e sforzi normali siano continui, mentre i

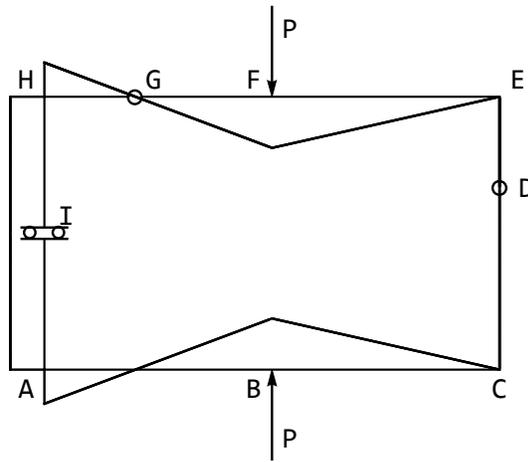


Figura 7.39: Il diagramma dei momenti per la maglia chiusa a tre cerniere

tagli saranno nulli:

$$\begin{aligned}
 -n^{IH}(0) + n^{AI}(3L) &= 0 \\
 m^{IH}(0) - m^{AI}(3L) &= 0 \\
 t^{IH}(0) &= 0 \\
 t^{AI}(3L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.136}$$

Le altre condizioni ai limiti non si modificano, e risolvendo le equazioni si ottengono i momenti flettenti:

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= \frac{5}{8}F(2L - x_3) \\
 m^{BC}(x_3) &= \frac{3}{8}F(-5L + x_3) \\
 m^{CD}(x_3) &= 0 \\
 m^{DE}(x_3) &= 0 \\
 m^{AI}(x_3) &= -\frac{5FL}{4} \\
 m^{IH}(x_3) &= -\frac{5FL}{4} \\
 m^{HG}(x_3) &= \frac{5}{8}F(-2L + x_3) \\
 m^{GF}(x_3) &= \frac{5Fx_3}{8} \\
 m^{FE}(x_3) &= \frac{3}{8}F(5L - x_3)
 \end{aligned}
 \tag{7.137}$$

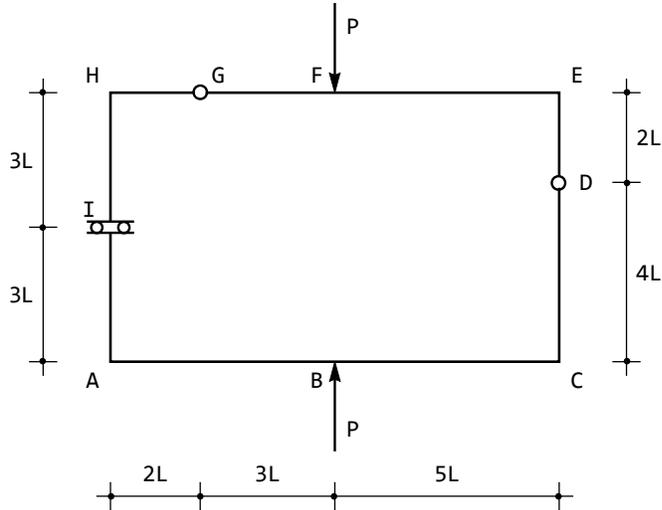


Figura 7.40: Una maglia chiusa a due cerniere e bipendolo

Gli sforzi di taglio sono immediatamente leggibili come derivate dei momenti, mentre gli sforzi normali sono nulli lungo i tratti orizzontali, laddove i tratti verticali sono compressi, con valori pari a:

$$n^{CD}(x_3) = n^{DE}(x_3) = -\frac{3F}{8} \quad (7.138)$$

a destra, e:

$$n^{AI}(x_3) = n^{IH}(x_3) = -\frac{5F}{8} \quad (7.139)$$

a sinistra.

Il diagramma dei momenti flettenti è riportato in Figura 7.41.

### Soluzione grafica

Limitandosi al caso della maglia a tre cerniere, si vuole ora illustrare la via grafica.

Si inizia a determinare le reazioni, partendo dall'ovvia constatazione che l'equilibrio del tratto *I* impone che la retta d'azione delle cerniere in *G* ed *I* coincida con la congiungente le due cerniere. Per l'equilibrio del tratto *II* si può scrivere:

$$p + g + d = 0 \quad (7.140)$$

e conoscendo le rette d'azione *p* della forza e *g* della reazione nella cerniera, si può dedurre la retta d'azione della reazione in *D*: basta infatti intersecare *p* e

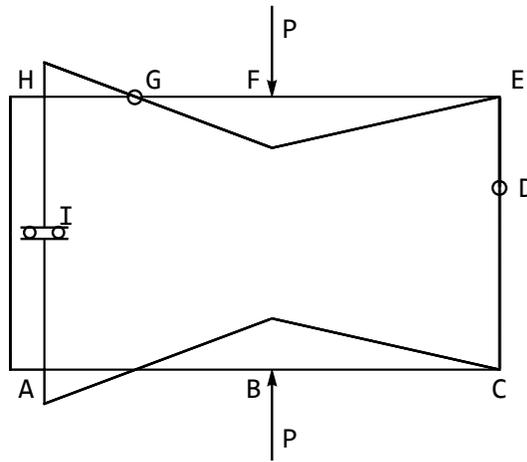


Figura 7.41: I momenti per la maglia chiusa a due cerniere e bipendolo

$g$ , identificando il punto  $L$ , e la reazione  $d$  della cerniera sarà la retta passante per  $L$  e per  $D$ .

Determinate le reazioni, può tracciarsi il diagramma del momento, iniziando dal ritto di sinistra. Si traccia quindi un segmento inclinato di un angolo arbitrario — così assegnando implicitamente una scala — fino al nodo  $H$  in alto, ed al nodo  $A$  in basso. Per proseguire lungo il traverso, si ribalta il diagramma e si prosegue fino ad  $F$ , passando per la cerniera in  $G$ . Per proseguire, si osservi che a destra di una generica sezione del tratto  $FE$  agisce solo la reazione  $d$ , e quindi la sua intersezione  $N$  col traverso segna un punto di nullo del diagramma. Ciò consente di tracciare il diagramma fino in  $E$ , e poi, ribaltandolo, di proseguire fino a  $C$ , passando per la cerniera  $D$ .

Ciò fatto, si consideri che a destra di una generica sezione del tratto  $BC$  agisce solo la reazione  $d$ , e quindi la sua intersezione  $S$  col traverso inferiore segna un punto di nullo del diagramma, consentendo di tracciare il diagramma fino alla sezione  $B$ , in corrispondenza della forza inferiore. Infine, a sinistra di una generica sezione del tratto  $AB$  agisce solo la reazione  $I$ , e quindi la sua intersezione  $V$  col traverso inferiore fornisce il punto di nullo, consentendo di completare il diagramma di Figura 7.42.

Il caso del bipendolo si tratta allo stesso modo: il tratto scarico è in equilibrio solo se la retta d'azione della cerniera in  $G$  è verticale, e se la reazione del bipendolo in  $I$  passa per  $G$ . Ne segue che anche la reazione della cerniera in  $D$  è verticale. Iniziando dalla forza sul traverso superiore, si annulla il diagramma in  $G$ , proseguendo fino al vertice  $H$ , poi si ribalta e si traccia un tratto di momento costante lungo il tratto di sinistra. In  $A$  il diagramma di ribalta, e si prosegue annullando in corrispondenza dell'intersezione tra il tratto inferiore e la retta d'azione del bipendolo.

Si giunge così in corrispondenza della forza, per poi proseguire annullando

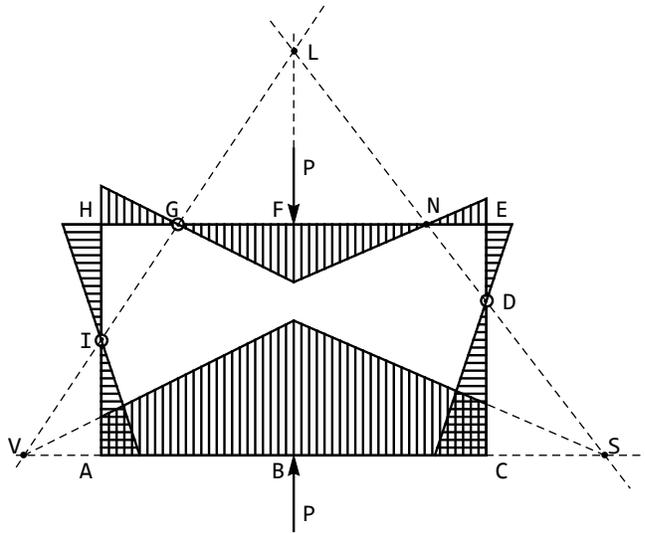


Figura 7.42: Ricerca delle reazioni e tracciamento del diagramma del momento

il diagramma dove la reazione in  $D$  incontra il tratto, ossia nel vertice  $C$ . Ne segue quindi che il tratto di destra risulta scarico, giungendo al diagramma di Figura 7.41.



## Capitolo 8

# Analisi della tensione

In questo Capitolo si illustrano alcuni esercizi relativi all'analisi di uno stato tensionale in un corpo  $B$ .

Nei primi due esempi si esamina un intorno di un punto  $P$ , in cui viene assegnata la matrice delle componenti speciali di tensione, e si vuol determinare il vettore di tensione  $t_n(P)$ , identificando il piano su cui calcolare la tensione attraverso i coseni direttori della normale al piano stesso, oppure assegnando direttamente l'equazione del piano. Il terzo esercizio é invece finalizzato a ricavare la tensione tangenziale agente su un piano identificato dai coseni direttori della sua normale.

Nei successivi due esempi, invece, si assegna lo stato tensionale all'interno del corpo  $B$ , e si verifica che esso sia equilibrato in presenza di determinate forze di massa, oppure, all'inverso, si calcolano le forze di massa che garantiscano l'equilibrio.

Un ulteriore esercizio assegna uno stato tensionale in un punto  $P$  attraverso la definizione delle sue componenti speciali di tensione, e ne richiede uno studio completo, ossia la deduzione delle tensioni principali e delle corrispondenti direzioni principali di tensione, la deduzione delle tensioni tangenziali estreme, insieme alla identificazione dei piani su cui esse agiscono, ed infine il disegno dei cerchi di Mohr per la visualizzazione dei risultati. Per essere svolto, questo esercizio necessita dell'ausilio di un computer, in quanto l'equazione secolare per il calcolo delle tensioni principali è un'equazione cubica completa.

Tre ulteriori esercizi sono poi dedicati a stati piani di tensione, tra cui il noto stato tensionale alla De Saint-Venant, caratteristico della teoria della trave, mentre l'ultimo esercizio illustra l'utilizzo dei cerchi di Mohr per la deduzione delle tensioni principali e delle corrispondenti direzioni principali di tensione

## 8.1 Determinazione del vettore di tensione

Si consideri il corpo  $B$ , e si ipotizzi che nel punto  $P$  la matrice delle tensioni sia data da:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1.5 \end{pmatrix} t \text{ cm}^{-2} \quad (8.1)$$

e si voglia determinare il vettore tensione  $t_n$  sul piano definito dalla normale con coseni direttori:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{\sqrt{14}} \\ n_2 &= \sqrt{\frac{2}{7}} \\ n_3 &= \frac{3}{\sqrt{14}} \end{aligned} \quad (8.2)$$

### Soluzione

Basta applicare il teorema di Cauchy–Poisson, ottenendo:

$$\begin{pmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \sqrt{\frac{2}{7}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.60357 \\ -0.935414 \end{pmatrix} t \text{ cm}^{-2} \quad (8.3)$$

## 8.2 Determinazione del vettore di tensione

Si consideri il corpo  $B$ , e si ipotizzi che nel punto  $P$  la matrice delle tensioni sia data da:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1.5 \end{pmatrix} t \text{ cm}^{-2} \quad (8.4)$$

e si voglia determinare il vettore tensione  $t_n$  sul piano definito dall'equazione (cfr. Figura 8.1):

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \quad (8.5)$$

### Soluzione

Dato il piano di equazione:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \quad (8.6)$$

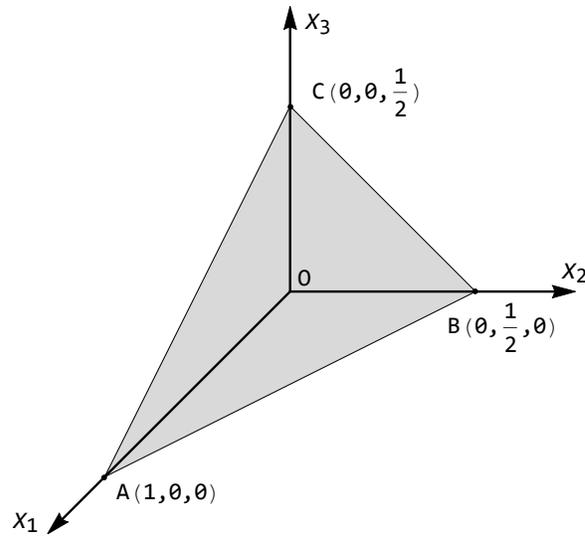


Figura 8.1: Il piano di equazione (8.5)

i coseni della normale ad esso sono forniti da:

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
 n_2 &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
 n_3 &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}
 \end{aligned}
 \tag{8.7}$$

Nel nostro caso sarà allora:

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \frac{1}{3} \\
 n_2 &= \frac{2}{3} \\
 n_3 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}
 \tag{8.8}$$

e quindi il teorema di Cauchy–Poisson fornisce:

$$\begin{pmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} t \text{ cm}^{-2}
 \tag{8.9}$$

### 8.3 Determinazione del vettore di tensione tangenziale

Si consideri il corpo  $B$ , e si ipotizzi che nel punto  $P$  la matrice delle tensioni sia data da:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} t \text{ cm}^{-2} \quad (8.10)$$

e si voglia determinare la tensione tangenziale  $\boldsymbol{\tau}_n$  agente sul piano di normale con coseni direttori:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

#### Soluzione

Si calcolano, nell'ordine, la tensione  $\mathbf{t}_n$  sul piano in oggetto, la sua componente normale  $\sigma_n$  e l'ampiezza della componente tangenziale  $\boldsymbol{\tau}_n$ . Infine, si calcolano i coseni direttori della retta di azione di  $\boldsymbol{\tau}_n$ .

La tensione  $\mathbf{t}_n$  si ottiene applicando il teorema di Cauchy–Poisson:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{S}\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} t \text{ cm}^{-2} \quad (8.12)$$

La componente normale  $\sigma_n$  è la componente di  $\mathbf{t}_n$  lungo la normale  $\mathbf{n}$ , e si calcola attraverso il prodotto scalare tra il vettore di tensione  $\mathbf{t}_n$  ed il vettore della normale  $\mathbf{n}$ :

$$\sigma_n = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} = t_{n1}n_1 + t_{n2}n_2 + t_{n3}n_3 = \frac{1}{3} \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{2}{3} = \frac{13}{9} t \text{ cm}^{-2} \quad (8.13)$$

L'ampiezza della tensione tangenziale è immediatamente deducibile come:

$$|\tau_n| = \sqrt{t_n^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} - \frac{169}{81}} = \frac{2\sqrt{5}}{9} \quad (8.14)$$

Infine, i coseni direttori della retta di azione di  $\boldsymbol{\tau}_n$  si ottengono da:

$$\begin{aligned} n_{\tau 1} &= \frac{t_{n1} - \sigma_n n_1}{\tau_n} = -\frac{2}{3\sqrt{5}} = -0.298142 \\ n_{\tau 2} &= \frac{t_{n2} - \sigma_n n_2}{\tau_n} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0.745356 \\ n_{\tau 3} &= \frac{t_{n3} - \sigma_n n_3}{\tau_n} = -\frac{4}{3\sqrt{5}} = -0.596285 \end{aligned} \quad (8.15)$$

## 8.4 Verifica dell'equilibrio per uno stato piano

Assegnato lo stato tensionale:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_1 x_2 \\ \sigma_{22} &= c_4 x_1 \\ \sigma_{12} &= -c_3 \frac{x_2^2}{2} - c_1 x_2\end{aligned}\tag{8.16}$$

verificare se esso è ipotizzabile, in assenza di forze di massa.

### Soluzione

Le equazioni indefinite dell'equilibrio, in assenza di forze di massa, si semplificano in:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0\end{aligned}\tag{8.17}$$

e sono banalmente soddisfatte dal campo di tensioni (8.16)

## 8.5 Verifica dell'equilibrio per uno stato tensionale generico

Assegnato lo stato tensionale:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_1 x_2 + c_4 x_3^2 - \frac{c_{12}}{3} x_1^3 \\ \sigma_{22} &= c_5 x_1 + c_6 x_2^2 - c_7 x_3 \\ \sigma_{33} &= c_8 x_1 + c_9 x_2 + c_{10} x_1 x_3^2 + c_{11} x_3^2 \\ \sigma_{12} &= -c_3 \frac{x_2^2}{2} - c_1 x_2 \\ \sigma_{13} &= c_{12} x_1^2 x_3 \\ \sigma_{23} &= -c_{13} x_2 x_3\end{aligned}\tag{8.18}$$

verificare se esso è realizzabile in assenza di forze di massa

### Soluzione

Le equazioni indefinite dell'equilibrio, in assenza di forze di massa, si semplificano in:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0\end{aligned}\tag{8.19}$$

La prima equazione è identicamente soddisfatta, mentre le altre due diventano:

$$\begin{aligned}2c_6x_2 - c_{13}x_2 &= 0 \\ 2c_{11}x_3 - c_{13}x_3 + 2c_{10}x_1x_3 + 2c_{12}x_1x_3 &= 0\end{aligned}\tag{8.20}$$

Di conseguenza, il campo tensionale assegnato non è equilibrato, a meno che non si abbia:

$$\begin{aligned}c_6 = c_{11} &= -\frac{c_{13}}{2} \\ c_{10} &= -c_{12}\end{aligned}\tag{8.21}$$

## 8.6 Deduzione forze di massa

Assegnato il campo di tensioni:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2x_1 - x_2 + x_2x_3 \\ \sigma_{22} &= x_1 - x_1x_3 \\ \sigma_{33} &= x_3 \\ \sigma_{12} &= \frac{x_2}{2} \\ \sigma_{13} &= 0 \\ \sigma_{23} &= x_2\end{aligned}\tag{8.22}$$

dedurre le forze di massa in equilibrio con esso.

### Soluzione

Dalle equazioni indefinite dell'equilibrio:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} &= -X_1 \\ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} &= -X_2 \\ \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} &= -X_3\end{aligned}\tag{8.23}$$

si trae subito che dovrà essere:

$$\begin{aligned}X_1 &= -\frac{5}{2} \\ X_2 &= 0 \\ X_3 &= -2\end{aligned}\tag{8.24}$$

## 8.7 Studio di uno stato tensionale generico

Si consideri il punto  $P$ , interno al corpo  $B$ , e si assegni in  $P$  la seguente matrice delle componenti speciali di tensione:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 750 & -400 & 125 \\ -400 & 1000 & 0 \\ 125 & 0 & -500 \end{pmatrix} Kg\ cm^{-2} \quad (8.25)$$

Si vuole:

1. disegnare lo stato tensionale
2. calcolare le tensioni principali
3. calcolare le corrispondenti direzioni principali di tensione
4. calcolare le massime e minime tensioni tangenziali
5. identificare i piani su cui agiscono tali tensioni
6. tracciare i cerchi principali di Mohr, confermando i risultati del punto precedente

### Soluzione

#### Punto 1

Lo stato tensionale è disegnato in Figura 8.2. Si osservi che le tensioni sono state riportate col loro segno, e che di conseguenza il loro valore è stato indicato in assoluto.

#### Punto 2

Per dedurre le tensioni principali, è opportuno calcolare i tre invarianti:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 750 + 1000 - 500 = 1250\ Kg/cm^2 \\ I_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 = -300625\ (Kg/cm^2)^2 \\ I_3 &= \text{Det}(\mathbf{S}) = -310625000\ (Kg/cm^2)^3 \end{aligned} \quad (8.26)$$

da cui poi trarre l'equazione secolare:

$$-\sigma^3 + 1250\sigma^2 + 300625\sigma - 310625000 = 0 \quad (8.27)$$

Le tre radici, reali, possono essere calcolate con un qualsiasi metodo numerico, ottenendo le tre tensioni principali:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1297.15 \\ \sigma_2 &= 466.348 \\ \sigma_3 &= -513.496 \end{aligned} \quad (8.28)$$

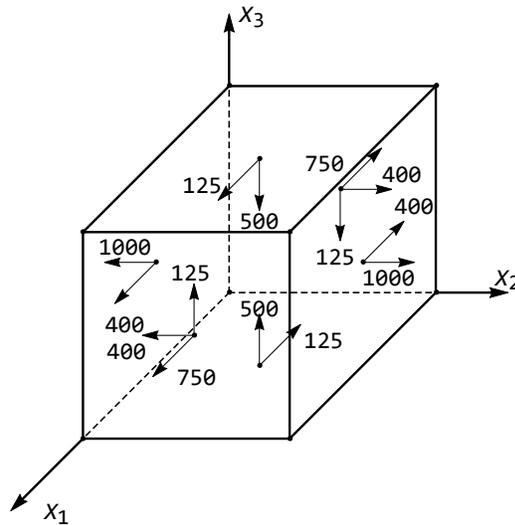


Figura 8.2: Lo stato tensionale in esame

**Punto 3**

Per calcolare la prima direzione principale occorre risolvere il sistema:

$$(\mathbf{S} - \sigma_1 \mathbf{I}) \mathbf{n} = 0 \quad (8.29)$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} 750 - 1297.15 & -400 & 125 \\ -400 & 1000 - 1297.15 & 0 \\ 125 & 0 & -500 - 1297.15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

omogeneo ed a determinante nullo. Dividendo per  $n_3$  si ha, dalle prime due equazioni:

$$-547.15 \left( \frac{n_1}{n_3} \right) - 400 \left( \frac{n_2}{n_3} \right) = -125 \quad (8.31)$$

$$-400 \left( \frac{n_1}{n_3} \right) - 297.15 \left( \frac{n_2}{n_3} \right) = 0 \quad (8.32)$$

con soluzione ottenibile con un normale metodo di sostituzione:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_3} &= 14.3655 \\ \frac{n_2}{n_3} &= -19.3377 \end{aligned} \quad (8.33)$$

Infine, la soluzione può essere normalizzata imponendo che sia:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (8.34)$$

Basta, a tal fine, scrivere:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{14.3655}{(14.3655^2 + 19.3377^2 + 1)^{1/2}} = 0.59582 \\ n_2 &= \frac{-19.3377}{(14.3655^2 + 19.3377^2 + 1)^{1/2}} = -0.802046 \\ n_3 &= \frac{1}{(14.3655^2 + 19.3377^2 + 1)^{1/2}} = 0.0414758 \end{aligned} \quad (8.35)$$

La prima direzione principale è quindi data da:

$$\mathbf{n}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.59582 \\ -0.802046 \\ 0.0414758 \end{pmatrix} \quad (8.36)$$

Per calcolare la seconda direzione principale occorre risolvere il sistema:

$$(\mathbf{S} - \sigma_2 \mathbf{I}) \mathbf{n} = 0 \quad (8.37)$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} 750 - 466.348 & -400 & 125 \\ -400 & 1000 - 466.348 & 0 \\ 125 & 0 & -500 - 466.348 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

omogeneo ed a determinante nullo. Dividendo per  $n_3$  si ha, dalle prime due equazioni:

$$\begin{aligned} 283.652 \left( \frac{n_1}{n_3} \right) - 400 \left( \frac{n_2}{n_3} \right) &= -125 \\ -400 \left( \frac{n_1}{n_3} \right) - 533.652 \left( \frac{n_2}{n_3} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (8.39)$$

con soluzione ottenibile con un normale metodo di sostituzione:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_3} &= 7.73091 \\ \frac{n_2}{n_3} &= 5.79472 \end{aligned} \quad (8.40)$$

Infine, la soluzione può essere normalizzata imponendo che sia:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (8.41)$$

Basta, a tal fine, scrivere:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{7.73091}{(7.73091^2 + 5.79472^2 + 1)^{1/2}} = 0.79592 \\ n_2 &= \frac{5.79472}{(7.73091^2 + 5.79472^2 + 1)^{1/2}} = 0.596584 \\ n_3 &= \frac{1}{(7.73091^2 + 5.79472^2 + 1)^{1/2}} = 0.102953 \end{aligned} \quad (8.42)$$

La seconda direzione principale è quindi data da:

$$\mathbf{n}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.79592 \\ 0.596584 \\ 0.102953 \end{pmatrix} \quad (8.43)$$

Per calcolare la terza direzione principale occorre risolvere il sistema:

$$(\mathbf{S} - \sigma_3 \mathbf{I}) \mathbf{n} = 0 \quad (8.44)$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} 750 + 513.496 & -400 & 125 \\ -400 & 1000 + 513.496 & 0 \\ 125 & 0 & -500 + 513.496 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.45)$$

omogeneo ed a determinante nullo. Dividendo per  $n_3$  si ha, dalle prime due equazioni:

$$\begin{aligned} 1263.5 \left( \frac{n_1}{n_3} \right) - 400 \left( \frac{n_2}{n_3} \right) &= -125 \\ -400 \left( \frac{n_1}{n_3} \right) + 1513.496 \left( \frac{n_2}{n_3} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (8.46)$$

con soluzione ottenibile con un normale metodo di sostituzione:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_3} &= -0.107965 \\ \frac{n_2}{n_3} &= -0.0285339 \end{aligned} \quad (8.47)$$

Infine, la soluzione può essere normalizzata imponendo che sia:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (8.48)$$

Basta, a tal fine, scrivere:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{-0.107965}{(0.107965^2 + 0.0285339^2 + 1)^{1/2}} = -0.107298 \\ n_2 &= \frac{-0.0285339}{(0.107965^2 + 0.0285339^2 + 1)^{1/2}} = -0.0283576 \\ n_3 &= \frac{1}{(0.107965^2 + 0.0285339^2 + 1)^{1/2}} = 0.993822 \end{aligned} \quad (8.49)$$

La terza direzione principale è quindi data da:

$$\mathbf{n}^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.107298 \\ -0.0283576 \\ 0.993822 \end{pmatrix} \quad (8.50)$$

Si costruisca ora la matrice modale, inserendo le tre direzioni in colonne successive:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0.59582 & 0.79592 & -0.107298 \\ -0.80204612 & 0.596584 & -0.0283576 \\ 0.0414758 & 0.102953 & 0.9938224 \end{pmatrix} \quad (8.51)$$

Tale matrice risulta ortogonale, a determinante unitario, segnalando che le direzioni principali sono mutuamente ortogonali. Inoltre, è facile verificare che:

$$\mathbf{N}^{-1}\mathbf{SN} = \mathbf{\Lambda} \quad (8.52)$$

con  $\mathbf{\Lambda}$  matrice diagonale contenente l' $i$ -esima tensione principale in posizione  $i$ -esima:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1297.15 & 0 & 0 \\ 0 & 466.348 & 0 \\ 0 & 0 & -513.496 \end{pmatrix} \quad (8.53)$$

#### Punto 4

Conosciute le tensioni principali, è immediato concludere che le minime e massime tensioni tangenziali sono fornite da:

1. sui quattro piani di normale  $\mathbf{n}^T = (0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\tau_n = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{466.348 + 513.496}{2} = \pm 489.922 \quad (8.54)$$

con tensione normale, agente sul medesimo piano, pari a:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = \frac{466.348 - 513.496}{2} = -23.574 \quad (8.55)$$

2. sui quattro piani di normale  $\mathbf{n}^T = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\tau_n = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \pm \frac{-513.496 - 1297.15}{2} = \pm 905.323 \quad (8.56)$$

con tensione normale, agente sul medesimo piano, pari a:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} = \frac{-513.496 + 1297.15}{2} = 391.827 \quad (8.57)$$

3. sui quattro piani di normale  $\mathbf{n}^T = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$$\tau_n = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \frac{1297.15 - 466.348}{2} = \pm 415.401 \quad (8.58)$$

con tensione normale, agente sul medesimo piano, pari a:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{1297.15 + 466.348}{2} = 881.749 \quad (8.59)$$

**Punto 5**

Il tracciamento dei cerchi principali di Mohr è immediato:

- si individuano sull'asse orizzontale i tre punti di ascissa  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ ,
- si individuano i tre centri, con coordinate:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right) \\ C_2 &= \left( \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, 0 \right) \\ C_3 &= \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right) \end{aligned} \quad (8.60)$$

- si traccia il cerchio di centro  $C_1$  e raggio  $r_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ , il cerchio di centro  $C_2$  e raggio  $r_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ , il cerchio di centro  $C_3$  e raggio  $r_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ .

Si giunge infine ai cerchi di Figura 8.3

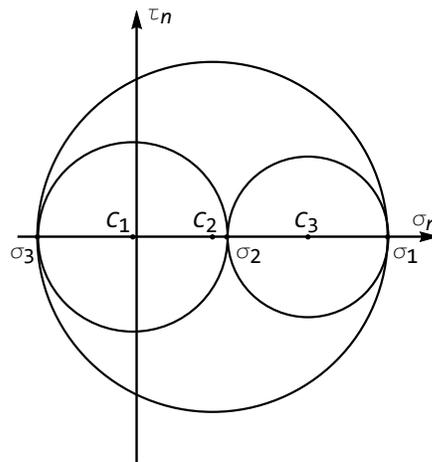


Figura 8.3: I tre cerchi principali di Mohr

## 8.8 Uno stato tensionale piano

Si consideri un punto  $P$  interno al corpo  $B$ , e si assegni in  $P$  la seguente matrice delle tensioni:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1000 & 500 & 0 \\ 500 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Kg / cm}^2 \quad (8.61)$$

Si vogliono conoscere le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali di tensione.

### Soluzione

Lo stato tensionale è disegnato in Figura 8.4: da esso si evince che tutte le componenti non nulle di tensione giacciono in un piano, come caratteristico negli *stati piani di tensione*. Si cominci con l'osservare che la matrice  $\mathbf{S}$  ha una riga

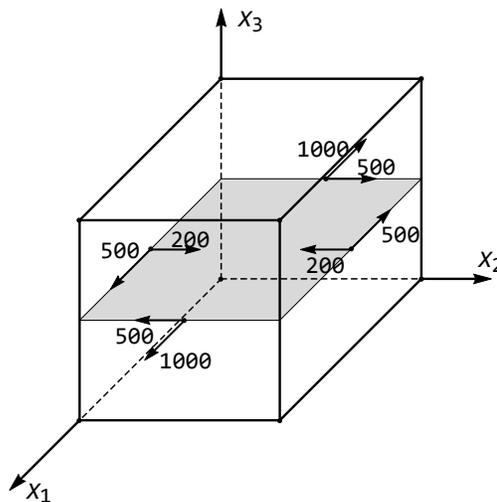


Figura 8.4: Lo stato tensionale in esame

(ed una colonna) interamente nulla, e che di conseguenza il suo determinante è nullo. Questo implica che il termine noto dell'equazione secolare, ossia l'invariante cubico, è anch'esso nullo. Ne segue che una radice sarà senz'altro nulla, e che l'equazione stessa si riduce ad un'equazione quadratica, di facile soluzione.

L'invariante lineare si calcola immediatamente, come traccia di  $\mathbf{S}$ :

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} = 800 \quad (8.62)$$

ed anche l'invariante quadratico non presenta difficoltà:

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = -1000 * 200 - 500^2 = -450000 \quad (8.63)$$

A questo punto l'equazione secolare si scrive:

$$\sigma (450000 + 800\sigma - \sigma^2) = 0 \quad (8.64)$$

con soluzione immediata:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1181.02 \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= -381.025 \end{aligned} \quad (8.65)$$

Ottenute le radici, esse vanno sostituite, una per volta, nel sistema di equazioni  $(\mathbf{S} - \sigma \mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}$ . Ad esempio, per  $\sigma = \sigma_1$  si ha:

$$\begin{aligned} -181.02 n_1 + 500 n_2 &= 0 \\ 500 n_1 - 1381.02 n_2 &= 0 \\ -1181.02 n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.66)$$

La terza equazione fornisce subito  $n_3 = 0$ , mentre è possibile verificare che la seconda equazione si ottiene dalla prima moltiplicata per 2.76213. Ciò significa che, come d'altronde ovvio, non si può certo sperare di calcolare un valore univoco e non nullo della coppia di incognite  $n_1, n_2$ . E' però possibile calcolare il loro rapporto, dividendo, ad esempio, la prima equazione per  $n_2$ :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{500}{181.02} \approx 2.76213 \quad (8.67)$$

Per ottenere i coseni direttori, non resta che normalizzare, scrivendo:

$$n_1 \rightarrow \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{500}{\sqrt{500^2 + 181.02^2}} \approx 0.940275 \quad (8.68)$$

$$n_2 \rightarrow \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{181.02}{\sqrt{500^2 + 181.02^2}} \approx 0.340417 \quad (8.69)$$

Mentre il calcolo della direzione principale corrispondente a  $\sigma_2 = -381.025$  non presenta alcuna difficoltà, si noti che per la seconda direzione principale occorre risolvere il sistema (per  $\sigma_3 = 0$ ):

$$\begin{aligned} 1000 n_1 + 500 n_2 &= 0 \\ 500 n_1 - 200 n_2 &= 0 \\ 0 n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.70)$$

che potrebbe causare qualche perplessità. Tuttavia è immediato realizzare che le prime due equazioni sono indipendenti, avendo determinante dei coefficienti diverso da zero, e pertanto ammettono solo la soluzione nulla. Dalla terza scompare ogni traccia di  $n_3$ , che pertanto può essere assunta arbitraria. Ne segue, normalizzando, la soluzione  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ .

I cerchi principali di Mohr sono riportati in Figura 8.5.

## 8.9 Secondo stato tensionale piano

Si consideri un punto  $P$  interno al corpo  $B$ , e si assegni in  $P$  la seguente matrice delle tensioni:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 10 & 20 & 40 \\ 20 & 40 & 105 \end{pmatrix} Kg/cm^2; \quad (8.71)$$

Si vuole conoscere le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali di tensione.

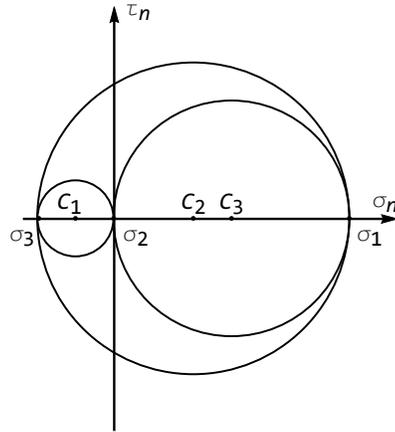


Figura 8.5: I cerchi principali di Mohr

### Soluzione:

Si cominci con l'osservare che la matrice  $\mathbf{S}$  ha due righe chiaramente linearmente dipendenti, poichè una è il doppio dell'altra, e che di conseguenza il suo determinante è nullo. Questo implica che il termine noto dell'equazione secolare, ossia l'invariante cubico, è anch'esso nullo. Ne segue che una radice sarà senz'altro nulla, e che l'equazione stessa si riduce ad un'equazione quadratica, di facile soluzione.

L'invariante lineare si calcola immediatamente, come traccia di  $\mathbf{S}$ :

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 130 \quad (8.72)$$

ed anche l'invariante quadratico non presenta difficoltà:

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 = 625 \quad (8.73)$$

L'equazione secolare si scrive:

$$-\sigma^3 + 130\sigma^2 - 625\sigma = 0 \quad (8.74)$$

con soluzione immediata:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 125 \\ \sigma_2 &= 5 \\ \sigma_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.75)$$

Ottenute le radici, esse vanno sostituite, una per volta, nel sistema di equazioni  $(\mathbf{S} - \sigma\mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}$ . Per  $\sigma = \sigma_1 = 125$  si ha:

$$\begin{aligned} -120n_1 + 10n_2 + 20n_3 &= 0 \\ 10n_1 - 105n_2 + 40n_3 &= 0 \\ 20n_1 + 40n_2 - 20n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.76)$$

e dividendo per  $n_3$  :

$$\begin{aligned} -120 \frac{n_1}{n_3} + 10 \frac{n_2}{n_3} &= -20 \\ 10 \frac{n_1}{n_3} - 105 \frac{n_2}{n_3} &= -40 \\ 20 \frac{n_1}{n_3} + 40 \frac{n_2}{n_3} &= 20 \end{aligned} \quad (8.77)$$

Le prime due equazioni forniscono, con un metodo di sostituzione,

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_3} &= \frac{1}{5} \\ \frac{n_2}{n_3} &= \frac{2}{5} \end{aligned} \quad (8.78)$$

Una soluzione non normalizzata è quindi  $\mathbf{n}^T = (1, 2, 5)$ . Per ottenere i coseni direttori, non resta che normalizzare, scrivendo:

$$\begin{aligned} n_1 &\rightarrow \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx 0.182574 \\ n_2 &\rightarrow \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx 0.365148 \\ n_3 &\rightarrow \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{5}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx 0.912871 \end{aligned} \quad (8.79)$$

La seconda direzione principale, corrispondente alla tensione principale  $\sigma_2 = 5$ , si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{aligned} 10n_2 + 20n_3 &= 0 \\ 10n_1 + 15n_2 + 40n_3 &= 0 \\ 20n_1 + 40n_2 + 100n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.80)$$

ossia, dividendo per  $n_3$ :

$$\frac{n_2}{n_3} = -22 \frac{n_1}{n_3} + 3 \frac{n_2}{n_3} = -8 \frac{n_1}{n_3} + 2 \frac{n_2}{n_3} = -5 \quad (8.81)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_3} &= -1 \\ \frac{n_2}{n_3} &= -2 \end{aligned} \quad (8.82)$$

Una soluzione non normalizzata è quindi  $\mathbf{n}^T = (-1, -2, 1)$ . Per ottenere i coseni direttori, non resta che normalizzare, scrivendo:

$$\begin{aligned} n_1 &\rightarrow \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + 2^2 + 1}} \approx -0.408248 \\ n_2 &\rightarrow \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx -0.816496 \\ n_3 &\rightarrow \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx 0.408248 \end{aligned} \quad (8.83)$$

Infine, la direzione principale corrispondente a  $\sigma_3 = 0$  si ottiene dalla soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} 5n_1 + 10n_2 + 20n_3 &= 0 \\ 10n_1 + 20n_2 + 40n_3 &= 0 \\ 20n_1 + 40n_2 + 105n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.84)$$

Se si cerca di utilizzare lo stesso approccio delle altre due direzioni principali, si ottiene il sistema:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_3} + 2\frac{n_2}{n_3} &= -4 \\ \frac{n_1}{n_3} + 2\frac{n_2}{n_3} &= -\frac{105}{20} \end{aligned} \quad (8.85)$$

che non ha soluzioni. Ne segue che  $n_3 = 0$ , e che conseguentemente:

$$\frac{n_1}{n_2} = -2 \quad (8.86)$$

Una soluzione non normalizzata, in definitiva, è  $\mathbf{n}^T = (-2, 1, 0)$ , la cui normalizzazione si lascia come esercizio.

I cerchi principali di Mohr sono riportati in Figura 8.6, anche se il cerchio più piccolo è scarsamente visibile.

## 8.10 Un terzo stato tensionale piano

Si consideri un punto  $P$  interno al corpo  $B$ , e si assegni in  $P$  la seguente matrice delle tensioni:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ Kg/cm}^2; \quad (8.87)$$

Si vuole conoscere le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali di tensione.

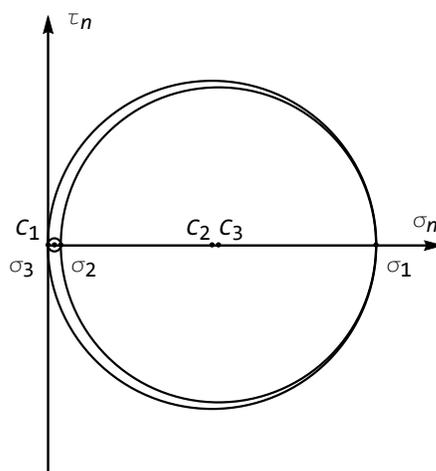


Figura 8.6: I cerchi principali di Mohr

### Soluzione

Si cominci con l'osservare che la matrice  $\mathbf{S}$  ha la prima riga e la prima colonna in cui l'unica entrata non nulla è sulla diagonale principale. In questo caso, invece di ricorrere alla scrittura dell'equazione secolare in termini di invarianti, conviene partire dalla definizione di tensione principale, imponendo che sia:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 5 - \sigma & 1 \\ 0 & 1 & 5 - \sigma \end{pmatrix} = 0 \quad (8.88)$$

e calcolando il determinante con la regola di Laplace, secondo la prima riga (o la prima colonna) si ha l'equazione secolare nella forma:

$$(1 - \sigma) ((5 - \sigma)^2 - 1) = 0 \quad (8.89)$$

Ne segue che una tensione principale è pari a 1, mentre le altre due si calcolano risolvendo una equazione quadratica:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 6 \\ \sigma_2 &= 4 \\ \sigma_3 &= 1 \end{aligned} \quad (8.90)$$

Ottenute le radici, esse vanno sostituite, una per volta, nel sistema di equazioni  $(\mathbf{S} - \sigma \mathbf{I})\mathbf{n} = 0$ . Per  $\sigma = \sigma_1 = 6$  si ha:

$$\begin{aligned} -5n_1 &= 0 \\ -n_2 + n_3 &= 0 \\ n_2 - n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.91)$$

che ha ovviamente la soluzione  $\mathbf{n}^T = (0, 1, 1)$

Per ottenere i coseni direttori, non resta che normalizzare, scrivendo:

$$\begin{aligned} n_2 &\rightarrow \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_3 &\rightarrow \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (8.92)$$

Per la seconda direzione principale occorre risolvere il sistema (per  $\sigma_2 = 4$ ):

$$\begin{aligned} -3n_1 &= 0 \\ n_2 + n_3 &= 0 \\ n_2 + n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.93)$$

con soluzione  $\mathbf{n}^T = (0, -1, 1)$ . Infine, in corrispondenza della terza radice si ha il sistema:

$$\begin{aligned} 0n_1 &= 0 \\ 4n_2 + n_3 &= 0 \\ n_2 + 4n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.94)$$

con soluzione  $\mathbf{n}^T = (1, 0, 0)$ . Ciò indica che l'asse  $X_1$  è un asse principale<sup>1</sup>. Infine, i cerchi principali di Mohr mostrano l'assenza di stati tensionali puramente tangenziali, come si evince dalla Figura 8.7.

## 8.11 Lo stato tensionale alla De Saint-Venant

Si consideri un punto  $P$  interno al corpo  $B$ , e si assegni in  $P$  la seguente matrice delle tensioni:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (8.95)$$

che, come vedremo in seguito, assume importanza fondamentale in teoria della trave.

### 8.11.1 Soluzione:

Si calcolano gli invarianti:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{33} \\ I_2 &= -\sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 = -\tau_3^2 \\ I_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.96)$$

---

<sup>1</sup>In genere, se una matrice  $\mathbf{S}$  presenta l' $i$ -esima riga (e l' $i$ -esima colonna) nulla, salvo l'entrata in posizione diagonale, si potrà affermare che una tensione principale è pari a  $\sigma_{(ii)}$ , e che la corrispondente direzione principale coincide con l'asse  $X_i$

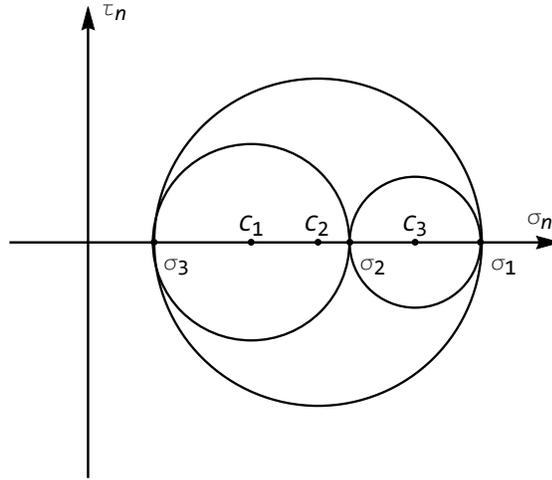


Figura 8.7: I cerchi principali di Mohr

da cui subito può notarsi che lo stato tensionale è piano. L'equazione secolare si scrive:

$$-\sigma (\sigma^2 - \sigma_{33}\sigma - \tau_3^2) = 0 \quad (8.97)$$

con una radice nulla, e due radici fornite da:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} \pm \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right) \quad (8.98)$$

In corrispondenza della tensione  $\sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right)$  si avrà una direzione principale fornita dal sistema:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left( \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right) n_{11} + \sigma_{13} n_{31} &= 0 \\ -\frac{1}{2} \left( \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right) n_{21} + \sigma_{23} n_{31} &= 0 \\ \left( \sigma_{13} - \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right) \right) n_{11} + \sigma_{23} n_{21} + \sigma_{33} n_{31} &= 0 \end{aligned} \quad (8.99)$$

Dividendo le prime due equazioni per  $n_{31}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right) \begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{31} \end{pmatrix} &= \sigma_{13} \\ \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right) \begin{pmatrix} n_{21} \\ n_{31} \end{pmatrix} &= \sigma_{23} \end{aligned} \quad (8.100)$$

da cui subito:

$$\begin{aligned}\frac{n_{11}}{n_{31}} &= \frac{2\sigma_{13}}{\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2}} \\ \frac{n_{21}}{n_{31}} &= \frac{2\sigma_{23}}{\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2}}\end{aligned}\quad (8.101)$$

Ne segue che la prima direzione principale è identificata da:

$$\mathbf{n}_I = \left( 2\sigma_{13}, 2\sigma_{23}, \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right) \quad (8.102)$$

da normalizzare nel solito modo.

Analogamente a quanto detto per la prima tensione principale, la direzione principale corrispondente alla tensione  $\sigma_2 = \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right)$  sarà fornita dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \left( \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right) n_{12} + \sigma_{13} n_{32} &= 0 \\ -\frac{1}{2} \left( \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right) n_{22} + \sigma_{23} n_{32} &= 0 \\ \left( \sigma_{13} - \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right) \right) n_{12} + \sigma_{23} n_{22} + \sigma_{33} n_{32} &= 0\end{aligned}\quad (8.103)$$

Dividendo le prime due equazioni per  $n_{31}$  si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left( \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right) \left( \frac{n_{12}}{n_{32}} \right) &= \sigma_{13} \\ \frac{1}{2} \left( \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right) \left( \frac{n_{22}}{n_{32}} \right) &= \sigma_{23}\end{aligned}\quad (8.104)$$

da cui subito:

$$\begin{aligned}\frac{n_{12}}{n_{32}} &= \frac{2\sigma_{13}}{\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2}} \\ \frac{n_{22}}{n_{32}} &= \frac{2\sigma_{23}}{\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2}}\end{aligned}\quad (8.105)$$

Ne segue che la seconda direzione principale è identificata da:

$$\mathbf{n}_{II} = \left( 2\sigma_{13}, 2\sigma_{23}, \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\tau_3^2} \right) \quad (8.106)$$

da normalizzare nel solito modo.

La direzione principale corrispondente alla tensione  $\sigma_3 = 0$  sarà fornita dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} n_{33} &= 0 \\ \sigma_{23} n_{33} &= 0 \\ \sigma_{13} n_{13} + \sigma_{23} n_{23} + \sigma_{33} n_{33} &= 0\end{aligned}\quad (8.107)$$

Se almeno una delle due tensioni tangenziali è diversa da zero, allora  $n_{33} = 0$ , e dalla terza equazione:

$$\sigma_{13}n_{13} + \sigma_{23}n_{23} = 0 \quad (8.108)$$

da cui subito:

$$\mathbf{n}_{III} = (\sigma_{23}, -\sigma_{13}, 0) \quad (8.109)$$

da normalizzare nel solito modo. Se invece le due tensioni tangenziali sono ambedue nulle, allora sarà, banalmente  $\mathbf{n}_{III} = (0, 0, 1)$ .

## 8.12 L'utilizzo dei cerchi di Mohr

Si consideri un punto  $P$  interno al corpo  $B$ , e si assegni in  $P$  la seguente matrice delle tensioni:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 105 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 75 \end{pmatrix} \text{ Kg/cm}^2; \quad (8.110)$$

Si vuole conoscere le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali di tensione, utilizzando la teoria dei cerchi di Mohr

### Soluzione:

Dall'esame dello stato tensionale risulta evidente che una delle tensioni principali è  $\sigma_2 = 20 \text{ Kg/cm}^2$ , e che la corrispondente direzione principale viene a coincidere con l'asse coordinato  $X_2$ .

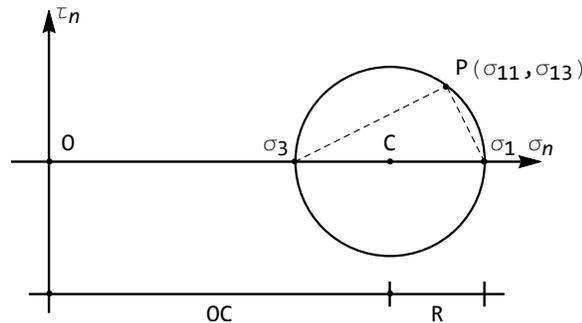


Figura 8.8: Il cerchio di Mohr relativo ai fasci di piani che si appoggiano all'asse  $X_2$

E' allora opportuno studiare, con la teoria di Mohr, il fascio di piani che si appoggiano all'asse  $X_2$ , poichè a tale fascio appartengono gli altri due piani principali. Il relativo cerchio di Mohr è centrato nel punto  $C = \left( \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2}, 0 \right)$

= (90, 0), ed ha raggio:

$$R = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2}{4} + \sigma_{13}^2} = \sqrt{\frac{(105 - 75)^2}{4} + 20^2} = 25 \quad (8.111)$$

Ne seguono subito, dall'esame del cerchio di Mohr di Figura 8.8, i valori delle due tensioni principali:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= OC + R = 90 + 25 = 115 \text{ Kg cm}^{-2} \\ \sigma_3 &= OC - R = 90 - 25 = 65 \text{ Kg cm}^{-2} \end{aligned} \quad (8.112)$$



## Capitolo 9

# Analisi della deformazione

### 9.1 La deduzione della matrice delle deformazioni

Si supponga di voler conoscere sperimentalmente lo stato di deformazione in un punto  $M$  di un corpo solido tridimensionale. A tal fine, si immagini di poter piazzare sei dispositivi sperimentali (6 strain-gauges) capaci di rilevare direttamente gli allungamenti percentuali secondo sei direzioni prefissate, come illustrato in Figura 9.1.

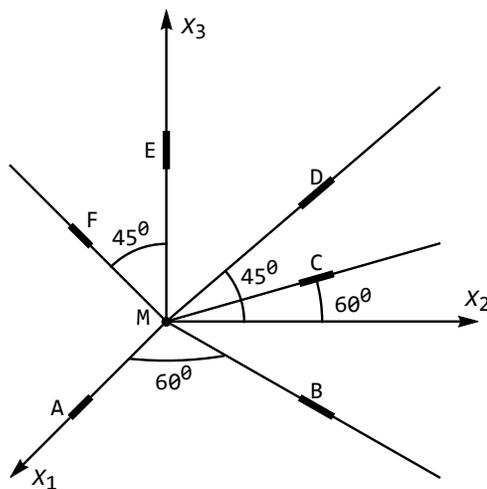


Figura 9.1: I sei apparati sperimentali per la misura degli allungamenti percentuali.

Siano  $E_a$ ,  $E_b$ ,  $E_c$ ,  $E_d$ ,  $E_e$  ed  $E_f$  gli allungamenti percentuali segnalati dai

sei strain-gauges, con:

$$E_a = 6 \cdot 10^{-3} \quad E_b = 4.5 \cdot 10^{-3} \quad E_c = 3 \cdot 10^{-3} \quad (9.1)$$

$$E_d = 1.5 \cdot 10^{-3} \quad E_e = 0 \quad E_f = 3 \cdot 10^{-3} \quad (9.2)$$

lungo le rette definite dai coseni direttori:

$$\begin{aligned} a \equiv X_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} & c &= \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ d &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} & e \equiv X_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & f &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Si deducano la matrice delle deformazioni lineari in  $M$  e le deformazioni principali.

### Soluzione

**Punto 1** – L'allungamento percentuale  $E_{MN}$  è fornito da:

$$E_{MN} = e_{ij}l_i l_j = e_{11}l_1^2 + e_{22}l_2^2 + e_{33}l_3^2 + 2e_{12}l_1 l_2 + 2e_{13}l_1 l_3 + 2e_{23}l_2 l_3 \quad (9.4)$$

Conoscendo quindi gli allungamenti percentuali lungo sei rette, si potrà scrivere il sistema di sei equazioni nelle sei incognite  $e_{ij}$ :

$$\begin{aligned} 6 \cdot 10^{-3} &= e_{11} \\ 4.5 \cdot 10^{-3} &= \frac{1}{4}e_{11} + \frac{3}{4}e_{22} + \frac{\sqrt{3}}{2}e_{12} \\ 3 \cdot 10^{-3} &= \frac{3}{4}e_{11} + \frac{1}{4}e_{22} - \frac{\sqrt{3}}{2}e_{12} \\ 1.5 \cdot 10^{-3} &= \frac{1}{2}e_{22} + \frac{1}{2}e_{33} + e_{23} \\ 0 &= e_{33} \\ 3 \cdot 10^{-3} &= \frac{1}{2}e_{11} + \frac{1}{2}e_{33} + e_{13} \end{aligned} \quad (9.5)$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4.5 \\ 3 \\ 1.5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} 10^{-3} \quad (9.6)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= 6 \cdot 10^{-3} \\
 e_{22} &= 1.5 \cdot 10^{-3} \\
 e_{33} &= 0 \\
 e_{12} &= 2.165 \cdot 10^{-3} \\
 e_{23} &= 0.75 \cdot 10^{-3} \\
 e_{13} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9.7}$$

**Punto 2** - Per dedurre le deformazioni principali, si scriva l'equazione secolare, calcolando gli invarianti di deformazione:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= e_{11} + e_{22} + e_{33} = 7.5 \cdot 10^{-3} \\
 I_2 &= e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{22}e_{33} - e_{12}^2 - e_{13}^2 - e_{23}^2 = 3.75 \cdot 10^{-6} \\
 I_3 &= \text{Det}(E) = -3.375 \cdot 10^{-9}
 \end{aligned}
 \tag{9.8}$$

L'equazione secolare si scrive allora:

$$-e^3 + 7.5 \cdot 10^{-3}e^2 - 3.75 \cdot 10^{-6}e - 3.375 \cdot 10^{-9} = 0
 \tag{9.9}$$

ed ha soluzioni:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= 6.88 \cdot 10^{-3} \\
 e_2 &= 1.07 \cdot 10^{-3} \\
 e_3 &= -0.45 \cdot 10^{-3}
 \end{aligned}
 \tag{9.10}$$

## 9.2 Deduzione delle componenti di deformazione

Assegnato il campo di spostamenti:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= x_1x_2(2 - x_1) - c_1x_2 + c_2x_3^3 \\
 u_2 &= -c_3x_2^2(1 - x_1) - (3 - x_1)\frac{x_1^2}{3} - c_1x_1 \\
 u_3 &= c_2x_1^2 + (2 - x_2)x_3
 \end{aligned}
 \tag{9.11}$$

ricavare le deformazioni lineari.

### Soluzione

Applicando le note formule si ottiene:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 2(1 - x_1)x_2 \\
 e_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (-2c_1 + c_3x_2^2) \\
 e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 2c_3(-1 + x_1)x_2
 \end{aligned}
 \tag{9.12}$$

$$e_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} c_2 (2x_1 + 3x_3^2)$$

$$e_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = -\frac{x_3}{2}$$

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 2 - x_2$$

### 9.3 Componenti di deformazione

Il rettangolo  $ABCD$  di Figura 9.2 subisce gli spostamenti illustrati. Determinare il campo deformativo.

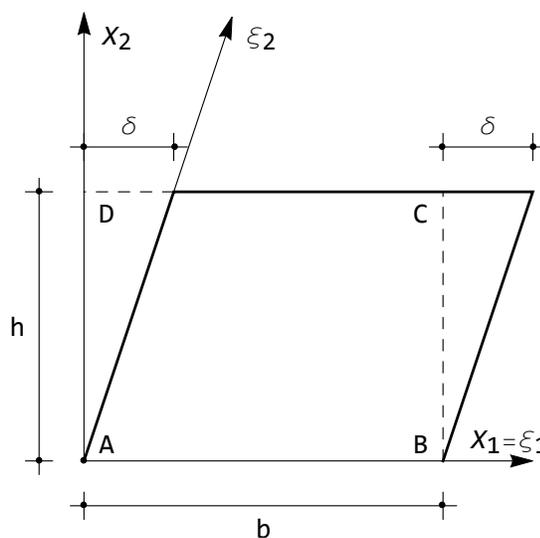


Figura 9.2: Un rettangolo ed i suoi spostamenti

#### Soluzione

il generico punto  $M$ , di coordinate  $(x_1, y_1)$ , del rettangolo, subisce gli spostamenti:

$$\begin{aligned} u_1 &= \delta \frac{x_2}{h} \\ u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9.13)$$

per cui l'unica componente di deformazione diversa da zero risulta essere:

$$e_{12} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{h} \quad (9.14)$$

## 9.4 Componenti di deformazione

Il rettangolo  $ABCD$  di Figura 9.3 subisce gli spostamenti illustrati. Determinare il campo deformativo.

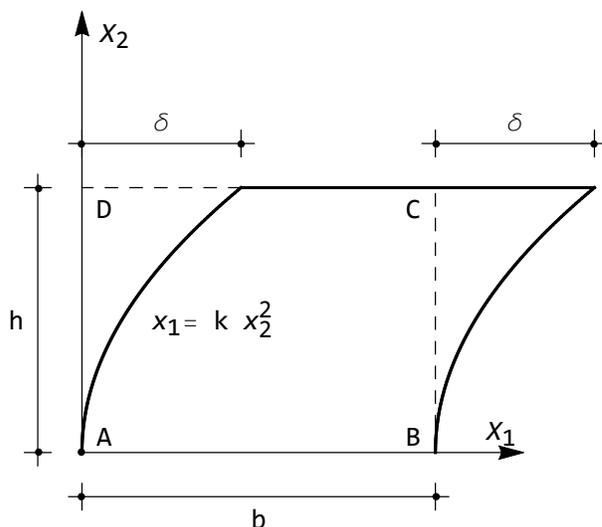


Figura 9.3: Un rettangolo ed i suoi spostamenti

### Soluzione

Dalla legge  $x_1 = kx_2^2$  è immediato ricavare il valore di  $k$ , in quanto dovrà essere  $\delta = kh^2$ . Ne segue che il generico punto  $M$ , di coordinate  $(x_1, y_1)$ , del rettangolo, subisce gli spostamenti:

$$\begin{aligned} u_1 &= \delta \left( \frac{x_2}{h} \right)^2 \\ u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9.15)$$

per cui l'unica componente di deformazione diversa da zero risulta essere:

$$e_{12} = 2 \frac{\delta}{h^2} x_2 \quad (9.16)$$

## 9.5 Studio di uno stato piano di spostamento

Si consideri un corpo  $B$ , ed in esso un punto  $P$ , di coordinate  $(x_1, x_2, x_3)$ . Per effetto delle forze applicate,  $P$  subisca gli spostamenti:

$$\mathbf{u}(P) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-3} x_1 - 10^{-3} x_2 \\ 3 \cdot 10^{-3} x_1 - 2 \cdot 10^{-3} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

Si vuole:

- determinare e studiare lo stato di deformazione e di rotazione. In particolare:
  - calcolare la matrice  $\mathbf{H}$  del gradiente di spostamento
  - calcolare le matrici  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{\Omega}$
  - calcolare la matrice  $\mathbf{D}$  di Green–Lagrange
  - calcolare lo spostamento di un segmento  $d\mathbf{x}$  steso lungo l'asse  $X_1$
  - calcolare l'allungamento percentuale del suddetto segmento, utilizzando teoria completa e semplificata
- ricercare le deformazioni principali e le corrispondenti direzioni principali, in ipotesi di deformazioni lineari
- dedurre le rotazioni cui andrà sottoposto il sistema di riferimento per portarlo a coincidere con il sistema principale

### Soluzione

**Punto 1** - La matrice  $\mathbf{H}$  dei gradienti di spostamento si ottiene attraverso elementari operazioni di derivazione:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \quad (9.18)$$

la sua parte simmetrica è quindi fornita da:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \quad (9.19)$$

mentre la parte antisimmetrica è calcolabile come:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \quad (9.20)$$

La matrice  $\mathbf{D}$  del tensore di Green–Lagrange è data dalla formula:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} + \\ &\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-6} \end{aligned} \quad (9.21)$$

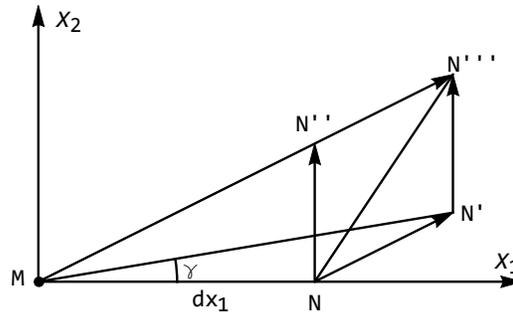


Figura 9.4: La decomposizione degli spostamenti

Si noti, prima di operare il prodotto matriciale, che la correzione nonlineare è pari a qualche millesimo della parte lineare. In definitiva è:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} + \begin{pmatrix} 13 & -8 & 0 \\ -8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-6} \quad (9.22)$$

Assegnato il segmento  $\mathbf{dx}$  steso lungo l'asse  $X_1$  si può calcolare la sua deformazione e la sua rotazione rigida attraverso la decomposizione:

$$\mathbf{du} = \mathbf{du}_e + \mathbf{du}_r = \mathbf{E} \mathbf{dx} + \mathbf{\Omega} \mathbf{dx} \quad (9.23)$$

Gli spostamenti da deformazione pura saranno quindi pari a:

$$\mathbf{du}_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \begin{pmatrix} dx_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 dx_1 \\ dx_1 \\ 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \quad (9.24)$$

mentre le rotazioni rigide sono fornite da:

$$\mathbf{du}_r = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \begin{pmatrix} dx_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 dx_1 \\ 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \quad (9.25)$$

Come si deduce dalla Figura 9.4, il segmento  $\overrightarrow{MN} = \mathbf{dx}$  ruota rigidamente, portandosi in  $\overrightarrow{MN''}$ , poi si deforma portandosi in  $\overrightarrow{MN''''}$ . La parte di deformazione pura è quella che porta  $\overrightarrow{MN}$  in  $\overrightarrow{MN'}$ , definita dall'allungamento percentuale:

$$E_{MN} = \frac{|MN'| - |MN|}{|MN|} = e_{11} = 2 \cdot 10^{-3} \quad (9.26)$$

e dalla variazione angolare:

$$\gamma = e_{12} = 10^{-3} \quad (9.27)$$

**Punto 2** - Per ottenere le deformazioni principali si calcolano gli invarianti di deformazione:

$$\begin{aligned} I_{1e} &= 0 \\ I_{2e} &= -5 \cdot 10^{-6} \\ I_{3e} &= 0 \end{aligned} \quad (9.28)$$

e quindi l'equazione secolare si scrive:

$$-e^3 + 5 \cdot 10^{-6} e = 0 \quad (9.29)$$

con soluzioni:

$$\begin{aligned} e_1 &= \sqrt{5} \cdot 10^{-3} \\ e_2 &= 0 \\ e_3 &= -\sqrt{5} \cdot 10^{-3} \end{aligned} \quad (9.30)$$

Per calcolare la prima direzione principale occorre risolvere il sistema di equazioni:

$$(\mathbf{E} - e_1 \mathbf{I}) \mathbf{n} = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{5} & 1 & 0 \\ 1 & -2 - \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.31)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} n_3 &= 0 \\ \frac{n_1}{n_2} &= 2 + \sqrt{5} \end{aligned} \quad (9.32)$$

Normalizzando in modo da ottenere un vettore a lunghezza unitaria, si ha:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{1 + (2 + \sqrt{5})^2}} = 0.973 \\ n_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + (2 + \sqrt{5})^2}} = 0.23 \end{aligned} \quad (9.33)$$

Per calcolare la seconda direzione principale occorre risolvere il sistema di equazioni:

$$(\mathbf{E} - e_2 \mathbf{I}) \mathbf{n} = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.34)$$

con soluzione  $n_{II} = (0, 0, 1)$ . Infine, la terza direzione si ottiene risolvendo il sistema:

$$(\mathbf{E} - e_3 \mathbf{I}) \mathbf{n} = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{5} & 1 & 0 \\ 1 & -2 + \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.35)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} n_3 &= 0 \\ \frac{n_1}{n_2} &= -\frac{1}{2 + \sqrt{5}} \end{aligned} \quad (9.36)$$

Normalizzando in modo da ottenere un vettore a lunghezza unitaria, si ha:

$$\begin{aligned} n_1 &= -\frac{1}{\sqrt{1 + (2 + \sqrt{5})^2}} = -0.23 \\ n_2 &= \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{1 + (2 + \sqrt{5})^2}} = 0.973 \end{aligned} \quad (9.37)$$

La matrice  $\mathbf{L}$  dei coseni direttori è, in definitiva:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{1 + (2 + \sqrt{5})^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1 + (2 + \sqrt{5})^2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1 + (2 + \sqrt{5})^2}} & \frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{1 + (2 + \sqrt{5})^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.38)$$

ed è immediato controllare l'ortogonalità delle sue colonne. Si ha inoltre che il triplo prodotto matriciale  $L^T E L$  fornisce la matrice diagonale con le deformazioni principali lungo la diagonale.

## 9.6 Un controllo di compatibilità

Si consideri il campo di deformazioni:

$$\begin{aligned} e_{11} &= c_1 x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ e_{12} &= c_3 x_1^2 x_2 \\ e_{22} &= \frac{1}{3} c_2 x_1^3 \end{aligned} \quad (9.39)$$

$$e_{13} = e_{23} = e_{33} = 0 \quad (9.40)$$

con  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  costanti. Si voglia stabilire se esso è un campo di deformazioni compatibile

### Soluzione

Il campo di deformazioni in esame è bidimensionale, e l'unica equazione di compatibilità non identicamente soddisfatta fornisce:

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 2c_1 x_1 + 2c_2 x_1 - 4c_3 x_1 \quad (9.41)$$

e quindi il campo deformativo non è compatibile, se non sussiste la seguente relazione tra le tre costanti:

$$c_1 + c_2x_1 - 2c_3 = 0 \quad (9.42)$$

## 9.7 Deduzione delle deformazioni lineari

Si consideri il campo di spostamenti piano:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1x_2(2 - x_1) - c_1x_2 + c_2x_2^3 \\ u_2 &= -c_3x_2^2(1 - x_1) - (3 - x_1)\frac{x_1^2}{3} - c_1x_1 \end{aligned} \quad (9.43)$$

e si calcolino le deformazioni lineari.

### Soluzione

Le deformazioni lineari si ottengono applicando la definizione:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (9.44)$$

e quindi si avrà:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -2(x_1 - 1)x_2 \\ e_{12} &= \frac{1}{2}(-2c_1 + (3c_2 + c_3)x_2^2) \\ e_{22} &= 2c_3(x_1 - 1)x_2 \end{aligned} \quad (9.45)$$

## 9.8 Deduzione delle deformazioni lineari e non-lineari

Si consideri il campo di spostamenti piano:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1(x_1^2x_2 + c_1(2c_2^3 + 3c_2^2x_2 - x_2^3)) \\ u_2 &= -x_2\left(2c_2^3 + \frac{3}{2}c_2^2x_2 - \frac{1}{4}x_2^3 + \frac{3}{2}c_1x_1^2x_2\right) \end{aligned} \quad (9.46)$$

e si calcolino le deformazioni lineari e nonlineari.

### Soluzione

Le deformazioni lineari si calcolano a partire dalla definizione:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (9.47)$$

e quindi le tre deformazioni sono pari a:

$$\begin{aligned} e_{11} &= 3x_1^2x_2 + c_1(2c_2^3 + 3c_2^2x_2 - x_2^3) \\ e_{22} &= -2c_2^3 - 3c_2^2x_2 - 3c_1x_1^2x_2 + x_2^3 \\ e_{12} &= \frac{1}{2}x_1(x_1^2 + 3c_1(c_2^2 - 2x_2^2)) \end{aligned} \quad (9.48)$$

Le deformazioni non lineari, invece, devono dedursi a partire dalla:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (9.49)$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 = 3x_1^2x_2 + c_1(2c_2^3 + 3c_2^2x_2 - x_2^3) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( x_1^2(x_1^2 + c_1(3c_2^2 - 3x_2^2)) \right)^2 + \left( 3x_1^2x_2 + c_1(2c_2^3 + 3c_2^2x_2 - x_2^3) \right)^2 \end{aligned} \quad (9.50)$$

$$\begin{aligned} d_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \\ &\quad \frac{1}{2} (-3c_1x_1x_2^2 + x_1(x_1^2 + c_1(3c_2^2 - 3x_2^2))) - \\ &\quad 3c_1x_1x_2^2 \left( -2c_2^3 - \frac{3c_2^2x_2}{2} - \frac{3}{2}c_1x_1^2x_2 + \frac{x_2^3}{4} - x_2 \left( \frac{3c_2^2}{2} + \frac{3c_1x_1^2}{2} - \frac{3x_2^2}{4} \right) \right) + \\ &\quad x_1(x_1^2 + c_1(3c_2^2 - 3x_2^2)) (3x_1^2x_2 + c_1(2c_2^3 + 3c_2^2x_2 - x_2^3)) \end{aligned} \quad (9.51)$$

$$\begin{aligned} d_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 = -2c_2^3 - \frac{3c_2^2x_2}{2} - \frac{3}{2}c_1x_1^2x_2 + \frac{x_2^3}{4} - \\ &\quad x_2 \left( \frac{3c_2^2}{2} + \frac{3c_1x_1^2}{2} - \frac{3x_2^2}{4} \right) + \frac{1}{2} \left( 9c_1^2x_1^2x_2^4 + \left( -2c_2^3 - \frac{3c_2^2x_2}{2} - \frac{3}{2}c_1x_1^2x_2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{x_2^3}{4} - x_2 \left( \frac{3c_2^2}{2} + \frac{3c_1x_1^2}{2} - \frac{3x_2^2}{4} \right) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (9.52)$$

## 9.9 Controllo di compatibilità per uno stato piano

Si stabilisca se il seguente campo di deformazioni è ammissibile:

$$\begin{aligned} e_{11} &= x_1^2 + x_2^2 \\ e_{12} &= x_1x_2 \\ e_{22} &= x_2^2 \end{aligned} \quad (9.53)$$

**Soluzione**

L'unica equazione di congruenza da controllare è:

$$2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \quad (9.54)$$

ed è soddisfatta.

## 9.10 Controllo di compatibilità per uno stato generico

Si stabilisca se il seguente campo di deformazioni è ammissibile:

$$\begin{aligned} e_{11} &= x_3 (x_1^2 + x_2^2) \\ e_{12} &= 2x_1 x_2 x_3 \\ e_{13} &= x_3 \\ e_{22} &= x_2^2 \\ e_{23} &= x_1 \\ e_{33} &= x_3^2 \end{aligned} \quad (9.55)$$

**Soluzione**

Lo stato deformativo è completo, e le equazioni di congruenza da soddisfare sono sei. Operando le derivate, è possibile ad esempio controllare che l'equazione:

$$2 \frac{\partial e_{12}^2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial e_{11}^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial e_{22}^2}{\partial x_1^2} \quad (9.56)$$

non è soddisfatta, e quindi il campo tensionale precedente non è deducibile a partire da una terna di spostamenti di un corpo continuo.

# Capitolo 10

## Geometria delle aree

In questo Capitolo si applicano le definizioni di baricentro, momento statico, momento d'inerzia, etc. ad alcuni esempi di interesse pratico. Il primo esempio è relativo ad un sistema di quattro aree concentrate ai vertici di un rettangolo: per esso si calcola il baricentro, i momenti principali di inerzia, ed i relativi assi principali d'inerzia. Poi si esamina una sezione ad L, riguardata come l'unione di due sezioni rettangolari, le cui proprietà inerziali si suppongono note, e tale studio rappresenta il presupposto dell'analisi di flessione deviata riportata in un prossimo capitolo.

Un terzo esempio, sempre costituito da un'unione di rettangoli, può rappresentare uno schema di una travata da ponte. Il quarto esempio è relativo ad una sezione a forma di triangolo isoscele, e fa uso dei risultati relativi al triangolo rettangolo (supposti anch'essi noti) e la sua importanza pratica risulta di fatto abbastanza limitata. Tuttavia, questi risultati vengono poi subito utilizzati per lo studio di una sezione composta da un rettangolo ed un triangolo isoscele.

Infine, l'ultimo esempio tratta il caso di una sezione a semicerchio.

Si fa comunque uso della *proprietà distributiva dei momenti statici e dei momenti di inerzia*:

Assegnate  $N$  aree  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , il momento statico dell'unione di queste aree è la somma dei momenti statici delle singole aree, ed analoga proprietà vale per i momenti del secondo ordine:

$$S\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N S(A_i) \quad (10.1)$$

$$I\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N I(A_i) \quad (10.2)$$

### 10.1 Un sistema ad aree concentrate

Si consideri un sistema di  $N$  aree concentrate  $A_i$ , identificate dalle loro coordinate  $x_1$  ed  $x_2$  in un generico sistema di riferimento. L'area totale  $A$  del sistema

è la somma delle aree parziali:

$$A = \sum_{i=1}^N A_i \quad (10.3)$$

Per definizione, il momento statico di un tale sistema è un vettore definito da:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_2 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N A_i x_{1i} \\ \sum_{i=1}^N A_i x_{2i} \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

dove  $S_i$  è il momento statico rispetto all'asse  $X_i$ .

La matrice dei momenti di inerzia si definisce come:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{22} & I_{12} \\ I_{12} & I_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N A_i x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^N A_i x_{1i} x_{2i} \\ \sum_{i=1}^N A_i x_{1i} x_{2i} & \sum_{i=1}^N A_i x_{2i}^2 \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

dove  $I_{11}$  è il momento di inerzia rispetto all'asse  $X_1$ ,  $I_{22}$  è il momento di inerzia rispetto all'asse  $X_2$ ,  $I_{12}$  è il momento centrifugo rispetto agli assi  $X_1$  ed  $X_2$ .

Tutto ciò premesso, si consideri il sistema di Figura 10.1, costituito da quattro aree disposte ai vertici del rettangolo di base 5 metri ed altezza 3 metri, con:

$$m_A = 0.2 \text{ m}^2 \quad (10.6)$$

$$m_B = 0.4 \text{ m}^2 \quad (10.7)$$

$$m_C = 0.7 \text{ m}^2 \quad (10.8)$$

$$m_D = 0.3 \text{ m}^2 \quad (10.9)$$

L'area totale è allora pari a:

$$A = 1.6 \text{ m}^2 \quad (10.10)$$

mentre i due momenti statici, rispetto agli assi  $X_1$  ed  $X_2$ , sono forniti da:

$$S_1 = (0.2 + 0.7)3 = 2.7 \text{ m}^3 \quad (10.11)$$

$$S_2 = (0.7 + 0.3)5 = 5 \text{ m}^3$$

Il baricentro del sistema, quindi, avrà coordinate pari a:

$$x_{1G} = \frac{S_2}{A} = \frac{5}{1.6} = 3.125 \text{ m} \quad (10.12)$$

$$x_{2G} = \frac{S_1}{A} = \frac{2.7}{1.6} = 1.6875 \text{ m} \quad (10.13)$$

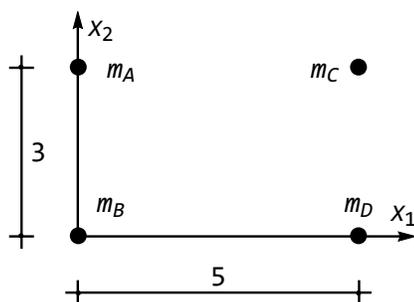


Figura 10.1: Un sistema di aree concentrate

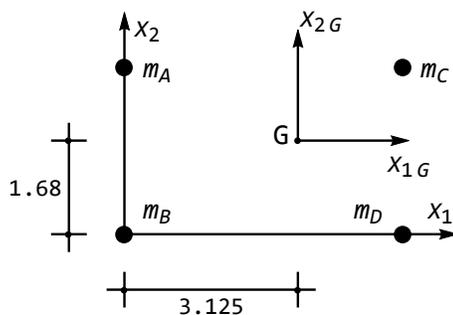


Figura 10.2: Il baricentro del sistema

I momenti di inerzia, rispetto agli assi  $X_1$  ed  $X_2$ , sono forniti da:

$$\begin{aligned} I_{11} &= (0.2 + 0.7)3^2 = 8.1 \, m^4 \\ I_{22} &= (0.7 + 0.3)5^2 = 25 \, m^4 \\ I_{12} &= (0.7)5 \cdot 3 = 10.5 \, m^4 \end{aligned} \quad (10.14)$$

Per ottenere i momenti di inerzia baricentrici, relativi agli assi paralleli ad  $X_1$  ed  $X_2$ , ma passanti per il baricentro del sistema, non resta che applicare il teorema di Huyghens:

$$\begin{aligned} I'_{11} &= I_{11} - Ax_{2G}^2 = 8.1 - 1.6 \cdot 1.6875^2 = 3.5437 \, m^4 \\ I'_{22} &= I_{22} - Ax_{1G}^2 = 25 - 1.6 \cdot 3.125^2 = 9.375 \, m^4 \\ I'_{12} &= I_{12} - Ax_{1G}x_{2G} = 10.5 - 1.6 \cdot 1.6875 \cdot 3.125 = 2.0625 \, m^4 \end{aligned} \quad (10.15)$$

Si sono quindi indicati con l'apice le tre quantità relative al sistema baricentrico.

Infine, i momenti principali di inerzia sono forniti da:

$$I_1 = \frac{I'_{11} + I'_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I'_{11} - I'_{22}}{2}\right)^2 + I'^2_{12}} = 10.0308 \text{ m}^4$$

$$I_2 = \frac{I'_{11} + I'_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I'_{11} - I'_{22}}{2}\right)^2 + I'^2_{12}} = 2.8879 \text{ m}^4$$
(10.16)

mentre la rotazione che occorre assegnare al sistema di riferimento per portarlo ad allinearsi con gli assi principali di inerzia è fornita da:

$$\phi^* = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2I'_{12}}{I'_{22} - I'_{11}}\right) = 0.307834$$
(10.17)

ossia circa 17.63 gradi, in senso antiorario<sup>1</sup>. Si ha quindi il sistema di riferimento indicato in Figura 10.3.

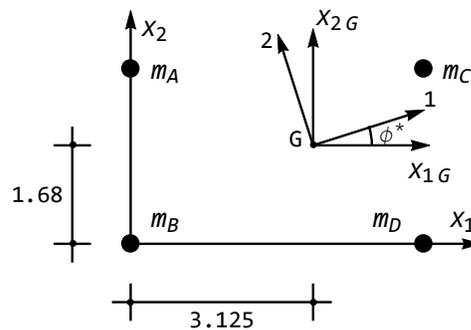


Figura 10.3: Gli assi centrali di inerzia

## 10.2 La sezione ad L

Calcolare le coordinate del baricentro ed i momenti di inerzia della sezione ad L di Figura 10.4.

### Soluzione

Si suddivide la sezione nei due rettangoli di Figura 10.5, di base  $b_1 = 20 \text{ cm}$  e  $b_2 = 60 \text{ cm}$  ed altezza  $h_1 = 100 \text{ cm}$  ed  $h_2 = 20 \text{ cm}$ , rispettivamente. Tale suddivisione è ovviamente arbitraria, nel senso che altre scelte sarebbero altrettanto

<sup>1</sup>In forma matriciale, si possono scrivere i momenti di inerzia nel sistema baricentrico:

$$\mathbf{I}' = \begin{pmatrix} I'_{22} & I'_{12} \\ I'_{12} & I'_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.375 & 2.0625 \\ 2.0625 & 3.5437 \end{pmatrix}$$
(10.18)

ed ottenere i momenti principali di inerzia, assieme alle corrispondenti direzioni principali di inerzia, equivale al calcolo degli autovalori e degli autovettori di  $\mathbf{I}'$ .

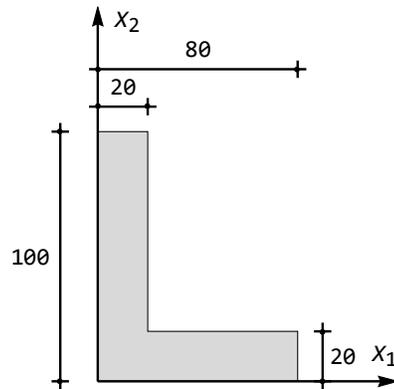


Figura 10.4: La sezione ad L

legittime. L'area della sezione è fornita quindi da:

$$A = A_1 + A_2 = b_1 h_1 + b_2 h_2 = 3200 \text{ cm}^2 \quad (10.19)$$

Per calcolare il baricentro, si calcolino i due momenti statici rispetto ai due assi

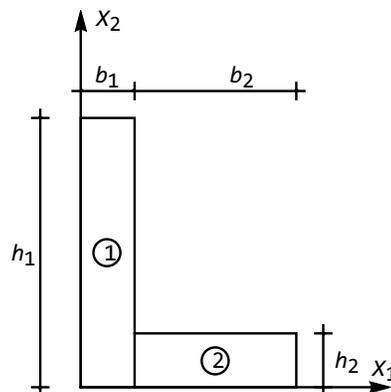


Figura 10.5: La sezione ad L come unione di due rettangoli

di Figura 10.5:

$$S_1 = S_1^{(1)} + S_1^{(2)} = A_1 x_{2G}^{(1)} + A_2 x_{2G}^{(2)} = b_1 h_1 \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \frac{h_2}{2} = 112000 \text{ cm}^3$$

$$S_2 = S_2^{(1)} + S_2^{(2)} = A_1 x_{1G}^{(1)} + A_2 x_{1G}^{(2)} = b_1 h_1 \frac{b_1}{2} + b_2 h_2 \left( b_1 + \frac{b_2}{2} \right) = 80000 \text{ cm}^3 \quad (10.20)$$

da cui le coordinate del baricentro dell'intera figura:

$$\begin{aligned} x_{1G} &= \frac{S_2}{A} = \frac{b_1 h_1 \frac{b_1}{2} + b_2 h_2 \left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right)}{b_1 h_1 + b_2 h_2} = \frac{80000}{3200} = 25 \text{ cm} \\ x_{2G} &= \frac{S_1}{A} = \frac{b_1 h_1 \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \frac{h_2}{2}}{b_1 h_1 + b_2 h_2} = \frac{112000}{3200} = 35 \text{ cm} \end{aligned} \quad (10.21)$$

Per calcolare i momenti di inerzia rispetto agli assi di Figura 10.5, si può scrivere:

$$\begin{aligned} I_{11} &= I_{11}^{(1)} + I_{11}^{(2)} = \frac{b_1 h_1^3}{3} + \frac{b_2 h_2^3}{3} = 6.82667 \times 10^6 \text{ cm}^4 \\ I_{22} &= I_{22}^{(1)} + I_{22}'^{(2)} + A_2 \left(x_{1G}^{(2)}\right)^2 = \frac{b_1^3 h_1}{3} + \frac{b_2^3 h_2}{12} + b_2 h_2 \left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right)^2 = \\ &= 3.627 \times 10^6 \text{ cm}^4 \\ I_{12} &= A_1 x_{1G}^{(1)} x_{2G}^{(1)} + A_2 x_{1G}^{(2)} x_{2G}^{(2)} = b_1 h_1 \frac{b_1}{2} \frac{h_1}{2} + b_2 h_2 \frac{h_2}{2} \left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right) = 1.6 \times 10^6 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad (10.22)$$

Si osservi che nel calcolo di  $I_{22}$  si è calcolato l'apporto del secondo rettangolo come somma del momento di inerzia rispetto all'asse verticale passante per il suo baricentro, e poi si è aggiunto il momento di trasporto secondo Huygens, mentre nel caso dei momenti centrifughi si è calcolato per ambedue i rettangoli il solo momento di trasporto, poichè il momento centrifugo baricentrico è nullo.

In riferimento agli assi baricentrici paralleli alla coppia di assi  $X_1$  ed  $X_2$  si ha, per la legge di Huygens:

$$\begin{aligned} I'_{11} &= I_{11} - A x_{2G}^2 = 6.82667 \times 10^6 - 3200 \cdot 35^2 = 2.90667 \times 10^6 \text{ cm}^4 \\ I'_{22} &= I_{22} - A x_{1G}^2 = 3.62667 \times 10^6 - 3200 \cdot 25^2 = 1.62667 \times 10^6 \text{ cm}^4 \\ I'_{12} &= I_{12} - A x_{1G} x_{2G} = 1600000 - 3200 \cdot 25 \cdot 35 = -1200000 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad (10.23)$$

Infine, per ottenere i momenti d'inerzia centrali occorre ruotare la coppia di assi di un angolo  $\phi^*$  uguale a:

$$\phi^* = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2I'_{12}}{I'_{22} - I'_{11}} \right) = 0.54042 \quad (10.24)$$

pari a 30.96 gradi. Si ottengono così gli assi 1 e 2 di Figura 10.6, e rispetto ad essi i momenti d'inerzia richiesti valgono:

$$\begin{aligned} I''_{22} &= I'_{11} \sin^2 \phi^* + 2I'_{12} \sin \phi^* \cos \phi^* + I'_{22} \cos^2 \phi^* = 906667 \text{ cm}^4 \\ I''_{11} &= I'_{11} \cos^2 \phi^* - 2I'_{12} \sin \phi^* \cos \phi^* + I'_{22} \sin^2 \phi^* = 3.62667 \times 10^6 \text{ cm}^4 \\ I''_{12} &= (I'_{11} - I'_{22}) \sin \phi^* \cos \phi^* + I'_{12} (\cos^2 \phi^* - \sin^2 \phi^*) = 0 \end{aligned} \quad (10.25)$$

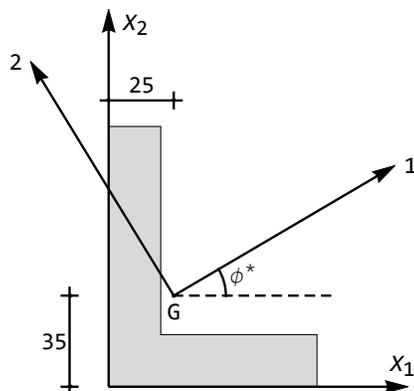


Figura 10.6: Baricentro ed assi centrali di inerzia del profilato ad L

### 10.3 Una travata da ponte

Calcolare le coordinate del baricentro ed i momenti di inerzia della sezione aperta di Figura 10.7.

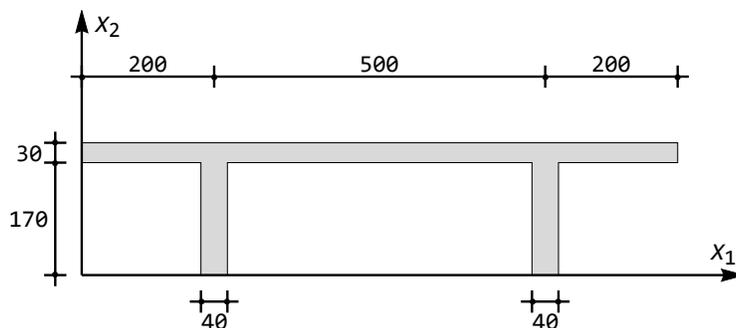


Figura 10.7: Una sezione da ponte aperta

#### Soluzione

Si consideri la sezione come composta da un rettangolo di base 9 metri ed altezza 2 metri, a cui vanno sottratti i tre rettangoli “interni”. In quest’ottica si ha un’area:

$$A = 900 \cdot 200 - 180 \cdot 170 - 460 \cdot 170 - 180 \cdot 170 = 40600 \text{ cm}^2 \quad (10.26)$$

ed un momento statico rispetto all'asse orizzontale pari a:

$$S_1 = (900 \cdot 200)100 - (180 \cdot 170) \frac{170}{2} - (460 \cdot 170) \frac{170}{2} - (180 \cdot 170) \frac{170}{2} = 6151000 \text{ cm}^3 \quad (10.27)$$

Il baricentro della sezione ha quindi coordinate:

$$x_{1G} = 450 \text{ cm} \quad (10.28)$$

$$x_{2G} = \frac{6151000}{40600} = 151.5 \text{ cm} \quad (10.29)$$

Ovviamente, la prima coordinata discende da proprietà di simmetria. I momenti di inerzia rispetto agli stessi assi si calcolano come:

$$I_{11} = \frac{900 \cdot 200^3}{3} - \frac{180 \cdot 170^3}{3} - \frac{460 \cdot 170^3}{3} - \frac{180 \cdot 170^3}{3} = 1.05711 \times 10^9 \text{ cm}^4 \quad (10.30)$$

$$I_{22} = \frac{900^3 \cdot 200}{3} - \frac{180^3 \cdot 170}{3} - \frac{460^3 \cdot 170}{12} - 460 \cdot 170 \cdot 450^2 - \frac{180^3 \cdot 170}{12} - 180 \cdot 170 \cdot 810^2 = 1.08958 \times 10^{10} \text{ cm}^4 \quad (10.31)$$

$$I_{12} = \frac{900^2 \cdot 200^2}{4} - \frac{180^2 \cdot 170^2}{4} - 460 \cdot 170 \cdot 450 \frac{170}{2} - 180 \cdot 170 \cdot 810 \frac{170}{2} = 2767950000 \text{ cm}^4 \quad (10.32)$$

Per ricavare i momenti di inerzia baricentrici, si può utilizzare il teorema di Huygens

$$\begin{aligned} I'_{11} &= I_{11} - Ax_{1G}^2 = 1.05711 \times 10^9 - 40600 \cdot 151.5^2 = 1.25252 \times 10^8 \text{ cm}^4 \\ I'_{22} &= I_{22} - Ax_{2G}^2 = 1.08958 \times 10^{10} - 40600 \cdot 450^2 = 2.67431 \times 10^9 \text{ cm}^4 \\ I'_{12} &= I_{12} - Ax_{1G}x_{2G} = 2767950000 - 40600 \cdot \frac{6151000}{40600} \cdot 450 = 0 \end{aligned} \quad (10.33)$$

## 10.4 Triangolo isoscele

Si utilizzino i risultati per il triangolo rettangolo, al fine di calcolare la matrice dei momenti di inerzia per il triangolo isoscele di base  $B$  ed altezza  $H$  di Figura 10.8.

Il baricentro della sezione è situato sull'asse di simmetria, e quindi  $x_{1G} = B/2$ . Poichè inoltre la sezione può considerarsi formata da due triangoli rettangoli, i cui baricentri sono ad un terzo dalla base, si ha subito  $x_{2G} = H/3$ . Ciò premesso si può calcolare il momento d'inerzia  $I_{11}$  rispetto all'asse baricentrico orizzontale, in quanto esso è somma dei due momenti di inerzia dei due triangoli rettangoli:

$$I_{11} = 2 \frac{B}{2} \frac{H^3}{36} = \frac{BH^3}{36} \quad (10.34)$$

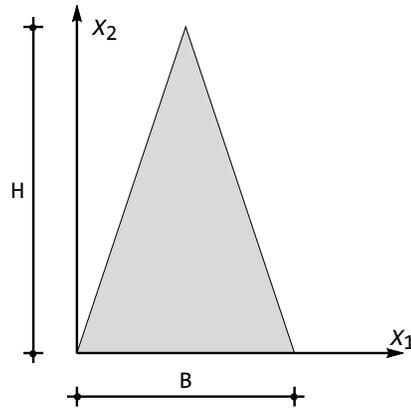


Figura 10.8: Una sezione a triangolo isoscele

Il momento di inerzia  $I_{22}$  rispetto all'asse baricentrico verticale, invece, può essere calcolato aggiungendo al momento d'inerzia dei due triangoli equilateri il relativo momento di trasporto:

$$I_{22} = 2 \left( \left( \frac{B}{2} \right)^3 \frac{H}{36} + \frac{1}{2} \frac{B}{2} H \left( \frac{1}{3} \frac{B}{2} \right)^2 \right) = \frac{B^3 H}{48} \quad (10.35)$$

Il momento d'inerzia centrifugo  $I_{12}$  è nullo, segnalando che gli assi orizzontali e verticali sono gli assi centrali di inerzia.

## 10.5 Una sezione composta

Si consideri la sezione di Figura 10.9, in cui  $B = 20 \text{ cm}$ ,  $b = 2.5 \text{ cm}$ ,  $H = 10 \text{ cm}$  ed  $H_1 = 20 \text{ cm}$ . Si calcolino il baricentro ed i momenti di inerzia baricentrici.

### Calcolo del baricentro

L'area della sezione è pari a:

$$A = BH + \frac{1}{2}(B - 2b)H_1 = 350 \text{ cm}^2 \quad (10.36)$$

mentre il momento statico rispetto all'asse  $X_1$  è pari a:

$$S_1 = BH \left( H_1 + \frac{H}{2} \right) + \frac{1}{2}(B - 2b)H_1 \frac{2}{3}H_1 = 7000 \text{ cm}^3 \quad (10.37)$$

Ne segue che la coordinata  $x_{2G}$  è fornita da:

$$x_{2G} = \frac{BH \left( H_1 + \frac{H}{2} \right) + \frac{1}{2}(B - 2b)H_1 \frac{2}{3}H_1}{BH + \frac{1}{2}(B - 2b)H_1} = 20 \text{ cm} \quad (10.38)$$

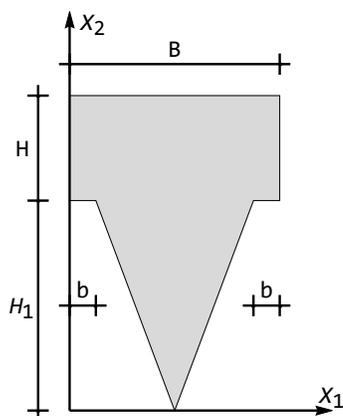


Figura 10.9: Una sezione composta

mentre la coordinata  $x_{1G}$  è pari a  $B/2$ , in quanto il baricentro deve situarsi sull'asse di simmetria della sezione.

### Calcolo dei momenti di inerzia

Rispetto agli assi baricentrici, i momenti di inerzia valgono, per il teorema del trasporto:

$$I_{11} = \frac{BH^3}{3} + (B - 2b) \frac{H_1^3}{12} = 16666.7 \text{ cm}^4 \quad (10.39)$$

$$I_{22} = \frac{B^3H}{12} + 2 \left( \frac{B}{2} - b \right)^3 \frac{H_1}{12} = 8072.92 \text{ cm}^4 \quad (10.40)$$

mentre il momento centrifugo sarà nullo.

## 10.6 Semicerchio

Per la sezione a semicerchio di Figura 10.10, calcolare il baricentro ed i momenti di inerzia baricentrali utilizzando anche i risultati per la sezione circolare.

L'area del semicerchio è fornita da:

$$A = \frac{\pi R^2}{2} \quad (10.41)$$

mentre il momento statico rispetto all'asse  $X_1$  può calcolarsi come:

$$S_1 = \int_0^R \int_0^\pi r \sin(\theta) R d\theta dr = \frac{2R^3}{3} \quad (10.42)$$

e quindi:

$$x_{2G} = \frac{4R}{3\pi} \quad (10.43)$$

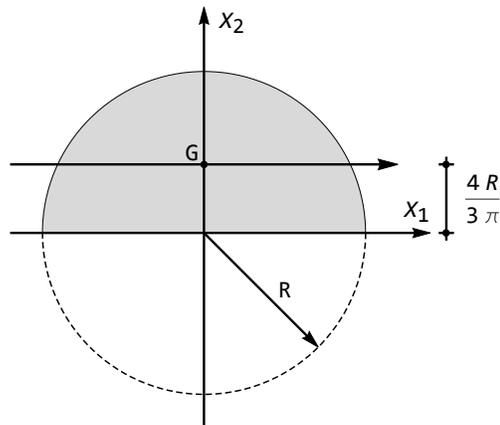


Figura 10.10: Una sezione a semicerchio: baricentro ed assi centrali

Il momento di inerzia rispetto all'asse orizzontale baricentrale può allora calcolarsi come:

$$I_{11} = \frac{1}{2} \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi R^2}{2} \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{8R^4}{9\pi} \quad (10.44)$$



# Capitolo 11

## Flessione deviata

In questo capitolo si studia un profilato sottile senza proprietà di simmetria, soggetto ad una coppia flettente ad asse di sollecitazione orizzontale. Poichè tale asse non coincide con un asse principale di inerzia della sezione retta, si è in presenza di un caso di sollecitazione di flessione deviata.

L'analisi viene affrontata utilizzando la nota formula binomia, ed a far ciò si studia preventivamente la sezione, identificando il baricentro, i momenti centrali d'inerzia, ed i relativi assi principali di inerzia. Ciò fatto, la coppia applicata viene scomposta secondo tali assi, e la flessione deviata viene interpretata come somma di una flessione retta nel piano e di una flessione retta fuori del piano, in modo da ottenere lo stato tensionale per sovrapposizione degli effetti.

### 11.1 Un profilato sottile

Si consideri una trave con sezione retta fornita dal profilato di Figura 11.1, soggetta ad una coppia flettente con asse di sollecitazione orizzontale.

#### Il calcolo delle caratteristiche di inerzia

Si studia preventivamente il profilato al fine di:

- calcolare il baricentro della sezione
- calcolare la matrice dei momenti di inerzia baricentrali
- calcolare i momenti di inerzia centrali, insieme alle direzioni centrali di inerzia

#### Il calcolo del baricentro

Si divida la sezione nei quattro rettangoli di Figura 11.2, e si definiscano — per speditezza di calcolo — quattro vettori:

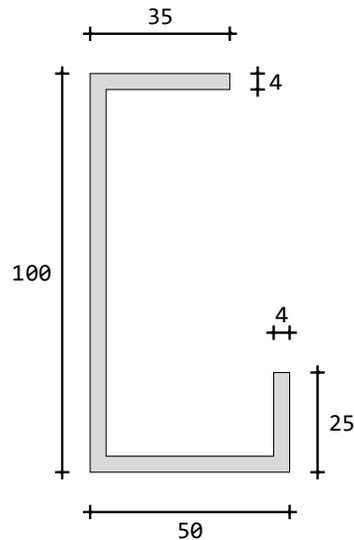


Figura 11.1: Il profilato sottile in esame

$\mathbf{b}^T = \{4, 42, 4, 31\}$  contenente le basi dei rettangoli

$\mathbf{h}^T = \{25, 4, 100, 4\}$  contenente le altezze dei rettangoli

$\mathbf{d}_{x_1}^T = \{12.5, 2, 50, 98\}$  contenente le distanze dei baricentri dei rettangoli dall'asse orizzontale  $X_1$

$\mathbf{d}_{x_2}^T = \{48, 25, 2, 19.5\}$  contenente le distanze dei baricentri dei rettangoli dall'asse verticale  $X_2$

Con queste definizioni, si possono calcolare immediatamente l'area della sezione retta ed i due momenti statici rispetto agli assi  $X_1$  ed  $X_2$ :

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{i=1}^4 b_i h_i = 792 \text{ mm}^2 \\
 S_{x_1} &= \sum_{i=1}^4 b_i h_i d_{x_1 i} = 33738 \text{ mm}^3 \\
 S_{x_2} &= \sum_{i=1}^4 b_i h_i d_{x_2 i} = 12218 \text{ mm}^3
 \end{aligned} \tag{11.1}$$

Ne segue che le coordinate del baricentro saranno fornite dalle formule:

$$\begin{aligned}
 x_{G1} &= \frac{S_{x_2}}{A} = 15.4268 \text{ mm} \\
 x_{G2} &= \frac{S_{x_1}}{A} = 42.5985 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{11.2}$$

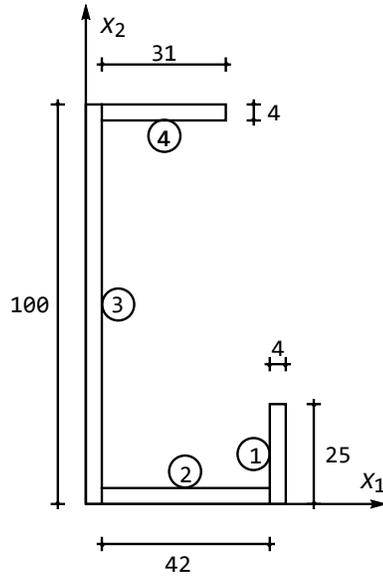


Figura 11.2: I quattro rettangoli in cui è scomposta la sezione, e gli assi di primo riferimento

### Il calcolo della matrice dei momenti di inerzia baricentrali

Si inizi a calcolare i momenti di inerzia rispetto agli assi di primo riferimento  $X_1$  ed  $X_2$ . A ciò fare, si calcolano — rettangolo per rettangolo — i momenti di inerzia rispetto ai propri assi baricentrali, aggiungendo poi il momento di trasporto.

$$I_{11} = \sum_{i=1}^4 \frac{b_i h_i^3}{12} + \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_1 i}^2 = 2.54612 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad (11.3)$$

$$I_{22} = \sum_{i=1}^4 \frac{b_i^3 h_i}{12} + \sum_{i=1}^2 b_i h_i d_{x_2 i}^2 = 419444 \text{ mm}^4 \quad (11.4)$$

$$I_{12} = \sum_{i=1}^4 b_i h_i d_{x_1 i} d_{x_2 i} = 345364 \text{ mm}^4 \quad (11.5)$$

Infine, si usa il teorema di Huyghens per calcolare i richiesti momenti di inerzia baricentrici:

$$\begin{aligned} I_{11}^G &= I_{11} - A x_{G2}^2 = 1.10894 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ I_{22}^G &= I_{22} - A x_{G1}^2 = 230960 \text{ mm}^4 \\ I_{12}^G &= I_{12} - A x_{G1} x_{G2} = -175104 \text{ mm}^4 \end{aligned} \quad (11.6)$$

**Il calcolo dei momenti di inerzia centrali e delle rispettive direzioni**

Assegnata la matrice dei momenti di inerzia baricentrali:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{22} & I_{12} \\ I_{12} & I_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 230960 & -175104 \\ -175104 & 1.10894 \times 10^6 \end{pmatrix} \quad (11.7)$$

l'equazione secolare si scriverà:

$$\lambda^2 - \text{Tr}(\mathbf{I})\lambda + \text{Det}(\mathbf{I}) = 0 \quad (11.8)$$

con radici:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\equiv I_1 = 1.14257 \times 10^6 \\ \lambda_2 &\equiv I_2 = 197325 \end{aligned} \quad (11.9)$$

La matrice dei momenti di inerzia è allora divenuta:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 197325 & 0 \\ 0 & 1.14257 \times 10^6 \end{pmatrix} \quad (11.10)$$

Le rispettive direzioni centrali si ottengono risolvendo i due sistemi:

$$\begin{aligned} (I_{22} - I_1) n_{11} + I_{12} n_{21} &= 0 \\ I_{21} n_{11} + (I_{11} - I_1) n_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (11.11)$$

ossia, numericamente:

$$\begin{aligned} 911611 n_{11} + 175104 n_{21} &= 0 \\ 175104 n_{11} + 33634.4 n_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (11.12)$$

con soluzione normalizzata  $\mathbf{n}_I = (-0.1886, .9820)$ , e:

$$\begin{aligned} (I_{22} - I_2) n_{12} + I_{12} n_{22} &= 0 \\ I_{21} n_{12} + (I_{11} - I_2) n_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (11.13)$$

ossia, numericamente:

$$\begin{aligned} 33634.4 n_{11} - 175104 n_{21} &= 0 \\ 175104 n_{11} - 911611 n_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (11.14)$$

con soluzione normalizzata  $\mathbf{n}_{II} = (0.9820, 0.1886)$ .

Ne segue che la prima direzione principale sarà inclinata, rispetto all'asse orizzontale, di un angolo  $\phi$  pari a 0.189771 radianti, ossia circa 10.87 gradi, ottenendo gli assi centrali di inerzia riportati in Figura 11.3.

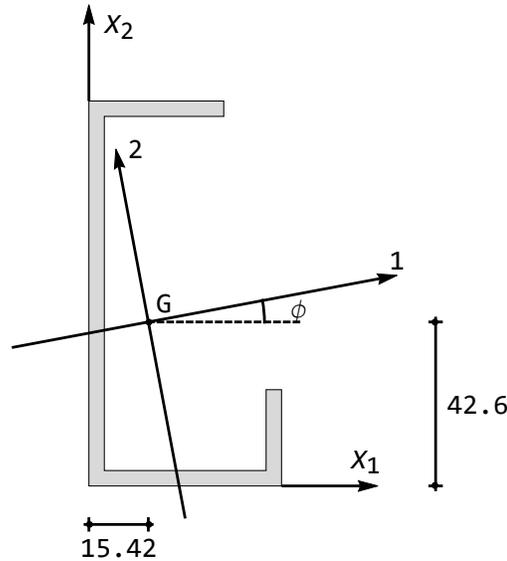


Figura 11.3: Gli assi centrali di inerzia

## Il diagramma delle tensioni

Come detto, l'asse di sollecitazione si suppone orizzontale, e quindi l'asse  $m$  della coppia è verticale, per cui la coppia, negativa, è diretta verso il basso. Scomponendo  $\mathcal{M} = -10000 \text{ kg mm}$  lungo i due assi centrali di inerzia si avranno le due coppie:

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M} \cos(\phi) = -1886.34 \text{ kg mm} \quad (11.15)$$

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \sin(\phi) = -9820.47 \text{ kg mm} \quad (11.16)$$

e potranno studiarsi separatamente le due flessioni rette secondo gli assi centrali 1 e 2.

Nel primo caso si ottiene il diagramma di Figura 11.4. I due punti significativi in cui la tensione assume i valori estremi sono i vertici 2 e 10. Le coordinate di 2 nel riferimento originario sono  $(x_{21}, x_{22}) = (50, 0)$ , sicchè nel riferimento traslato nel baricentro si hanno le coordinate  $(50 - x_{G1}, -x_{G2}) = (34.5732, -42.5985)$ , e nel riferimento centrale si avranno le coordinate:

$$\begin{pmatrix} \xi_{21} \\ \xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 34.5732 \\ -42.5985 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25.917 \\ -48.3554 \end{pmatrix} \quad (11.17)$$

La formula di Navier:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_1} \xi_2 \quad (11.18)$$

fornisce allora nel punto 2 la tensione normale positiva:

$$\sigma_{33}^{(2)} = \frac{-1886.34}{1.14257 \times 10^6} (-48.3554) = 0.0798329 \text{ kg mm}^{-2} \quad (11.19)$$

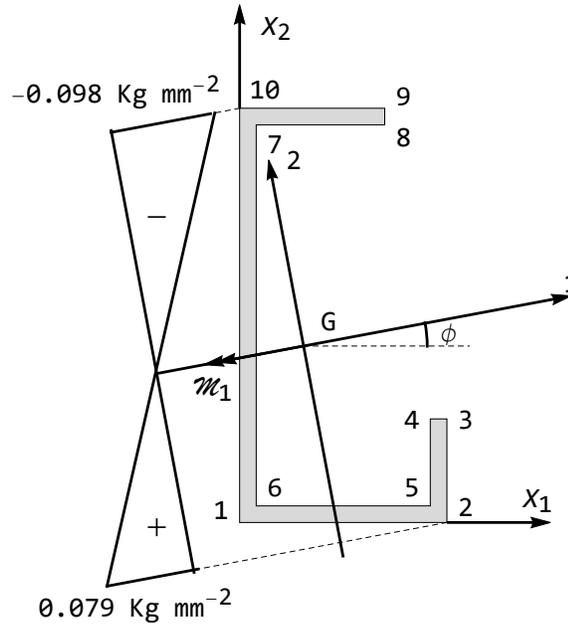


Figura 11.4: La flessione retta secondo l'asse 1

Nel punto simmetrico 10 invece, le coordinate originarie sono  $(0, 100)$ , quelle baricentriche sono  $(-15.4268, 57.4017)$ , e quindi nel riferimento centrale il punto 10 avrà coordinate  $(-4.32195, 59.281)$ . Infine, dalla (11.18) si ottiene la tensione:

$$\sigma_{33}^{(10)} = \frac{-1886.34}{1.14257 \times 10^6} 59.281 = -0.0978707 \text{ kg mm}^{-2} \quad (11.20)$$

Nel secondo caso, come si deduce dalla Figura 11.5, servono le coordinate del punto 1, e del punto 3. Con lo stesso procedimento illustrato in precedenza si hanno le coordinate baricentriche del punto 1 come  $(0 - x_{G1}, 0 - x_{G2}) = (-15.4268, -42.5985)$ , e quindi le coordinate, nel sistema di riferimento centrale:

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15.4268 \\ -42.5985 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23.1853 \\ -38.9237 \end{pmatrix} \quad (11.21)$$

mentre le coordinate baricentriche di 3 sono fornite da  $(50 - x_{G1}, 25 - x_{G2}) = (34.5732, -17.5985)$ , e quindi nel sistema di riferimento centrale:

$$\begin{pmatrix} \xi_{31} \\ \xi_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 34.5732 \\ -17.5985 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30.6329 \\ -23.8042 \end{pmatrix} \quad (11.22)$$

Seguono le tensioni fornite dalla formula di Navier:

$$\sigma_{33} = -\frac{M_2}{I_2} \xi_1 \quad (11.23)$$

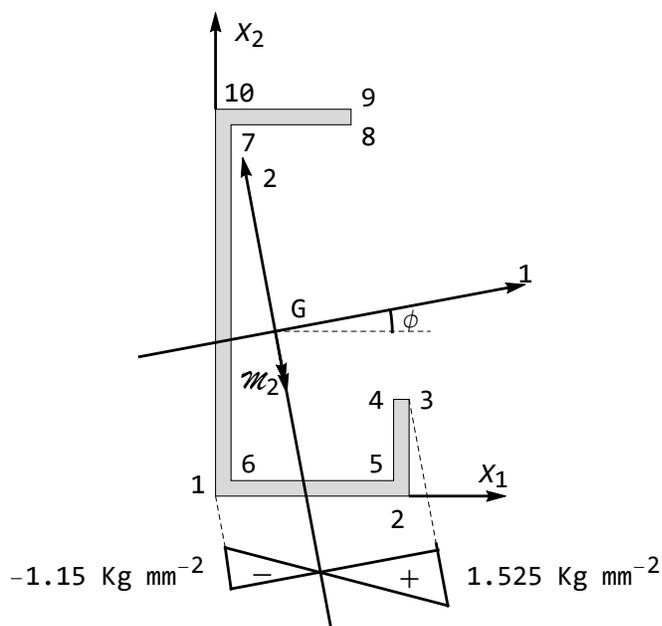


Figura 11.5: La flessione retta secondo l'asse 2

per la flessione fuori del piano. Nei punti 1 e 3 si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{33}^{(1)} &= \frac{9820.27}{197325}(-23.1853) = -1.15389 \text{ kg mm}^{-2} \\ \sigma_{33}^{(3)} &= \frac{9820.27}{197325} 30.6329 = 1.52451 \text{ kg mm}^{-2}\end{aligned}\quad (11.24)$$

### L'equazione dell'asse neutro

Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha, secondo la formula binomia:

$$\sigma_{33} = \frac{M_1}{I_1} \xi_2 - \frac{M_2}{I_2} \xi_1 = 0 \quad (11.25)$$

e quindi:

$$-\frac{188634}{1.14257 \times 10^6} \xi_2 + \frac{982027}{197325} \xi_1 = 0 \quad (11.26)$$

ossia:

$$\xi_2 = 30.1442 \xi_1 \quad (11.27)$$

e quindi l'asse neutro forma con l'asse 2 l'angolo pari a:

$$\tan(n\alpha_2) = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{1}{30.1442} = 0.0331738 \quad (11.28)$$

e quindi l'angolo  $\phi = nx_2 = \arctan(0.0331738) = 0.0331617$ , pari a 1.9 gradi.

### Il diagramma finale delle tensioni

Per il calcolo del diagramma finale, si calcolano le tensioni nei vertici, e si ottiene, per sovrapposizione degli effetti:

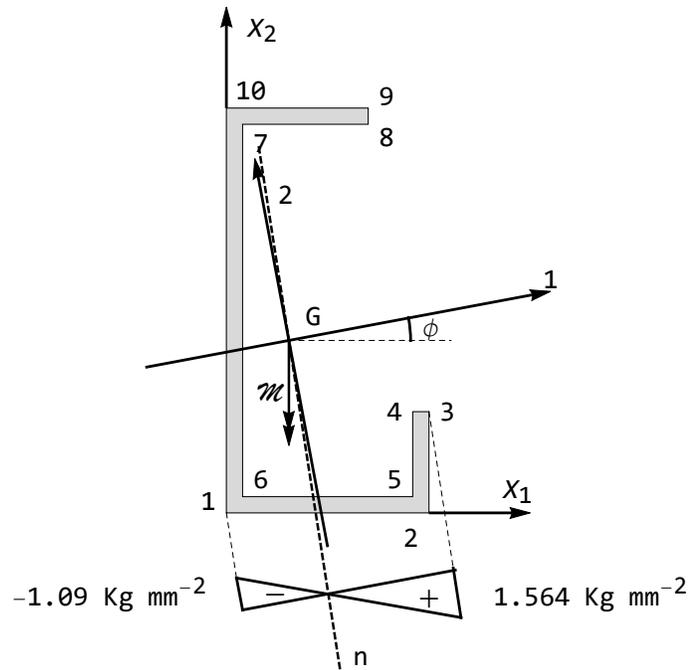


Figura 11.6: Lo stato tensionale finale

$$\begin{aligned}
 \sigma_{33}^1 &= 0.0642615 - 1.15389 = -1.08962 \text{ kg mm}^{-2} \\
 \sigma_{33}^2 &= 0.0798329 + 1.28984 = 1.36967 \text{ kg mm}^{-2} \\
 \sigma_{33}^3 &= 0.0392998 + 1.52454 = 1.56384 \text{ kg mm}^{-2} \\
 \sigma_{33}^4 &= 0.0380541 + 1.32904 = 1.36709 \text{ kg mm}^{-2} \\
 \sigma_{33}^5 &= 0.0721019 + 1.13189 = 1.20399 \text{ kg mm}^{-2} \\
 \sigma_{33}^6 &= 0.0590219 - 0.920837 = -0.861815 \text{ kg mm}^{-2} \\
 \sigma_{33}^7 &= -0.0901396 - 0.0571482 = -0.147288 \text{ kg mm}^{-2} \\
 \sigma_{33}^8 &= -0.0804854 + 1.45796 = 1.37748 \text{ kg mm}^{-2} \\
 \sigma_{33}^9 &= -0.0869707 + 1.49551 = 1.40854 \text{ kg mm}^{-2} \\
 \sigma_{33}^{10} &= -0.0978706 - 0.215094 = -0.312965 \text{ kg mm}^{-2}
 \end{aligned} \tag{11.29}$$

e lo stato tensionale è disegnato in Figura 11.6.

# Capitolo 12

## Taglio

In questo Capitolo si studiano alcune sezioni rette soggette a sforzo di taglio, utilizzando la teoria approssimata di Jourawsky per tracciare il diagramma delle relative tensioni tangenziali.

I primi due esempi riguardano una sezione T, la prima da considerarsi *tozza*, mentre nel secondo caso la geometria consiglia di calcolare anche le tensioni tangenziali nelle ali, ed in particolare agli attacchi tra ala ed anima. Altri due esempi mostrano una sezione retta costituita da tre rettangoli.

Il quarto esempio mira ad illustrare l'importanza della scelta della corda su cui calcolare la tensione tangenziale: si tratta di una sezione quadrata sollecitata lungo una diagonale, per cui una scelta “banale” della corda porta ad un diagramma tensionale inaccettabile, laddove una seconda, più logica, scelta soddisfa egregiamente i requisiti di continuità.

Si passa poi a studiare una sezione triangolare ed una sezione circolare, per poi dedicarsi allo studio della sezione a C, la cui forma non simmetrica impone di dedurre accuratamente il centro di taglio.

### 12.1 Sezione compatta a T

Disegnare il diagramma delle tensioni  $\sigma_{23}$ , e calcolare il valore della  $\sigma_{23}$  massima per la sezione compatta di Figura 12.1.

#### Soluzione

**1. Calcolo baricentro** – Il baricentro  $G$  della sezione sarà situato sull'asse di simmetria verticale. Per identificare la sua altezza, si calcola l'area  $A$  della sezione, ed il momento statico  $S_1$  rispetto ad un asse orizzontale passante per la base inferiore. Sarà:

$$\begin{aligned} A &= 3L^2 \\ S_1 &= 2L \times L \times \left( L + \frac{L}{2} \right) + L \times L \frac{L}{2} = \frac{7}{2}L^3 \end{aligned} \quad (12.1)$$

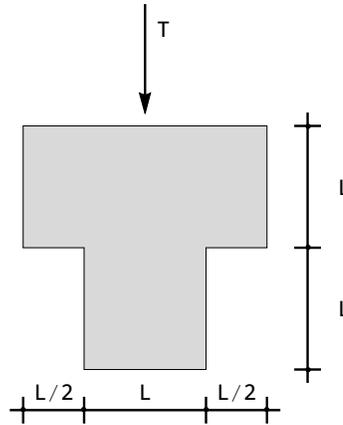


Figura 12.1: Una sezione compatta a T

da cui l'altezza del baricentro:

$$y_G = \frac{S_1}{A} = \frac{7}{6}L \quad (12.2)$$

**2. Calcolo momento d'inerzia baricentrico dell'intera sezione** – Si calcola il momento di inerzia della sezione considerandola costituita da un rettangolo superiore di base  $2L$  ed altezza  $L$ , e da un quadrato inferiore di lato  $L$ . Per ciascuno di essi si calcola il momento baricentrico, e si aggiunge il momento di trasporto:

$$I_{11} = 2L \frac{L^3}{12} + 2L^2 \times \left( \frac{3}{2}L - \frac{7}{6}L \right)^2 + L \frac{L^3}{12} + L^2 \times \left( \frac{7}{6}L - \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{11}{12}L^4 \quad (12.3)$$

**3. Calcolo del momento statico** – Se la corda generica  $AB$ , a distanza  $x_2$  dal baricentro, interseca il rettangolo superiore, allora il momento statico dell'area  $\Sigma'$  rispetto all'asse  $X_1$  baricentrico è fornito da:

$$S'_1 = L \times L \times \left( \frac{7}{6}L - \frac{L}{2} \right) + \left( \frac{7}{6}L - L \right) \times 2L \frac{1}{2} \left( \frac{7}{6}L - L \right) - 2L \times x_2 \frac{x_2}{2} = \frac{25L^3}{36} - Lx_2^2 \quad (12.4)$$

mentre se la corda interseca il quadrato inferiore, si ha:

$$S''_1 = L \times \left( \frac{7}{6}L - x_2 \right) \times \left( \frac{1}{2} \left( \frac{7}{6}L - x_2 \right) + x_2 \right) = \frac{49L^3}{72} - \frac{Lx_2^2}{2} \quad (12.5)$$

Ne segue che la tensione tangenziale  $\sigma_{23}$  è fornita, nei punti del rettangolo superiore, da:

$$\sigma_{23} = \frac{TS'_1}{2I_{11}L} = \frac{T(25L^2 - 36x_2^2)}{66L^4} \quad (12.6)$$

mentre nei punti del quadrato inferiore si ha:

$$\sigma_{23} = \frac{TS''_1}{I_{11}L} = \frac{T(49L^2 - 36x_2^2)}{66L^4} \quad (12.7)$$

**4. Tracciamento del diagramma** – Qualitativamente, il diagramma avrà andamento parabolico, annullandosi agli estremi, con una discontinuità in corrispondenza dell’attaccatura tra rettangolo e quadrato. Il valore delle tensioni cresce fino all’asse baricentrico, dove il diagramma ha tangenza verticale, per poi decrescere lungo la parte inferiore della sezione. Il valore massimo della tensione si raggiunge sulla fibra superiore del quadrato, dove  $x_2 = \frac{L}{6}$ :

$$\sigma_{23max} = \frac{8}{11} \frac{T}{L^2} \approx 0.73 \frac{T}{L^2} \quad (12.8)$$

mentre lungo la fibra inferiore del rettangolo vale la metà di questa. In corrispondenza della fibra baricentrica, si ha  $x_2 = 0$ , e quindi:

$$\sigma_{23bar} = \frac{25}{66} \frac{T}{L^2} \approx 0.38 \frac{T}{L^2} \quad (12.9)$$

Il diagramma si presenta come in Figura 12.2.

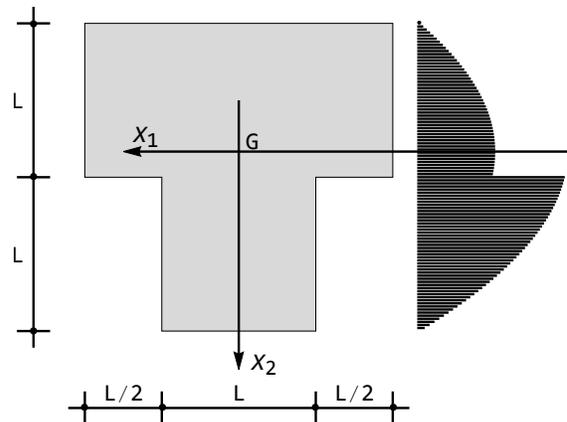


Figura 12.2: Il diagramma delle  $\sigma_{23}$

## 12.2 Profilato a T

Per la sezione di Figura 12.3, calcolare la tensione tangenziale massima nell’ala e nell’anima.

### Soluzione

**1. Calcolo baricentro** – Il baricentro  $G$  della sezione sarà situato sull’asse di simmetria verticale. Per identificare la sua altezza, si calcola l’area  $A$  della

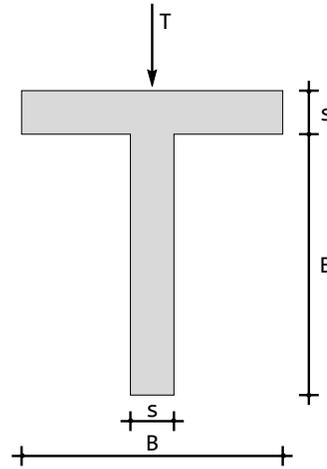


Figura 12.3: Un profilato a T

sezione, ed il momento statico  $S_1$  rispetto ad un asse orizzontale passante per la base inferiore. Sarà:

$$A = 2Bs$$

$$S_1 = Bs \left( B + \frac{s}{2} \right) + Bs \frac{B}{2} \quad (12.10)$$

da cui l'altezza del baricentro:

$$y_G = \frac{S_1}{A} = \frac{1}{4}(3B + s) \quad (12.11)$$

**2. Calcolo momento d'inerzia baricentrico dell'intera sezione** – Si calcola il momento di inerzia della sezione considerandola come costituita da un rettangolo superiore (*ala*) di base  $B$  ed altezza  $s$ , e da un rettangolo inferiore (*anima*) di base  $s$  ed altezza  $H = B$ . Per ciascuno di essi si calcola il momento baricentrico, e si aggiunge il momento di trasporto:

$$I_{11} = B \frac{s^3}{12} + Hs \left( H + \frac{s}{2} - y_G \right)^2 + s \frac{H^3}{12} + sH \left( y_G - \frac{H}{2} \right)^2 =$$

$$\frac{1}{24}Bs (5B^2 + 6Bs + 5s^2) \quad (12.12)$$

**3. Calcolo della massima tensione tangenziale nell'ala** – Il massimo valore della tensione tangenziale nell'ala si raggiunge all'attacco tra l'ala e l'anima, quindi lungo le corde  $a - a$  e  $b - b$ . Si calcoli allora il momento statico dell'area  $\Sigma'$  ombreggiata rispetto all'asse orizzontale baricentrico (cfr. Figura 12.4):

$$S'_1 = s \left( \frac{B}{2} - \frac{s}{2} \right) \left( B + \frac{s}{2} - y_G \right) = \frac{1}{8}(B - s)s(B + s) \quad (12.13)$$

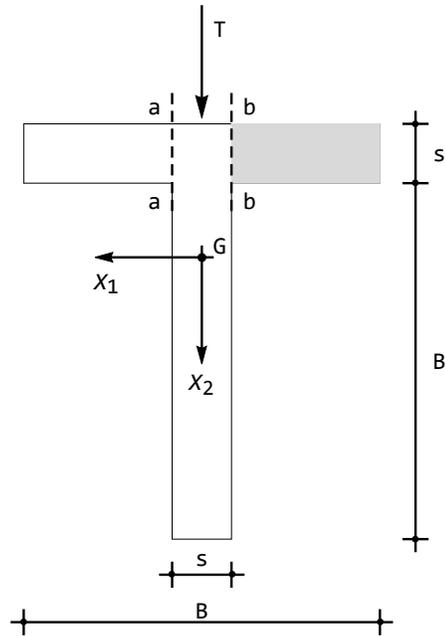


Figura 12.4: Il calcolo della tensione all'attacco tra ala ed anima

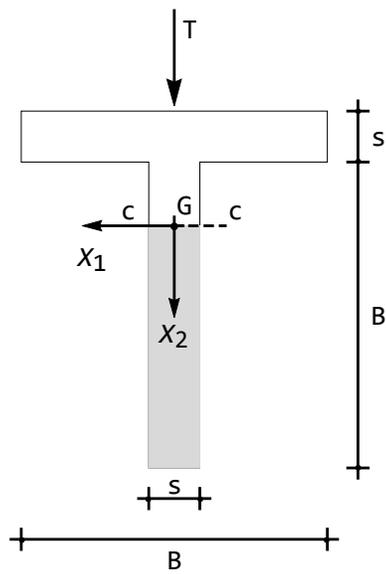


Figura 12.5: Il calcolo della tensione massima nell'anima

Ne segue che la tensione tangenziale  $\sigma_{23}$  è fornita, nei punti delle corde  $a - a$  e  $b - b$ , da:

$$\sigma_{23} = \frac{TS'_1}{I_{11}s} = \frac{3(B-s)(B+s)}{(5B^2 + 6Bs + 5s^2)} \frac{T}{Bs} \quad (12.14)$$

**4. Calcolo della massima tensione tangenziale nell'anima** – La tensione tangenziale nell'anima raggiunge il valore massimo in corrispondenza della corda barcentrica  $c - c$ . Si calcoli allora il momento statico dell'area  $\Sigma'$  ombreggiata rispetto all'asse orizzontale baricentrico (cfr. Figura 12.5):

$$S'_1 = sy_G \frac{y_G}{2} = \frac{1}{32}s(3B+s)^2 \quad (12.15)$$

Ne segue che la tensione tangenziale  $\sigma_{23}$  è fornita, nei punti della corda  $c - c$ , da:

$$\sigma_{23} = \frac{TS'_1}{I_{11}s} = \frac{3(3B+s)^2}{4(5B^2 + 6Bs + 5s^2)} \frac{T}{Bs} \quad (12.16)$$

## 12.3 Sezione a tre rettangoli

Si consideri la sezione di Figura 12.6. Per essa, disegnare il diagramma delle tensioni  $\sigma_{23}$ , e calcolare il valore della  $\sigma_{23}$  massima.

Si suddivide la sezione nei tre rettangoli di Figura 12.7, le cui aree e momenti di inerzia baricentrici sono, rispettivamente:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2L^2 & I_1 &= L \frac{(2L)^3}{12} \\ A_2 &= 6L^2 & I_2 &= 3L \frac{(2L)^3}{12} \\ A_3 &= 2L^2 & I_2 &= 2L \frac{L^3}{12} \end{aligned} \quad (12.17)$$

**1. Calcolo baricentro** – Il baricentro  $G$  della sezione sarà situato sull'asse di simmetria verticale. Per identificare la sua altezza, si calcola l'area  $A$  della sezione, ed il momento statico  $S_1$  rispetto ad un asse orizzontale passante per la base inferiore. Sarà:

$$\begin{aligned} A &= 10L^2 \\ S_1 &= A_1L + A_2(L+2L) + A_3\left(\frac{L}{2} + 4L\right) = 29L^3 \end{aligned} \quad (12.18)$$

da cui l'altezza del baricentro:

$$y_G = \frac{S_1}{A} = \frac{29}{10}L \quad (12.19)$$

**2. Calcolo momento d'inerzia baricentrico dell'intera sezione** – Si calcola il momento di inerzia della sezione considerandola come costituita dai tre rettangoli

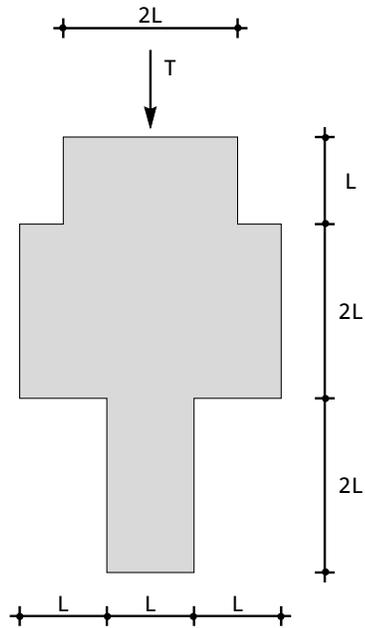


Figura 12.6: Una sezione compatta costruita assemblando tre rettangoli

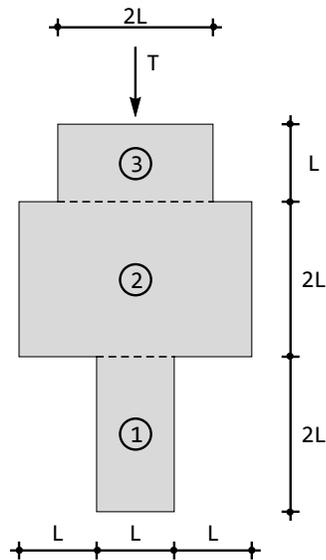


Figura 12.7: La sezione di Figura 12.6 vista come insieme di tre rettangoli

di Figura 12.7:

$$I_{11} = I_1 + A_1 (y_G - L)^2 + I_2 + A_2 (y_G - 3L)^2 + I_3 + A_3 \left( y_G - 4L - \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{457}{30} L^4 \quad (12.20)$$

**3. Calcolo del momento statico** – Occorre distinguere tre casi:

**Caso A** La corda interseca il rettangolo superiore (Figura 12.8). Calcolando, per semplicità, il momento statico del complemento di  $\Sigma'$  si ha:

$$S'_1 = 2Lhd_{GG'} = 2Lh \left( x_2 + \frac{h}{2} \right) = \frac{441L^3}{100} - Lx_2^2 \quad (12.21)$$

dove l'altezza  $h$  è fornita da:

$$h = 5L - y_G - x_2 \quad (12.22)$$

**Caso B** La corda interseca il rettangolo centrale (Figura 12.9). Si ha:

$$S''_1 = A_1 (y_G - L) + 3Lh \left( x_2 + \frac{h}{2} \right) = \frac{1003L^3}{200} - \frac{3Lx_2^2}{2} \quad (12.23)$$

con:

$$h = y_G - 2L - x_2 \quad (12.24)$$

**Caso C** La corda interseca il rettangolo inferiore (Figura 12.10). Si ha:

$$S'''_1 = L (y_G - x_2) \left( x_2 + \frac{y_G - x_2}{2} \right) = \frac{841L^3}{200} - \frac{Lx_2^2}{2} \quad (12.25)$$

**4. Calcolo della tensione tangenziale** – Nei tre intervalli in cui la corda è costante si ha, rispettivamente:

$$\sigma_{23} = T \frac{S'_1}{2I_{11}L} = \frac{3}{9140L^4} (441L^2 - 100x_2^2) T \quad (12.26)$$

$$\sigma_{23} = T \frac{S''_1}{3I_{11}L} = \frac{1}{9140L^4} (1003L^2 - 300x_2^2) T \quad (12.27)$$

$$\sigma_{23} = T \frac{S'''_1}{I_{11}L} = \frac{3}{9140L^4} (841L^2 - 100x_2^2) T \quad (12.28)$$

e quindi il diagramma si presenta come in Figura 12.11.

**5. Calcolo dei valori notevoli** – Il valore massimo viene attinto sulla corda che separa il rettangolo inferiore dal rettangolo centrale, e vale:

$$\sigma_{23max} = T \frac{S'''_1}{I_{11}L} (x_2 = y_G - 2L) = \frac{114}{457} \frac{T}{L^2} \approx 0.249 \frac{T}{L^2} \quad (12.29)$$

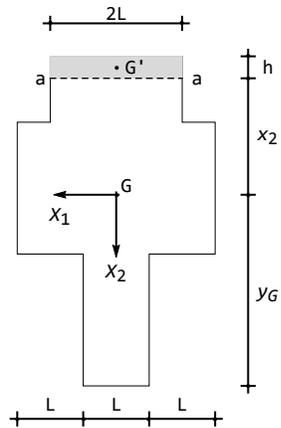


Figura 12.8: Caso A – La corda taglia il rettangolo superiore

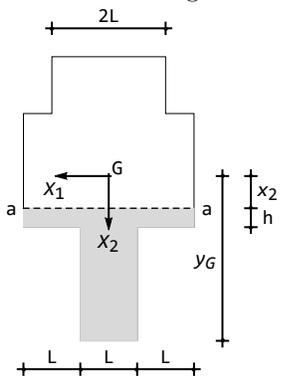


Figura 12.9: Caso B - La corda taglia il rettangolo centrale

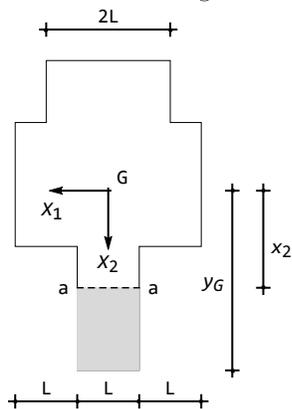
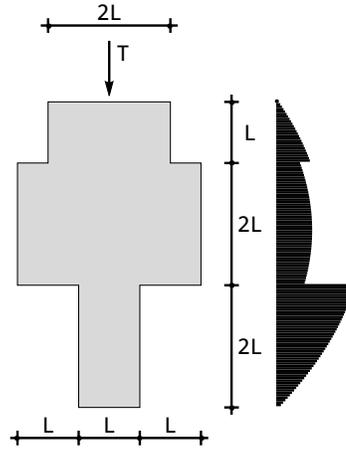


Figura 12.10: Caso C - La corda taglia il rettangolo inferiore

Figura 12.11: Il diagramma delle  $\sigma_{23}$ 

Significati sono anche i valori sulla corda baricentrica e sulla corda che separa il rettangolo centrale dal rettangolo superiore:

$$\sigma_{23bar} = T \frac{S_1''}{3I_{11}L} (x_2 = 0) = \frac{1003}{9140} \frac{T}{L^2} \approx 0.11 \frac{T}{L^2} \quad (12.30)$$

$$\sigma_{23sup} = T \frac{S_1'}{2I_{11}L} (x_2 = y_G - 4L) = \frac{48}{457} \frac{T}{L^2} \approx 0.105 \frac{T}{L^2} \quad (12.31)$$

**6. Verifica dell'equilibrio** – La risultante delle tensioni dovrà essere pari alla forza di taglio applicata  $T$ . Ed infatti si può verificare che:

$$\begin{aligned} & 2L \int_{4L-y_G}^{5L-y_G} \frac{3T}{9140L^4} (441L^2 - 100y^2) dy + \\ & 3L \int_{2L-y_G}^{4L-y_G} \frac{T}{9140L^4} (1003L^2 - 300y^2) dy + \\ & L \int_{-y_G}^{2L-y_G} \frac{3T}{9140L^4} (841L^2 - 100y^2) dy = \\ & \left( \frac{53}{457} + \frac{270}{457} + \frac{134}{457} \right) T = T \end{aligned} \quad (12.32)$$

## 12.4 Sezione a tre rettangoli

La sezione di Figura 12.12, ai fini del calcolo delle tensioni tangenziali, può riguardarsi come costituita da un rettangolo superiore, di base  $2L$  ed altezza  $L$ , da un rettangolo centrale, di base  $4L$  ed altezza  $2L$ , e da un rettangolo inferiore uguale al rettangolo superiore. A parte le dimensioni, essa è quindi equivalente alla sezione dell'esempio precedente.

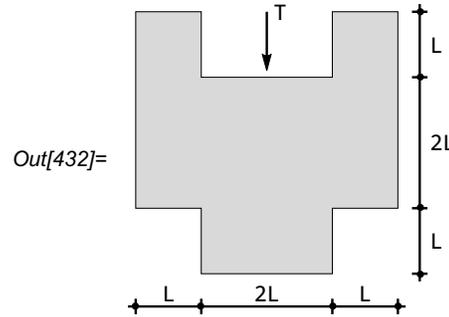


Figura 12.12: Una sezione compatta

Le coordinate del baricentro sono note:

$$\begin{aligned} x_G &= 2L \\ y_G &= 2L \end{aligned} \quad (12.33)$$

Il momento di inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse orizzontale baricentrico è allora fornito da:

$$I_{11} = 2L \frac{L^3}{12} + 2LL \left( L + \frac{L}{2} \right)^2 + 4L \frac{(2L)^3}{12} + 2L \frac{L^3}{12} + 2LL \left( L + \frac{L}{2} \right)^2 = 12L^4 \quad (12.34)$$

Se la corda interseca i due rettangoli superiori, il momento statico dell'area ad essa sottostante, rispetto all'asse orizzontale baricentrico sarà fornito da:

$$S'_1 = 2L(2L - x_2) \left( x_2 + \frac{2L - x_2}{2} \right) = 4L^3 - Lx_2^2 \quad (12.35)$$

mentre se interseca il rettangolo centrale si avrà:

$$S''_1 = 2LL \left( L + \frac{L}{2} \right) + 4L(L - x_2) \left( x_2 + \frac{(L - x_2)}{2} \right) = 5L^3 - 2Lx_2^2 \quad (12.36)$$

Se infine la corda interseca il rettangolo inferiore, si avrà:

$$S'''_1 = 2L(3L - x_2) \left( x_2 + \frac{3L - x_2}{2} \right) = 4L^3 - Lx_2^2 \quad (12.37)$$

Nei tre intervalli in cui la corda è costante si ha, rispettivamente:

$$\begin{aligned} \sigma_{23} &= T \frac{S'_1}{2I_{11}L} = \frac{4L^2 - x_2^2}{24L^4} T \\ \sigma_{23} &= T \frac{S''_1}{3I_{11}L} = \frac{5L^2 - 2x_2^2}{48L^4} T \\ \sigma_{23} &= T \frac{S'''_1}{I_{11}L} = \frac{4L^2 - x_2^2}{24L^4} T \end{aligned} \quad (12.38)$$

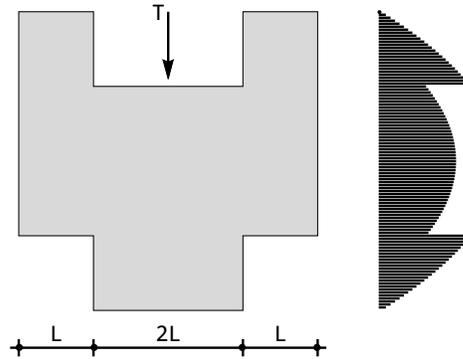


Figura 12.13: Il diagramma delle  $\sigma_{23}$

e quindi il diagramma si presenta come in Figura 12.13: si noti la simmetria del diagramma, dovuta al fatto che i due rettangoli superiori possono riguardarsi come un singolo rettangolo di base  $2L$ , e quindi equivalente al rettangolo inferiore.

Il valore massimo viene attinto sulle corde che separano il rettangolo centrale dai corpi inferiore e superiore, e vale:

$$\sigma_{23max} = T \frac{S'_1}{2I_{11}L} (x_2 = -L) T = \frac{S'''_1}{2I_{11}L} (x_2 = L) = \frac{T}{8L^2} = 0.125 \frac{T}{L^2} \quad (12.39)$$

Significativo è anche il valore sulla corda baricentrica:

$$\sigma_{23bar} = T \frac{S''_1}{4I_{11}L} (x_2 = 0) = \frac{5}{48} \frac{T}{L^2} \approx 0.104 \frac{T}{L^2} \quad (12.40)$$

Infine, l'equilibrio alla traslazione verticale è soddisfatto, in quanto:

$$2 \left( 2L \int_{3L-y_G}^{4L-y_G} \frac{4L^2 - y^2}{24L^4} T dy \right) + 4L \int_{L-y_G}^{3L-y_G} \frac{5L^2 - 2y^2}{48L^4} T dy = \left( 2 \frac{5}{36} + \frac{13}{18} \right) T = T \quad (12.41)$$

## 12.5 Quadrato sollecitato lungo una diagonale: prima soluzione

Un caso particolarmente significativo è riportato in Figura 12.14, ed è ripreso da T. Cavallina, E. D'Anna *Esercizi di Scienza delle Costruzioni*, Pàtron Editore, Vol.I. Si tratta di una sezione romboidale, soggetta ad una forza tagliante diretta secondo una diagonale. In questa sezione, si vogliono calcolare le tensioni tangenziali agenti sulle corde parallele all'asse orizzontale  $X_1$ .

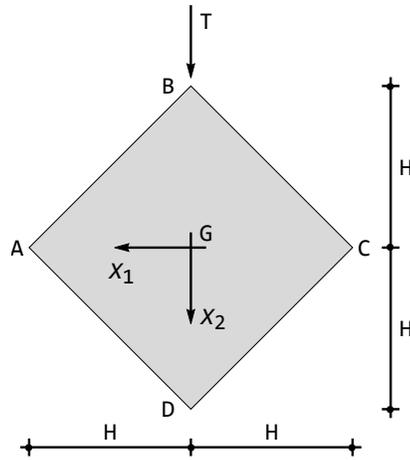


Figura 12.14: Una sezione quadrata sollecitata lungo la diagonale

**Soluzione** – Il baricentro è immediatamente calcolabile, essendo situato all'incrocio delle due diagonali. Il momento di inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse baricentrico può calcolarsi riguardando la sezione come somma dei due triangoli  $ABC$  ed  $ACD$ . Si ha allora:

$$I_{11} = 2 \left( 2H \frac{H^3}{36} \right) + 2 \left( \frac{1}{2} 2HH \right) \left( \frac{H}{3} \right)^2 = \frac{H^4}{3} \quad (12.42)$$

Il momento statico dell'area sottostante ad una generica corda appartenente al triangolo inferiore si può scrivere, a partire dalla Figura 12.15, come:

$$S'_1 = \frac{b}{2} (H - x_2) d_{GG'} = \frac{b}{2} (H - x_2) \left( x_2 + \frac{1}{3} (H - x_2) \right) = \frac{b}{6} (H - x_2) (H + 2x_2) \quad (12.43)$$

e quindi le tensioni su quella corda valgono:

$$\sigma_{23} = \frac{T}{2H^4} (H - x_2) (H + 2x_2) \quad (12.44)$$

Le tensioni  $\sigma_{23}$  raggiungono il valore massimo in corrispondenza del punto di tangenza verticale, ossia dove si annulla la derivata:

$$\frac{d}{dx_2} \left( \frac{S'_1}{b} \right) = \frac{d}{dx_2} \left( \frac{1}{6} (H - x_2) (H + 2x_2) \right) = \frac{1}{6} (H - 4x_2) \quad (12.45)$$

e quindi in  $H/4$ . Su tale corda si ha:

$$\sigma_{23max} = \frac{9}{16} \frac{T}{H^2} \quad (12.46)$$

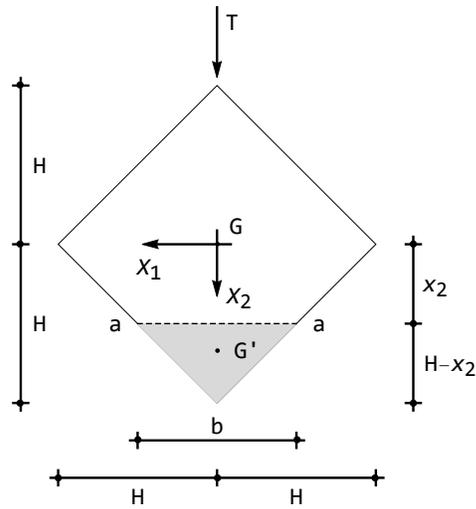


Figura 12.15: Il caso della corda parallela all'asse orizzontale

laddove la tensione sulla corda baricentrica vale:

$$\sigma_{23bar} = \frac{1}{2} \frac{T}{H^2} \quad (12.47)$$

Infine, il diagramma si viene a completare per simmetria nella parte superiore, come illustrato in Figura 12.16.

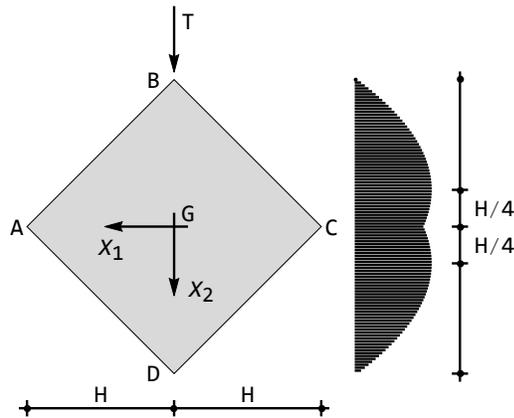


Figura 12.16: Il diagramma delle  $\sigma_{23}$

**Il diagramma delle  $\sigma_{13}$**  – Sui punti del contorno la tensione tangenziale dovrà essere tangente al contorno stesso, quindi dovrà essere:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} \quad (12.48)$$

lungo i bordi  $AB$  e  $CD$ , e

$$\sigma_{13} = -\sigma_{23} \quad (12.49)$$

lungo i bordi  $BC$  e  $AD$ . Infine, la  $\sigma_{13}$  varierà linearmente lungo la corda, annullandosi sull'asse verticale. Per utilizzare la formula di Kharlab, si consideri che la lunghezza della generica corda  $b$  può esprimersi in funzione della sua distanza  $x_2$  dal baricentro come:

$$b(x_2) = 2(H - x_2) \quad (12.50)$$

e quindi potrà scriversi:

$$\sigma_{13} = -2\sigma_{23} \frac{x_1}{b} \quad (12.51)$$

Nel punto generico della generica corda relativa al triangolo inferiore, la tensione tangenziale sarà diretta verso il punto  $D$ , mentre nel generico punto della generica corda relativa al triangolo superiore, la tensione tangenziale sarà diretta verso il punto  $B$ , come riportato in Figura 12.17.

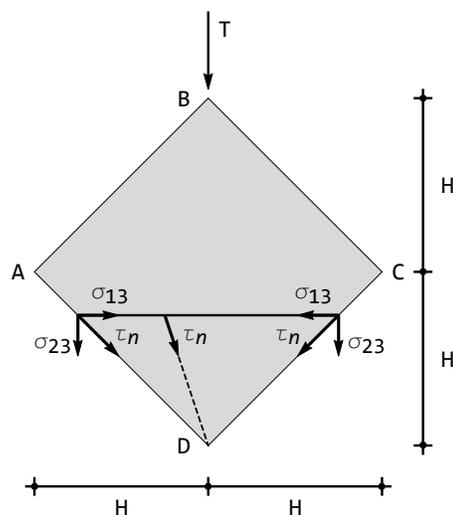


Figura 12.17: Il quadro tensionale completo delle  $\tau_n$

## 12.6 Quadrato sollecitato lungo una diagonale: seconda soluzione

La stessa sezione romboidale, soggetta ad una forza tagliante diretta secondo una diagonale, viene ora studiata, come suggerito da Cavallina e D'Anna, calcolando le tensioni tangenziali sulle corde parallele ai lati del rombo (cfr. 12.18). Si suddivide quindi lo sforzo verticale  $T$  nelle due componenti  $T_l$  e  $T_m$  secondo i

lati  $BC$  ed  $AB$ . Si traccia poi il diagramma delle tensioni tangenziali in presenza di  $T_m$ , utilizzando corde parallele al lato  $BC$ . Analogo studio può condursi per la forza  $T_l$ .

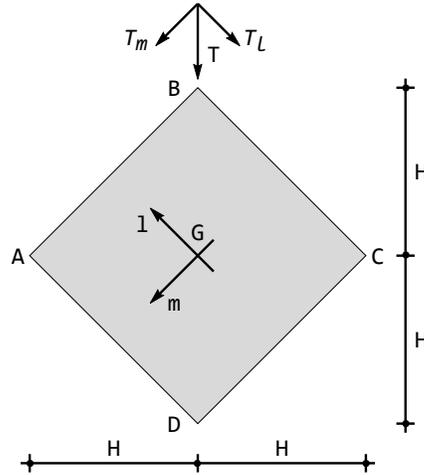


Figura 12.18: La stessa sezione, caso delle corde parallele ai lati

**Soluzione** – Il momento statico dell'area tratteggiata rispetto all'asse  $l$  è fornito da (cfr. Figura 12.19):

$$S'_l = L \left( \frac{L}{2} - m \right) \left( m + \frac{1}{2} \left( \frac{L}{2} - m \right) \right) = \frac{L}{8} (L^2 - 4m^2) \quad (12.52)$$

e quindi la tensione  $\sigma_{3m}$  è fornita da:

$$\sigma_{3m} = \frac{T_m S'_l}{I_{11} L} = \frac{T S'_l}{\sqrt{2} I_{11} L} = \frac{3T}{2\sqrt{2} L^4} (L^2 - 4m^2) = \frac{6T}{\sqrt{2} L^4} \left( \frac{L^2}{4} - m^2 \right) \quad (12.53)$$

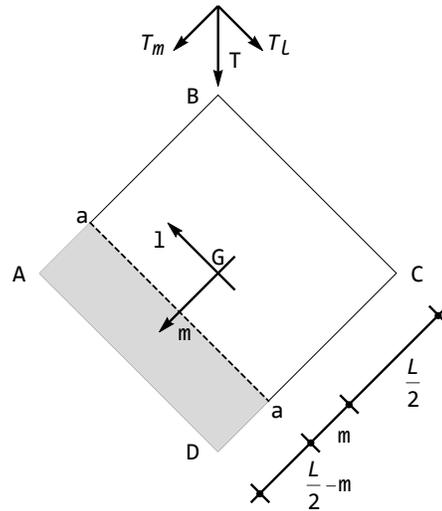
Ripetendo l'analisi in presenza di  $T_l$ , ed utilizzando corde parallele ad  $AB$ , si ottiene un identico risultato, e sovrapponendo gli effetti si ha una tensione tangenziale diretta secondo la verticale, che equilibra la forza verticale  $T$ , e pari a:

$$\sigma_{23} = \frac{3T}{L^4} \left( \frac{L^2}{2} - x_2^2 \right) = \frac{3T}{4H^4} (H^2 - x_2^2) \quad (12.54)$$

Con questo approccio, quindi, l'andamento delle  $\sigma_{23}$  è fornito da una singola parabola, eliminando la strana gobba del diagramma di Figura 12.16.

## 12.7 Sezione triangolare

La sezione triangolare di Figura 12.20, di base  $B$  ed altezza  $H$ , è soggetta alla forza tagliante  $T$  in sommità. Calcolare le tensioni tangenziali  $\sigma_{23}$  e  $\sigma_{13}$  sulle corde orizzontali.


 Figura 12.19: Il calcolo del momento statico rispetto all'asse  $l$ 

**Soluzione** – Le coordinate del baricentro sono ben note, così come è noto il valore del momento di inerzia  $I_{11}$  rispetto all'asse  $X_1$  baricentrale:

$$I_{11} = \frac{BH^3}{36} \quad (12.55)$$

Resta da calcolare il momento statico dell'area sottostante la corda generica rispetto allo stesso asse. In questo caso, è preferibile calcolare il momento statico dell'area sovrastante la corda, e considerare che esso è l'opposto del momento statico desiderato. A partire dalla Figura 12.21 può scriversi:

$$\begin{aligned} S'_1 &= \frac{1}{2}b \left( \frac{2}{3}H + x_2 \right) d_{GG'} = \\ &= \frac{1}{2}b \left( \frac{2}{3}H + x_2 \right) \left( \frac{1}{3} \left( x_2 + \frac{2}{3}H \right) + \left( \frac{H}{3} - x_2 \right) - \frac{H}{3} \right) = \\ &= \frac{b}{27} (H - 3x_2) (2H + 3x_2) \end{aligned} \quad (12.56)$$

Ne segue l'espressione della tensione tangenziale:

$$\sigma_{23} = \frac{4T}{3BH^3} (H - 3x_2) (2H + 3x_2) \quad (12.57)$$

e quindi l'andamento del diagramma risulta parabolico, come illustrato in Figura 12.22.

Per il calcolo del massimo valore delle  $\sigma_{23}$ , si identifica la corda su cui il diagramma presenta pendenza verticale:

$$\frac{d}{dx_2} \left( \frac{S'_1}{b} \right) = 0 \quad (12.58)$$

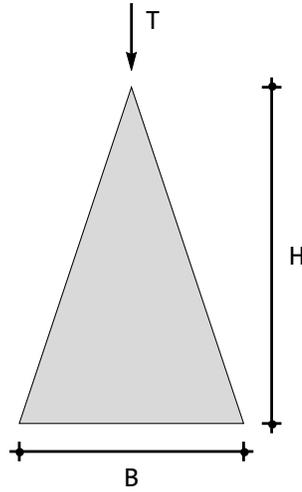


Figura 12.20: Una sezione a triangolo isoscele

ossia si calcola il valore di  $x_2$  per cui:

$$\frac{d}{dx_2} (H - 3x_2)(2H + 3x_2) = 0 \quad (12.59)$$

ottenendo:

$$x_{2max} = -\frac{H}{6} \quad (12.60)$$

Ne segue il valore della tensione tangenziale massima:

$$\sigma_{23max} = 3\frac{T}{BH} \quad (12.61)$$

In corrispondenza della corda baricentrica si ha un valore leggermente inferiore, come riportato in Figura 12.23:

$$\sigma_{23 \max} = \frac{8}{3} \frac{T}{BH} \quad (12.62)$$

**L'andamento delle tensioni  $\sigma_{13}$**  – Su ciascuna corda orizzontale la tensione  $\sigma_{13}$  varia con legge lineare. Agli estremi, la tensione tangenziale  $\tau_n$  è diretta secondo il contorno, e quindi nel punto di sinistra si ha:

$$\sigma_{13 \sin} = \sigma_{23} \tan(\alpha_1) \quad (12.63)$$

dove  $\alpha_1$  è fornita da:

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{B}{2H}\right) \quad (12.64)$$

Nel punto di destra si ha:

$$\sigma_{13des} = \sigma_{23} \tan(\alpha_2) = -\sigma_{13 \sin} \quad (12.65)$$

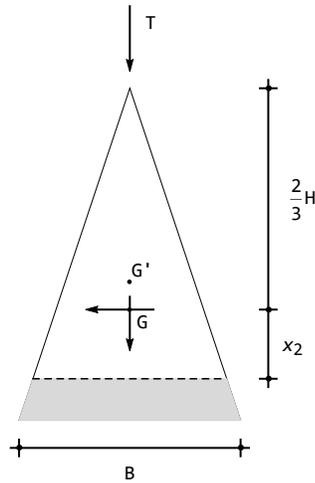


Figura 12.21: Il calcolo del momento statico

In mezzeria, evidentemente, la  $\sigma_{13}$  si annulla. In ogni altro punto della corda, la tensione  $\tau_n$  è diretta verso il vertice del triangolo.

Se si vuole utilizzare la formula di Kharlab, occorre calcolare l'espressione analitica della generica corda  $b(x_2)$  situata a distanza  $x_2$  dal baricentro. Una semplice proporzione geometrica permette di scrivere:

$$\frac{B}{H} = \frac{b(x_2)}{\frac{2}{3}H + x_2} \quad (12.66)$$

e quindi:

$$b(x_2) = \frac{B}{H} \left( \frac{2}{3}H + x_2 \right) \quad (12.67)$$

Ne segue:

$$\frac{db}{dx_2} = \frac{B}{H} \quad (12.68)$$

e la formula di Kharlab fornisce:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} \frac{B}{H} \frac{x_1}{b(x_2)} \quad (12.69)$$

## 12.8 La sezione circolare

Si vuole ora studiare la sezione circolare, di raggio  $R$ , illustrata in Figura 12.24. Per essa, il baricentro è situato al centro del cerchio, mentre il momento d'inerzia è pari a:

$$I_{11} = \frac{\pi R^4}{4} \quad (12.70)$$

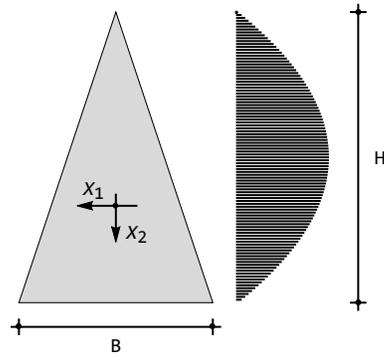
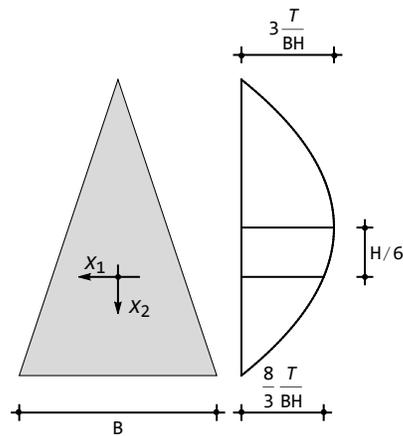
Figura 12.22: Il diagramma delle  $\sigma_{23}$ 

Figura 12.23: I valori notevoli

La generica corda  $AB$ , a distanza  $x_2$  dall'asse  $X_1$ , ha lunghezza  $b(x_2)$  pari a:

$$b(x_2) = 2\sqrt{R^2 - x_2^2} \quad (12.71)$$

Occorre ora calcolare il momento statico dell'area  $\Sigma'$  sottostante alla corda  $AB$ . Considerando che  $\Sigma'$  può essere vista come la differenza tra il settore circolare  $\widehat{OAB}$  ed il triangolo  $OAB$  (cfr. Figura 12.25), si potrà calcolare l'area come:

$$\Sigma' = \alpha R^2 - R^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \quad (12.72)$$

Il baricentro del triangolo  $OAB$  si troverà a distanza  $y_{G1}$  dall'asse  $X_1$ :

$$y_{G1} = \frac{2}{3}x_2 = \frac{2}{3}R \cos(\alpha) \quad (12.73)$$

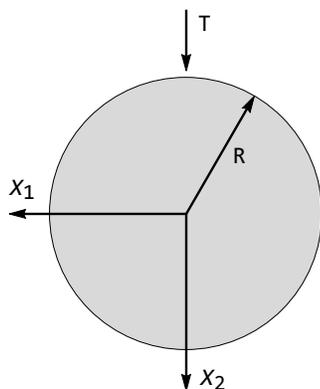


Figura 12.24: La sezione retta circolare

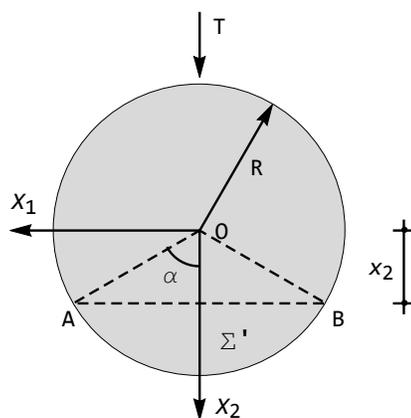
mentre il baricentro del settore circolare  $\widehat{OAB}$  si troverà a distanza  $y_{G2}$  dall'asse  $X_1$ :

$$y_{G2} = \frac{2}{3}x_2 = \frac{2}{3}R \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \quad (12.74)$$

Ne segue, per la proprietà distributiva del baricentro, che il baricentro di  $\Sigma'$  si troverà a distanza  $y_G$  dall'asse  $X_1$ , dove:

$$y_G = \frac{(\alpha R^2) y_{G2} - (R^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)) y_{G1}}{\Sigma'} = \frac{2}{3} \frac{R \sin(\alpha)^3}{\alpha - \cos(\alpha) \sin(\alpha)} \quad (12.75)$$

Infine, il richiesto momento statico è pari a:


 Figura 12.25: Il calcolo del momento statico  $S'$ 

$$S' = \Sigma' y_G = \frac{2}{3} R^3 \sin(\alpha)^3 = \frac{b^3}{12} \quad (12.76)$$

La formula di Jourawsky fornisce quindi :

$$\sigma_{23} = \frac{Tb^2}{12I_{11}} = \frac{Tb^2}{3\pi R^4} = \frac{4}{3} \frac{T(R^2 - x_2^2)}{\pi R^4} \quad (12.77)$$

Per ottenere la componente  $\sigma_{13}$  si applica la formula di Kharlab, per cui occorre calcolare:

$$\frac{db}{dx_2} = -4 \frac{x_2}{b} \quad (12.78)$$

Ne segue:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} \frac{db}{dx_2} \frac{x_1}{b} = -\frac{T}{3I_{11}} x_1 x_2 = -\frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^4} x_1 x_2 \quad (12.79)$$

## 12.9 La sezione a C

Le sezioni considerate finora possedevano un asse di simmetria verticale, e la forza tagliante  $T$  agiva lungo quest'asse. Non sorgeva quindi alcun momento torcente aggiuntivo, e nemmeno tensioni tangenziali ad esso dovute. In altri termini, il centro di taglio giaceva sull'asse di simmetria, e la forza applicata passava per esso.

Si consideri ora, invece, la sezione retta a forma di C, illustrata in Figura 12.26, con ali larghe  $B$  e con anima alta  $H$ . Lo spessore delle ali sia pari a  $t$ , lo spessore dell'anima sia  $d$ . La sezione sia soggetta a forza di taglio baricentrica diretta lungo l'asse  $X_2$ , sicchè l'asse neutro flessionale coincide con l'asse  $X_1$ .

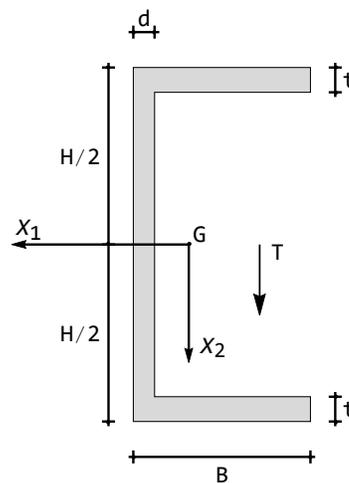


Figura 12.26: La sezione retta a C soggetta a taglio verticale

### Lo stato tensionale nelle ali

Considerando la sezione come un insieme di tre rettangoli, si inizi a determinare lo stato tensionale tangenziale nelle ali. Per esse conviene considerare corde parallele all'asse  $X_2$ : data infatti la loro minore lunghezza rispetto a corde parallele all'asse  $X_1$  lo stato tensionale su tali corde sarà sicuramente più significativo. Scelta allora una corda generica a distanza  $\xi_1$  dall'esterno di destra dell'ala inferiore, si può enucleare subito l'area  $\Sigma'$  di cui calcolare il momento statico rispetto all'asse baricentrale  $X_1$ . Dalla Figura 12.27 si ottiene:

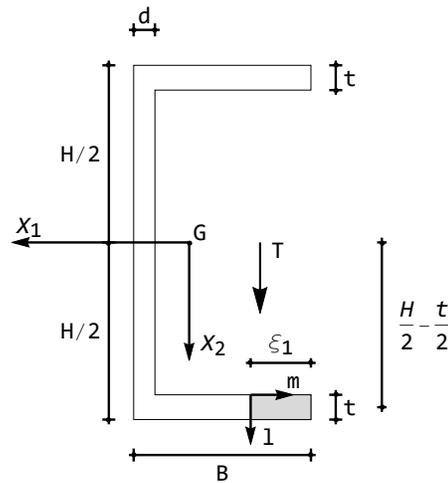


Figura 12.27: La corda parallela all'asse  $X_2$  per il calcolo delle tensioni nelle ali

$$S'_1 = t\xi_1 \left( \frac{H}{2} - \frac{t}{2} \right) \quad (12.80)$$

e quindi la tensione  $\sigma_{m3}$  è fornita da:

$$\sigma_{m3} = \frac{T_2 S'_1}{I_{11} b} = \frac{T}{2I_{11}} (H - t)\xi_1 \quad (12.81)$$

Si noti che ora l'asse  $m$  viene a coincidere con l'asse  $X_1$ , quindi la tensione  $\sigma_{m3}$  precedente è pari alla componente cartesiana  $\sigma_{13}$ . Essa varia linearmente lungo l'ala, annullandosi all'estremo, dove  $\xi_1 = 0$ , e divenendo massima all'attacco con l'anima, dove  $\xi_1 = B - d$ :

$$\sigma_{m3max} = \frac{T}{2I_{11}} (H - t)(B - d) \quad (12.82)$$

L'altra componente di tensione varia con legge quadratica lungo la corda prescelta. Agli estremi la tensione tangenziale  $\tau_n$  sarà diretta secondo il contorno, e quindi viene a coincidere con la  $\sigma_{m3}$ . Ne segue che in tali punti  $\sigma_{13}$  è

nulla, e di conseguenza l'andamento della  $\sigma_{l3}$  sarà simmetrico rispetto all'asse dell'ala. L'inclinazione del diagramma sarà data da:

$$\frac{\partial \sigma_{l3}}{\partial l} = -\frac{T}{I_{11}} \left( \frac{1}{b} \frac{\partial S'_1}{\partial m} - x_2 \right) = -\frac{T}{I_{11}} \left( \frac{H-t}{2} - x_2 \right) \quad (12.83)$$

e quindi l'inclinazione sarà nulla (come prevedibile per la simmetria) sull'asse dell'ala, mentre sarà massima per  $x_2 = \frac{H}{2}$ , bordo inferiore dell'ala, e per  $x_2 = \frac{H}{2} - t$  (bordo superiore dell'anima), dove varrà:

$$\left( \frac{\partial \sigma_{l3}}{\partial l} \right)_{max} = \frac{T}{I_{11}} \frac{t}{2} \quad (12.84)$$

Per ottenere l'espressione analitica delle  $\sigma_{l3}$  si inizi col porre:

$$\sigma_{l3} = al^2 + bl + c \quad (12.85)$$

e poi si calcolino i tre coefficienti incogniti imponendo le tre condizioni:

$$\sigma_{l3} \left( l = \frac{H}{2} \right) = 0 \rightarrow a \frac{H^2}{4} + b \frac{H}{2} + c = 0 \quad (12.86)$$

$$\sigma_{l3} \left( l = \frac{H}{2} - t \right) = 0 \rightarrow a \left( \frac{H}{2} - t \right)^2 + b \left( \frac{H}{2} - t \right) + c = 0 \quad (12.87)$$

$$\frac{\partial \sigma_{l3}}{\partial l} \left( l = \frac{H}{2} \right) = \frac{T}{I_{11}} \frac{t}{2} \rightarrow 2a \frac{H}{2} + b = \frac{T}{I_{11}} \frac{t}{2} \quad (12.88)$$

Si ha subito:

$$a = \frac{T}{2I_{11}} \quad b = -\frac{T}{2I_{11}}(H-t) \quad c = \frac{T}{8I_{11}}H(H-2t) \quad (12.89)$$

e quindi la tensione si scriverà:

$$\sigma_{l3} = \frac{T}{2I_{11}} \left( l^2 - l(H-t) + H \frac{(H-2t)}{4} \right) \quad (12.90)$$

con valore massimo lungo l'asse dell'ala pari a:

$$\sigma_{l3max} = \sigma_{l3} \left( l = \frac{H}{2} - \frac{t}{2} \right) = -\frac{Tt^2}{8I_{11}} \quad (12.91)$$

Tale valore è di solito molto basso, rispetto ai valori delle componenti  $\sigma_{m3}$ , e pertanto l'effetto delle  $\sigma_{l3}$  lungo le ali è usualmente trascurato. Lo stato tensionale nell'ala inferiore è schematizzato in Figura 12.28, nell'ala superiore è del tutto analogo.

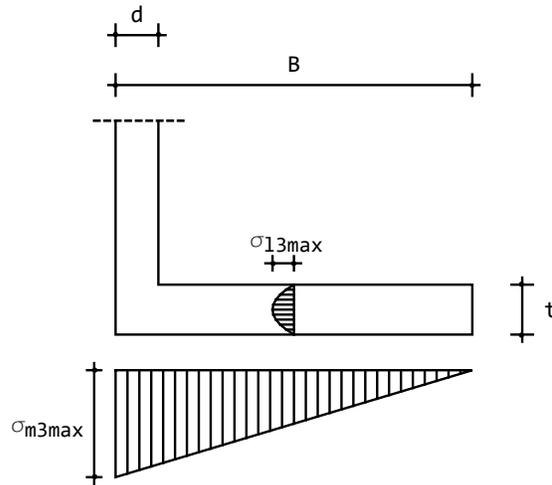


Figura 12.28: Lo stato tensionale nell'ala inferiore della sezione a C

### Lo stato tensionale nell'anima

Lo stato tensionale nell'anima andrà valutato scegliendo corde orizzontali, che hanno la lunghezza minore. Con una corda a distanza  $x_2$  dall'asse  $X_1$  si avrà, come risulta dalla Figura 12.29:

$$S'_1 = Bt \frac{H-t}{2} + d \left( \frac{H}{2} - t - x_2 \right) \left( \frac{\left( \frac{H}{2} - t - x_2 \right)}{2} + x_2 \right) =$$

$$Bt \frac{H-t}{2} + \frac{d}{2} \left( \frac{H}{2} - t - x_2 \right) \left( \frac{H}{2} - t + x_2 \right) \quad (12.92)$$

e quindi, semplificando:

$$\sigma_{m3} = \frac{T}{2I_{11}} \left( B(H-t) \frac{t}{d} + \left( \frac{H}{2} - t \right)^2 - x_2^2 \right) \quad (12.93)$$

Si noti che ora l'asse è orientato secondo  $X_2$ , e quindi la tensione  $\sigma_{m3}$  precedente coincide con la componente speciale  $\sigma_{23}$ , e che tale tensione varia con legge quadratica lungo l'asse, raggiungendo il suo massimo in  $x_2 = 0$ :

$$\sigma_{m3max} = \frac{T}{2I_{11}} \left( B(H-t) \frac{t}{d} + \left( \frac{H}{2} - t \right)^2 \right) \quad (12.94)$$

In corrispondenza dell'incrocio tra ali ed anima si ha  $x_2 = \frac{H}{2} - t$ , e la tensione vale:

$$\sigma_{m3} \left( \frac{H}{2} - t \right) = \frac{T}{2I_{11}} (H-t) B \frac{t}{d} \quad (12.95)$$

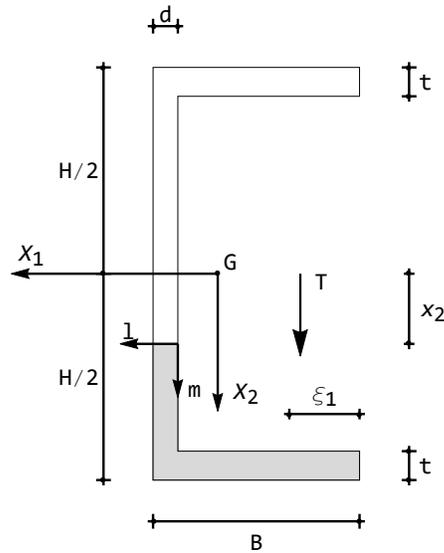


Figura 12.29: La corda parallela all'asse  $X_1$  per il calcolo delle tensioni nell'anima

Si ha quindi il diagramma di Figura 12.30. Da esso si osserva come sia spesso possibile assimilare il diagramma delle tensioni tangenziali ad un rettangolo, trascurando il contributo delle ali ed assumendo una distribuzione costante di tensioni tangenziali, pari a:

$$\sigma_{m3max} = \frac{T}{(H - 2t)d} \quad (12.96)$$

La componente di tensione  $\sigma_{l3}$  è ovunque nulla nell'anima.

### Il fattore di taglio

Il fattore di taglio può essere valutato approssimativamente trascurando il contributo delle ali, e quindi utilizzando la formula precedente. In tal caso si ha una energia di deformazione pari a:

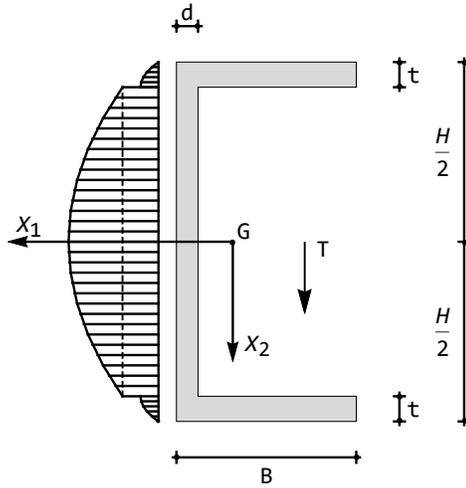
$$L_t = \frac{1}{2G} \int_{V'} \sigma_{23}^2 dV = \frac{T^2 L}{2G(H - 2t)^2 d^2} (H - 2t)d = \frac{T^2 L}{2G(H - 2t)d} \quad (12.97)$$

e volendo porre l'energia nella nota forma:

$$L_t = \frac{\kappa T^2 L}{2 GA} \quad (12.98)$$

si giunge all'espressione approssimata del fattore di taglio:

$$\kappa = \frac{A}{(H - 2t)d} \quad (12.99)$$


 Figura 12.30: Il diagramma delle tensioni  $\sigma_{23}$  nell'anima

Quindi, il fattore di taglio è pari al rapporto tra l'area totale  $A$  della sezione e l'area dell'anima.

### Il centro di taglio

L'ala inferiore è soggetta ad una distribuzione triangolare di tensioni, la cui risultante può calcolarsi come:

$$T_{r1} = \int \sigma_{13} dA \quad (12.100)$$

e quindi, trattandosi di un diagramma triangolare:

$$T_{r1} = \frac{t}{2}(B-d)\sigma_{13 \max} = \frac{Tt}{4I_{11}}(B-d)^2(H-t) \quad (12.101)$$

Nell'ala superiore la risultante delle tensioni tangenziali è uguale e contraria, in quanto i momenti statici cambiano di segno. Infine, la risultante delle tensioni tangenziali nell'anima, utilizzando la (12.96), è pari a  $T$ , ed è diretta secondo l'asse baricentrale dell'anima.

Complessivamente, quindi, le tensioni agenti sono equivalenti ad una forza  $T$  applicata nel baricentro dell'anima, e ad un momento torcente dovuto alle due forze risultanti nelle ali, e tale momento torcente è pari a (Figura 12.31):

$$M_t = T_{r1}(H-t) = \frac{Tt}{4I_{11}}(B-d)^2(H-t)^2 \quad (12.102)$$

Tale sistema di forza più momento torcente può infine ridursi alla singola forza  $T$  traslata, rispetto alla sua posizione originaria, di una quantità:

$$d_t = \frac{M_t}{T} \quad (12.103)$$

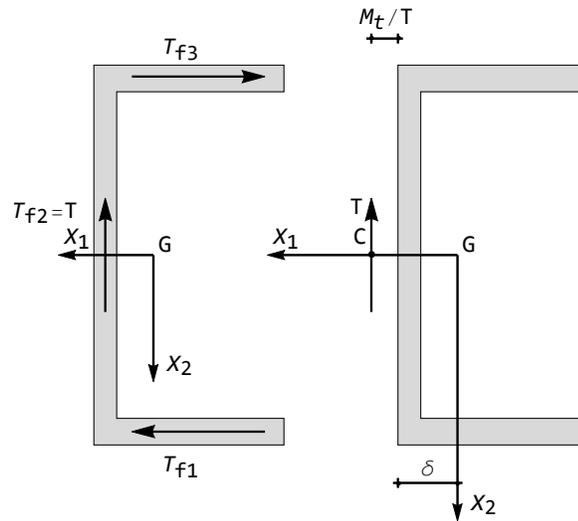


Figura 12.31: Le risultanti delle tensioni tangenziali ed il centro di taglio

Indicando con  $\delta$  la distanza del baricentro dall'estremo esterno dell'anima si ha che la coordinata  $x_{C1}$  del *centro di taglio* può calcolarsi come

$$x_{C1} = \delta - \frac{d}{2} + \frac{t}{4I_{11}}(B-d)^2(H-t)^2 \quad (12.104)$$

mentre per la simmetria della sezione sarà sicuramente  $x_{C2} = 0$ . Se  $T$  non passa per il centro di taglio occorrerà aggiungere alle tensioni tangenziali calcolate in questa sezione anche le tensioni tangenziali da torsione.

## Capitolo 13

# Le travi soggette a sforzo assiale

Si consideri una trave rettilinea soggetta ai carichi assiali  $t(x_3)$ . Per essa, si hanno le seguenti equazioni:

- Equazioni di equilibrio:

$$\frac{dN(x_3)}{dx_3} = -t(x_3) \quad (13.1)$$

- Equazioni di congruenza:

$$e_{33} = \frac{du_3(x_3)}{dx_3} \quad (13.2)$$

- Equazioni costitutive (legge di Hooke):

$$\frac{N(x_3)}{A(x_3)} = E \frac{du_3(x_3)}{dx_3} \quad (13.3)$$

Dalla (13.3) si ottiene lo sforzo normale, che può essere derivato ed inserito nella (13.1), a fornire l'equazione differenziale nell'incognita  $u_3$ :

$$(EA)'u_3' + EAu_3'' = -t \quad (13.4)$$

dove — per semplicità — si sono eliminate le dipendenze funzionali da  $x_3$ , e dove l'apice indica derivazione rispetto ad  $x_3$ . In ipotesi di sezione costante, l'equazione precedente si semplifica in:

$$EAu_3'' = -t \quad (13.5)$$

con soluzione:

$$u_3 = C_0 + C_1x_3 + I_p \quad (13.6)$$

e l'integrale particolare  $I_p$  dipende dal carico  $t(x_3)$  applicato.

Le due costanti di integrazione  $C_0$  e  $C_1$  si ottengono imponendo le condizioni ai limiti agli estremi. In ciascun estremo, infatti, si può imporre che lo spostamento assiale sia nullo (estremo fisso), oppure che lo spostamento assiale sia permesso (estremo libero). Nel primo caso occorrerà imporre  $u_3 = 0$ , laddove nell'estremo libero dovrà annullarsi lo sforzo normale, e quindi dovrà essere  $u'_3 = 0$ .

### 13.1 L'approccio energetico

L'energia potenziale connessa ad una trave di luce  $L$ , soggetta al carico assiale  $t(x_3)$ , può scriversi come:

$$E_t = \frac{EA}{2} \int_0^L u_3'^2 dx_3 - \int_0^L t u_3 dx_3 = E_t(u_3, u_3') \quad (13.7)$$

Si noti che per semplicità si è già ipotizzato che la rigidezza assiale  $EA$  sia costante. La variazione  $\delta E_t$  si calcola come:

$$\begin{aligned} \delta E_t &= E_t(u_3 + \delta u_3, u_3' + \delta u_3') - E_t(u_3, u_3') = \\ &= \frac{EA}{2} \int_0^L (u_3' + \delta u_3')^2 dx_3 - \int_0^L t(u_3 + \delta u_3) dx_3 - \\ &= \frac{EA}{2} \int_0^L u_3'^2 dx_3 + \int_0^L t u_3 dx_3 \end{aligned} \quad (13.8)$$

e svolgendo i quadrati e semplificando:

$$\delta E_t = EA \int_0^L u_3' \delta u_3' dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 + \frac{EA}{2} \int_0^L \delta u_3'^2 dx_3 \quad (13.9)$$

Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale impone l'annullarsi della parte lineare della variazione, e quindi dovrà essere:

$$\delta_1 E_t = EA \int_0^L u_3' \delta u_3' dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 = 0 \quad (13.10)$$

Integrando per parti il primo integrale si può scrivere:

$$[EA u_3' \delta u_3]_0^L - EA \int_0^L u_3'' \delta u_3 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 = 0 \quad (13.11)$$

Dovranno separatamente annullarsi l'integrale ed i termini finiti: per l'arbitrarietà di  $\delta u_3$  si ritrova quindi la (13.5), mentre in ciascuno degli estremi potrà essere nullo lo spostamento oppure lo sforzo normale.

## 13.2 Asta bloccata–libera

Si consideri l'asta di Figura 13.1, bloccata a sinistra e libera a destra, di rigidezza  $EA$  costante, e soggetta al carico assiale distribuito con legge lineare tra il valore  $t_0$  a sinistra, ed il valore nullo a destra. Si calcoli lo spostamento e lo sforzo normale.

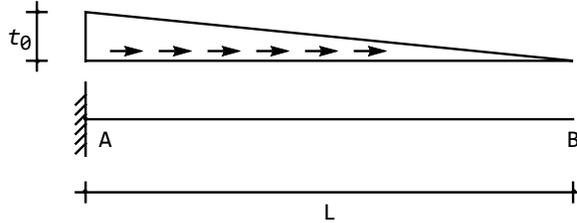


Figura 13.1: Un'asta soggetta a carico assiale linearmente distribuito

### Prima soluzione

La struttura è isostatica, in quanto esiste una sola incognita reattiva, la reazione orizzontale dell'estremo  $A$ , ed una sola equazione di equilibrio significativa, l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale. Ciò significa che è possibile dedurre lo sforzo normale con considerazioni di equilibrio, e poi calcolare gli spostamenti. Poiché il carico è distribuito con legge lineare, lo sforzo normale sarà una funzione quadratica:

$$N(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 \quad (13.12)$$

D'altro canto, si possono scrivere le tre condizioni:

$$\begin{aligned} N(x_3 = 0) &= -R_{Ah} = \frac{1}{2} t_0 L \\ N(x_3 = L) &= 0 \\ \frac{dN}{dx_3}(x_3 = L) &= 0 \end{aligned} \quad (13.13)$$

che permettono la determinazione delle tre costanti  $a_i$ . La prima condizione deriva dall'equilibrio del concio in  $A$ , la seconda dall'equilibrio del concio in  $B$ , la terza deriva dall'annullarsi del carico in  $B$ . Si ha quindi:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} t_0 L \\ a_0 + a_1 L + a_2 L^2 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 L &= 0 \end{aligned} \quad (13.14)$$

e lo sforzo normale è fornito da:

$$N(x_3) = \frac{1}{2}t_0L - t_0x_3 + \frac{t_0}{2L}x_3^2 = \frac{t_0}{2L}(L - x_3)^2 \quad (13.15)$$

Lo spostamento si ottiene per integrazione, a partire dalla (13.3):

$$u_3(x_3) = \int \frac{N}{EA} dx_3 = \frac{t_0}{EA} \left( \frac{L}{2}x_3 - \frac{x_3^2}{2} + \frac{x_3^3}{6L} \right) + a_3 \quad (13.16)$$

e la costante di integrazione  $a_3$  svanisce, imponendo l'equazione di congruenza in  $A$ :

$$u_3(x_3 = 0) = 0 \quad (13.17)$$

In definitiva, quindi, lo spostamento assiale è esprimibile come:

$$u_3(x_3) = \frac{t_0}{6EA} \frac{x_3}{L} (3L^2 - 3Lx_3 + x_3^2) \quad (13.18)$$

## Seconda soluzione

Il carico si esprime analiticamente come:

$$t(x_3) = t_0 \left( 1 - \frac{x_3}{L} \right) \quad (13.19)$$

e quindi l'equazione differenziale (13.5) si scrive:

$$u_3'' = -\frac{t_0}{EA} \left( 1 - \frac{x_3}{L} \right) \quad (13.20)$$

ed integrando due volte:

$$u_3 = -\frac{t_0}{EA} \left( \frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6L} \right) + c_0x_3 + c_1 \quad (13.21)$$

Le due costanti di integrazione si determinano a partire dalle due condizioni ai limiti negli estremi  $A$  e  $B$ . In  $A$ , per la congruenza dovrà essere:

$$u_3(x_3 = 0) = 0 \quad (13.22)$$

mentre in  $B$ , per l'equilibrio del concio, dovrà essere nullo lo sforzo normale, ossia la derivata prima dello spostamento:

$$u_3'(x_3 = L) = 0 \quad (13.23)$$

Utilizzando la (13.21), quindi, si hanno le due equazioni:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ -\frac{t_0L}{2EA} + c_0L + c_1 &= 0 \end{aligned} \quad (13.24)$$

da cui subito:

$$u_3(x_3) = \frac{t_0}{6EA} \frac{x_3}{L} (3L^2 - 3Lx_3 + x_3^2) \quad (13.25)$$

coincidente con la (13.18). Da questa si può dedurre lo sforzo normale:

$$N(x_3) = EAu_3' = \frac{t_0}{6} \left( 3L - 6x_3 + 3\frac{x_3^2}{L} \right) = \frac{t_0(L - x_3)^2}{2L} \quad (13.26)$$

coincidente con la (13.15).

### Il tracciamento dei diagrammi

Il diagramma dello sforzo normale, come già detto, ha un andamento quadratico, parte nell'estremo di sinistra con un valore pari alla reazione orizzontale (cambiata di segno), e decresce monotonicamente fino ad annullarsi nell'estremo di destra. Inoltre in questo punto il diagramma avrà tangente orizzontale, in quanto ivi si annulla il carico distribuito. Si ha quindi il diagramma di Figura 13.2.

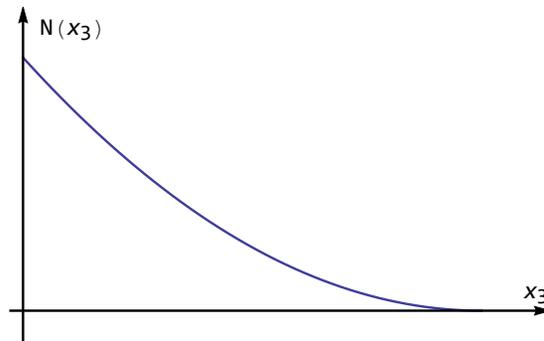


Figura 13.2: Lo sforzo normale nell'asta di Figura 13.1

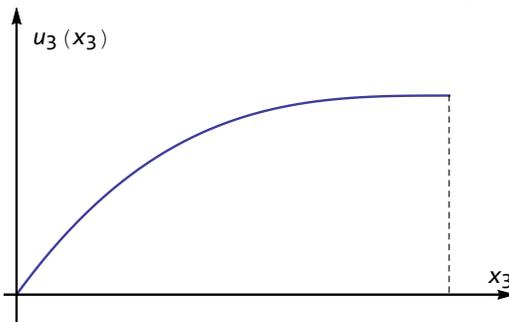


Figura 13.3: Gli spostamenti assiali per l'asta di Figura 13.1

Gli spostamenti orizzontali, invece, varieranno con legge cubica, dovranno annullarsi a sinistra, crescere monotonicamente (in quanto lo sforzo normale è

ovunque positivo) e giungere al valore massimo in corrispondenza dell'estremo libero di destra, con tangenza orizzontale (in quanto lo sforzo normale si annulla in  $B$ ). Si ha così il diagramma di Figura 13.3.

### I valori notevoli

Uno sguardo ai diagrammi permette di identificare due valori notevoli, corrispondenti ai valori massimi dello sforzo normale e dello spostamento assiale:

$$\begin{aligned} N_{max} &= N(x_3 = 0) = \frac{t_0 L}{2} \\ u_{3max} &= u_3(x_3 = L) = \frac{t_0 L^2}{6EA} \end{aligned} \quad (13.27)$$

## 13.3 I vincoli elasticamente cedevoli

Si consideri l'asta di Figura 13.4, di rigidezza assiale costante, soggetta ad un carico uniformemente distribuito lungo tutta la luce, con un vincolo fisso a sinistra ed un vincolo elasticamente cedevole a destra. Se  $k_B$  è la rigidezza assiale del vincolo, si potrà ipotizzare una relazione lineare tra la reazione del vincolo ed il corrispondente spostamento:

$$R_B = -k_B u_{3B} \quad (13.28)$$

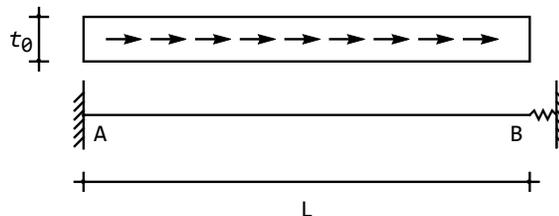


Figura 13.4: Una trave a vincoli elasticamente cedevoli

Nel vincolo risiede quindi l'energia elastica fornita da:

$$L_B = \frac{1}{2} k_B u_{3B}^2 \quad (13.29)$$

La condizione ai limiti da imporre in  $B$  può dedursi in via energetica o in via diretta:

### L'approccio energetico

L'energia potenziale connessa ad una trave di luce  $L$ , soggetta al carico assiale  $t(x_3)$ , può scriversi come:

$$E_t = \frac{EA}{2} \int_0^L u_3'^2 dx_3 - \int_0^L t u_3 dx_3 + \frac{1}{2} k_B u_3^2(L) = E_t(u_3, u_3') \quad (13.30)$$

ipotizzando anche in questo caso che la rigidezza assiale  $EA$  sia costante. La variazione  $\delta E_t$  si calcola come:

$$\begin{aligned} \delta E_t &= E_t(u_3 + \delta u_3, u_3' + \delta u_3') - E_t(u_3, u_3') = \\ &= \frac{EA}{2} \int_0^L (u_3' + \delta u_3')^2 dx_3 - \int_0^L t(u_3 + \delta u_3) dx_3 + \frac{1}{2} k_B (u_3(L) + \delta u_3(L))^2 - \\ &= \frac{EA}{2} \int_0^L u_3'^2 dx_3 + \int_0^L t u_3 dx_3 - \frac{1}{2} k_B u_3^2(L) \end{aligned} \quad (13.31)$$

e svolgendo i quadrati e semplificando:

$$\begin{aligned} \delta E_t &= EA \int_0^L u_3' \delta u_3' dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 + \frac{EA}{2} \int_0^L \delta u_3'^2 dx_3 + \\ &= k_B (u_3(L) \delta u_3(L)) + \frac{1}{2} k_B \delta u_3^2(L) \end{aligned} \quad (13.32)$$

Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale impone l'annullarsi della parte lineare della variazione, e quindi dovrà essere:

$$\delta_1 E_t = EA \int_0^L u_3' \delta u_3' dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 + k_B (u_3(L) \delta u_3(L)) = 0 \quad (13.33)$$

Integrando per parti il primo integrale si può scrivere:

$$[EA u_3' \delta u_3]_0^L - EA \int_0^L u_3'' \delta u_3 dx_3 - \int_0^L t \delta u_3 dx_3 + k_B (u_3(L) \delta u_3(L)) = 0 \quad (13.34)$$

Dovranno separatamente annullarsi l'integrale ed i termini finiti; per l'arbitrarietà di  $\delta u_3$  si ritrova quindi la (13.5):

$$EA u_3'' + t = 0 \quad (13.35)$$

mentre in ciascuno degli estremi dovrà essere:

$$\begin{aligned} EA u_3'(0) \delta u_3(0) &= 0 \\ [EA u_3'(L) + k_B u_3(L)] \delta u_3(L) &= 0 \end{aligned} \quad (13.36)$$

In  $A$  la presenza dell'incastro impone la condizione di congruenza sugli spostamenti nulli, mentre in  $B$  gli spostamenti non sono vietati, e di conseguenza bisognerà imporre la condizione (di equilibrio):

$$EA u_3'(L) + k_B u_3(L) = 0 \quad (13.37)$$

### L'approccio geometrico

L'equilibrio del concio in  $B$  impone che sia, come si evince dalla Figura 13.5:

$$-N(L) + R_B = 0 \quad (13.38)$$

e poichè:

$$\begin{aligned} N(L) &= EAu'_3(L) \\ R_B &= -k_B u_3(L) \end{aligned} \quad (13.39)$$

si giunge a scrivere:

$$EAu'_3(L) + k_B u_3(L) = 0 \quad (13.40)$$

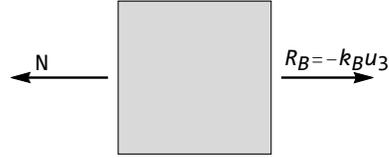


Figura 13.5: L'equilibrio del concio

### La deduzione di sforzo normale e spostamenti

In presenza di carico costante, gli spostamenti saranno esprimibili come:

$$u_3(x_3) = -\frac{t_0}{2EA} x_3^2 + c_0 + c_1 x_3 \quad (13.41)$$

e le due condizioni ai limiti, che permettono il calcolo di  $c_0$  e  $c_1$  saranno date da:

$$u_3(0) = 0 \longrightarrow c_0 = 0$$

$$EAu'_3(L) + k_B u_3(L) = 0 \longrightarrow -t_0 L + c_1 EA L - k_B \frac{t_0}{2EA} L^2 + k_B c_1 L = 0 \quad (13.42)$$

e quindi:

$$c_1 = \frac{t_0 L}{EA + k_B L} \left( 1 + \frac{k_B L}{2EA} \right) \quad (13.43)$$

In definitiva, gli spostamenti sono espressi da:

$$u_3(x_3) = -\frac{t_0}{2EA} x_3^2 + \frac{t_0 L}{EA + k_B L} \left( 1 + \frac{k_B L}{2EA} \right) x_3 \quad (13.44)$$

e gli sforzi normali da:

$$N = EAu'_3(x_3) = \frac{t_0 (k_B L (L - 2x_3) + 2EA (L - x_3))}{2(EA + k_B L)} \quad (13.45)$$

### I due casi limite

Al variare del valore della rigidità, l'estremo destro passa dall'essere libero (per  $k_B = 0$ ) all'essere bloccato (per  $k_B = \infty$ ). Ambedue questi casi limite di vincolo perfetto possono ritrovarsi con facilità:

$$\begin{aligned} \lim_{k_B \rightarrow 0} \left( -\frac{t_0}{2EA} x_3^2 + \frac{t_0 L}{EA + k_B L} \left( 1 + \frac{k_B L}{2EA} \right) x_3 \right) &= \frac{t_0 (2L - x_3) x_3}{2EA} \\ \lim_{k_B \rightarrow \infty} \left( -\frac{t_0}{2EA} x_3^2 + \frac{t_0 L}{EA + k_B L} \left( 1 + \frac{k_B L}{2EA} \right) x_3 \right) &= \frac{t_0 (L - x_3) x_3}{2EA} \end{aligned} \quad (13.46)$$

### 13.4 Un'asta indentata

L'asta di Figura 13.6 presenta due luci laterali, di rigidezza assiale  $2EA$ , ed un tratto centrale di rigidezza assiale  $EA$ . Gli estremi sono fissi, la parte centrale è soggetta ad una stesa di carico costante di intensità  $t$ , mentre nel punto di collegamento tra la luce centrale e la luce di destra agisce una forza assiale concentrata  $F$  di intensità  $tL$ . Si calcolino gli spostamenti assiali e gli sforzi normali.

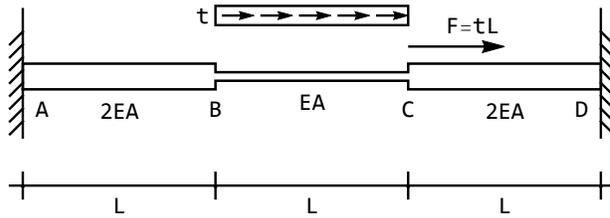


Figura 13.6: Un'asta a sezione variabile con discontinuità

La trave è iperstatica, e l'approccio migliore sembra la scrittura diretta dell'equazione differenziale della linea elastica. Si hanno quindi le tre equazioni:

$$\begin{aligned} u_3'' &= 0 \\ v_3'' &= -\frac{t}{EA} \\ w_3'' &= 0 \end{aligned} \quad (13.47)$$

valide rispettivamente da  $A$  a  $B$ , da  $B$  a  $C$ , e da  $C$  a  $D$ . Le soluzioni sono quindi:

$$\begin{aligned} u_3 &= a_0 + a_1 x_3 \\ v_3 &= b_0 + b_1 x_3 - \frac{t}{2EA} x_3^2 \\ w_3 &= c_0 + c_1 x_3 \end{aligned} \quad (13.48)$$

Le sei costanti di integrazione si determinano imponendo la congruenza degli spostamenti agli estremi e nei punti  $B$  e  $C$ , e l'equilibrio dei concetti  $B$  e  $C$ . Si ha quindi:

$$\begin{aligned} u_3(0) &= 0 \\ u_3(L) &= v_3(0) \\ 2EAu_3'(L) &= EA \\ v_3'(0)v_3(L) &= w_3(0) \\ EA v_3'(L) &= 2EA w_3'(0) + F \\ w_3(L) &= 0 \end{aligned} \quad (13.49)$$

da cui il sistema algebrico lineare:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 \\
 a_0 + a_1 L &= b_0 \\
 2a_1 &= b_1 \\
 b_0 + b_1 L - \frac{t}{2EA} L^2 &= c_0 \\
 b_1 - \frac{t}{EA} L &= 2c_1 + \frac{F}{EA} \longrightarrow b_1 = 2c_1 + \frac{2tL}{EA} \\
 c_0 + c_1 L &= 0
 \end{aligned} \tag{13.50}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{3}{8} \frac{tL}{EA} \\
 b_0 &= \frac{3}{8} \frac{tL^2}{EA} \\
 b_1 &= \frac{3}{4} \frac{tL}{EA} \\
 c_0 &= \frac{5}{8} \frac{tL^2}{EA} \\
 c_1 &= -\frac{5}{8} \frac{tL}{EA}
 \end{aligned} \tag{13.51}$$

Gli spostamenti sono perciò esplicitabili come:

$$\begin{aligned}
 u_3 &= \frac{3}{8} \frac{tL}{EA} x_3 \\
 v_3 &= \frac{3}{8} \frac{tL^2}{EA} + \frac{3}{4} \frac{tL}{EA} x_3 - \frac{t}{2EA} x_3^2 \\
 w_3 &= \frac{5}{8} \frac{tL^2}{EA} - \frac{5}{8} \frac{tL}{EA} x_3
 \end{aligned} \tag{13.52}$$

mentre lo sforzo normale è dato da:

$$\begin{aligned}
 N_1(x_3) &= 2EAu'_3 = \frac{3}{4} tL \\
 N_2(x_3) &= EAv'_3 = \frac{3}{4} tL - tx_3 \\
 N_3(x_3) &= 2EAw'_3 = -\frac{5}{4} tL
 \end{aligned} \tag{13.53}$$

rispettivamente, nei tre tratti  $AB$ ,  $BC$  e  $BD$ .

## Il calcolo delle reazioni

Le due reazioni in  $A$  e  $D$  sono fornite, rispettivamente, da:

$$\begin{aligned}
 R_{Ah} &= -N_1(0) = -\frac{3}{4} tL \\
 R_{Dh} &= N_3(L) = -\frac{5}{4} tL
 \end{aligned} \tag{13.54}$$

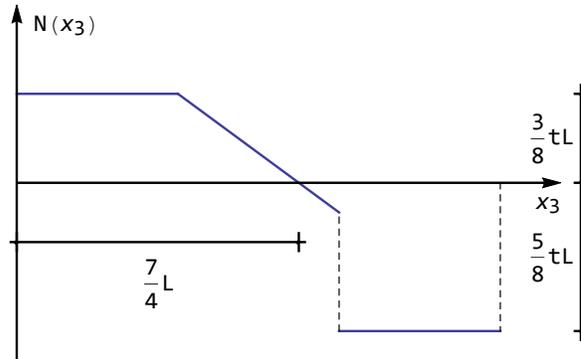


Figura 13.7: Il diagramma dello sforzo normale per la trave di Figura 13.6

Si noti che l'equilibrio alla traslazione orizzontale è verificato:

$$R_{Ah} + R_{Dh} + tL + F = 0 \quad (13.55)$$

### Il tracciamento dei diagrammi

Il diagramma dello sforzo normale non presenta alcuna difficoltà: da  $A$  a  $B$  la trave è tesa, con sforzo normale costante, da  $C$  a  $D$  la trave è compressa, con sforzo normale ancora costante; in  $C$  esiste una forza assiale concentrata  $F$ , e quindi un salto nel diagramma di valore pari a  $tL$ . Nel tratto centrale lo sforzo normale varia con legge lineare tra  $\frac{3}{4}tL$  a sinistra e  $-\frac{1}{4}tL$  a destra.

Ne segue, con una semplice proporzione geometrica, che lo sforzo normale si annulla a  $\frac{7}{4}L$ , giungendo al diagramma di Figura 13.7

Per tracciare il diagramma degli spostamenti assiali, si consideri che agli estremi lo spostamento dovrà essere nullo, dovrà variare con legge lineare nei due tratti laterali e con legge quadratica nel tratto centrale. Inoltre, in  $x_3 = \frac{7}{4}L$  lo spostamento sarà massimo, in corrispondenza del punto di nullo dello sforzo normale. Infine, gli spostamenti cresceranno fino a tal valore, nella regione dove la trave è tesa, per poi decrescere nella parte di destra, dove la trave è compressa. Si può quindi tracciare il diagramma di Figura 13.8

## 13.5 Il caso della sezione variabile

Se la rigidezza assiale dell'asta in esame non è costante, l'equazione differenziale che regge il problema è la (13.4), ossia è un'equazione del secondo ordine a coefficienti variabili. Come tale, non sempre è agevole, o anche possibile, ottenere una sua soluzione in termini di funzioni elementari; tuttavia, l'utilizzo dei software di integrazione simbolica facilita grandemente la ricerca dei possibili

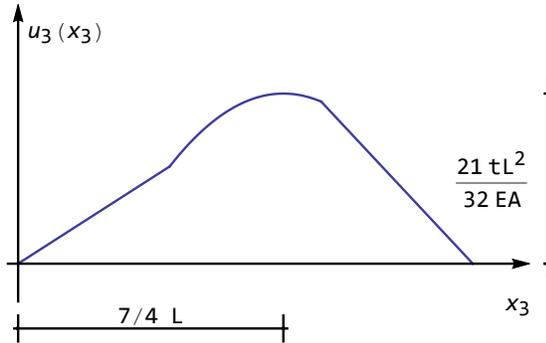


Figura 13.8: Il diagramma degli spostamenti assiali per la trave di Figura 13.6

integrali. In questo esempio si farà uso del software *Mathematica* per studiare la legge di variazione:

$$EA(x_3) = EA_0 \left(1 - \alpha \frac{x_3}{L}\right)^n \quad (13.56)$$

### Il caso $n=2$

L'equazione differenziale diviene:

$$EA_0 \left(1 - \alpha \frac{x_3}{L}\right)^2 u_3'' - \frac{2EA_0\alpha}{L} \left(1 - \alpha \frac{x_3}{L}\right) u_3' = -t \quad (13.57)$$

con soluzione:

$$u_3 = -\frac{tL^3}{EA_0\alpha^2(L - \alpha x_3)} - \frac{tL^2 \log(L - \alpha x_3)}{EA_0\alpha^2} + \frac{a_1}{\alpha(L - \alpha x_3)} + a_2 \quad (13.58)$$

### La trave iperstatica ad estremi fissi

Nel caso della trave ad estremi fissi, le due condizioni ai limiti impongono:

$$u_3(0) = 0 \rightarrow -\frac{tL^2}{EA_0\alpha^2} - \frac{tL^2 \log(L)}{EA_0\alpha^2} + \frac{a_1}{L\alpha} + a_2 = 0 \quad (13.59)$$

$$u_3(L) = 0 \rightarrow \frac{tL^3(1 - (\alpha - 1) \log(L - L\alpha)) - EA_0\alpha a_1 + LEA_0(\alpha - 1)\alpha^2 a_2}{LEA_0(\alpha - 1)\alpha^2} = 0 \quad (13.60)$$

con soluzione:

$$a_1 = \frac{tL^3}{\alpha^2 EA_0} (\alpha - (\alpha - 1) \log(1 - \alpha)) \quad (13.61)$$

$$a_2 = \frac{tL^2}{\alpha^3 EA_0} (-\log(1 - \alpha) + \alpha \log(L - L\alpha)) \quad (13.62)$$

Gli spostamenti sono quindi forniti da:

$$u_3(x_3) = \frac{tL^2}{\alpha^2 EA_0(L - \alpha x_3)} \left( (L - x_3\alpha) \log(L) + (x_3 - x_3\alpha) \log(1 - \alpha) + (-L + x_3\alpha) \log(L - x_3\alpha) \right) \quad (13.63)$$

e gli sforzi normali da:

$$N(x_3) = -tx_3 + \frac{tL}{\alpha^2} (\alpha - (\alpha - 1) \log(1 - \alpha)) \quad (13.64)$$

In Figura 13.9 ed in Figura 13.10 sono riportati gli spostamenti assiali e gli sforzi normali per cinque valori del coefficiente  $\alpha$ .

### La trave isostatica

Se l'estremo di destra è libero, la seconda condizione ai limiti deve modificarsi, perchè ora lo spostamento è ammesso, e di conseguenza deve annullarsi lo sforzo normale:

$$u_3'(L) = 0 \longrightarrow \frac{tL^3 + EA_0 a_1}{EA_0 L^2 (\alpha - 1)^2} = 0 \quad (13.65)$$

Le due costanti di integrazione sono ora:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{tL^3}{EA_0} \\ a_2 &= \frac{tL^2}{EA_0 \alpha^2} (1 - \alpha + \log(L)) \end{aligned} \quad (13.66)$$

Ne seguono gli spostamenti e gli sforzi assiali:

$$u_3(x_3) = \frac{pL^2}{EA_0} \frac{x_3(\alpha - 1)\alpha + (L - x_3\alpha) \log(L) + (-L + x_3\alpha) \log(L - x_3\alpha)}{\alpha^2 (L - x_3\alpha)} \quad (13.67)$$

$$N(x_3) = t(L - x_3) \quad (13.68)$$

Si noti subito come, in questo caso, lo sforzo normale non dipenda dalla variabilità della sezione. Il diagramma degli spostamenti è riportato in Figura 13.11 per cinque valori del coefficiente di rastremazione  $\alpha$ : si noti come la tangente in  $L$  sia comunque orizzontale.

### Esercizio n.1

Utilizzare un programma di calcolo simbolico per ottenere gli spostamenti e gli sforzi assiali di una trave ad estremi fissi, a sezione variabile secondo la (13.56), per  $n = \sqrt{2}$ ,  $n = 1$ ,  $n = 3$  ed  $n = 4$ .

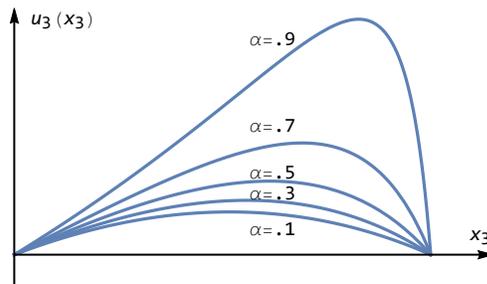


Figura 13.9: Spostamenti assiali per trave ad estremi fissi e sezione variabile secondo la (13.56) con  $n = 2$

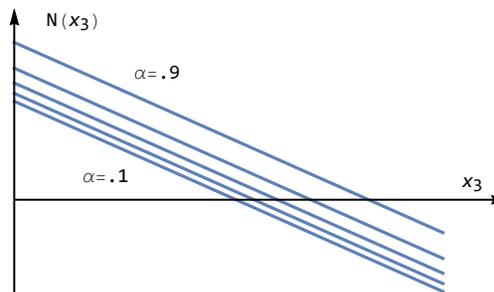


Figura 13.10: Sforzi normali per trave ad estremi fissi e sezione variabile secondo la (13.56) con  $n = 2$

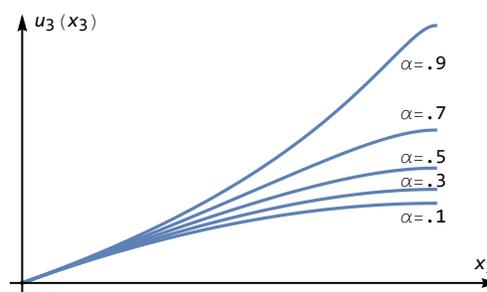


Figura 13.11: Spostamenti assiali e sforzi normali per trave ad estremi fissi e libera a sezione variabile secondo la (13.56) con  $n = 2$

## Capitolo 14

# Le travi soggette a momento flettente e taglio

In questo Capitolo si illustra un metodo di calcolo onnicomprensivo, in grado di fornire abbassamenti, rotazioni, momenti e tagli per una qualsiasi trave ad asse rettilineo soggetta a momento flettente e taglio. Tale metodo sfrutta contemporaneamente le equazioni di equilibrio, di congruenza e costitutive, giungendo ad una equazione differenziale del quarto ordine, concettualmente analoga alle equazioni dell'equilibrio elastico. Dopo aver dedotto l'equazione nel caso più semplice, ossia per una trave a sezione costante soggetta a solo carico trasversale, si risolve l'equazione e si illustra in dettaglio un caso semplice di trave ad una sola campata soggetta a vincoli perfetti.

La metodologia illustrata viene poi generalizzata per tener conto della presenza di vincoli intermedi, forze e coppie concentrate, distorsioni concentrate di tipo tagliante e di tipo flessionale, offrendo una panoramica completa delle possibili condizioni ai limiti.

Si considerano poi due condizioni di carico particolari, ossia le coppie distribuite e le distorsioni di tipo flessionale  $\mu$  (variazioni termiche alla Navier). In ambedue i casi, l'equazione differenziale della linea elastica deve essere opportunamente modificata, nel caso perchè l'equazione di equilibrio alla rotazione deve portare in conto la presenza delle coppie, nel secondo caso perchè la relazione momenti-curvature deve tener conto della curvatura aggiuntiva fornita dalla distorsione flessionale.

Infine, si descrivono alcuni casi di travi a sezione variabile in cui la soluzione è ottenibile in forma chiusa.

### 14.1 Relazioni fondamentali

Si consideri una trave rettilinea soggetta ai carichi trasversali  $p(x_3)$ . Per essa, si hanno le seguenti equazioni:

- Equazioni di equilibrio:

$$\frac{dT}{dx_3} = -p \quad (14.1)$$

$$\frac{dM}{dx_3} = T \quad (14.2)$$

- Equazioni di congruenza:

$$\phi = -\frac{du_3}{dx_3} \quad (14.3)$$

- Equazioni costitutive (legge di Hooke):

$$M = EI \frac{\phi}{dx_3} \quad (14.4)$$

Inserendo la (14.3) nella (14.4) si giunge alla legge che collega il momento alla derivata seconda dell'abbassamento:

$$M = -EIu_2'' \quad (14.5)$$

dove l'apice indica derivazione rispetto ad  $x_3$ . Inoltre, derivando la seconda delle (14.2), inserendola nella prima, ed utilizzando la (14.5), si giunge all'equazione differenziale del quarto ordine, che regge il problema della trave in presenza di carichi trasversali:

$$(EIu_2'')'' = p \quad (14.6)$$

Se la rigidezza flessionale  $EI$  è costante, la (14.6) si riduce a:

$$EIu_2'''' = p \quad (14.7)$$

con soluzione:

$$u_2 = C_0 + C_1x_3 + C_2x_3^2 + C_3x_3^3 + I_p \quad (14.8)$$

e l'integrale particolare  $I_p$  dipende dal carico  $p(x_3)$  applicato. Le quattro costanti di integrazione  $C_i$  si ottengono imponendo le condizioni ai limiti agli estremi. In ciascun estremo, infatti, si può imporre:

- che l'abbassamento e la rotazione siano nulli (incastro). In tal caso sia momento che taglio potranno essere presenti
- che l'abbassamento sia nullo e la rotazione sia permessa (appoggio). In tal caso il momento sarà nullo
- che l'abbassamento sia permesso e la rotazione sia nulla (bipendolo). In tal caso il taglio sarà nullo
- che l'abbassamento e la rotazione siano permessi (estremo libero). In tal caso il momento ed il taglio saranno nulli

## 14.2 L'approccio energetico

L'energia potenziale connessa ad una trave di luce  $L$ , soggetta al carico assiale  $p(x_3)$ , può scriversi come:

$$E_t = \frac{EI}{2} \int_0^L u_2''^2 dx_3 - \int_0^L p u_2 dx_3 = E_t(u_2, u_2'') \quad (14.9)$$

Si noti che per semplicità si è già ipotizzato che la rigidezza flessionale  $EI$  sia costante. La variazione  $\delta E_t$  si calcola come:

$$\begin{aligned} \delta E_t &= E_t(u_2 + \delta u_2, u_2'' + \delta u_2'') - E_t(u_2, u_2'') = \frac{EI}{2} \int_0^L (u_2'' + \delta u_2'')^2 dx_3 - \\ &\int_0^L p(u_2 + \delta u_2) dx_3 - \frac{EI}{2} \int_0^L u_2''^2 dx_3 + \int_0^L p u_2 dx_3 \end{aligned} \quad (14.10)$$

e svolgendo i quadrati e semplificando:

$$\delta E_t = EI \int_0^L u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 + \frac{EI}{2} \int_0^L \delta u_2''^2 dx_3 \quad (14.11)$$

Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale impone l'annullarsi della parte lineare della variazione, e quindi dovrà essere:

$$\delta_1 E_t = EI \int_0^L u_2'' \delta u_2'' dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 = 0 \quad (14.12)$$

Integrando due volte per parti il primo integrale si può scrivere:

$$[EI u_2'' \delta u_2']_0^L - [EI u_2''' \delta u_2]_0^L + EI \int_0^L u_2'''' \delta u_2 dx_3 - \int_0^L p \delta u_2 dx_3 = 0 \quad (14.13)$$

Dovranno separatamente annullarsi l'integrale ed i termini finiti; per l'arbitrarietà di  $\delta u_2$  si ritrova quindi la (14.7), mentre in ciascuno degli estremi potrà essere nullo lo spostamento  $u_2$  oppure lo sforzo di taglio  $-EI u_2'''$ , ed analogamente potrà annullarsi la rotazione, oppure il momento flettente  $-EI u_2''$ .

## 14.3 Le travi ad una campata

Si intenderà per “trave ad una campata” una qualsiasi trave per cui sia possibile applicare la metodologia illustrata, ossia — in realtà — una qualsiasi trave i cui spostamenti siano funzioni continue e derivabili con continuità almeno fino alla derivata quarta. Rientrano quindi in questa categoria le travi soggette a carico distribuito lungo tutta la luce, ma non quelle caricate parzialmente (discontinuità nella derivata quarta), quelle a sezione costante, ma non quelle a sezione variabile con discontinuità, quelle caricate con carichi e coppie concentrate negli estremi, ma non in una ascissa intermedia (discontinuità nella

derivata seconda o terza). Sono inoltre escluse le travi con vincoli intermedi, sia esterni (discontinuità nelle derivate seconde o terze) che interni (discontinuità nell'abbassamento o nella sua derivata prima), e le travi soggette a distorsioni concentrate ad ascisse intermedie (discontinuità nell'abbassamento o nella sua derivata prima).

Un catalogo esteso di travi ad una sola campata è fornito in due Capitoli di teoria, dedicate rispettivamente al carico uniformemente distribuito ed ai possibili carichi concentrati negli estremi, sicchè sull'argomento resta poco da aggiungere. Tuttavia, si consideri l'ulteriore esempio di Figura 14.1, in cui una trave doppiamente incastrata è soggetta ad un carico parabolico di valore  $p_0$  agli estremi, e nullo in mezzeria.

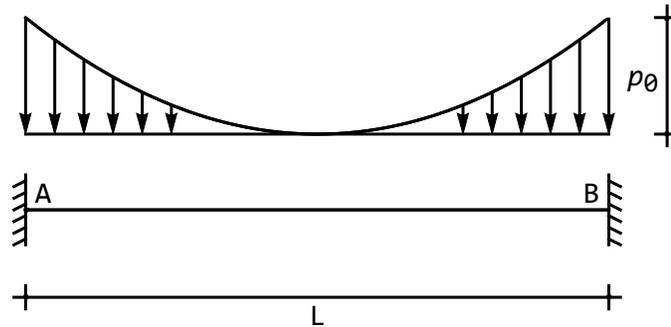


Figura 14.1: Una trave doppiamente incastrata soggetta a carico parabolico

Per ottenere l'integrale particolare occorre quindi identificare la legge analitica di variazione del carico. Assumendo una legge di variazione parabolica si ha:

$$p(x_3) = a + bx_3 + cx_3^2 \quad (14.14)$$

ed imponendo il rispetto dei tre valori agli estremi ed in mezzeria si ha:

$$\begin{aligned} p(x_3 = 0) &= a = p_0 \\ p\left(x_3 = \frac{L}{2}\right) &= a + b\frac{L}{2} + c\frac{L^2}{4} = 0 \\ p(x_3 = L) &= a + bL + cL^2 = p_0 \end{aligned} \quad (14.15)$$

Risolvendo il sistema di tre equazioni si ottiene infine:

$$p(x_3) = p_0 \left(1 - 4\frac{x_3}{L} + 4\frac{x_3^2}{L^2}\right) \quad (14.16)$$

e quindi la (14.7) si scrive:

$$EIu_2'''' p_0 \left(1 - 4\frac{x_3}{L} + 4\frac{x_3^2}{L^2}\right) \quad (14.17)$$

con soluzione ottenibile attraverso integrazioni successive:

$$u_2 = C_0 + C_1 x_3 + C_2 x_3^2 + C_3 x_3^3 + \frac{p_0}{EI} \left( \frac{x_3^4}{24} - \frac{1}{30} \frac{x_3^5}{L} + \frac{1}{90} \frac{x_3^6}{L^2} \right) \quad (14.18)$$

Le costanti di integrazione si ottengono imponendo le quattro condizioni ai limiti, in cui gli incastrati in  $A$  e  $B$  vietano sia gli abbassamenti che le rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 0) &= C_0 = 0 \\ u_2'(x_3 = 0) &= C_1 = 0 \\ u_2(x_3 = L) &= C_0 + C_1 L + C_2 L^2 + C_3 L^3 + \frac{7}{360} \frac{p_0 L^4}{EI} = 0 \\ u_2'(x_3 = L) &= C_1 + 2C_2 L + 3C_3 L^2 + \frac{p_0 L^3}{15EI} = 0 \end{aligned} \quad (14.19)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} C_0 &= C_1 = 0 \\ C_2 &= \frac{p_0 L^2}{120EI} \\ C_3 &= -\frac{p_0 L}{36EI} \end{aligned} \quad (14.20)$$

Gli spostamenti sono quindi forniti dal polinomio di ordine sei:

$$u_2(x_3) = \frac{p_0}{EI} \left( \frac{L^2 x_3^2}{120} - \frac{L x_3^3}{36} + \frac{x_3^4}{24} - \frac{x_3^5}{30L} + \frac{x_3^6}{90L^2} \right) \quad (14.21)$$

e per successive derivazioni si ottengono infine le rotazioni, i momenti ed i tagli:

$$\phi(x_3) = \frac{p_0}{EI} \left( -\frac{L^2 x_3}{60} + \frac{L x_3^2}{12} - \frac{x_3^3}{6} + \frac{x_3^4}{6L} - \frac{x_3^5}{15L^2} \right) \quad (14.22)$$

$$M(x_3) = p_0 \left( -\frac{L^2}{60} + \frac{L x_3}{6} - \frac{x_3^2}{2} + \frac{2x_3^3}{3L} - \frac{x_3^4}{3L^2} \right) \quad (14.23)$$

$$T(x_3) = p_0 \left( \frac{L}{6} - x_3 + \frac{2x_3^2}{L} - \frac{4x_3^3}{3L^2} \right) \quad (14.24)$$

Il diagramma del taglio si presenta come in Figura 14.2: funzione cubica, andamento decrescente, tangenza orizzontale in mezzeria, laddove il carico si annulla, funzione antisimmetrica rispetto alla mezzeria, in quanto la struttura è simmetrica e simmetricamente caricata rispetto alla stessa mezzeria (vedi la lezione sulle proprietà di simmetria ed antisimmetria).

Il diagramma del momento è riportato in Figura 14.3: è una funzione quartica, simmetrica rispetto alla mezzeria, con valore massimo sulla mezzeria stessa, laddove il taglio si annulla. Inoltre, l'andamento crescente nella prima semiluce, laddove il taglio è positivo, decrescente nella seconda semiluce, dove il taglio diviene negativo.

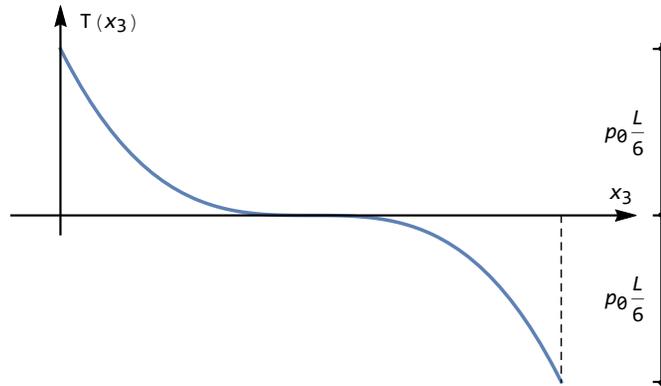


Figura 14.2: Il diagramma del taglio per la trave di Figura 14.1

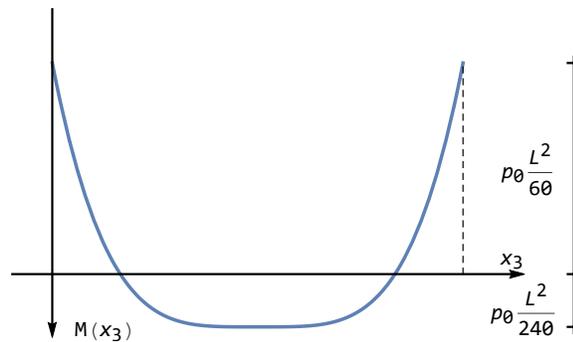


Figura 14.3: Il diagramma del momento per la trave di Figura 14.1

Come illustrato in Figura 14.4, le rotazioni dovranno annullarsi agli estremi, dove vi sono gli incastri, ed in mezzeria, per ragioni di simmetria. Inoltre, laddove il momento è negativo le rotazioni decresceranno, mentre nella zona centrale, dove il momento è positivo, cresceranno. I valori minimi e massimi si raggiungono laddove i momenti si annullano.

Infine, gli abbassamenti si presentano come in Figura 14.5, con un aspetto molto simile al corrispondente diagramma per carico uniformemente distribuito.

## 14.4 Alcuni esempi per travi a due campate

Se, in una generica ascissa intermedia della trave, si verifica una discontinuità dello spostamento (dovuta ad una distorsione tagliante, oppure alla presenza di un bipendolo interno), della rotazione (dovuta ad una distorsione flessionale,

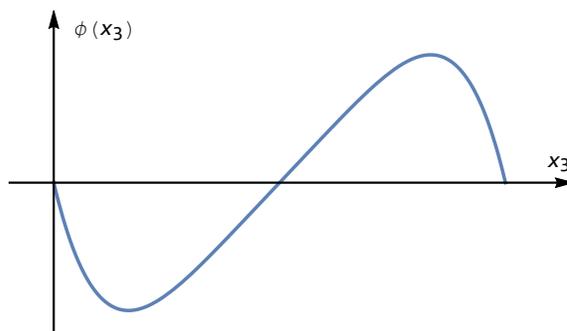


Figura 14.4: Il diagramma delle rotazioni per la trave di Figura 14.1

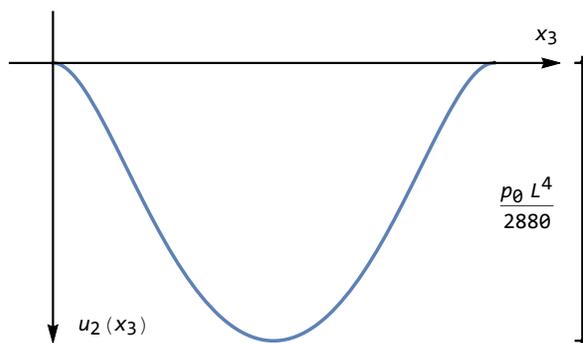


Figura 14.5: Il diagramma degli spostamenti per la trave di Figura 14.1

oppure ad una cerniera), del momento (dovuta ad una coppia applicata, oppure ad un bipendolo esterno) oppure del taglio (dovuto ad una forza applicata, oppure alla presenza di un appoggio), allora la metodologia fin qui illustrata deve essere opportunamente generalizzata.

Sia allora  $S$  la sezione generica in cui si verifica la discontinuità, e sia  $\zeta$  l'ascissa di  $S$ , sicchè la trave, di luce  $L$ , resta suddivisa in due tratti, di luce  $\zeta$  ed  $L - \zeta$ , rispettivamente. In ciascuno dei due tratti, quindi, la continuità dello spostamento e delle sue derivate successive è rispettata, e quindi in ciascuno dei due tratti può scriversi l'equazione differenziale del quarto ordine (14.7):

$$EIu_2'''' = p_1 \quad (14.25)$$

$$EIv_2'''' = p_2 \quad (14.26)$$

con soluzione:

$$u_2 = C_0 + C_1 x_3 + C_2 x_3^2 + C_3 x_3^3 + I_p \quad (14.27)$$

$$v_2 = C_4 + C_5 y_3 + C_6 y_3^2 + C_7 y_3^3 + J_p \quad (14.28)$$

Si sono indicati con  $u_2$  e  $v_2$  le funzioni spostamento nel primo e nel secondo tratto, rispettivamente. Inoltre, si sono considerati due sistemi di riferimento distinti, con origine nell'estremo di sinistra e nella sezione  $S$ , rispettivamente, e quindi si sono indicate con  $x_3$  ed  $y_3$  le rispettive variabili.

Le otto costanti di integrazione si determinano imponendo otto condizioni ai limiti, due in ciascuno estremo — esattamente come fatto in precedenza — e quattro nella sezione  $S$ . In  $S$  occorre imporre il rispetto della congruenza degli spostamenti e delle rotazioni, nonché l'equilibrio della sezione nei riguardi della traslazione verticale e della rotazione.

### 14.4.1 La trave soggetta a forza concentrata ad una ascissa arbitraria

Un semplice esempio è proposto in Figura 14.6, dove una trave incastrata–appoggiata è soggetta alla forza concentrata  $F$  nella sezione generica  $S$  a distanza  $\zeta$  dall'incastro di sinistra.

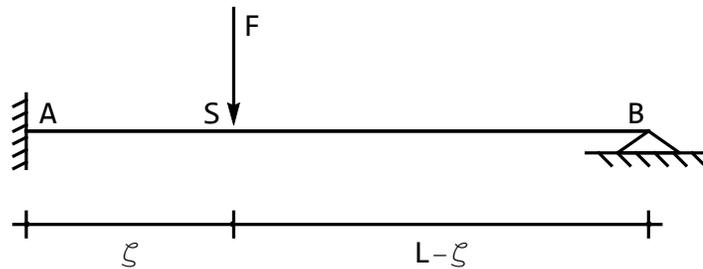


Figura 14.6: Una trave soggetta a forza concentrata in una generica ascissa intermedia

In questo caso i due integrali particolari sono nulli, per l'assenza di carico distribuito, e le condizioni ai limiti si scrivono:

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 0) &= 0 \\ u_2'(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \tag{14.29}$$

in corrispondenza dell'incastro in  $A$ ,

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = \zeta) &= v_2(y_3 = 0) \\ u_2'(x_3 = \zeta) &= v_2'(y_3 = 0) \\ u_2''(x_3 = \zeta) &= v_2''(y_3 = 0) \\ EIu_2'''(x_3 = \zeta) - EIV_2'''(y_3 = 0) + F &= 0 \end{aligned} \tag{14.30}$$

in corrispondenza della sezione  $S$  di applicazione della forza, ed infine:

$$\begin{aligned} v_2(y_3 = L - \zeta) &= 0 \\ v_2''(y_3 = L - \zeta) &= 0 \end{aligned} \tag{14.31}$$

in corrispondenza dell'appoggio in  $B$ .

**Esercizio** - Si esaminino le otto condizioni precedenti, per ognuna di esse si stabilisca se impongono il rispetto della congruenza, oppure se traducono condizioni di equilibrio. In quest'ultimo caso, si disegni il concio elementare con le forze su di esso agenti, e si traggano le rispettive equazioni

Le otto condizioni ai limiti danno luogo al sistema di otto equazioni lineari nelle otto costanti di integrazione:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 0 \\
 C_1 &= 0 \\
 C_0 + C_1\zeta + C_2\zeta^2 + C_3\zeta^3 &= C_4 \\
 C_1 + 2C_2\zeta + 3C_3\zeta^2 &= C_5 \\
 2C_2 + 6C_3\zeta &= 2C_6 \\
 6C_3 - 6C_7 + \frac{F}{EI} &= 0 \\
 C_4 + C_5(L - \zeta) + C_6(L - \zeta)^2 + C_7(L - \zeta)^3 &= 0 \\
 2C_6 + 6C_7(L - \zeta) &= 0
 \end{aligned} \tag{14.32}$$

Eliminando  $C_0$  e  $C_1$ , ed esprimendo le costanti di integrazione del secondo tratto in funzione delle due costanti  $C_2$  e  $C_3$  del primo tratto si giunge ad un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{aligned}
 C_2\zeta^2 + C_3\zeta^3 + (2C_2\zeta + 3C_3\zeta^2)(L - \zeta) + (C_2 + 3C_3\zeta)(L - \zeta)^2 + \\
 \left(C_3 + \frac{F}{6EI}\right)(L - \zeta)^3 = 0
 \end{aligned} \tag{14.33}$$

$$C_2 + 3C_3\zeta + 3\left(C_3 + \frac{F}{6EI}\right)(L - \zeta) = 0$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{F\zeta(2L^2 - 3L\zeta + \zeta^2)}{4EIL^2} \\
 C_3 &= -\frac{F(2L^3 - 3L\zeta^2 + \zeta^3)}{12EIL^3}
 \end{aligned} \tag{14.34}$$

In definitiva, gli abbassamenti si scrivono come:

$$u_2(x_3) = \frac{F\zeta(2L^2 - 3L\zeta + \zeta^2)}{4EIL^2}x_3^2 - \frac{F(2L^3 - 3L\zeta^2 + \zeta^3)}{12EIL^3}x_3^3 \tag{14.35}$$

$$\begin{aligned}
 v_2(y_3) &= \frac{F}{EI} \left( \frac{(L - \zeta)^2(4L - \zeta)\zeta^3}{12L^3} - \frac{\zeta^2(-2L^3 + 6L^2\zeta - 5L\zeta^2 + \zeta^3)}{4L^3} \right) y_3 - \\
 &\quad \left( \frac{(L - \zeta)(3L - \zeta)\zeta^2}{4L^3}y_3^2 + \frac{(3L - \zeta)\zeta^2}{12L^3}y_3^3 \right)
 \end{aligned} \tag{14.36}$$

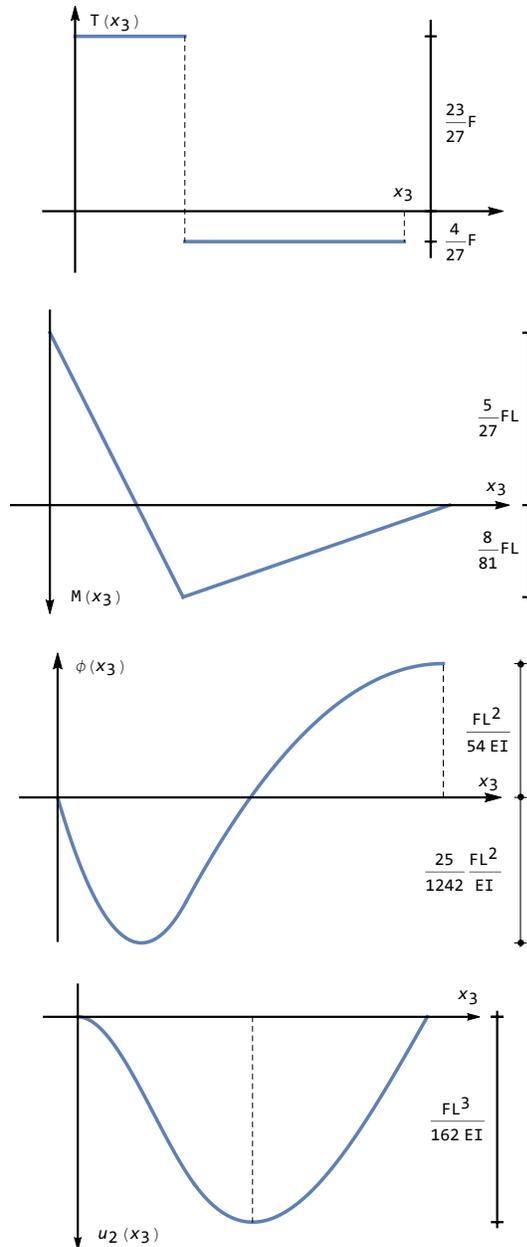


Figura 14.7: I diagrammi di taglio, momento, rotazioni e spostamenti per la trave soggetta a forza concentrata ad un terzo della luce

con rotazioni, momenti e tagli da calcolarsi tramite derivazione. In Figura 14.7 si riportano i grafici per il caso in cui la sezione  $S$  è posta ad un terzo della luce.

**Esercizio** — Si studino e si commentino i diagrammi. In particolare, si traggano i valori estremi di rotazioni ed abbassamenti, insieme alle ascisse dove essi vengono attinti.

### 14.4.2 La trave soggetta a distorsione flessionale

Si consideri ora la trave su tre appoggi di Figura 14.8, e si ipotizzi di assegnare una distorsione rotazionale  $D\phi$  alla sezione in cui è situato l'appoggio intermedio.

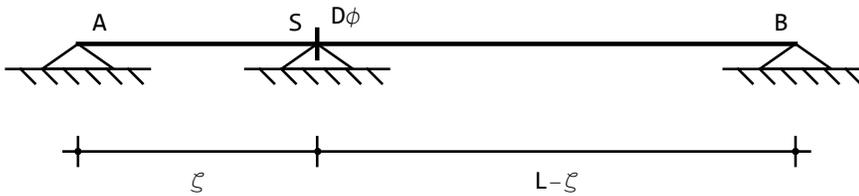


Figura 14.8: Una trave su tre appoggi soggetta ad una distorsione flessionale in corrispondenza dell'appoggio intermedio

In questo caso, per definizione di distorsione, bisognerà imporre che in  $S$  si abbia:

$$D\phi = -\Delta\phi = \phi_{sin} - \phi_{des} \quad (14.37)$$

e quindi le otto condizioni ai limiti si scriveranno ora:

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 0) &= 0 \\ u_2''(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (14.38)$$

in corrispondenza dell'appoggio in  $A$ ,

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = \zeta) &= 0 \\ v_2(y_3 = 0) &= 0 \\ v_2'(y_3 = 0) - u_2'(x_3 = \zeta) &= D\phi \\ u_2''(x_3 = \zeta) &= v_2''(y_3 = 0) \end{aligned} \quad (14.39)$$

in corrispondenza della sezione  $S$  di applicazione della distorsione, ed infine:

$$\begin{aligned} v_2(y_3 = L - \zeta) &= 0 \\ v_2''(y_3 = L - \zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (14.40)$$

nell'appoggio di destra. Si giunge facilmente al sistema:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 0 \\
 C_2 &= 0 \\
 C_0 + C_1\zeta + C_2\zeta^2 + C_3\zeta^3 &= 0 \\
 C_4 &= 0 \\
 C_5 - C_1 - 2C_2\zeta - 3C_3\zeta^2 &= D\phi \\
 2C_2 + 6C_3\zeta &= 2C_6 \\
 C_4 + C_5(L - \zeta) + C_6(L - \zeta)^2 + C_7(L - \zeta)^3 &= 0 \\
 2C_6 + 6C_7(L - \zeta) &= 0
 \end{aligned} \tag{14.41}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 0 \\
 C_1 &= \frac{\zeta}{2L}D\phi \\
 C_2 &= 0 \\
 C_3 &= -\frac{D\phi}{2L\zeta} \\
 C_4 &= 0 \\
 C_5 &= D\phi \left(1 - \frac{\zeta}{L}\right) \\
 C_6 &= -\frac{3}{2L}D\phi \\
 C_7 &= \frac{D\phi}{2L(L - \zeta)}
 \end{aligned} \tag{14.42}$$

Gli spostamenti sono allora forniti dalle due espressioni cubiche:

$$\begin{aligned}
 u_2(x_3) &= D\phi \left( \frac{\zeta}{2L}x_3 - \frac{1}{2L\zeta}x_3^3 \right) \\
 v_2(y_3) &= D\phi \left( \left(1 - \frac{\zeta}{L}\right)y_3 - \frac{3}{2L}y_3^2 + \frac{1}{2L^2 - 2L\zeta}y_3^3 \right)
 \end{aligned} \tag{14.43}$$

con rotazioni, momenti e tagli da calcolarsi tramite derivazione. Di seguito, in Figura 14.9, si riportano i grafici per il caso in cui la sezione  $S$  è posta in mezzeria.

## 14.5 Le travi a più campate

Se le discontinuità dello spostamento e/o delle sue derivate sono più d'una, la procedura appena descritta può essere facilmente generalizzata: in presenza di  $k$  discontinuità si devono utilizzare  $k + 1$  funzioni spostamento, ciascuna

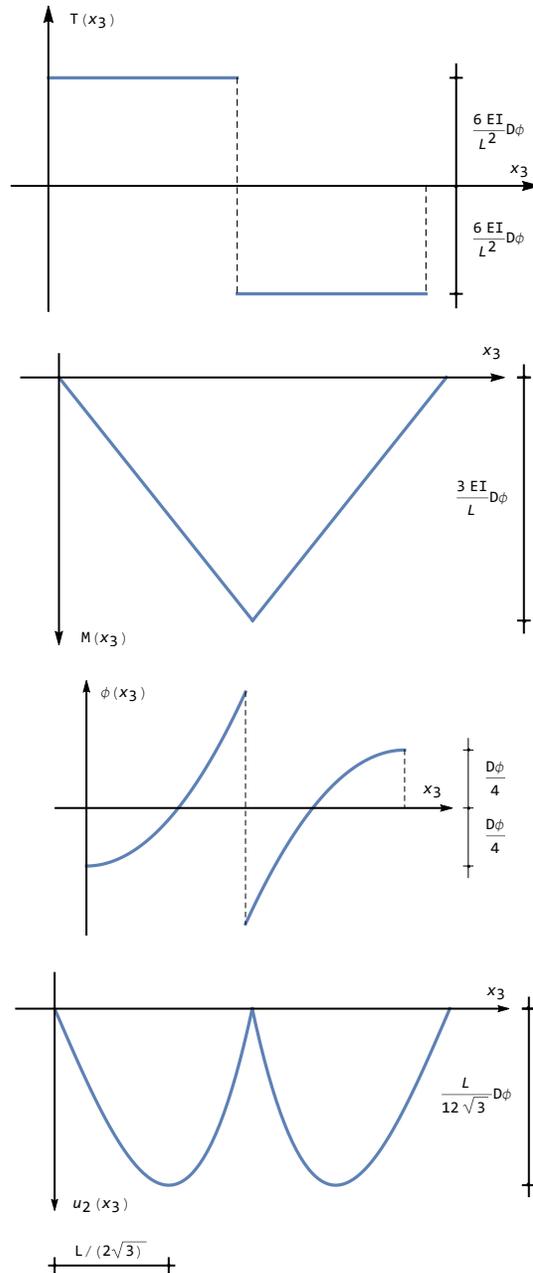


Figura 14.9: I diagrammi di taglio, momento, rotazioni e spostamenti per la trave soggetta a distorsione concentrata in mezzeria

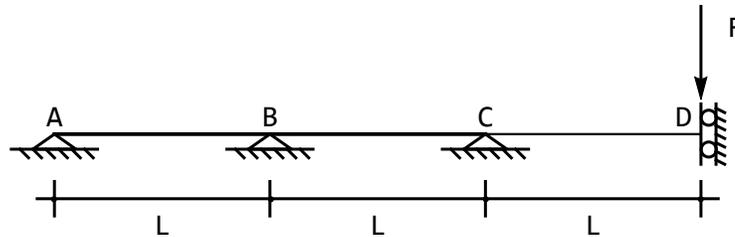


Figura 14.10: Una trave continua

esprimibile come la (14.7); occorre poi imporre  $4(k + 1)$  condizioni ai limiti, di congruenza e/o di equilibrio, in modo da determinare univocamente le costanti di integrazione.

L'unico limite all'utilizzo di questo metodo è il dover risolvere un sistema di equazioni lineari di dimensioni abbastanza ragguardevole, ma l'utilizzo di software di calcolo simbolico ha in pratica eliminato questo inconveniente.

### 14.5.1 Una trave continua

Si consideri la trave continua di Figura 14.10, suddivisa in tre campate di luce  $L$  mediante due appoggi intermedi. La rigidezza flessionale del terzo tratto  $CD$  è pari ad  $EI$ , la rigidezza flessionale dei primi due tratti è invece pari a  $2EI$ . La trave è caricata da una forza  $F$  in corrispondenza del bipendolo. Si calcolino tagli, momenti, rotazioni ed abbassamenti.

#### La deduzione della linea elastica

La trave è soggetta ad un carico concentrato, quindi gli spostamenti saranno esprimibili tramite polinomi cubici:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\ v_2(x_3) &= b_0 + b_1x_3 + b_2x_3^2 + b_3x_3^3 \\ w_2(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \end{aligned} \quad (14.44)$$

rispettivamente in  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$ . Si noti che per semplicità si è indicata la variabile indipendente con  $x_3$ , dando per inteso che i tre sistemi di riferimento hanno tre origini diverse, in  $A$ ,  $B$  e  $C$  rispettivamente.

Le dodici costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni di equilibrio e congruenza in corrispondenza dei vincoli:

- nell'appoggio in  $A$

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ M(0) &= 0 \end{aligned} \quad (14.45)$$

- in corrispondenza dell'appoggio intermedio in  $B$

$$\begin{aligned}
 u_{sin} &= 0 \\
 u_{des} &= 0 \\
 \phi_{sin} &= \phi_{des} \\
 M_{sin} &= M_{des}
 \end{aligned}
 \tag{14.46}$$

- in corrispondenza dell'appoggio intermedio in  $C$

$$\begin{aligned}
 u_{sin} &= 0 \\
 u_{des} &= 0 \\
 \phi_{sin} &= \phi_{des} \\
 M_{sin} &= M_{des}
 \end{aligned}
 \tag{14.47}$$

- in corrispondenza del bispoggio in  $D$

$$\begin{aligned}
 \phi &= 0 \\
 -T_{sin} + F &= 0
 \end{aligned}
 \tag{14.48}$$

Occorre ora trasformare queste dodici condizioni in funzione degli abbassamenti e delle sue successive derivate, onde ottenere un sistema di dodici equazioni nelle costanti di integrazione. Si avrà, introducendo tre opportuni sistemi di riferimento con origine nei tre appoggi:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 u_2''(0) &= 0 \\
 u_2(L) &= 0 \\
 v_2(0) &= 0 \\
 u_2'(L) &= v_2'(0) \\
 u_2''(L) &= v_2''(0) \\
 v_2(L) &= 0 \\
 w_2(0) &= 0 \\
 v_2'(L) &= v_2'(0) \\
 2v_2''(L) &= w_2''(0) \\
 w_2'(L) &= 0 \\
 EIw_2'''(L) + F &= 0
 \end{aligned}
 \tag{14.49}$$

ed utilizzando le (14.44), insieme alle loro successive derivate, si giunge al sistema:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 \\
 a_2 &= 0 \\
 a_0 + a_1L + a_2L^2 + a_3L^3 &= 0 \\
 b_0 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{14.50}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 + 2a_2L + 3a_3L^2 &= b_1 \\
 2a_2 + 6a_3L &= 2b_2 \\
 b_0 + b_1L + b_2L^2 + b_3L^3 &= 0 \\
 c_0 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{14.51}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 + 2b_2L + 3b_3L^2 &= c_1 \\
 2(2b_2 + 6b_3L) &= 2c_2 \\
 c_1 + 2c_2L + 3c_3L^2 &= 0 \\
 6EIc_3 + F &= 0
 \end{aligned}
 \tag{14.52}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a_2 = b_0 = c_0 = 0 \\
 a_1 &= \frac{FL^2}{110EI} \\
 a_3 &= -\frac{F}{110EI} \\
 b_1 &= -\frac{FL^2}{55EI} \\
 b_2 &= -\frac{3FL}{110EI} \\
 b_3 &= \frac{F}{22EI} \\
 c_1 &= \frac{7FL^2}{110EI} \\
 c_2 &= \frac{12FL}{55EI} \\
 c_3 &= -\frac{F}{6EI}
 \end{aligned}
 \tag{14.53}$$

Ne seguono le tre linee elastiche:

$$\begin{aligned}
 u_2(x_3) &= \frac{F}{110EI}x_3(L^2 - x_3^2) \\
 v_2(x_3) &= \frac{F}{110EI}x_3(-2L^2 - 3Lx_3 + 5x_3^2) \\
 w_2(x_3) &= \frac{F}{330EI}x_3(21L^2 + 72Lx_3 - 55x_3^2)
 \end{aligned}
 \tag{14.54}$$

ed in cascata, le rotazioni, i momenti ed i tagli:

$$\begin{aligned}
 \phi^{AB}(x_3) &= -\frac{F(L^2 - 3x_3^2)}{110EI} \\
 \phi^{BC}(x_3) &= \frac{F(2L^2 + 6Lx_3 - 15x_3^2)}{110EI} \\
 \phi^{CD}(x_3) &= -\frac{F(7L^2 + 48Lx_3 - 55x_3^2)}{110EI}
 \end{aligned}
 \tag{14.55}$$

$$\begin{aligned}
 M^{AB}(x_3) &= 2EI\phi^{AB'} = \frac{6Fx_3}{55} \\
 M^{BC}(x_3) &= 2EI\phi^{BC'} = \frac{6}{55}F(L - 5x_3) \\
 M^{CD}(x_3) &= EI\phi^{CD'} = F\left(-\frac{24L}{55} + x_3\right)
 \end{aligned} \tag{14.56}$$

$$\begin{aligned}
 T^{AB}(x_3) &= M^{AB'}(x_3) = \frac{6F}{55} \\
 T^{BC}(x_3) &= M^{BC'}(x_3) = -\frac{6F}{11} \\
 T^{CD}(x_3) &= M^{CD'}(x_3) = F
 \end{aligned} \tag{14.57}$$

### Il calcolo delle reazioni

Nell'appoggio  $A$  si avrà, per l'equilibrio:

$$R_A = -T^{AB}(0) = -\frac{6}{55}F \tag{14.58}$$

mentre nei due appoggi intermedi sarà:

$$\begin{aligned}
 R_B &= T^{AB}(L) - T^{BC}(0) = \frac{6F}{55} + \frac{6F}{11} = \frac{36}{55}F \\
 R_C &= T^{BC}(L) - T^{CD}(0) = -\frac{6F}{11} - F = -\frac{17}{11}F
 \end{aligned} \tag{14.59}$$

Nel bipendolo a destra, invece, la coppia reattiva sarà

$$\mathcal{M}_{rD} = M^{CD}(L) = \frac{31}{55}FL \tag{14.60}$$

Un'utile verifica consiste nel controllare che siano soddisfatte le equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 R_A + R_B + R_C + F &= 0 \\
 \mathcal{M}_{rD} + R_A 3L + R_B 2L + R_C L &= 0
 \end{aligned} \tag{14.61}$$

### Il tracciamento dei diagrammi

Il diagramma del taglio, riportato in Figura 14.11, non pone difficoltà di alcun genere: costante a tratti, con due discontinuità dovute alle reazioni degli appoggi intermedi.

Il momento è distribuito con legge lineare in ciascuno dei tre tratti, con discontinuità angolari in corrispondenza degli appoggi centrali. Nel primo tratto, dove il taglio è positivo, il momento crescerà dal valore nullo (in  $A$ ) fino al valore:

$$M_B = T_A L = \frac{6F}{55}L \tag{14.62}$$

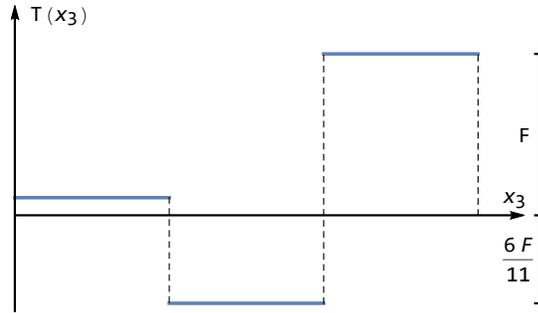


Figura 14.11: Il diagramma del taglio

in corrispondenza dell'appoggio  $B$ . Nel secondo tratto, il taglio è negativo, quindi il momento decresce, con pendenza pari al valore del taglio, giungendo in  $C$  con valore:

$$M_C = M_B - \frac{6F}{11}L = -\frac{24}{55}FL \quad (14.63)$$

Nel terzo tratto, infine, riprenderà a crescere, con pendenza pari ad  $F$ , e quindi giungerà in  $D$  con valore:

$$M_D = M_C + FL = -\frac{24}{55}FL + FL = \frac{31}{55}FL \quad (14.64)$$

Si ha così il diagramma di Figura 14.12.

I due punti di nullo del diagramma del momento sono particolarmente significativi, in quanto corrispondono a punti di flesso del diagramma degli abbassamenti. Una semplice proporzione geometrica permette di ottenere  $1^*$  in  $(L + \frac{L}{5})$  e  $2^*$  in  $(2L + \frac{24}{55}L)$ .

Il diagramma delle rotazioni è costituito da tratti quadratici, e si presenta come in Figura 14.13. Si noti la tangenza orizzontale in  $A$  e nei due punti di nullo del momento, e la discontinuità angolare in  $C$ , dovuta al variare della rigidezza flessionale. La presenza del bipendolo impone l'annullarsi della rotazione in  $D$ .

Gli spostamenti si presentano come in Figura 14.14: essi si annullano in corrispondenza degli appoggi, raggiungono valori estremi in corrispondenza dei punti di nullo delle rotazioni, e cambiano di curvatura in  $1^*$  ed in  $2^*$ .

## 14.6 La presenza di variazioni termiche e coppie distribuite

L'equazione della linea elastica è stata dedotta nell'ipotesi che l'unico carico distribuito fosse un carico trasversale  $p(x_3)$ . Talvolta, però, possono agire sulla

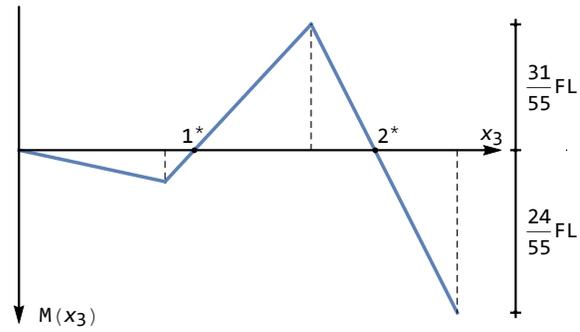


Figura 14.12: Il diagramma del momento

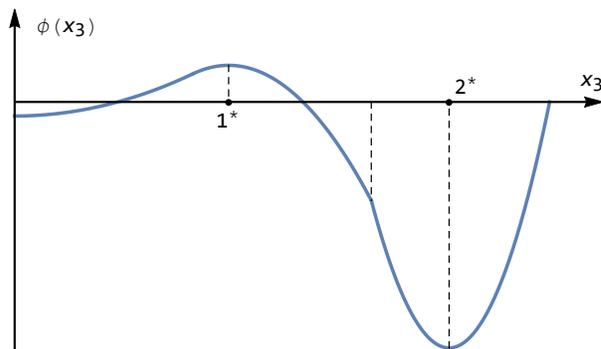


Figura 14.13: Il diagramma delle rotazioni

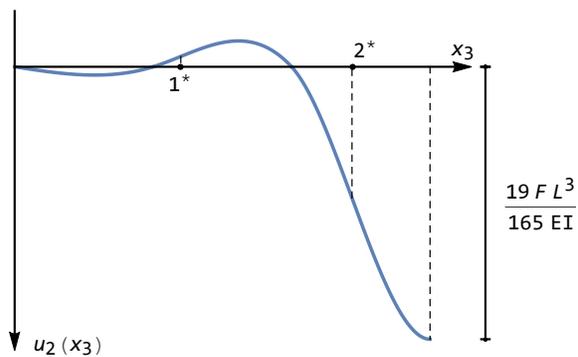


Figura 14.14: Il diagramma degli spostamenti

trave anche delle coppie distribuite  $m(x_3)$  e delle distorsioni flessionali distribuite  $\mu(x_3)$ , ed in tal caso l'equazione differenziale (14.7) va opportunamente modificata.

Le equazioni di equilibrio relative al concio elementare divengono ora, come può leggersi dalla Figura 14.15:

$$\begin{aligned} -T(x_3) + T(x_3 + dx_3) + p(x_3) dx_3 &= 0 \\ -M(x_3) + M(x_3 + dx_3) + p(x_3) dx_3 \frac{dx_3}{2} + m(x_3) dx_3 &= 0 \end{aligned} \quad (14.65)$$

e con le usuali manipolazioni si giunge alle due relazioni differenziali:

$$\frac{dT}{dx_3} = -p \quad (14.66)$$

$$\frac{dM}{dx_3} = T - m \quad (14.67)$$

ed alla legge che lega il momento al carico:

$$\frac{d^2M}{dx_3^2} = -p - \frac{dm}{dx_3} \quad (14.68)$$

L'equazione di congruenza resta inalterata:

$$\phi = -\frac{du_3}{dx_3} \quad (14.69)$$

mentre l'equazione costitutiva deve essere generalizzata a tener conto della curvatura aggiuntiva dovuta alla distorsione flessionale:

$$M = EI \frac{d\phi}{dx_3} + EI\mu(x_3) \quad (14.70)$$

o anche, inserendo la (14.69):

$$M = -EI \frac{d^2u_3}{dx_3^2} + EI\mu(x_3) \quad (14.71)$$

Derivando due volte, ed utilizzando la (14.68) si giunge alla equazione differenziale del quarto ordine:

$$\frac{d^2}{dx_3^2} \left( EI \frac{d^2u_3}{dx_3^2} \right) = p + \frac{dm}{dx_3} + \frac{d^2}{dx_3^2} (EI\mu(x_3)) \quad (14.72)$$

In ipotesi di trave omogenea a sezione costante si avrà infine:

$$u_2'''' = \frac{p}{EI} + \frac{m'}{EI} + \mu'' \quad (14.73)$$

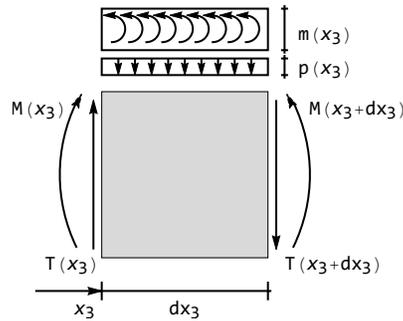


Figura 14.15: Il concio elementare soggetto a carico trasversale e coppie distribuite

14.6.1 Una trave soggetta a coppie distribuite (Franciosi)<sup>1</sup>

Si consideri la trave con tre appoggi ed una cerniera di Figura 14.16 (trave Gerber), soggetta ad un carico di coppie distribuite con legge triangolare, annullandosi all'estrema sinistra e giungendo al valore  $m$  all'estrema destra. La trave è isostatica, ed il suo studio può affrontarsi utilizzando il metodo della doppia integrazione, come si è fatto nel testo di riferimento.

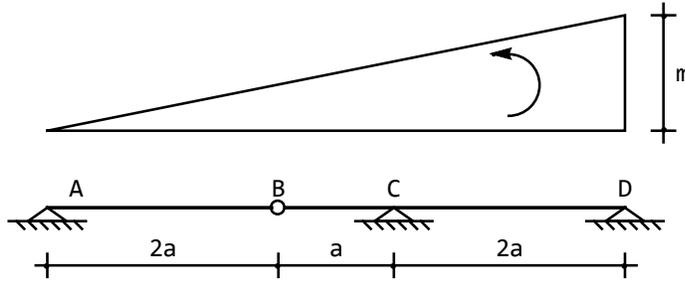


Figura 14.16: Una trave Gerber soggetta ad un carico di coppie linearmente distribuite

Se invece si vuole utilizzare l'equazione (14.73) del quarto ordine, occorrerà introdurre tre sistemi di riferimento, con origine in  $A$ ,  $B$  e  $C$ , rispettivamente, e ricavare preliminarmente le leggi di variazioni del carico nei tre tratti  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$ . Sarà:

$$m_1(x_3) = \frac{m}{5a}x_3 \quad 0 \leq x_3 \leq 2a$$

$$m_2(y_3) = \frac{2}{5}m + \frac{m}{5a}y_3 \quad 0 \leq y_3 \leq a$$

$$m_3(z_3) = \frac{3}{5}m + \frac{m}{5a}z_3 \quad 0 \leq z_3 \leq 2a$$

e di conseguenza le tre equazioni differenziali saranno:

$$u_2'''' = \frac{m}{5aEI} \quad (14.74)$$

$$v_2'''' = \frac{m}{5aEI} \quad (14.75)$$

$$w_2'''' = \frac{m}{5aEI} \quad (14.76)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= C_0 + C_1x_3 + C_2x_3^2 + C_3x_3^3 + \frac{m}{120aEI}x_3^4 \\ v_2(y_3) &= C_4 + C_5y_3 + C_6y_3^2 + C_7y_3^3 + \frac{m}{120aEI}y_3^4 \\ w_2(z_3) &= C_8 + C_9z_3 + C_{10}z_3^2 + C_{11}z_3^3 + \frac{m}{120aEI}z_3^4 \end{aligned} \quad (14.77)$$

<sup>1</sup>V.Franciosi *Problemi di Scienza delle Costruzioni* Vol.II, Liguori Editore, Napoli, pag.39

Le costanti di integrazione si determinano imponendo le condizioni di equilibrio e congruenza agli estremi, in corrispondenza della cerniera, ed in corrispondenza dell'appoggio:

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 0) &= 0 \\ M^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (14.78)$$

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 2a) &= v_2(y_3 = 0) \\ M^{(AB)}(x_3 = 2a) &= 0 \\ M^{(BC)}(y_3 = 0) &= 0 \\ T^{(AB)}(x_3 = 2a) &= T^{(BC)}(y_3 = 0) \end{aligned} \quad (14.79)$$

$$\begin{aligned} v_2(y_3 = a) &= 0 \\ w_2(z_3 = 0) &= 0 \\ \phi^{(BC)}(y_3 = a) &= \phi^{(CD)}(z_3 = 0) \\ M^{(BC)}(y_3 = a) &= M^{(CD)}(z_3 = 0) \end{aligned} \quad (14.80)$$

$$\begin{aligned} w_2(z_3 = 2a) &= 0 \\ M^{(CD)}(z_3 = 2a) &= 0 \end{aligned} \quad (14.81)$$

Per trasformare queste condizioni nelle usuali equazioni nelle dodici costanti di integrazione, bisogna tener conto che il taglio sarà ora fornito da:

$$\begin{aligned} T^{(AB)} &= \frac{dM^{(AB)}}{dx_3} + m_1 = -EIu_2''(x_3) + m_1(x_3) \\ T^{(BC)} &= \frac{dM^{(BC)}}{dy_3} + m_2 = -EIV_2''(y_3) + m_2(y_3) \\ T^{(CD)} &= \frac{dM^{(CD)}}{dz_3} + m_3 = -EIw_2''(z_3) + m_3(z_3) \end{aligned} \quad (14.82)$$

mentre rotazioni e momenti conservano la loro espressione classica. Si ha quindi il sistema:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_2 &= 0 \\ \frac{2a^3m}{15EI} + C_0 + 2aC_1 + 4a^2C_2 + 8a^3C_3 &= C_4 \\ \frac{2am}{5EI} + 2C_2 + 12aC_3 &= 0 \\ C_6 &= 0 \\ \frac{2m}{5} + 6EIC_3 &= 6EIC_7 \\ \frac{a^3m}{120EI} + C_4 + aC_5 + a^2C_6 + a^3C_7 &= 0 \end{aligned} \quad (14.83)$$

$$C_8 = 0$$

$$\frac{a^2 m}{30EI} + C_5 + 2aC_6 + 3a^2 C_7 = C_9$$

$$\frac{am}{10} + 2EIC_6 + 6EIaC_7 = 2EIC_{10}$$

$$\frac{2a^3 m}{15EI} + C_8 + 2aC_9 + 4a^2 C_{10} + 8a^3 C_{11} = 0$$

$$\frac{2am}{5EI} + 2C_{10} + 12aC_{11} = 0$$

con soluzione:

$$C_0 = C_2 = C_6 = C_8 = 0$$

$$C_1 = \frac{43a^2 m}{240EI}$$

$$C_3 = -\frac{m}{30EI}$$

$$C_4 = \frac{9a^3 m}{40EI}$$

$$C_5 = -\frac{4a^2 m}{15EI}$$

(14.84)

$$C_7 = \frac{m}{30EI}$$

$$C_9 = -\frac{2a^2 m}{15EI}$$

$$C_{10} = \frac{3am}{20EI}$$

$$C_{11} = -\frac{7m}{120EI}$$

Gli spostamenti sono quindi forniti da:

$$u_2(x_3) = \frac{m}{EI} \left( \frac{43a^2}{240} x_3 - \frac{x_3^3}{30} + \frac{x_3^4}{120a} \right)$$

$$v_2(y_3) = \frac{m}{EI} \left( \frac{9a^3}{40} - \frac{4a^2}{15} y_3 + \frac{y_3^3}{30} + \frac{y_3^4}{120a} \right) \quad (14.85)$$

$$w_2(z_3) = \frac{m}{EI} \left( -\frac{2a^2}{15} z_3 + \frac{3a}{20} z_3^2 - \frac{7}{120} z_3^3 + \frac{z_3^4}{120a} \right)$$

le rotazioni si ottengono per derivazione:

$$\phi^{(AB)}(x_3) = \frac{m}{EI} \left( -\frac{43a^2}{240} + \frac{x_3^2}{10} - \frac{x_3^3}{30a} \right)$$

$$\phi^{(BC)}(y_3) = \frac{m}{EI} \left( \frac{4a^2}{15} - \frac{y_3^2}{10} - \frac{y_3^3}{30a} \right) \quad (14.86)$$

$$\phi^{(CD)}(z_3) = \frac{m}{EI} \left( \frac{2a^2}{15} - \frac{3a}{10} z_3 + \frac{7}{40} z_3^2 - \frac{z_3^3}{30a} \right)$$

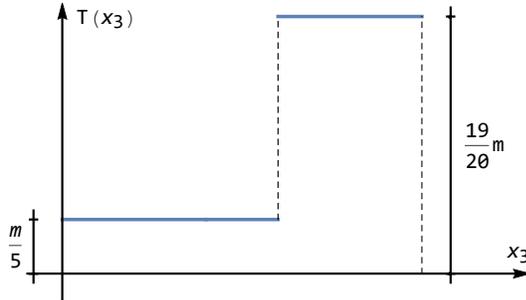


Figura 14.17: Il diagramma del taglio per la trave di Figura 14.16

I momenti si calcolano con l'usuale formula:

$$\begin{aligned} M^{(AB)}(x_3) &= m \left( \frac{x_3}{5} - \frac{x_3^2}{10a} \right) \\ M^{(BC)}(y_3) &= m \left( -\frac{y_3}{5} - \frac{y_3^2}{10a} \right) \\ M^{(CD)}(z_3) &= m \left( -\frac{3a}{10} + \frac{7}{20}z_3 - \frac{z_3^2}{10a} \right) \end{aligned} \quad (14.87)$$

mentre per i tagli si deve utilizzare la (14.82):

$$\begin{aligned} T^{(AB)}(x_3) &= m \left( \frac{1}{5} - \frac{x_3}{5a} \right) + \frac{m}{5a}x_3 = \frac{m}{5} \\ T^{(BC)}(y_3) &= m \left( -\frac{1}{5} - \frac{y_3}{5a} \right) + \frac{2}{5}m + \frac{m}{5a}y_3 = \frac{m}{5} \\ T^{(CD)}(z_3) &= m \left( \frac{7}{20} - \frac{z_3}{5a} \right) + \frac{3}{5}m + \frac{m}{5a}z_3 = \frac{19}{20}m \end{aligned} \quad (14.88)$$

Il diagramma del taglio (Fig.14.17) è immediato: andamento costante tra i primi due appoggi, e pari ad  $\frac{m}{5}$ , poi una discontinuità in corrispondenza della reazione dell'appoggio centrale, ed ancora andamento costante fino all'appoggio di destra, con valore  $\frac{19}{20}m$ .

Da questo diagramma si possono ricavare le reazioni dei tre appoggi:

$$\begin{aligned} R_A &= -T^{(AB)}(x_3 = 0) = -\frac{m}{5} \\ R_B &= T^{(BC)}(y_3 = 3a) - T^{(CD)}(z_3 = 0) = -\frac{15}{20}m \\ R_C &= T^{(CD)}(z_3 = 2a) = \frac{19}{20}m \end{aligned} \quad (14.89)$$

Il diagramma appena descritto non rappresenta però, alla luce delle (14.82), la derivata del momento flettente, e poichè le informazioni sulla pendenza del

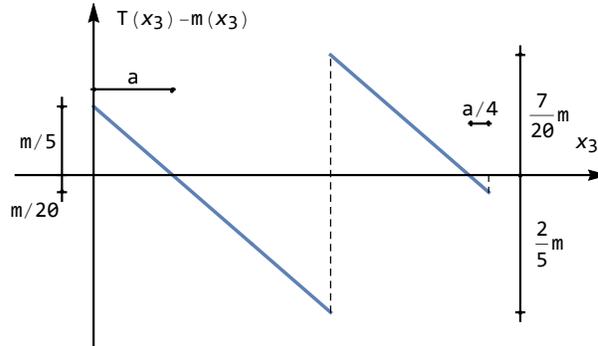


Figura 14.18: Il diagramma della derivata del momento per la trave di Figura 14.16

momento sono essenziali, è conveniente diagrammare anche la funzione  $T - m$ , ossia la derivata del momento:

Si ottiene il diagramma di Figura 14.18, in cui l'andamento lineare riflette l'andamento lineare della distribuzione di coppie. Da esso può già dedursi l'andamento quadratico del momento, con discontinuità angolare in  $3a$  e due punti di estremi in  $a$  ed in  $5a - \frac{a}{4}$ . Inoltre, negli appoggi di estremità il momento si annulla, cresce da 0 ad  $a$ , decresce fino all'appoggio intermedio annullandosi in corrispondenza della cerniera, per poi tornare a crescere fino all'ascissa  $5a - \frac{a}{4}$ . Di qui in poi, torna a decrescere per annullarsi nell'appoggio di destra. Si ha così il diagramma di Figura 14.19.

Le rotazioni variano con legge cubica, con una discontinuità in corrispondenza della cerniera  $B$ . A partire dal diagramma del momento, si può affermare che vi saranno punti di tangenza orizzontale in corrispondenza dei due appoggi di estremità, della cerniera in  $B$ , e della sezione all'ascissa  $5a - \frac{a}{2}$ , ossia in tutti i punti ove si annulla il momento.

A partire dal diagramma di  $T - m$ , invece, si può affermare che la curvatura del diagramma cambierà in corrispondenza della sezione  $1^*$  all'ascissa  $a$ , dell'appoggio in  $C$ , e della sezione  $2^*$  all'ascissa  $5a - \frac{a}{4}$ . Si può quindi giungere al diagramma di Figura 14.20.

Il diagramma degli spostamenti è infine riportato in Figura 14.21: esso sarà costituito da parabole di ordine quattro, si annullerà in corrispondenza dei tre appoggi, e presenterà tangenza orizzontale nel punto  $3^*$  in cui le rotazioni si annullano. Numericamente si può determinare che la sezione  $3^*$  è situata a circa  $3.68 a$  dall'appoggio di sinistra.

I cambi di curvatura avverranno invece dove si annullano i momenti, ossia nella cerniera  $B$  e nel punto  $4^*$ , all'ascissa  $5a - \frac{a}{2}$ .

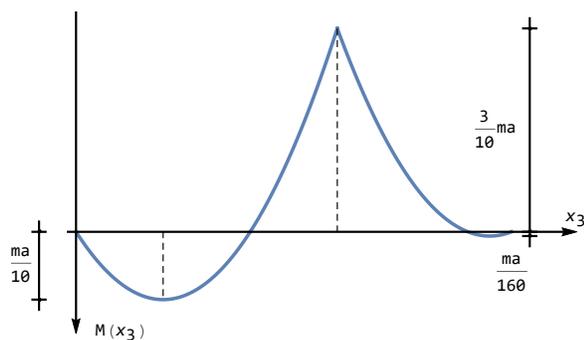


Figura 14.19: Il diagramma del momento per la trave di Figura 14.16

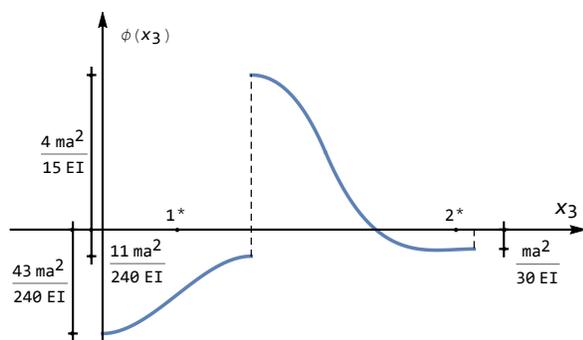


Figura 14.20: Il diagramma delle rotazioni per la trave di Figura 14.16

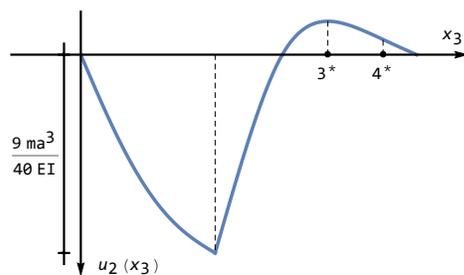


Figura 14.21: Il diagramma degli abbassamenti per la trave di Figura 14.16

### 14.6.2 Le travi soggette a variazioni termiche flessionali

Il più frequente caso di distorsione  $\mu(x_3)$  distribuita è certamente il caso delle variazioni termiche alla Navier, in cui una trave di altezza  $h$  subisce una differenza di temperatura  $\Delta t$  tra l'estradosso e l'intradosso. In tal caso, è noto che l'effetto di  $\Delta t$  è riconducibile ad una distorsione flessionale pari a:

$$\mu = -\alpha \frac{\Delta t}{h} \quad (14.90)$$

dove  $\alpha$  è un coefficiente di conducibilità termica, caratteristico di ciascun materiale, e di dimensioni fisiche pari all'inverso di gradi. Ne segue quindi che — come ovvio — la  $\mu(x_3)$  è assimilabile ad una curvatura.

Quale esempio preliminare, si consideri la trave a mensola di Figura 14.22, soggetta ad una variazione termica  $\Delta t$  costante su tutta la luce. Per essa si ha:

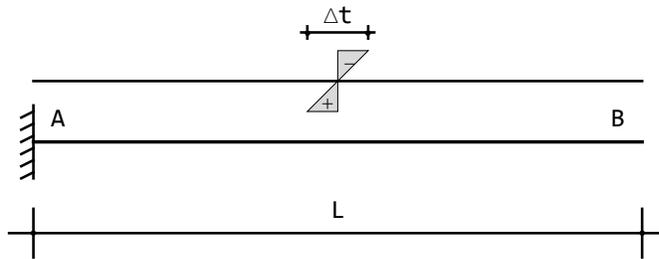


Figura 14.22: Una trave isostatica soggetta a variazione termica

$$u_2(x_3) = C_0 + C_1 x_3 + C_2 x_3^2 + C_3 x_3^3 \quad (14.91)$$

e le costanti di integrazione si determinano imponendo che sia:

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 0) &= 0 \\ \phi(x_3 = 0) &= 0 \\ M(x_3 = L) &= 0 \\ T(x_3 = L) &= 0 \end{aligned} \quad (14.92)$$

ed utilizzando la (14.71) si ha:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= 0 \\ 2C_2 + 6LC_3 + \frac{\alpha \Delta t}{h} &= 0 \\ 6C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (14.93)$$

con l'ovvia soluzione:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= -\frac{\alpha\Delta t}{2h}x_3^2 \\ \phi(x_3) &= \frac{\alpha\Delta t}{h}x_3 \\ M(x_3) &= 0 \\ T(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (14.94)$$

Si noti che in questo caso — struttura isostatica — la variazione termica ha causato spostamenti e rotazioni, ma non sono sorte caratteristiche. Nel caso di strutture iperstatiche, invece, una variazione termica provoca anche caratteristiche.

Si consideri infatti la trave di Figura 14.23, in cui le condizioni ai limiti divergono:

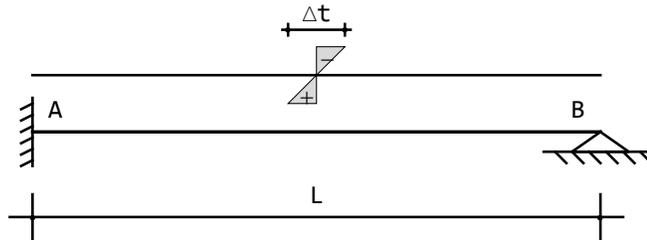


Figura 14.23: Una trave iperstatica soggetta a variazione termica

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 0) &= 0 \\ \phi(x_3 = 0) &= 0 \\ u_2(x_3 = L) &= 0 \\ M(x_3 = L) &= 0 \end{aligned} \quad (14.95)$$

che si tramutano nel sistema:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= 0 \\ C_0 + C_1L + C_2L^2 + C_3L^3 &= 0 \\ 2C_2 + 6LC_3 + \frac{\alpha\Delta t}{h} &= 0 \end{aligned} \quad (14.96)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} C_0 &= C_1 = 0 \\ C_2 &= \frac{\alpha\Delta T}{4h} \\ C_3 &= -\frac{\alpha\Delta T}{4hL} \end{aligned} \quad (14.97)$$

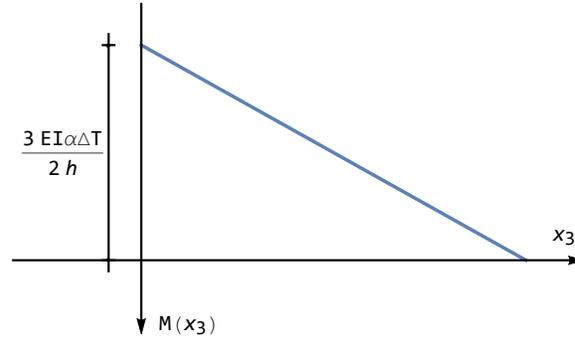


Figura 14.24: Una trave iperstatica soggetta a variazione termica: diagramma del momento

Si hanno quindi gli spostamenti e le rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \frac{\alpha \Delta T}{4h} \left( x_3^2 - \frac{x_3^3}{L} \right) \\ \phi(x_3) &= -\frac{\alpha \Delta T}{4h} \left( 2x_3 - \frac{3x_3^2}{L} \right) \end{aligned} \quad (14.98)$$

ma anche i momenti ed i tagli:

$$\begin{aligned} M(x_3) &= -EI \frac{\alpha \Delta T}{4h} \left( 2 - \frac{6x_3}{L} \right) - EI \frac{\alpha \Delta T}{h} = -\frac{3}{2} \frac{EI}{L} \frac{\alpha \Delta T}{h} (L - x_3) \\ T(x_3) &= \frac{3}{2} \frac{EI}{L} \frac{\alpha \Delta T}{h} \end{aligned} \quad (14.99)$$

Il diagramma del taglio è costante, mentre il diagramma del momento, riportato in Figura 14.24, è lineare, crescendo dal valore  $-\frac{3}{2}EI \frac{\alpha \Delta T}{h}$  nell'incastro al valore nullo sull'appoggio.

Il diagramma delle rotazioni è presentato in Figura 14.25: l'andamento sarà quadratico, annullandosi in corrispondenza dell'incastro, e raggiungendo un punto di minimo ad  $\frac{L}{3}$ , laddove si annulla la sua derivata, ossia la funzione  $\frac{M}{EI} - \mu$ . Poi cresce fino ad annullarsi a  $\frac{2}{3}L$ , e raggiunge il valore massimo sull'appoggio:

$$\phi_{\max} = \phi(L) = -\frac{\alpha \Delta T}{4h} L \quad (14.100)$$

Infine, gli abbassamenti sono forniti dalla Figura 14.26: si parte da zero, e con tangenza orizzontale, si cambia di curvatura in  $\frac{L}{3}$ , si raggiunge il massimo in  $\frac{2}{3}L$ , e poi si torna a zero in corrispondenza dell'appoggio.

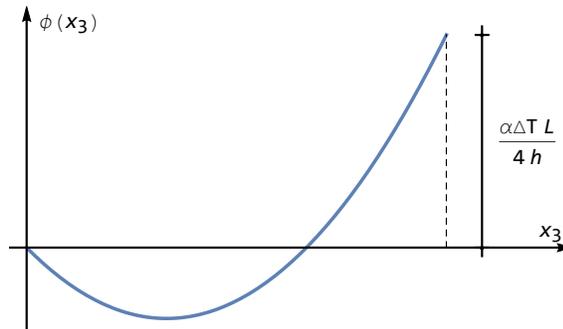


Figura 14.25: Una trave iperstatica soggetta a variazione termica: diagramma delle rotazioni

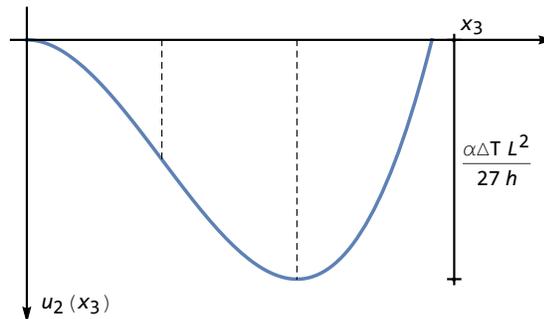


Figura 14.26: Una trave iperstatica soggetta a variazione termica: diagramma degli spostamenti

Sarà infine:

$$u_{2 \max} = u_2 \left( \frac{2}{3}L \right) = \frac{\alpha \Delta T}{27h} L^2 \quad (14.101)$$

## 14.7 Le travi a sezione variabile

Se la rigidezza flessionale della trave varia con l'ascissa  $x_3$ , allora il passaggio dall'equazione (14.6) alla (14.7) non è più lecito, e l'equazione differenziale della linea elastica deve essere esplicitata come:

$$EI''u_2'' + 2EI'u_2''' + EIu_2'''' = p \quad (14.102)$$

Si tratta quindi di una equazione differenziale a coefficienti variabili, la cui soluzione non sempre è esprimibile analiticamente. Si tenga anche presente che

per travi a sezione variabile il taglio sarà fornito da:

$$T(x_3) = \frac{dM}{dx_3} = (-EIu_2'')' = -(EI)'u_2'' - EIu_2''' \quad (14.103)$$

### 14.7.1 La trave a mensola a rigidezza variabile linearmen- te

Si consideri la trave a mensola di Figura 14.27, la cui rigidezza flessionale vari secondo la legge lineare:

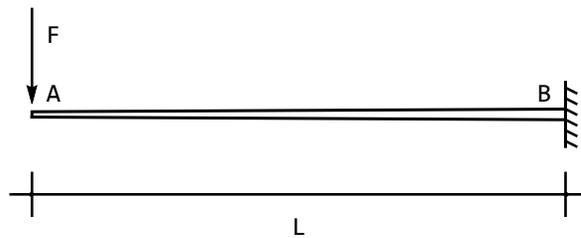


Figura 14.27: Trave a mensola a sezione variabile

$$EI(x_3) = k_0 \left(1 + \frac{x_3}{L}\right) \quad (14.104)$$

L'equazione (14.102) diviene omogenea, ed ha soluzione (ottenibile, ad esempio, con *Mathematica*):

$$u_2(x_3) = C_0 + C_1 x_3 + C_2 x_3^2 + C_3 (x_3 - L \log(L + x_3) - x_3 \log(L + x_3)) \quad (14.105)$$

Le quattro costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni ai limiti nell'estremo libero:

$$\begin{aligned} M(x_3 = 0) &= 0 \\ T(x_3 = 0) + F &= 0 \end{aligned} \quad (14.106)$$

e nell'incastro:

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = L) &= 0 \\ \phi(x_3 = L) &= 0 \end{aligned} \quad (14.107)$$

Si giunge allora al sistema:

$$\begin{aligned} u_2''(x_3 = 0) &= 0 \\ -(EI)'(x_3 = 0) u_2''(x_3 = 0) - EI(x_3 = 0) u_2'''(x_3 = 0) + F &= 0 \\ u_2(L) &= 0 \\ u_2'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (14.108)$$

che utilizzando la (14.105), insieme alle sue derivate successive, porta a scrivere:

$$\begin{aligned} -\frac{C_3}{L} + 2C_2 &= 0 \\ \frac{k_0}{L^2} C_3 &= F \\ C_0 + C_1 L + C_2 L^2 + C_4(L - 2L \log(2L)) &= 0 \\ C_1 + 2LC_2 - \log(2L)C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (14.109)$$

Si possono quindi agevolmente ricavare le quattro costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{FL^2}{k_0} \\ C_2 &= \frac{FL}{2k_0} \\ C_1 &= -\frac{FL^2}{k_0}(1 - \log(2L)) \\ C_0 &= -\frac{FL^3}{2k_0}(1 - 2\log(2L)) \end{aligned} \quad (14.110)$$

da cui gli abbassamenti, le rotazioni, i momenti ed i tagli:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \frac{FL(L+x_3)(-L+x_3+2L\log(2L)-2L\log(L+x_3))}{2k_0} \\ \phi(x_3) &= \frac{FL(L-x_3-L\log(2L)+L\log(L+x_3))}{k_0} \\ M(x_3) &= -Fx_3 \\ T(x_3) &= -F \end{aligned} \quad (14.111)$$

Si noti che le caratteristiche non sono influenzate dalla variabilità della sezione. All'estremo libero si hanno i due valori significativi:

$$u_2(x_3=0) = \frac{(\log(4)-1)}{2} \frac{FL^3}{k_0} \approx 0.193147 \frac{FL^3}{k_0} \quad (14.112)$$

$$\phi(x_3=0) = (1 + \log(L) - \log(2L)) \frac{FL^2}{k_0} \quad (14.113)$$

Se la stessa trave è caricata da una coppia all'estremo, come in Figura 14.28, le condizioni ai limiti si scrivono:

$$\begin{aligned} M(x_3=0) + \mathcal{M} &= 0 \\ T(x_3=0) &= 0 \\ u_2(x_3=L) &= 0 \\ \phi(x_3=L) &= 0 \end{aligned} \quad (14.114)$$

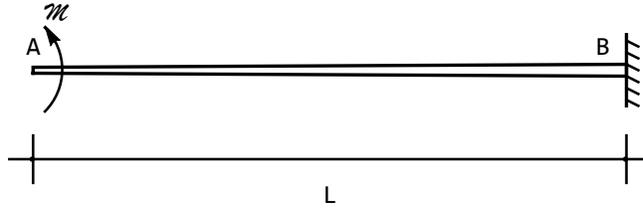


Figura 14.28: Trave a mensola a sezione variabile soggetta a coppia all'estremo

ossia, in termini di spostamento e successive derivate:

$$\begin{aligned}
 -EI(x_3 = 0) u_2''(x_3 = 0) + \mathcal{M} &= 0 \\
 -(EI)'(x_3 = 0) u_2''(x_3 = 0) - EI(x_3 = 0) u_2'''(x_3 = 0) &= 0 \\
 u_2(L) &= 0 \\
 u_2'(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{14.115}$$

Valutando in base alla (14.105) si giunge al sistema di quattro equazioni:

$$\begin{aligned}
 \left( -\frac{C_3}{L} + 2C_2 \right) k_0 &= \mathcal{M} \\
 -\frac{2C_2 k_0}{L} &= 0 \\
 C_0 + C_1 L + C_2 L^2 + C_4(L - 2L \log(2L)) &= 0 \\
 C_1 + 2LC_2 - \log(2L)C_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{14.116}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \frac{\mathcal{M} L^2}{k_0} (\log(2L) - 1) \\
 C_1 &= -\frac{\mathcal{M} L}{k_0} \log(2L) \\
 C_2 &= 0 \\
 C_3 &= -\frac{\mathcal{M} L}{k_0}
 \end{aligned} \tag{14.117}$$

Ne seguono gli spostamenti e le rotazioni:

$$\begin{aligned}
 u_2(x_3) &= \frac{\mathcal{M} L}{k_0} (L - z - (L + z) \log(2L) + (L + z) \log(L + z)) \\
 \phi(x_3) &= \frac{\mathcal{M} L}{k_0} (\log(2L) - \log(L + z))
 \end{aligned} \tag{14.118}$$

mentre i momenti sono costanti e pari a  $-\mathcal{M}$  ed i tagli sono identicamente nulli. I valori dello spostamento e della rotazione all'estremo libero sono, in questo

caso:

$$\begin{aligned}u_2(x_3 = 0) &= \frac{\mathcal{M}L^2}{k_0}(1 + \log(L) - \log(2L)) \\ \phi(x_3 = 0) &= \frac{\mathcal{M}L}{k_0} \log(2) \approx 0.69314 \frac{\mathcal{M}L}{k_0}\end{aligned}\tag{14.119}$$

## Capitolo 15

# Il metodo della doppia integrazione

In questo capitolo si calcolano i tagli, i momenti, le rotazioni e gli abbassamenti per travi *isostatiche* utilizzando il metodo della doppia integrazione, o di Savio-  
tti<sup>1</sup> A base di tale teoria, vi è la constatazione che in una trave isostatica deve essere possibile calcolare le caratteristiche della sollecitazione interna sfruttando solo le equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dx_3} &= -q \\ \frac{dM}{dx_3} &= T\end{aligned}\tag{15.1}$$

e solo successivamente — e se richiesto — si ricavano le rotazioni e gli abbassamenti, utilizzando le equazioni costitutive e di congruenza:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dx_3} &= \frac{M}{EI} \\ \frac{du_2}{dx_3} &= -\phi\end{aligned}\tag{15.2}$$

### 15.1 La trave appoggiata soggetta a carico distribuito

Si consideri la trave appoggiata di luce  $L$ , in Figura 15.1, soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensità  $q_0$  lungo tutta la luce, e si voglia conoscere il diagramma delle rotazioni e dell'abbassamento.

---

<sup>1</sup>Il metodo descritto è noto in letteratura anglosassone come *metodo di Macaulay*, in quanto illustrato per la prima volta da W. H. Macaulay nel 1919, in “A note on the deflection of beams”, Messenger of Mathematics, 48 (1919), pp.129–130. In Italia è più noto come *metodo di Savio-  
tti*, in quanto illustrato da Carlo Savio-  
tti — con strumenti di statica grafica — nel libro *La Statica grafica*, U.Hoepli 1888.

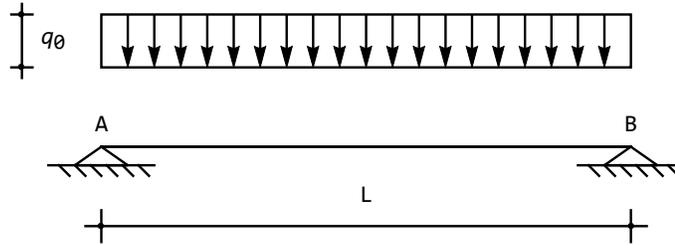


Figura 15.1: Trave appoggiata soggetta a carico distribuito

Poichè il carico è costante, la prima delle (15.1) fornisce l'espressione del taglio, che ovviamente risulta lineare:

$$T(x_3) = - \int q_0 dx_3 = -q_0 x_3 + T_0 \quad (15.3)$$

e la seconda delle (15.1) indica una distribuzione quadratica del momento:

$$M(x_3) = \int T dx_3 = -q_0 \frac{x_3^2}{2} + T_0 x_3 + M_0 \quad (15.4)$$

Le due costanti di integrazione,  $T_0$  ed  $M_0$ , si calcolano imponendo le due condizioni di *equilibrio* ai due estremi della trave:

$$\begin{aligned} M(0) = 0 &\longrightarrow M_0 = 0 \\ M(L) = 0 &\longrightarrow T_0 = q_0 \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (15.5)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} T(x_3) &= q_0 \left( \frac{L}{2} - x_3 \right) \\ M(x_3) &= q_0 \left( -\frac{x_3^2}{2} + \frac{L}{2} x_3 \right) \end{aligned} \quad (15.6)$$

Si noti che le due costanti di integrazione sono fisicamente interpretabili come il taglio ed il momento nell'estremo di sinistra.

La prima parte del procedimento di Savio è conclusa, e si può passare al calcolo di rotazioni e spostamenti. A partire dalla prima delle (15.2) si può scrivere:

$$\phi(x_3) = \int \frac{M}{EI} dx_3 = -q_0 \frac{x_3^3}{6EI} + q_0 \frac{L}{4EI} x_3^2 + \phi_0 \quad (15.7)$$

e dalla seconda delle (15.2) si deducono gli spostamenti:

$$u_2(x_3) = - \int \phi dx_3 = q_0 \frac{x_3^4}{24EI} - q_0 \frac{L}{12EI} x_3^3 - \phi_0 x_3 + u_{20} \quad (15.8)$$

Infine, le due costanti di integrazione,  $\phi_0$  ed  $u_{20}$  si calcolano imponendo le due condizioni di *congruenza* agli estremi della trave:

$$\begin{aligned} u_2(0) = 0 &\longrightarrow u_{20} = 0 \\ u_2(L) = 0 &\longrightarrow \phi_0 = q_0 \frac{L^3}{24EI} - q_0 \frac{L^3}{12EI} = -q_0 \frac{L^3}{24EI} \end{aligned} \quad (15.9)$$

Può concludersi:

$$\phi(x_3) = -q_0 \frac{x_3^3}{6EI} + q_0 \frac{L}{4EI} x_3^2 - q_0 \frac{L^3}{24EI} \quad (15.10)$$

$$u_2(x_3) = q_0 \frac{x_3^4}{24EI} - q_0 \frac{L}{12EI} x_3^3 + q_0 \frac{L^3}{24EI} x_3 \quad (15.11)$$

Le due costanti di integrazione, in questa seconda fase del procedimento, possono interpretarsi come la rotazione e l'abbassamento nell'estremo di sinistra.

## I valori notevoli

In seguito, assumeranno notevole importanza alcune quantità, che conviene evidenziare fin da ora:

- rotazione agli estremi per trave appoggiata–appoggiata soggetta a carico costante  $q_0$  :

$$\begin{aligned} \phi(0) &= -q_0 \frac{L^3}{24EI} \\ \phi(L) &= q_0 \frac{L^3}{24EI} \end{aligned} \quad (15.12)$$

- abbassamento in mezzeria per trave appoggiata–appoggiata soggetta a carico costante  $q_0$  :

$$u_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} \quad (15.13)$$

## 15.2 La trave appoggiata soggetta a forza concentrata

Si consideri la trave appoggiata di luce complessiva  $L_1 + L_2$ , in Figura 15.2, soggetta ad una forza concentrata in una sezione generica a distanza  $L_1$  dalla base di sinistra. Si vogliono conoscere il taglio, il momento, la rotazione e l'abbassamento utilizzando il metodo di Saviotti.

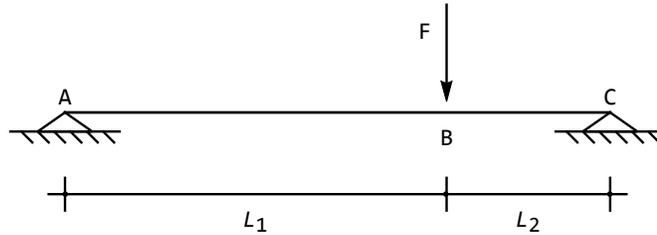


Figura 15.2: Trave appoggiata soggetta a carico concentrato in una sezione generica

### La prima integrazione per i tagli ed i momenti

In una prima fase si risolve il problema statico, deducendo le caratteristiche. Poichè il carico distribuito è assente, il taglio sarà costante, ed il momento lineare. Tuttavia in corrispondenza della forza  $F$  il taglio vedrà una discontinuità, ed il momento flettente una discontinuità angolare. Per tener conto della presenza di tale discontinuità, si scriveranno due espressioni del taglio, e due espressioni del momento flettente, valide a sinistra della forza e a destra della forza, rispettivamente. Sarà quindi:

$$\begin{aligned}
 t^{(AB)} &= T_0 \\
 m^{(AB)} &= T_0 x_3 + M_0 \\
 t^{(BC)} &= T_1 \\
 m^{(BC)} &= T_1 x_3 + M_1
 \end{aligned}
 \tag{15.14}$$

Le quattro costanti di integrazione hanno l'immediato significato fisico di tagli e momenti in  $A$ , ed immediatamente a destra di  $B$ . Si noti inoltre che si sono scelti due sistemi di riferimento, con origine in  $A$  e  $B$ , rispettivamente, per esprimere tagli e momenti nei due tratti. Le condizioni di equilibrio che permettono il calcolo delle costanti sono:

$$\begin{aligned}
 m^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 m^{(AB)}(x_3 = L_1) &= m^{(BC)}(x_3 = 0) \\
 t^{(AB)}(x_3 = L_1) &= t^{(BC)}(x_3 = 0) + F \\
 m^{(BC)}(x_3 = L_2) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{15.15}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 0 \\
 T_0 L_1 + M_0 &= M_1 \\
 T_0 &= T_1 + F \\
 T_1 L_2 + M_1 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{15.16}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 T_0 &= F \frac{L_2}{L_1 + L_2} \\
 T_1 &= -F \frac{L_1}{L_1 + L_2} \\
 M_0 &= 0 \\
 M_1 &= F \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}
 \end{aligned}
 \tag{15.17}$$

Infine, tagli e momenti possono scriversi come:

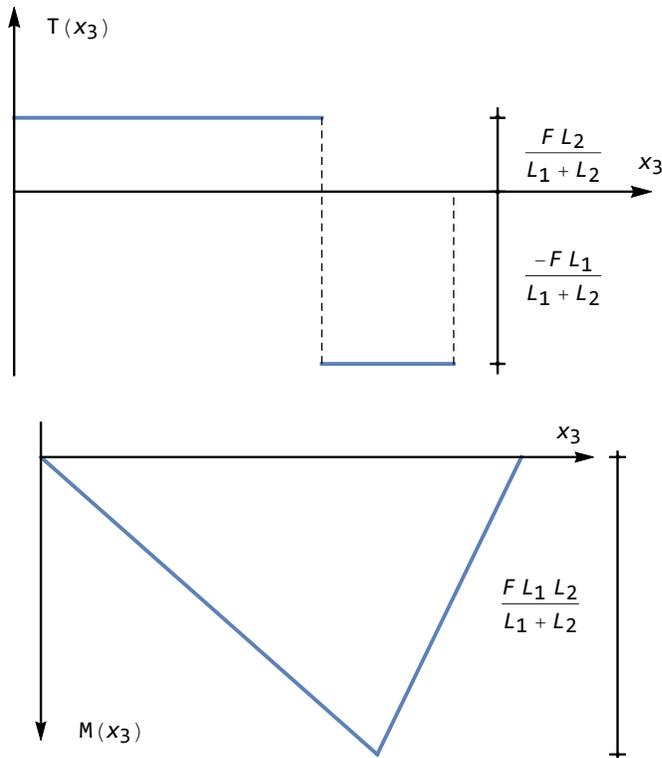


Figura 15.3: I diagrammi delle c.s.i. per la trave appoggiata soggetta a carico concentrato in una sezione generica

$$\begin{aligned}
 t^{(AB)} &= F \frac{L_2}{L_1 + L_2} \\
 m^{(AB)} &= F \frac{L_2}{L_1 + L_2} x_3
 \end{aligned}
 \tag{15.18}$$

$$t^{(BC)} = -F \frac{L_1}{L_1 + L_2}$$

$$m^{(BC)} = -F \frac{L_1}{L_1 + L_2} x_3 + F \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

I relativi diagrammi non presentano difficoltà, e sono presentati in Figura 15.3. Si noti solo che il momento cresce nella prima semiluce, laddove il taglio è positivo, per poi decrescere a destra della forza, dove il taglio diviene negativo.

### La seconda integrazione per rotazioni ed abbassamenti

Si potrà scrivere, per i due tratti:

$$\phi^{(AB)}(x_3) = \int \frac{m^{(AB)}}{EI} dx_3 = \frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{x_3^2}{2} + \phi_0$$

$$\phi^{(BC)}(x_3) = \int \frac{m^{(BC)}}{EI} dx_3 = -\frac{F}{EI} \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{x_3^2}{2} + \frac{F}{EI} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} x_3 + \phi_1$$
(15.19)

ed ancora:

$$u_2^{(AB)}(x_3) = -\int \phi^{(AB)} dx_3 = -\frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{x_3^3}{6} - \phi_0 x_3 + u_{20}$$

$$u_2^{(BC)}(x_3) = -\int \phi^{(BC)} dx_3 = \frac{F}{EI} \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{x_3^3}{6} - \frac{F}{EI} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{x_3^2}{2} - \phi_1 x_3 + u_{21}$$
(15.20)

e le quattro costanti di integrazione si ottengono imponendo le quattro condizioni di congruenza:

$$u_2^{(AB)}(x_3 = 0) = 0$$

$$u_2^{(AB)}(x_3 = L_1) = u_2^{(BC)}(x_3 = 0)$$

$$\phi^{(AB)}(x_3 = L_1) = \phi^{(BC)}(x_3 = 0)$$

$$u_2^{(BC)}(x_3 = L_2) = 0$$
(15.21)

Queste quattro condizioni si tramutano nelle equazioni:

$$u_{20} = 0$$

$$-\frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{L_1^3}{6} - \phi_0 L_1 + u_{20} = u_{21}$$

$$\frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{L_1^2}{2} + \phi_0 = \phi_1$$

$$\frac{F}{EI} \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{L_2^3}{6} - \frac{F}{EI} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{L_2^2}{2} - \phi_1 L_2 + u_{21} = 0$$
(15.22)

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 u_{20} &= 0 \\
 u_{21} &= \frac{FL_1^2L_2^2}{3EI(L_1+L_2)} \\
 \phi_0 &= -\frac{FL_1L_2(L_1+2L_2)}{6EI(L_1+L_2)} \\
 \phi_1 &= \frac{FL_1(L_1-L_2)L_2}{3EI(L_1+L_2)}
 \end{aligned} \tag{15.23}$$

Le rotazioni e gli abbassamenti possono allora scriversi come:

$$\begin{aligned}
 \phi^{(AB)}(x_3) &= -\frac{F}{6EI} \frac{L_2}{L_1+L_2} (L_1^2 + 2L_1L_2 - 3x_3^2) \\
 \phi^{(BC)}(x_3) &= \frac{F}{6EI} \frac{L_1}{L_1+L_2} (2L_1L_2 - 2L_2^2 + 6L_2x_3 - 3x_3^2) \\
 u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{F}{6EI} \frac{L_2x_3}{L_1+L_2} (L_1^2 + 2L_1L_2 - x_3^2) \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= \frac{F}{6EI} \frac{L_1(L_2-x_3)}{L_1+L_2} (2L_1L_2 + 2L_2x_3 - x_3^2)
 \end{aligned} \tag{15.24}$$

I relativi diagrammi sono presentati in Figura 15.4. Per il loro tracciamento, si è considerato che le rotazioni si annullano all'ascissa:

$$x_3^* = \frac{\sqrt{L_1(L_1+2L_2)}}{\sqrt{3}} \tag{15.25}$$

e che a tale ascissa si verifica quindi lo spostamento massimo:

$$u_{2\max} = u_2(x_3 = x_3^*) = \frac{FL_2(L_1(L_1+2L_2))^{3/2}}{9\sqrt{3}EI(L_1+L_2)} \tag{15.26}$$

Si osservi inoltre che la pendenza del diagramma delle rotazioni agli estremi deve essere nulla, in quanto nulli sono i momenti ai due estremi, e che la curvatura del diagramma degli spostamenti non si annulla.

## I valori notevoli

Anche in questo caso sono da segnalare i valori delle rotazioni agli estremi e l'abbassamento in corrispondenza della forza:

- rotazione agli estremi per trave appoggiata-appoggiata soggetta a forza all'ascissa generica:

$$\begin{aligned}
 \phi(0) &= -\frac{FL_1L_2(L_1+2L_2)}{6EI(L_1+L_2)} \\
 \phi(L) &= \frac{FL_1L_2(2L_1+L_2)}{6EI(L_1+L_2)}
 \end{aligned} \tag{15.27}$$

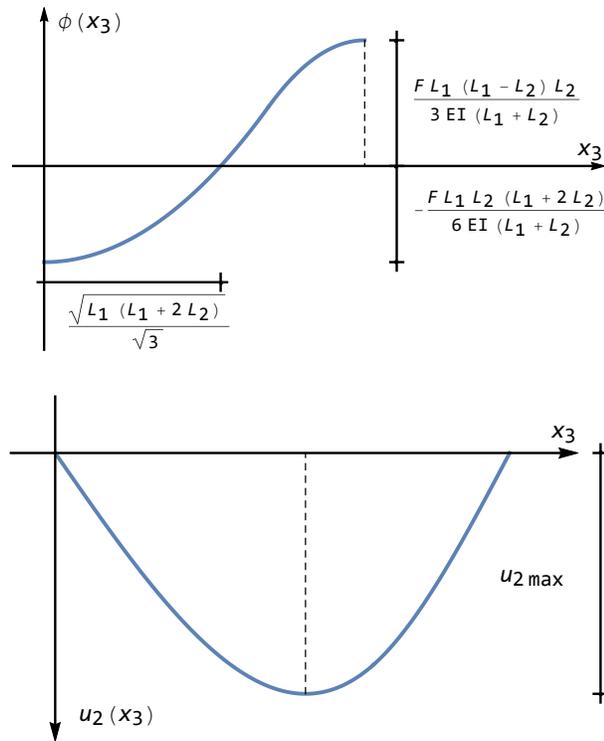


Figura 15.4: I diagrammi di rotazioni e spostamenti

- abbassamento in corrispondenza della forza per trave appoggiata–appoggiata soggetta a forza all’ascissa generica:

$$u_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{F L_1^2 L_2^2}{3 E I (L_1 + L_2)} \quad (15.28)$$

Nel caso particolare di forza in mezzeria si ha, posto  $L_1 = L_2 = L/2$  :

$$\begin{aligned} \phi(0) &= -\frac{F L^2}{16 E I} \\ \phi(L) &= \frac{F L^2}{16 E I} \\ u_2\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{F L^3}{48 E I} \end{aligned} \quad (15.29)$$

### 15.3 Trave bipendolo–appoggio con sbalzo

Si vuol studiare la trave di Figura 15.5, dove uno sbalzo di luce  $L_2$  è sollecitato da una stesa triangolare di carico.

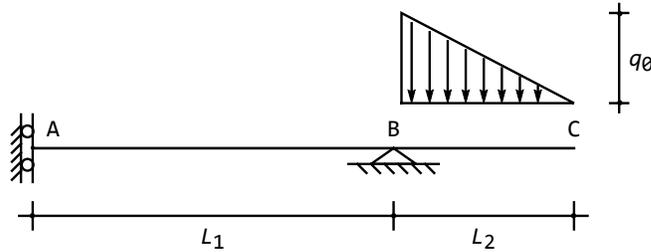


Figura 15.5: Una trave con bipendolo ed appoggio caricata su uno sbalzo

Occorre preliminarmente esprimere analiticamente il carico, che essendo lineare, ed avendo i due valori prefissati  $q_0$  in B e zero in C potrà scriversi come:

$$q(x_3) = q_0 \left(1 - \frac{x_3}{L_2}\right) \quad (15.30)$$

#### La prima integrazione per i tagli ed i momenti

L'utilizzo delle relazioni di equilibrio fornisce:

$$\begin{aligned} t^{(AB)} &= T_0 \\ t^{(BC)} &= -q_0 \left(x_3 - \frac{x_3^2}{2L_2}\right) + T_1 \end{aligned} \quad (15.31)$$

ed ancora:

$$\begin{aligned} m^{(AB)} &= T_0 x_3 + M_0 \\ m^{(BC)} &= -q_0 \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6L_2}\right) + T_1 x_3 + M_1 \end{aligned} \quad (15.32)$$

Le quattro condizioni di equilibrio, che consentiranno il calcolo delle quattro costanti di integrazione, sono:

$$\begin{aligned} t^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\ m^{(AB)}(x_3 = L_1) &= m^{(BC)}(x_3 = 0) \\ t^{(BC)}(x_3 = L_2) &= 0 \\ m^{(BC)}(x_3 = L_2) &= 0 \end{aligned} \quad (15.33)$$

ossia:

$$\begin{aligned}
 T_0 &= 0 \\
 T_0 L_1 + M_0 &= M_1 \\
 -q_0 \left( \frac{L_2}{2} \right) + T_1 &= 0 \\
 -q_0 \frac{L_2^2}{3} + T_1 L_2 + M_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{15.34}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 T_0 &= 0 \\
 T_1 &= q_0 \frac{L_2}{2} \\
 M_0 &= -\frac{1}{6} q_0 L_2^2 \\
 M_1 &= -\frac{1}{6} q_0 L_2^2
 \end{aligned} \tag{15.35}$$

I tagli ed i momenti sono quindi forniti da:

$$\begin{aligned}
 t^{(AB)} &= 0 \\
 t^{(BC)} &= -q_0 \left( x_3 - \frac{x_3^2}{2L_2} \right) + q_0 \frac{L_2}{2} \\
 m^{(AB)} &= -q_0 \frac{L_2^2}{6} \\
 m^{(BC)} &= -q_0 \left( \frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6L_2} \right) + q_0 \frac{L_2}{2} x_3 - \frac{1}{6} q_0 L_2^2 = \frac{q_0 (x_3 - L_2)^3}{6L_2}
 \end{aligned} \tag{15.36}$$

I diagrammi sono illustrati in Figura 15.6: si noti che poichè il carico si annulla nell'estremo di destra, ivi il taglio giungerà con pendenza orizzontale, così come il momento, che vede annullarsi in quel punto sia la sua derivata prima che la sua derivata seconda.

## La seconda integrazione per le rotazioni e gli abbassamenti

Dai momenti si possono trarre le espressioni delle rotazioni:

$$\begin{aligned}
 \phi^{(AB)}(x_3) &= \int \frac{m^{(AB)}}{EI} dx_3 = -\frac{1}{6} q_0 L_2^2 x_3 + \phi_0 \\
 \phi^{(BC)}(x_3) &= \int \frac{m^{(BC)}}{EI} dx_3 = -q_0 \left( \frac{x_3^3}{6} - \frac{x_3^4}{24L_2} \right) + q_0 \frac{L_2}{2} \frac{x_3^2}{2} - \frac{1}{6} q_0 L_2^2 x_3 + \phi_1
 \end{aligned} \tag{15.37}$$

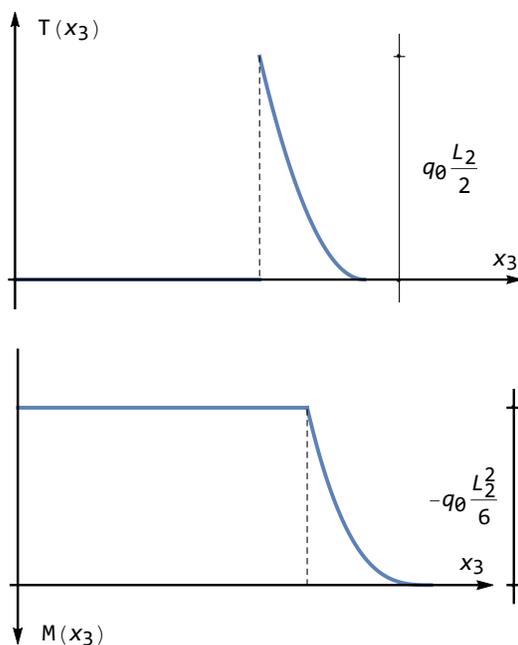


Figura 15.6: I diagrammi delle c.s.i. per la trave di Figura 15.5

ed integrando ancora una volta si ottengono gli abbassamenti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{1}{12} q_0 L_2^2 x_3^2 - \phi_0 x_3 + u_{20} \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= q_0 \left( \frac{x_3^4}{24} - \frac{x_3^5}{120 L_2} \right) - q_0 \frac{L_2}{12} x_3^3 + \frac{1}{12} q_0 L_2^2 \frac{x_3^2}{2} - \phi_1 x_3 + u_{21}
 \end{aligned} \tag{15.38}$$

Questa volta occorrerà utilizzare le equazioni di congruenza, che si scrivono:

$$\begin{aligned}
 \phi^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 u_2^{(AB)}(x_3 = L_1) &= 0 \\
 u_2^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 \phi^{(AB)}(x_3 = L_1) &= \phi^{(BC)}(x_3 = 0)
 \end{aligned} \tag{15.39}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
 \phi_0 &= 0 \\
 \frac{q_0 L_2^2 L_1^2}{12} - \phi_0 L_1 + u_{20} &= 0 \\
 u_{21} &= 0 \\
 -\frac{q_0 L_2^2 L_1}{6} + \phi_0 &= \phi_1
 \end{aligned} \tag{15.40}$$

che risolte forniscono le rotazioni e gli abbassamenti:

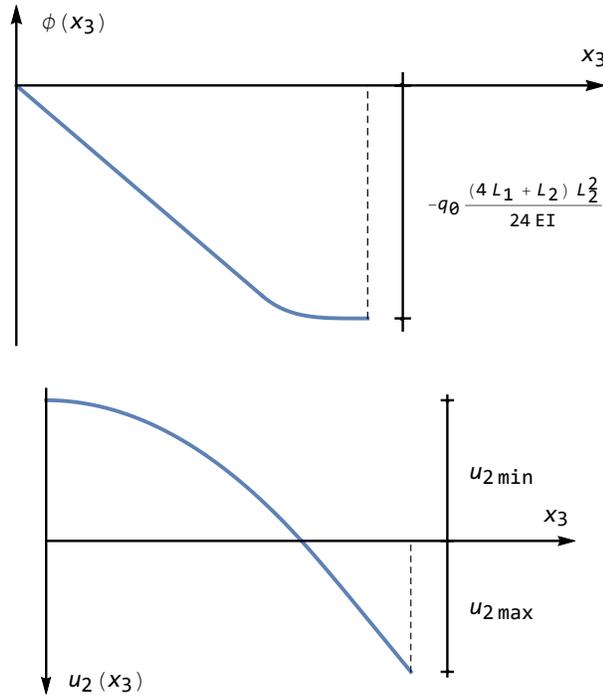


Figura 15.7: I diagrammi di rotazioni e spostamenti per la trave di Figura 15.5

$$\begin{aligned}
 \phi^{(AB)}(x_3) &= -\frac{q_0}{6EI} L_2^2 x_3 \\
 \phi^{(BC)}(x_3) &= -\frac{q_0}{EI} \left( \frac{x_3^3}{6} - \frac{x_3^4}{24L_2} - \frac{L_2}{2} \frac{x_3^2}{2} + \frac{1}{6} L_2^2 x_3 + \frac{1}{6} L_2^2 L_1 \right) \\
 u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{q_0 (x_3^2 - L_1^2) L_2^2}{12EI} \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= \frac{q_0}{EI} \left( \frac{x_3^4}{24} - \frac{x_3^5}{120L_2} - \frac{L_2}{12} x_3^3 + \frac{1}{12} L_2^2 x_3^2 + \frac{1}{6} L_2^2 L_1 x_3 \right)
 \end{aligned} \tag{15.41}$$

I relativi diagrammi sono riportati in Figura 15.7. I valori estremi dell'abbassamento sono attinti agli estremi, e valgono:

$$\begin{aligned}
 u_{2 \min} &= u_2^{(AB)}(x_3 = 0) = -\frac{q_0}{12EI} L_2^2 L_1^2 \\
 u_{2 \max} &= u_2^{(BC)}(x_3 = L_2) = \frac{q_0}{30EI} L_2^3 (5L_1 + L_2)
 \end{aligned} \tag{15.42}$$

## 15.4 Trave Gerber

Per la struttura di Figura 15.8, si vuole applicare il metodo di Saviotti, per ottenere il diagramma delle rotazioni e degli spostamenti.

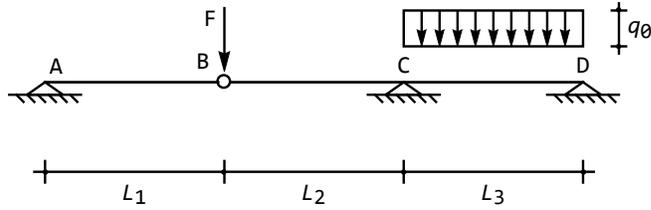


Figura 15.8: Una trave su tre appoggi e cerniera

In una prima fase, si scrivono le espressioni dei tagli e dei momenti nelle tre campate. In base alle relazioni di equilibrio, potrà porsi:

$$\begin{aligned}
 t^{(AB)} &= T_0 \\
 m^{(AB)} &= T_0 x_3 + M_0 \\
 t^{(BC)} &= T_1 \\
 m^{(BC)} &= T_1 x_3 + M_1 \\
 t^{(CD)} &= -q_0 x_3 + T_2 \\
 m^{(CD)} &= -q_0 \frac{x_3^2}{2} + T_2 x_3 + M_2
 \end{aligned} \tag{15.43}$$

Per il calcolo delle sei costanti di integrazione, si scrivano le equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 m^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 m^{(AB)}(x_3 = L_1) &= 0 \\
 m^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 t^{(AB)}(x_3 = L_1) &= T^{(BC)}(x_3 = 0) + F \\
 m^{(BC)}(x_3 = L_2) &= M^{(CD)}(x_3 = 0) \\
 m^{(CD)}(x_3 = L_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{15.44}$$

e valutandole attraverso le (15.43):

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 0 \\
 T_0 L_1 + M_0 &= 0 \\
 M_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{15.45}$$

$$\begin{aligned} T_0 &= T_1 + F \\ T_1 L_2 + M_1 &= M_2 \\ -q_0 \frac{L_3^2}{2} + T_2 L_3 + M_2 &= 0 \end{aligned}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} M_0 &= T_0 = M_1 = 0 \\ T_1 &= -F \\ M_2 &= -FL_2 \\ T_2 &= q_0 \frac{L_3}{2} + F \frac{L_2}{L_3} \end{aligned} \tag{15.46}$$

Le caratteristiche saranno quindi fornite da:

$$\begin{aligned} t^{(AB)} &= 0 \\ m^{(AB)} &= 0 \\ t^{(BC)} &= -F \\ m^{(BC)} &= -Fx_3 \\ t^{(CD)} &= -q_0 x_3 + q_0 \frac{L_3}{2} + F \frac{L_2}{L_3} \\ m^{(CD)} &= -q_0 \frac{x_3^2}{2} + \left( q_0 \frac{L_3}{2} + F \frac{L_2}{L_3} \right) x_3 - FL_2 \end{aligned} \tag{15.47}$$

I diagrammi sono riportati in Figura 15.9, e non presentano particolari difficoltà. Si noti solo che il momento flettente raggiunge il suo valore massimo in terza campata, laddove il taglio si annulla, ossia all'ascissa:

$$x_3^* = L_1 + L_2 + \frac{2FL_2 + L_3^2 q_0}{2L_3 q_0} \tag{15.48}$$

In base ai valori di  $F$  e  $q$ , tale ascissa può anche non ricadere nella terza campata, nel qual caso il taglio non si annulla, ed il momento cresce fino all'appoggio in  $D$ .

### La seconda integrazione per le rotazioni e gli abbassamenti

Dai momenti si possono trarre le espressioni delle rotazioni:

$$\begin{aligned} \phi^{(AB)}(x_3) &= \int \frac{M^{(AB)}}{EI} dx_3 = \phi_0 \\ \phi^{(BC)}(x_3) &= \int \frac{M^{(BC)}}{EI} dx_3 = -F \frac{x_3^2}{2EI} + \phi_1 \\ \phi^{(CD)}(x_3) &= \int \frac{M^{(CD)}}{EI} dx_3 = -q_0 \frac{x_3^3}{6EI} + \left( q_0 \frac{L_3}{2EI} + \frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_3} \right) \frac{x_3^2}{2} - \frac{F}{EI} L_2 x_3 + \phi_2 \end{aligned} \tag{15.49}$$

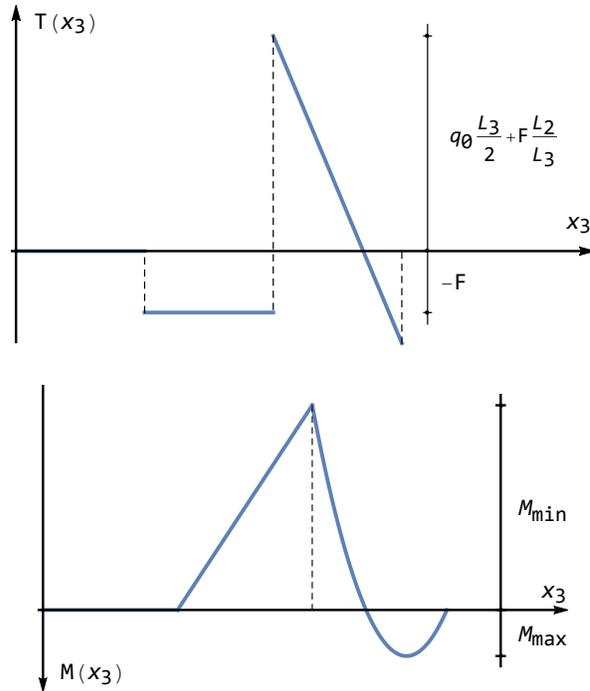


Figura 15.9: I diagrammi delle c.s.i. per la trave di Figura 15.8

ed integrando ancora una volta si ottengono gli abbassamenti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= -\phi_0 x_3 + u_{20} \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= F \frac{x_3^3}{6EI} - \phi_1 x_3 + u_{21} \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= q_0 \frac{x_3^4}{24EI} - \left( q_0 \frac{L_3}{2EI} + \frac{F}{EI} \frac{L_2}{L_3} \right) \frac{x_3^3}{6} + \frac{F}{EI} L_2 \frac{x_3^2}{2} - \phi_2 x_3 + u_{31}
 \end{aligned} \tag{15.50}$$

Questa volta occorrerà utilizzare le equazioni di congruenza, che si scrivono:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 u_2^{(AB)}(x_3 = L_1) &= u_2^{(BC)}(x_3 = 0) \\
 u_2^{(BC)}(x_3 = L_2) &= 0 \\
 u_2^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 \phi^{(BC)}(x_3 = L_2) &= \phi^{(CD)}(x_3 = 0) \\
 u_2^{(CD)}(x_3 = L_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{15.51}$$

da cui il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}
 u_{20} &= 0 \\
 -\phi_0 L_1 + u_{20} &= u_{21} \\
 F \frac{L_2^3}{6EI} - \phi_1 L_2 + u_{21} &= 0 \\
 u_{31} &= 0 \\
 -F \frac{L_2^2}{2EI} + \phi_1 &= \phi_2 \\
 q_0 \frac{L_3^4}{24EI} - \left( q_0 \frac{L_3}{2EI} + \frac{F L_2}{EI L_3} \right) \frac{L_3^3}{6} + \frac{F}{EI} L_2 \frac{L_3^2}{2} - \phi_2 L_3 + u_{31} &= 0
 \end{aligned} \tag{15.52}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 u_{20} &= 0 \\
 \phi_0 &= -\frac{8FL_2^3 + 8FL_2^2L_3 - L_2L_3^3q_0}{24EIL_1} \\
 u_{21} &= \frac{1}{24EI} L_2 (8FL_2^2 + 8FL_2L_3 - L_3^3q_0) \\
 \phi_1 &= \frac{1}{24EI} (12FL_2^2 + 8FL_2L_3 - L_3^3q_0) \\
 u_{31} &= 0 \\
 \phi_2 &= -\frac{1}{24EI} L_3 (-8FL_2 + L_3^2q_0)
 \end{aligned} \tag{15.53}$$

In definitiva, le rotazioni sono fornite da:

$$\begin{aligned}
 \phi^{(AB)}(x_3) &= -\frac{8FL_2^3 + 8FL_2^2L_3 - L_2L_3^3q_0}{24EIL_1} \\
 \phi^{(BC)}(x_3) &= -F \frac{x_3^2}{2EI} + \frac{1}{24EI} (12FL_2^2 + 8FL_2L_3 - L_3^3q_0) \\
 \phi^{(CD)}(x_3) &= -q_0 \frac{x_3^3}{6EI} + \left( q_0 \frac{L_3}{2EI} + \frac{F L_2}{EI L_3} \right) \frac{x_3^2}{2} - \frac{F}{EI} L_2 x_3 - \\
 &\quad \frac{1}{24EI} L_3 (-8FL_2 + L_3^2q_0)
 \end{aligned} \tag{15.54}$$

e gli abbassamenti da:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{8FL_2^3 + 8FL_2^2L_3 - L_2L_3^3q_0}{24EIL_1} x_3 \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= F \frac{x_3^3}{6EI} - \left( \frac{1}{24EI} (12FL_2^2 + 8FL_2L_3 - L_3^3q_0) \right) x_3 + \\
 &\quad \frac{1}{24EI} L_2 (8FL_2^2 + 8FL_2L_3 - L_3^3q_0)
 \end{aligned} \tag{15.55}$$

$$u_2^{(CD)}(x_3) = q_0 \frac{x_3^4}{24EI} - \left( q_0 \frac{L_3}{2EI} + \frac{F L_2}{EI L_3} \right) \frac{x_3^3}{6} + \frac{F}{EI} L_2 \frac{x_3^2}{2} + \left( \frac{1}{24EI} L_3 (-8FL_2 + L_3^2 q_0) \right) x_3$$

I diagrammi sono riportati in Figura 15.10. Si noti la discontinuità delle rotazioni in corrispondenza della cerniera.

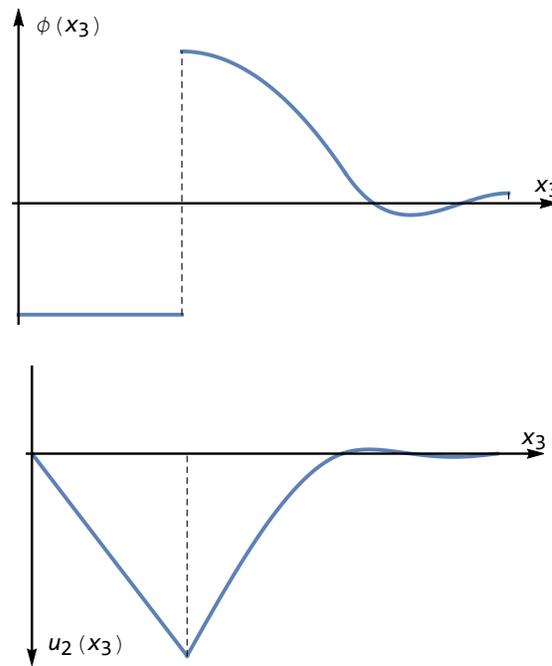


Figura 15.10: I diagrammi di rotazioni e spostamenti per la trave di Figura 15.8



## Capitolo 16

# I corollari di Mohr per il calcolo degli spostamenti

### 16.1 Relazioni fondamentali: l'analogia

In questo capitolo si utilizza la teoria dell'analogia di Mohr per il calcolo di spostamenti e rotazioni. Per illustrare tale teoria, si considerino da un lato le due equazioni di *equilibrio*, che collegano momenti, tagli e carico applicato:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dx_3} &= -q \\ \frac{dM}{dx_3} &= T\end{aligned}\quad (16.1)$$

e si scriva l'equazione che collega direttamente il momento flettente al carico applicato:

$$\frac{d^2M}{dx_3^2} = -q \quad (16.2)$$

Dall'altro lato, si considerino le due equazioni di *congruenza e costitutive*:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dx_3} &= \frac{M}{EI} \\ \frac{du_2}{dx_3} &= -\phi\end{aligned}\quad (16.3)$$

e si scriva l'equazione che collega direttamente lo spostamento al momento flettente:

$$\frac{d^2u_2}{dx_3^2} = -\frac{M}{EI} \quad (16.4)$$

Non può sfuggire l'analogia tra la (16.4) e la (16.2), che induce a definire un *carico fittizio*:

$$q^* = \frac{M}{EI} \quad (16.5)$$

ed un *momento fittizio*:

$$M^* = u_2 \quad (16.6)$$

ed ad affermare che lo spostamento  $u_2$  può riguardarsi come il momento flettente (fittizio) provocato da un carico (fittizio) pari ad  $\frac{M}{EI}$ . Inoltre, l'analogia tra la prima delle (16.1) e la prima delle (16.3) porta a dire che la rotazione può riguardarsi come il *taglio fittizio* provocato dal carico fittizio  $q^*$ :

$$T^* = -\phi \quad (16.7)$$

## 16.2 La trave ausiliaria

Si consideri ora una trave soggetta al carico trasversale  $q$ , ed a carichi concentrati (forze e coppie), e si ipotizzi di conoscere il diagramma del momento da essi generato. Se la trave è isostatica, tale conoscenza è possibile a partire dalle sole equazioni di equilibrio, ma quanto segue non è limitato all'ipotesi di travi isostatiche.

Le analogie illustrate in precedenza permettono di affermare che la rotazione  $\phi$  e l'abbassamento  $u_2$  si ottengono calcolando il taglio fittizio  $T^*$  (cambiato di segno) ed il momento fittizio  $M^*$  provocati dal carico fittizio  $q^*$ . E' però necessario tramutare le condizioni di vincolo relative alle rotazioni ed agli spostamenti in condizioni sui tagli e sui momenti fittizi, definendo una nuova trave (*ausiliaria*), su cui poter compiere un secondo studio di equilibrio. In un incastro, ad esempio, le rotazioni e gli spostamenti sono nulli, mentre sulla trave ausiliaria occorrerà proibire i tagli ed i momenti: quindi l'incastro reale andrà sostituito con un estremo libero. Inversamente, se la trave reale presenta un estremo libero, in esso andranno permessi spostamenti e rotazioni, e quindi sulla trave ausiliaria andrà previsto un incastro.

In sintesi, per i vincoli di estremità, la relazione tra vincoli reali e fittizi è fornita da:

- incastro  $\longrightarrow$  estremo libero
- appoggio  $\longrightarrow$  appoggio
- bipendolo  $\longrightarrow$  bipendolo
- estremo libero  $\longrightarrow$  incastro

Per i vincoli intermedi esterni, si consideri prima l'appoggio intermedio: in esso gli spostamenti devono essere nulli, così come le rotazioni relative: sulla trave ausiliaria, quindi, bisognerà prevedere un vincolo che annulli i momenti flettenti, e per cui non vi sia discontinuità nei tagli, e tale vincolo è una cerniera. Del tutto analogamente, è immediato osservare che un bipendolo esterno si tramuterà in un bipendolo interno:

- appoggio intermedio  $\longrightarrow$  cerniera

- bipendolo esterno  $\rightarrow$  bipendolo interno

Infine, si considerino i vincoli interni, ossia la cerniera ed il bipendolo interno. La cerniera impone che gli abbassamenti relativi siano nulli, mentre le rotazioni relative sono ammesse: il corrispondente vincolo fittizio non dovrà causare discontinuità nei momenti, mentre l'andamento del taglio dovrà essere discontinuo, e quindi occorrerà introdurre un appoggio (la cui reazione causa la discontinuità del taglio). Analogamente, il bipendolo interno si tramuta in un bipendolo esterno:

- cerniera  $\rightarrow$  appoggio
- bipendolo interno  $\rightarrow$  bipendolo esterno

### 16.3 Trave appoggiata con carico distribuito<sup>1</sup>

Si consideri la trave appoggiata di luce  $L$ , in Figura 16.1, soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensità  $q$  lungo tutta la luce, e si voglia conoscere il diagramma delle rotazioni e dell'abbassamento.

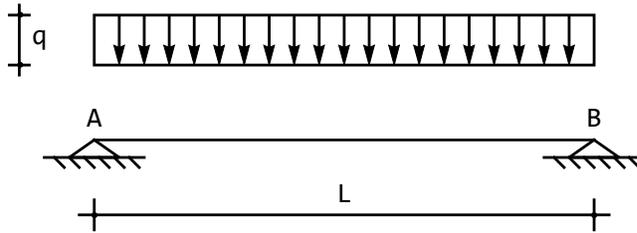


Figura 16.1: Lo studio della trave appoggiata soggetta a carico distribuito secondo la teoria di Mohr

Il primo passo per l'applicazione del metodo di Mohr è il calcolo del diagramma del momento sulla trave di Figura 16.1. Le reazioni saranno uguali, e pari a:

$$R_A = R_B = -\frac{qL}{2} \quad (16.8)$$

mentre il diagramma del taglio sarà lineare:

$$T(x_3) = ax_3 + b \quad (16.9)$$

<sup>1</sup>Questo esercizio, in cui sono richieste le funzioni rotazione e spostamento, evidenzia la stretta parentela del metodo di Mohr col metodo della doppia integrazione di Saviotti. Tuttavia, il metodo di Mohr è molto conveniente quando viene richiesta la conoscenza di una rotazione o di un abbassamento in un singolo punto della trave, come si vede dall'esercizio successivo

e poichè

$$\begin{aligned} T(0) &= -R_A = \frac{qL}{2} \\ T\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (16.10)$$

si avrà:

$$T(x_3) = q\left(\frac{L}{2} - x_3\right) \quad (16.11)$$

Il momento flettente si ottiene immediatamente, integrando l'espressione precedente:

$$M(x_3) = q\left(-\frac{x_3^2}{2} + \frac{L}{2}x_3\right) + c_0 \quad (16.12)$$

e la costante di integrazione  $c_0$  si annulla, in quanto il momento si annulla in  $x_3 = 0$ . Ne segue che il carico fittizio può scriversi:

$$q^*(x_3) = \frac{q}{2EI}x_3(L - x_3) \quad (16.13)$$

La trave ausiliaria è ancora la trave appoggiata, e quindi occorre ora calcolare il momento flettente sulla trave di Figura 16.2. Le reazioni fittizie sono fornite da:

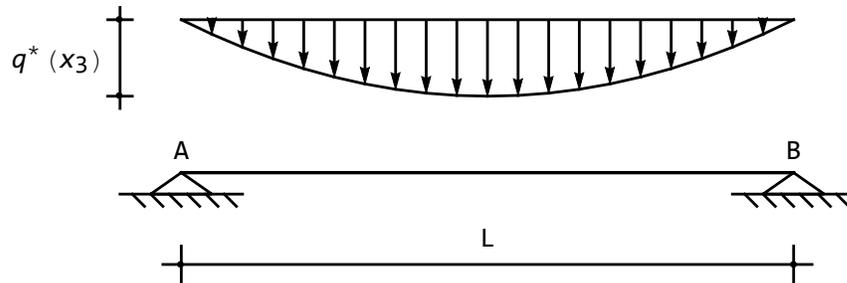


Figura 16.2: La trave ausiliaria

$$R_A^* = R_B^* = -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{q}{2EI}x(L - x) dx = -\frac{qL^3}{24EI} \quad (16.14)$$

Il taglio fittizio è allora ottenibile integrando la (16.13):

$$T^*(x_3) = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{Lx_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{3}\right) + c_0 \quad (16.15)$$

e la costante di integrazione si ottiene osservando che  $T^*(0) = -R_A^*$ . Si ha quindi:

$$T^*(x_3) = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{Lx_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{3}\right) + \frac{qL^3}{24EI} \quad (16.16)$$

Infine, un'ulteriore integrazione fornisce il richiesto momento fittizio (la costante di integrazione è nulla in quanto il momento si annulla in  $x_3 = 0$ ):

$$M^*(x_3) = -\frac{q}{2EI} \left( \frac{Lx_3^3}{6} - \frac{x_3^4}{12} \right) + \frac{qL^3}{24EI} x_3 \quad (16.17)$$

In base alle analogie di Mohr, può concludersi:

$$\begin{aligned} \phi(x_3) = -T^*(x_3) &= -\frac{qL^3}{24EI} - \frac{qx_3^2}{2EI} \left( \frac{x_3}{3} - \frac{L}{2} \right) \\ u_2(x_3) = M^*(x_3) &= \frac{qL^3}{24EI} x_3 - \frac{q}{2EI} \left( \frac{Lx_3^3}{6} - \frac{x_3^4}{12} \right) \end{aligned} \quad (16.18)$$

## 16.4 La trave appoggiata con forza concentrata

Si consideri la trave appoggiata di luce  $L$ , in Figura 16.3, soggetta ad una forza concentrata in mezzeria, e si voglia conoscere il valore dell'abbassamento e della rotazione nella sezione  $S$  situata ad un quarto della luce.

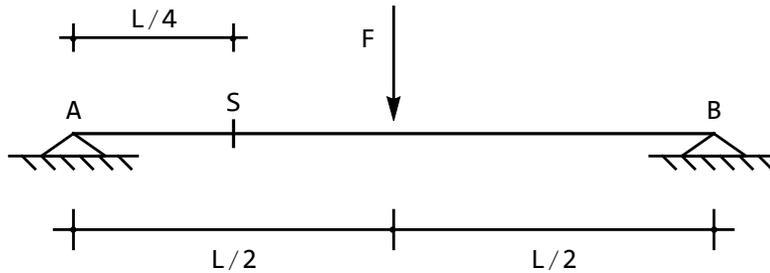


Figura 16.3: Trave appoggiata soggetta a carico concentrato

Il primo passo per l'applicazione del metodo di Mohr è il calcolo del diagramma del momento sulla trave di Figura 16.3. Le reazioni saranno uguali, e pari a:

$$R_A = R_B = -\frac{F}{2} \quad (16.19)$$

mentre il diagramma del taglio sarà costante da  $A$  alla mezzeria, e pari a  $F/2$ , ed ancora costante dalla mezzeria a  $B$ , e pari a  $-F/2$ . Il diagramma del momento sarà una funzione lineare con discontinuità angolare in mezzeria, si annullerà agli estremi, e raggiungerà un massimo in mezzeria, dove vale  $FL/4$ .

Il carico fittizio avrà quindi la distribuzione triangolare illustrata in Figura 16.4, dove si è anche riportata la trave ausiliaria, che in questo caso coincide con la trave di partenza.

Occorre ora calcolare il taglio ed il momento flettente ad  $L/4$  per questa trave ausiliaria. Le reazioni fittizie sono fornite da:

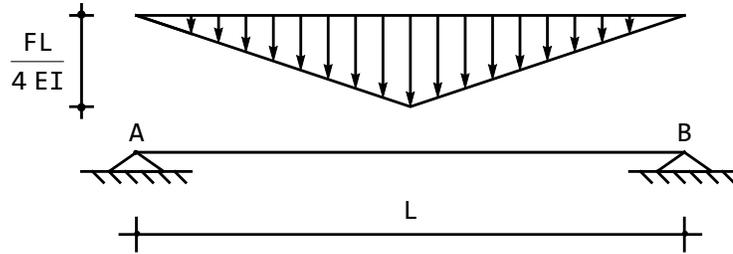
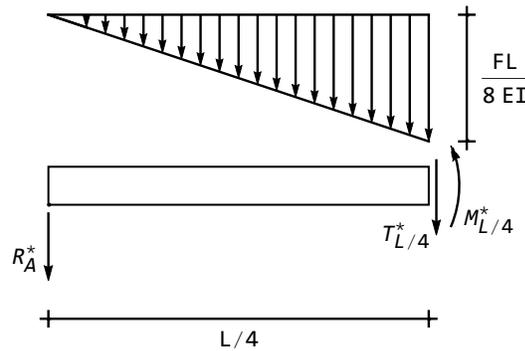


Figura 16.4: La trave ausiliaria

$$R_A^* = R_B^* = -\frac{1}{2} \left( \frac{FL}{4EI} \frac{L}{2} \right) = -\frac{FL^2}{16EI} \quad (16.20)$$

ed in  $S$  il taglio fittizio è immediatamente deducibile dal diagramma delle forze in Figura 16.5:

$$T^* \left( x_3 = \frac{L}{4} \right) = -R_A^* - \frac{1}{2} F \frac{L}{8EI} \frac{L}{4} = \frac{3FL^2}{64EI} \quad (16.21)$$


 Figura 16.5: Il diagramma delle forze per il calcolo del momento flettente in  $L/4$ 

Analogamente, un equilibrio alla rotazione intorno alla sezione  $S$  permette di dedurre il momento fittizio:

$$M^* \left( x_3 = \frac{L}{4} \right) = -R_A^* \frac{L}{4} - \frac{1}{2} F \frac{L}{8EI} \frac{L}{4} \frac{L}{12} = \frac{11FL^3}{768EI} \quad (16.22)$$

In base alle analogie di Mohr, può concludersi:

$$\begin{aligned} \phi \left( x_3 = \frac{L}{4} \right) &= -\frac{3}{64} \frac{FL^2}{EI} \\ u_2 \left( x_3 = \frac{L}{4} \right) &= \frac{11}{768} \frac{FL^3}{EI} \end{aligned} \quad (16.23)$$

## 16.5 La trave appoggiata con coppia concentrata

Si consideri ancora la trave appoggiata di Figura 16.6, caricata con una coppia applicata a distanza  $L_1$  dall'estremo di sinistra. Si voglia conoscere l'abbassamento in corrispondenza della coppia.

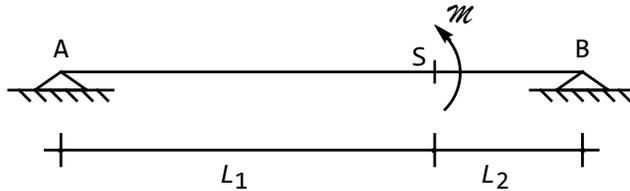


Figura 16.6: Una trave appoggiata soggetta ad una coppia concentrata

Le reazioni sono uguali e contrarie, e pari a:

$$R_A = -R_B = -\frac{\mathcal{M}}{L_1 + L_2} \quad (16.24)$$

Il diagramma del momento deve essere nullo in  $A$  ed in  $B$ , e deve variare linearmente da  $A$  ad  $S$  con pendenza pari al taglio in  $A$ , giungendo quindi in  $S$  con valore:

$$M_{sin}(x_3 = L_1) = \frac{\mathcal{M}}{L_1 + L_2} L_1 \quad (16.25)$$

Nel secondo tratto, il diagramma deve annullarsi in  $B$  e variare linearmente con pendenza pari al taglio in  $B$ , sicchè giunge in  $S$  con valore:

$$M_{des}(x_3 = L_1) = -\frac{\mathcal{M}}{L_1 + L_2} L_2 \quad (16.26)$$

Si noti che la discontinuità del diagramma è pari al valore della coppia, e che il carico fittizio sarà positivo (diretto verso il basso) sulla prima luce, e negativo (diretto verso l'alto) sulla seconda luce. Ne segue il diagramma di Figura 16.7, dove il carico fittizio agisce sulla trave ausiliaria.

Per il calcolo del momento in  $S$ , sulla trave ausiliaria, si inizi a calcolare la reazione  $R_A^*$ , scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno al punto  $B$ :

$$R_A^*(L_1 + L_2) + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L_1}{L_1 + L_2} L_1 \left( L_2 + \frac{L_1}{3} \right) - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L_2}{L_1 + L_2} L_2 \frac{2}{3} L_2 = 0 \quad (16.27)$$

da cui subito:

$$R_A^* = -\frac{\mathcal{M}(L_1^2 + 2L_1L_2 - 2L_2^2)}{6EI(L_1 + L_2)} \quad (16.28)$$

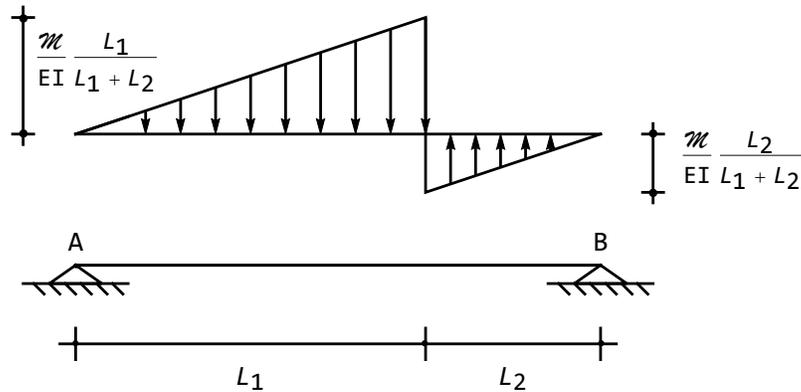


Figura 16.7: La trave ausiliaria corrispondente alla trave di Figura 16.6

Il momento fittizio in  $S$  si ottiene allora scrivendo:

$$R_A^* L_1 + \frac{1}{2} \frac{M}{EI} \frac{L_1}{L_1 + L_2} L_1 \frac{L_1}{3} + M_S^* = 0 \quad (16.29)$$

da cui il richiesto spostamento:

$$u_2(x_3 = L_1) = \frac{ML_1 L_2 (L_1 - L_2)}{3EI(L_1 + L_2)} \quad (16.30)$$

Si noti che il punto si abbassa se appartenente alla semiluce di destra, dove  $L_1 > L_2$ , si alza se appartenente alla semiluce di sinistra, dove  $L_1 < L_2$ , e non si sposta se in mezzeria.

## 16.6 Trave con bipendolo ed appoggio

Si vuol conoscere l'abbassamento in corrispondenza della forza per la trave di Figura 16.8.

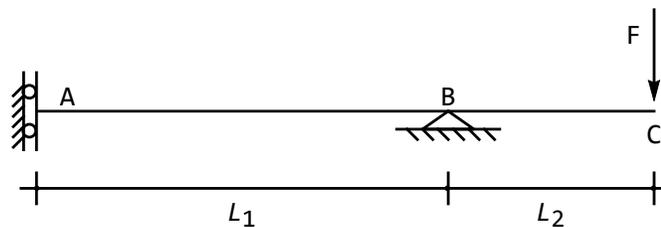


Figura 16.8: Una trave con bipendolo ed appoggio caricata su uno sbalzo

Il diagramma del momento è costante, e pari ad  $-FL_2$  dal bipendolo fino all'appoggio, per poi crescere linearmente, fino ad annullarsi in corrispondenza

della forza. La trave ausiliaria prevede una cerniera al posto dell'appoggio, ed un incastro al posto dell'estremo libero, sicchè occorre studiare la trave di Figura 16.9, e su di essa calcolare la reazione dell'incastro.

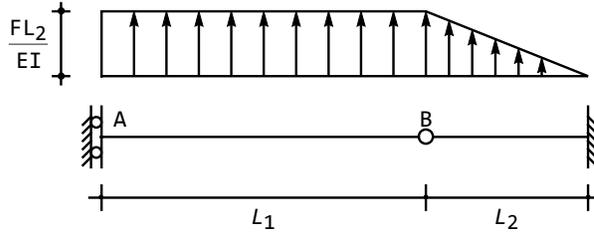


Figura 16.9: La trave ausiliaria ed il carico fittizio corrispondente alla trave di Figura 16.8

A ciò fare, si osservi che il taglio in  $B$  può agevolmente calcolarsi dall'equilibrio alla traslazione del primo tratto:

$$T_B^* = \frac{FL_2}{EI} L_1 \quad (16.31)$$

e quindi l'equilibrio alla rotazione del secondo tratto implica:

$$-T_B^* L_2 - \frac{1}{2} \frac{FL_2}{EI} L_2 \frac{2}{3} L_2 + \mathcal{M}_{rC}^* = 0 \quad (16.32)$$

e quindi:

$$u_2 (L_1 + L_2) = \frac{FL_2^2}{EI} \left( L_1 + \frac{L_2}{3} \right) \quad (16.33)$$

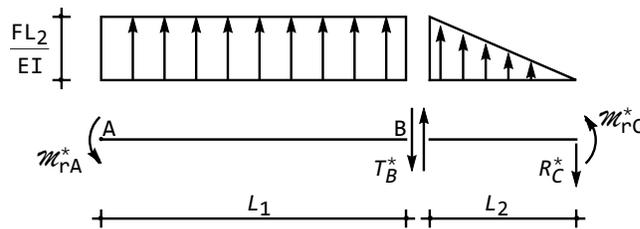


Figura 16.10: Il diagramma delle forze per il calcolo del momento

## 16.7 Trave Gerber

Per la struttura di Figura 16.11, si vuole conoscere l'abbassamento della cerniera in  $B$ , e la rotazione relativa tra le sue due facce.

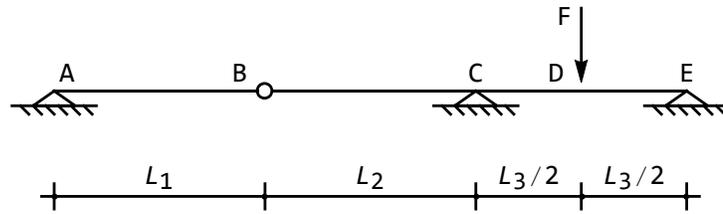


Figura 16.11: Una trave su tre appoggi e cerniera

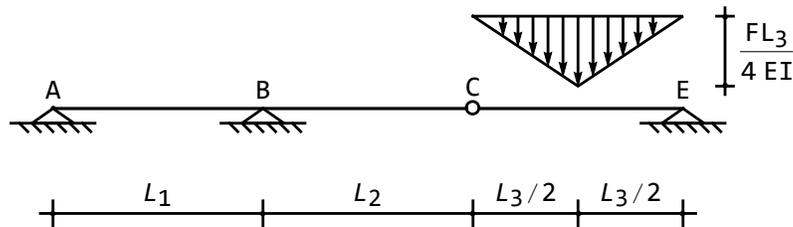


Figura 16.12: La trave ausiliaria corrispondente alla Figura 16.11

E' immediato realizzare che il diagramma del momento si limita al tratto  $CE$ , ed è distribuito con legge lineare secondo lo schema di Figura 16.12.

Le equazioni di equilibrio per i due tratti di Figura 16.12 si scrivono:

$$\begin{aligned}
 R_A^* + R_B^* + T_C^* &= 0 \\
 R_A^* L_1 - T_C^* L_2 &= 0 \\
 -T_C^* + R_E^* + \frac{1}{2} \frac{FL_3}{4EI} L_3 &= 0 \\
 -T_C^* - R_E^* &= 0
 \end{aligned} \tag{16.34}$$

avendo scelto come poli il punto  $B$  ed il punto  $D$ , rispettivamente per il primo e secondo tratto. Risolvendo si ha:

$$\begin{aligned}
 T_C^* &= \frac{FL_3^2}{16EI} \\
 R_A^* &= \frac{FL_3^2}{16EI} \frac{L_2}{L_1} \\
 R_B^* &= -T_C^* - R_A^* = -\frac{FL_3^2}{16EI} \left( 1 + \frac{L_2}{L_1} \right)
 \end{aligned} \tag{16.35}$$

Ora è immediato realizzare, equilibrando il conchio elementare in  $B$ , che la reazione ausiliaria dell'appoggio è pari alla richiesta variazione angolare:

$$R_A^* = T_{\sin}^* - T_{des}^* = \phi_{des} - \phi_{\sin} = \Delta\phi \tag{16.36}$$

e quindi:

$$\Delta\phi_B = -\frac{FL_3^2}{16EI} \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right) \quad (16.37)$$

Il momento in  $B$  è poi facilmente deducibile come:

$$M_B^* = -R_A^* L_1 = -\frac{FL_3^2 L_2}{16EI} \quad (16.38)$$

Si può quindi concludere che la cerniera in  $B$  subisce un innalzamento pari a:

$$u_{2B} = -\frac{FL_3^2 L_2}{16EI} \quad (16.39)$$

## 16.8 Trave con sbalzo e coppia all'estremo

Per la trave di Figura 16.13, si calcoli l'abbassamento e la rotazione in corrispondenza della coppia applicata.

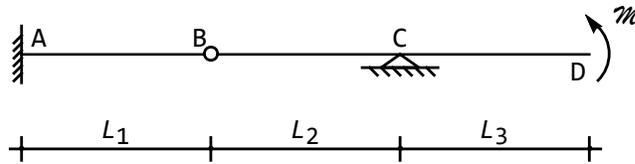


Figura 16.13: Una trave con sbalzo e coppia applicata

Il diagramma del momento sarà costante lungo lo sbalzo, per poi variare linearmente fino all'incastro, passando per la cerniera  $B$ , dove si annulla. Ne segue che la trave ausiliaria si presenterà come in Figura 16.14.

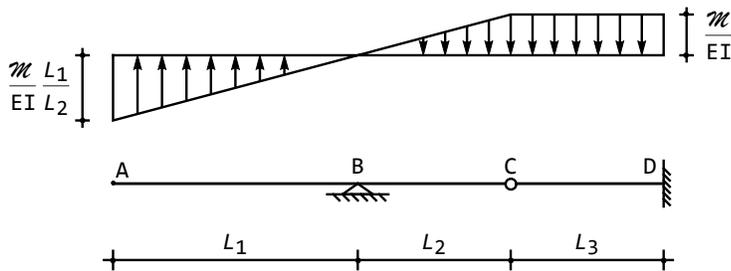


Figura 16.14: La trave ausiliaria corrispondente alla Figura 16.13

Le equazioni di equilibrio dei due tratti si possono scrivere come:

$$R_B^* + T_C^* - \frac{1}{2} \frac{M}{EI} \frac{L_1}{L_2} L_1 + \frac{1}{2} \frac{M}{EI} L_2 = 0 \quad (16.40)$$

$$-T_C^* L_2 - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L_1}{L_2} L_1 \frac{L_1}{3} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{M}}{EI} L_2 \frac{L_2}{3} = 0 \quad (16.41)$$

$$-T_C^* + R_D^* + \frac{\mathcal{M}}{EI} L_3 = 0 \quad (16.42)$$

$$\mathcal{M}_{rD}^* - R_D^* L_3 - \frac{\mathcal{M}}{EI} L_3 \frac{L_3}{2} = 0 \quad (16.43)$$

Dalla (16.41) si ha subito il taglio fittizio in  $C$ :

$$T_C^* = -\frac{1}{3} \frac{\mathcal{M}}{EI} \left( \frac{L_1^3}{L_2^2} + L_2 \right) \quad (16.44)$$

e poi le richieste reazioni fittizie nell'incastro:

$$\begin{aligned} R_D^* &= -\frac{\mathcal{M}}{EI} \left( L_3 + \frac{1}{3} \left( \frac{L_1^3}{L_2^2} + L_2 \right) \right) \\ \mathcal{M}_{rD}^* &= -\frac{\mathcal{M} L_3}{EI} \left( \frac{L_3}{2} + \frac{1}{3} \left( \frac{L_1^3}{L_2^2} + L_2 \right) \right) \end{aligned} \quad (16.45)$$

Infine, poichè la reazione e la coppia reattiva, nell'incastro, coincidono con il taglio ed il momento, rispettivamente, si potrà affermare che:

$$\begin{aligned} \phi_D &= \frac{\mathcal{M}}{EI} \left( L_3 + \frac{1}{3} \left( \frac{L_1^3}{L_2^2} + L_2 \right) \right) \\ u_{2D} &= -\frac{\mathcal{M} L_3}{EI} \left( \frac{L_3}{2} + \frac{1}{3} \left( \frac{L_1^3}{L_2^2} + L_2 \right) \right) \end{aligned} \quad (16.46)$$

## 16.9 Mensola caricata parzialmente

Si consideri ora la mensola parzialmente caricata di Figura 16.15, e per essa si voglia conoscere lo spostamento e la rotazione all'estremo libero.

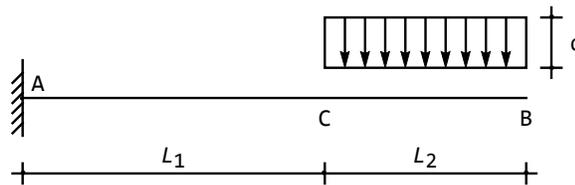


Figura 16.15: Una trave a mensola parzialmente caricata

La reazione verticale nell'incastro, e la coppia reattiva, sono immediatamente deducibili come:

$$\begin{aligned} R_A &= -qL_2 \\ \mathcal{M}_{rA} &= qL_2 \left( L_1 + \frac{L_2}{2} \right) \end{aligned} \quad (16.47)$$

Il diagramma del taglio è costante da 0 ad  $L_1$ , dove la trave è scarica, ed è pari a  $-R_A = qL_2$ . Poi decresce linearmente fino ad annullarsi in  $B$ .

Il diagramma del momento varia con legge lineare nel tratto scarico, crescendo da  $-M_{rA}$  fino a  $-qL_2^2/2$ , per poi crescere con legge quadratica, ed annullarsi in  $B$  assieme alla sua derivata. Analiticamente, quindi, nel tratto scarico sarà:

$$M(x_3) = -qL_2 \left( L_1 + \frac{L_2}{2} \right) + qL_2 x_3 \quad (16.48)$$

mentre sulla restante parte di trave si avrà (adottando un sistema di riferimento con origine in  $C$ ):

$$M(x'_3) = -\frac{qL_2^2}{2} + qL_2 x'_3 - \frac{q}{2} x_3'^2 \quad (16.49)$$

Ne segue il carico fittizio di Figura 16.16, e la necessità di calcolare le reazioni fittizie dell'incastro in  $B$ :

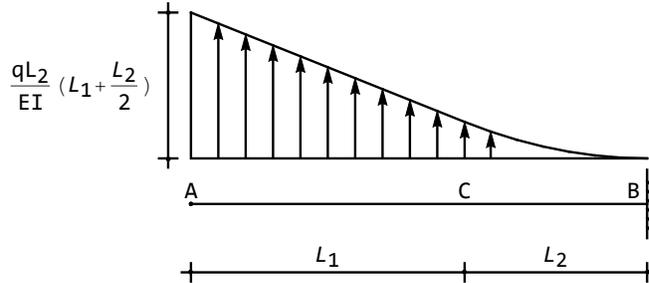


Figura 16.16: La trave ausiliaria per l'esempio di Figura 16.15

$$R_B^* + \frac{1}{EI} \int_0^{L_1} M(x_3) dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^{L_2} M(x'_3) dx'_3 = 0 \quad (16.50)$$

da cui:

$$R_B^* = \frac{qL_2}{2EI} \left( L_1^2 + L_1 L_2 + \frac{L_2^2}{3} \right) \quad (16.51)$$

$$\begin{aligned} M_{rB}^* &= \frac{1}{EI} \int_0^{L_1} M(x_3) (L_1 + L_2 - x_3) dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^{L_2} M(x'_3) (L_2 - x'_3) dx'_3 = \\ &= \frac{qL_2 (8L_1^3 + 18L_1^2 L_2 + 12L_1 L_2^2 + 3L_2^3)}{24EI} \end{aligned} \quad (16.52)$$

Infine:

$$\begin{aligned} \phi_B &= -\frac{qL_2}{2EI} \left( L_1^2 + L_1 L_2 + \frac{L_2^2}{3} \right) \\ u_{2B} &= \frac{qL_2 (8L_1^3 + 18L_1^2 L_2 + 12L_1 L_2^2 + 3L_2^3)}{24EI} \end{aligned} \quad (16.53)$$

## 16.10 Una trave a più campate

Si consideri la trave di Figura 16.17, caricata da due forze concentrate  $F$  ed  $F_1$  nella mezziera del primo e dell'ultimo tratto. Si vuole conoscere la rotazione relativa nella cerniera in  $C$ .

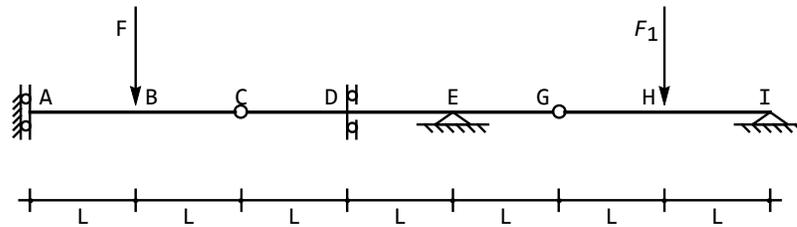


Figura 16.17: Una trave composta da tre tratti, soggetta a due forze indipendenti

Le sei equazioni di equilibrio per i tre tratti della trave si scrivono:

$$\begin{aligned}
 F + T_C &= 0 \\
 M_{rA} + FL &= 0 \\
 -T_C + R_E + T_G &= 0 \\
 -T_C 3L + M_{rD} + R_E L &= 0 \\
 -T_G + F_1 + R_I &= 0 \\
 -2T_G L + F_1 L &= 0
 \end{aligned} \tag{16.54}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 T_C &= -F \\
 M_{rA} &= -FL \\
 R_I &= -\frac{F_1}{2} \\
 T_G &= \frac{F_1}{2} \\
 R_E &= T_C - T_G = -F - \frac{F_1}{2} \\
 M_{rD} &= -R_E L + 3LT_C = F_1 \frac{L}{2} - 2FL
 \end{aligned} \tag{16.55}$$

Con questi valori, il diagramma del momento può essere tracciato abbastanza facilmente: esso sarà costante da  $A$  a  $B$ , e pari ad  $FL$ , e poi decrescere linearmente fino ad incontrare il bipendolo esterno, e passando per il punto di nullo in corrispondenza della cerniera  $C$ . Ne segue che il momento nella sezione a sinistra del bipendolo sarà pari a  $-FL$ . In  $D$  il diagramma del momento presenta una discontinuità, dovuta alla coppia reattiva del vincolo, e quindi nella sezione a destra del bipendolo esso varrà  $-F_1 L/2 + FL$ .

Analizzando ora l'ultima campata, si può dedurre che il diagramma del momento dovrà essere nullo sia in  $G$  che in  $I$ , mentre in corrispondenza della forza vale  $F_1L/2$ . Ciò permette il tracciamento del diagramma da  $I$  fino all'appoggio in  $E$ , e non resta che collegare i diagrammi per ottenere il carico fittizio di Figura 16.18, dove non è stato indicato, per esigenze di chiarezza, il valore del carico a destra del bipendolo, pari a:

$$M_{Ddes}^* = -\frac{F_1L}{2EI} + \frac{FL}{EI} \quad (16.56)$$

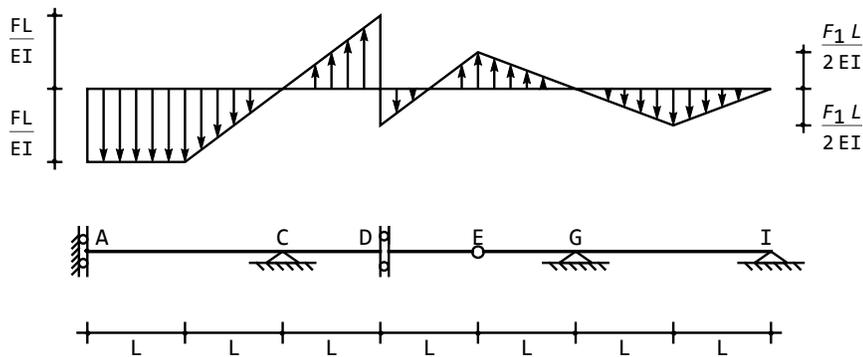


Figura 16.18: La trave ausiliaria per l'esempio di Figura 16.17

L'equazione di equilibrio per la traslazione verticale del primo tratto porta a scrivere:

$$R_C^* + \frac{FL}{EI}L = 0 \quad (16.57)$$

e quindi la richiesta rotazione relativa è pari:

$$\Delta\phi_C = -\frac{FL^2}{EI} \quad (16.58)$$



## Capitolo 17

# I coefficienti fondamentali

Sia nel calcolo di spostamenti attraverso il metodo di composizione, sia nella scrittura diretta delle equazioni di congruenza, si fa frequentemente uso di rotazioni e spostamenti relativi a semplici schemi isostatici: disponendo quindi di una opportuna “libreria” di risultati, il compito risulterà facilitato e sveltito. In questa breve Esercitazione, si vogliono fornire i cosiddetti *risultati fondamentali*, relativi agli schemi di trave a mensola e di trave semplicemente appoggiata, soggetti alle più comuni condizioni di carico.

Si tenga preliminarmente conto che banali considerazioni dimensionali portano ad esprimere le rotazioni come:

$$\begin{aligned}\phi &= \alpha_1 \frac{ML}{EI} \\ \phi &= \alpha_2 \frac{FL^2}{EI} \\ \phi &= \alpha_3 \frac{qL^3}{EI}\end{aligned}\tag{17.1}$$

rispettivamente in presenza di coppie applicate, di forze applicate, o di carichi distribuiti. Analogamente, gli spostamenti si scriveranno come:

$$\begin{aligned}u_2 &= \beta_1 \frac{ML^2}{EI} \\ u_2 &= \beta_2 \frac{FL^3}{EI} \\ u_2 &= \beta_3 \frac{qL^4}{EI}\end{aligned}\tag{17.2}$$

I coefficienti nondimensionali  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  dipenderanno dalle condizioni di vincolo. I casi di fondamentale interesse sono:

- 1 Trave a mensola: rotazione ed abbassamento all'estremo libero dovuti ad una coppia concentrata nell'estremo libero

- 2 Trave a mensola: rotazione ed abbassamento all'estremo libero dovuti ad una forza concentrata nell'estremo libero
- 3 Trave a mensola: rotazione ed abbassamento all'estremo libero dovuti ad un carico distribuito su tutta la luce
- 4 Trave appoggiata: rotazioni agli estremi dovute ad una coppia applicata in un estremo
- 5 Trave appoggiata: rotazioni agli estremi dovute ad una forza concentrata in mezzeria
- 6 Trave appoggiata: rotazioni agli estremi dovute ad un carico distribuito su tutta la luce

Questi dodici coefficienti possono dedursi utilizzando il metodo della doppia integrazione, oppure — più semplicemente — il metodo delle analogie di Mohr.

## 17.1 La trave a mensola

### Caso 1. La mensola soggetta a coppia concentrata

Il primo caso è illustrato in Figura 17.1. Il diagramma del momento è immediato, in quanto è costante, e pari alla coppia applicata.

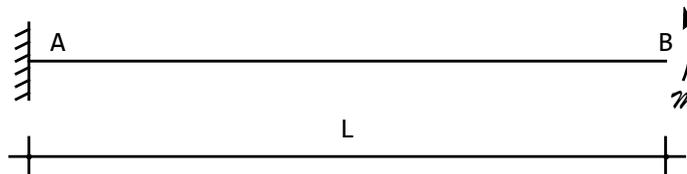


Figura 17.1: Lo schema 1: trave a mensola con coppia all'estremo

La trave ausiliaria è costituita da una mensola libera a sinistra ed incastrata a destra, e per essa bisogna calcolare il momento (fittizio) ed il taglio (fittizio) in  $B$ . Le reazioni (fittizie) possono calcolarsi con due equazioni di equilibrio, sullo schema di Figura 17.2:

$$\begin{aligned} R_B^* + \frac{\mathcal{M}L}{EI} &= 0 \\ \mathcal{M}_B^* + \frac{\mathcal{M}L^2}{EI} \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned} \tag{17.3}$$

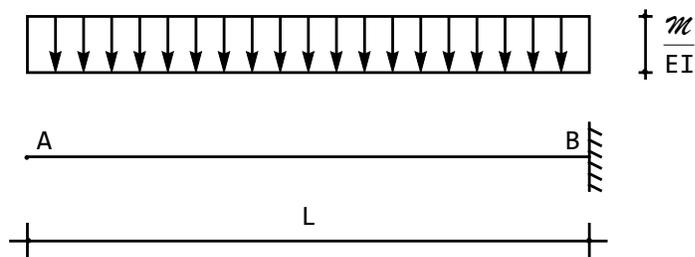


Figura 17.2: La trave ausiliaria per lo schema 1

da cui taglio e momento fittizio:

$$\begin{aligned} T^*(L) &= R_B^* = -\frac{ML}{EI} \\ M^*(L) &= \mathcal{M}_B^* = -\frac{ML^2}{2EI} \end{aligned} \quad (17.4)$$

e poichè la rotazione è pari al taglio fittizio cambiato di segno, mentre l'abbassamento è pari al momento fittizio, può concludersi:

$$\begin{aligned} \phi(L) &= \frac{ML}{EI} \\ u_2(L) &= -\frac{ML^2}{2EI} \end{aligned} \quad (17.5)$$

### Caso 2. La mensola soggetta a forza concentrata

Il secondo caso è illustrato in Figura 17.3. Il diagramma del momento è lineare, si annulla in corrispondenza della forza, e può esprimersi come:

$$M(x_3) = -F(L - x_3) \quad (17.6)$$

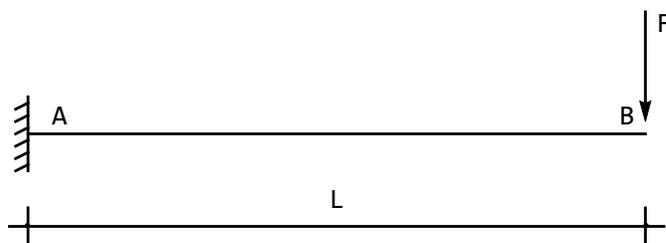


Figura 17.3: Lo schema 2: trave a mensola con forza all'estremo

La trave ausiliaria è costituita da una mensola libera a sinistra ed incastrata a destra, e per essa bisogna calcolare il momento (fittizio) ed il taglio (fittizio)

in  $B$ . Le reazioni (fittizie) possono calcolarsi con due equazioni di equilibrio, sullo schema di Figura 17.4:

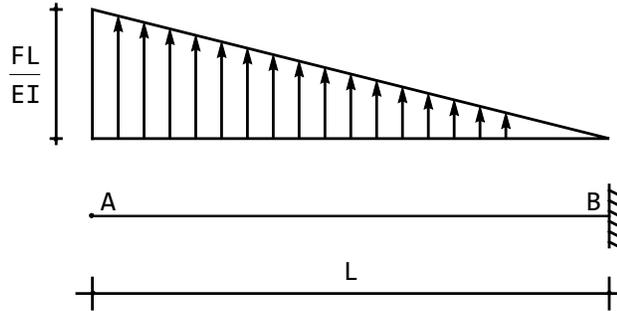


Figura 17.4: La trave ausiliaria per lo schema 2

$$\begin{aligned} R_B^* - \frac{1}{2} \frac{FL}{EI} L &= 0 \\ \mathcal{M}_B^* - \frac{1}{2} \frac{FL}{EI} L \frac{2}{3} L &= 0 \end{aligned} \quad (17.7)$$

da cui taglio e momento fittizio:

$$\begin{aligned} T^*(L) = R_B^* &= \frac{FL^2}{2EI} \\ M^*(L) = \mathcal{M}_B^* &= \frac{FL^3}{3EI} \end{aligned} \quad (17.8)$$

e poichè la rotazione è pari al taglio fittizio cambiato di segno, mentre l'abbassamento è pari al momento fittizio, può concludersi:

$$\begin{aligned} \phi(L) &= -\frac{FL^2}{2EI} \\ u_2(L) &= \frac{FL^3}{3EI} \end{aligned} \quad (17.9)$$

### Caso 3. La mensola soggetta a carico distribuito

Il terzo caso è illustrato in Figura 17.5. Il diagramma del momento è quadratico, si annulla — insieme alla sua derivata — in corrispondenza dell'estremo, e può esprimersi come:

$$M(x_3) = -\frac{q}{2} (L - x_3)^2 \quad (17.10)$$

La trave ausiliaria è costituita da una mensola libera a sinistra ed incastrata a destra, e per essa bisogna calcolare il momento (fittizio) ed il taglio (fittizio)

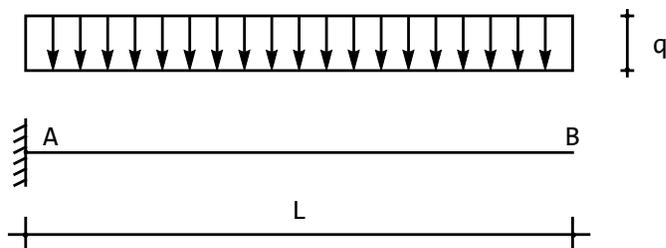


Figura 17.5: Lo schema 3: trave a mensola con forza all'estremo

in  $B$  dovuto al carico fittizio:

$$q^*(x_3) = -\frac{q}{2EI} (L - x_3)^2 \quad (17.11)$$

Le due equazioni di equilibrio permettono di scrivere, sullo schema di Figura 17.6:

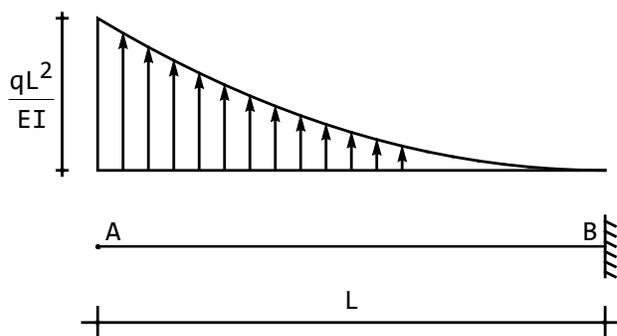


Figura 17.6: La trave ausiliaria per lo schema 3

$$\begin{aligned} R_B^* + \int_0^L q^*(x_3) dx_3 &= 0 \\ \mathcal{M}_B^* + \int_0^L q^*(x_3) (L - x_3) dx_3 &= 0 \end{aligned} \quad (17.12)$$

Gli integrali non presentano problemi, e quindi può scriversi:

$$\begin{aligned} T^*(L) = R_B^* &= \frac{qL^3}{6EI} \\ \mathcal{M}^*(L) = \mathcal{M}_B^* &= \frac{qL^4}{8EI} \end{aligned} \quad (17.13)$$

Carico	Rotazioni	Spostamenti
Coppia concentrata	1	$-\frac{1}{2}$
Forza concentrata	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
Carico distribuito	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

Tabella 17.1: I coefficienti fondamentali per la trave a mensola

e poichè la rotazione è pari al taglio fittizio cambiato di segno, mentre l'abbassamento è pari al momento fittizio, può concludersi:

$$\begin{aligned}\phi(L) &= -\frac{qL^3}{6EI} \\ u_2(L) &= \frac{qL^4}{8EI}\end{aligned}\tag{17.14}$$

In definitiva, i coefficienti fondamentali per la trave a mensola sono sintetizzabili come in Tabella 17.1

## 17.2 La trave appoggiata

### Caso 4. La trave appoggiata soggetta a coppia concentrata in un estremo

Il quarto caso è illustrato in Figura 17.7. Il diagramma del momento è immediato, in quanto è lineare, e pari alla coppia applicata a destra, annullandosi a sinistra.

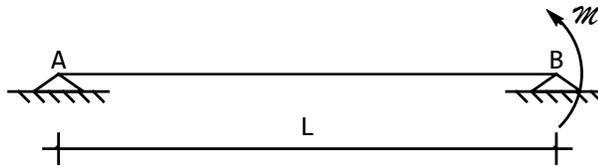


Figura 17.7: Lo schema 4: trave appoggiata con coppia all'estremo

La trave ausiliaria è costituita ancora da una trave appoggiata agli estremi, e per essa bisogna calcolare i tagli (fittizio) agli estremi. Le reazioni (fittizie) possono calcolarsi con due equazioni di equilibrio, sullo schema di Figura 17.8:

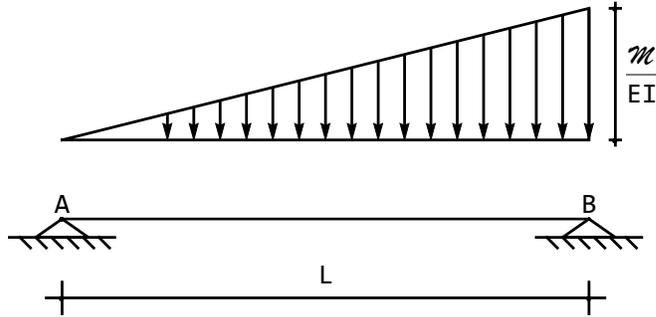


Figura 17.8: La trave ausiliaria per lo schema 4

$$\begin{aligned} R_A^* + R_B^* + \frac{1}{2} \frac{ML}{EI} &= 0 \\ R_A^* L + \frac{1}{2} \frac{ML}{EI} \frac{L}{3} &= 0 \end{aligned} \quad (17.15)$$

da cui subito:

$$\begin{aligned} T^*(0) &= -R_A^* = \frac{ML}{6EI} \\ T^*(L) &= R_B^* = -\frac{ML}{3EI} \end{aligned} \quad (17.16)$$

e poichè la rotazione è pari al taglio fittizio cambiato di segno, può concludersi:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= -\frac{ML}{6EI} \\ \phi(L) &= \frac{ML}{3EI} \end{aligned} \quad (17.17)$$

Il caso gemello, in cui la coppia agisce sull'estremo di sinistra, può essere trattato identicamente, e porta alle rotazioni:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \frac{ML}{3EI} \\ \phi(L) &= -\frac{ML}{6EI} \end{aligned} \quad (17.18)$$

### Caso 5. La trave appoggiata soggetta a forza in mezzzeria

Il quinto caso è illustrato in Figura 17.9. Il diagramma del momento è immediato, in quanto è lineare a tratti, si annulla agli estremi, e vale  $\frac{FL}{4}$  in mezzzeria:

La trave ausiliaria è costituita ancora da una trave appoggiata agli estremi, e per essa bisogna calcolare i tagli (fittizio) agli estremi. Le reazioni (fittizie) possono calcolarsi con due equazioni di equilibrio, sullo schema di Figura 17.10:

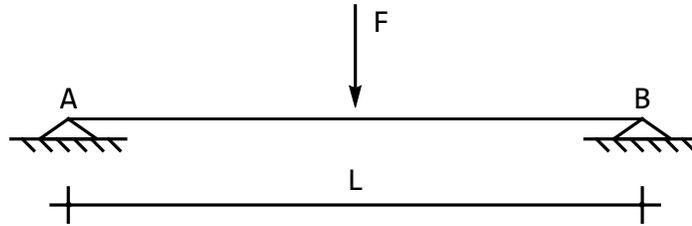


Figura 17.9: Lo schema 5: trave appoggiata con forza in mezzeria

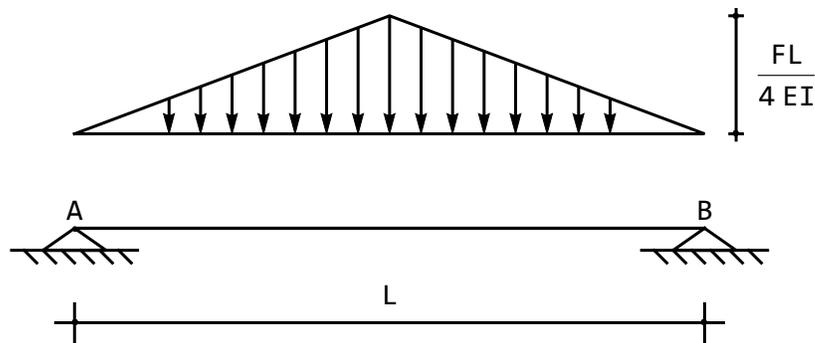


Figura 17.10: La trave ausiliaria per lo schema 5

$$\begin{aligned}
 R_A^* + R_B^* + 2 \frac{1}{2} \frac{FL}{4EI} L &= 0 \\
 R_A^* L + \frac{1}{2} \frac{FL}{4EI} \frac{L}{2} \left( \frac{L}{2} + \frac{1}{3} \frac{L}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{FL}{4EI} \frac{L}{2} \frac{2}{3} \frac{L}{2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{17.19}$$

da cui subito:

$$\begin{aligned}
 T^*(0) &= -R_A^* = \frac{FL^2}{16EI} \\
 T^*(L) &= R_B^* = -\frac{FL^2}{16EI}
 \end{aligned}
 \tag{17.20}$$

e poichè la rotazione è pari al taglio fittizio cambiato di segno, può concludersi:

$$\begin{aligned}
 \phi(0) &= -\frac{FL^2}{16EI} \\
 \phi(L) &= \frac{FL^2}{16EI}
 \end{aligned}
 \tag{17.21}$$

**Caso 6. - La trave appoggiata soggetta a carico distribuito**

Il sesto ed ultimo caso è illustrato in Figura 17.11. Il diagramma del momento è parabolico, si annulla agli estremi, e vale  $\frac{qL^2}{8}$  in mezzeria, dove presenta tangente orizzontale:

$$M(x_3) = \frac{q}{2}x_3(L - x_3) \quad (17.22)$$

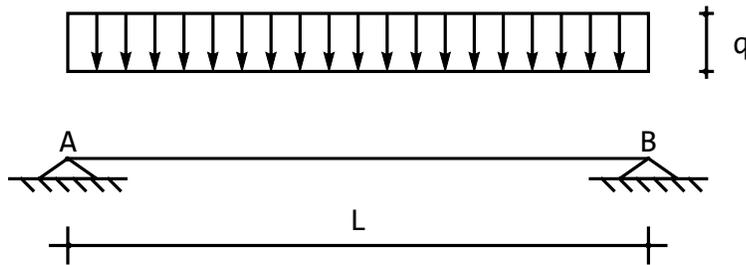


Figura 17.11: Lo schema 6: trave appoggiata con carico distribuito

La trave ausiliaria è costituita ancora da una trave appoggiata agli estremi, e per essa bisogna calcolare i tagli (fittizio) agli estremi. Le reazioni (fittizie) possono calcolarsi con due equazioni di equilibrio, sullo schema di Figura 17.12:

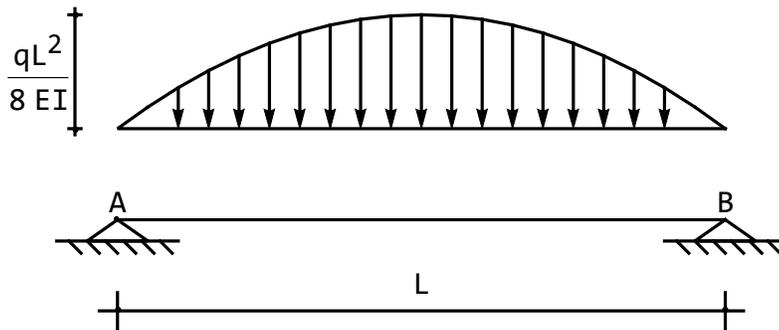


Figura 17.12: La trave ausiliaria per lo schema 6

$$\begin{aligned} R_A^* + R_B^* + \int_0^L q^*(x_3) dx_3 &= 0 \\ R_A^* L + \int_0^L q^*(x_3)(L - x_3) dx_3 &= 0 \end{aligned} \quad (17.23)$$

Carico	Rotazioni a sinistra	Rotazioni a destra
Coppia concentrata	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
Forza concentrata	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
Carico distribuito	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$

Tabella 17.2: I coefficienti fondamentali per la trave appoggiata

e svolgendo gli integrali:

$$\begin{aligned} R_A^* + R_B^* + \frac{qL^3}{12EI} &= 0 \\ R_A^*L + \frac{qL^4}{24EI} &= 0 \end{aligned} \quad (17.24)$$

Può quindi scriversi:

$$\begin{aligned} T^*(0) &= -R_A^* = \frac{qL^3}{24EI} \\ T^*(L) &= R_B^* = -\frac{qL^3}{24EI} \end{aligned} \quad (17.25)$$

e poichè la rotazione è pari al taglio fittizio cambiato di segno, può concludersi:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= -\frac{qL^3}{24EI} \\ \phi(L) &= \frac{qL^3}{24EI} \end{aligned} \quad (17.26)$$

In definitiva, i coefficienti fondamentali per la trave appoggiata sono sintetizzabili come in Tabella 17.2.

## Capitolo 18

# La composizione degli spostamenti

### 18.1 L'utilizzo dei risultati fondamentali

E' spesso possibile, per calcolare uno spostamento o una rotazione, utilizzare i risultati fondamentali, dedotti per via analitica su schemi elementari, combinando i cinematici di tratti parziali di struttura. Un esempio classico è riportato in Figura 18.1, dove una trave a mensola di luce  $L$  è caricata da una forza verticale agente ad un'ascissa generica  $L_1$

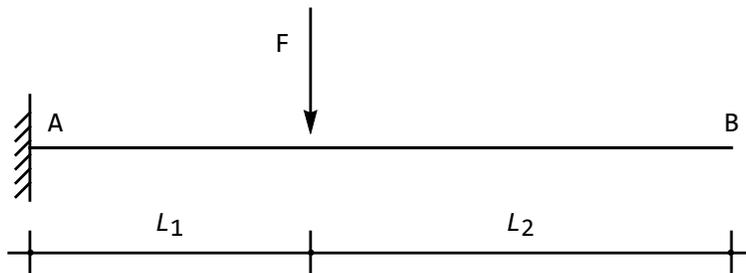


Figura 18.1: Uno schema elementare per la composizione degli spostamenti

Lo spostamento nell'estremo libero può calcolarsi riguardandolo come la somma di due contributi, così come sintetizzato in Figura 18.2: l'abbassamento del punto di applicazione della forza, più un'aliquota dovuta alla rotazione dello stesso punto di applicazione, moltiplicato per la distanza  $L_2$ . Per questo secondo contributo, infatti, il tratto  $BC$  ruota rigidamente, non essendo soggetto a nessuna forza.

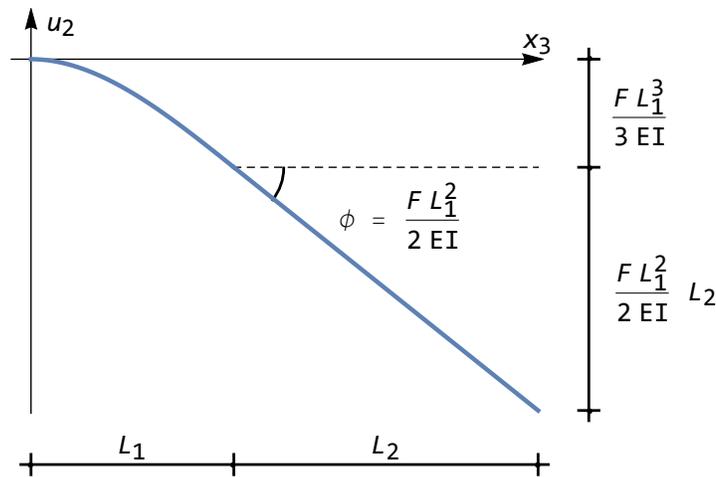


Figura 18.2: Lo spostamento all'estremo libero come somma del contributo elastico e del cinematiso rigido

Si ha pertanto:

$$u_2(x_3 = L_1 + L_2) = u_2(x_3 = L_1) + \phi(x_3 = L_1)L_2 \quad (18.1)$$

e conoscendo i risultati fondamentali relativi alla trave a mensola:

$$u_2(x_3 = L_1 + L_2) = \frac{FL_1^3}{3EI} + \frac{FL_1^2}{2EI}L_2 \quad (18.2)$$

Il resto del capitolo è dedicato all'applicazione di questa idea ad esempi via via più complessi.

## 18.2 Trave a mensola con carico parziale

Si consideri la struttura a mensola, soggetta ad un carico uniformemente distribuito su una porzione di trave, come illustrato in Figura 18.3. Se si intende conoscere lo spostamento e la rotazione dell'estremo libero, può operarsi una composizione degli spostamenti:

- in un primo passo, la parte  $AB$  viene considerata fissa, e la restante parte  $BC$  si comporta come una mensola di luce  $L_2$  soggetta ad un carico distribuito su tutta la luce. Si ottiene una prima aliquota di risultati, leggibili dalla Figura 18.4:

$$\begin{aligned} u_{2C}^{(1)} &= \frac{qL_2^4}{8EI} \\ \phi_C^{(1)} &= -\frac{qL_2^3}{6EI} \end{aligned} \quad (18.3)$$

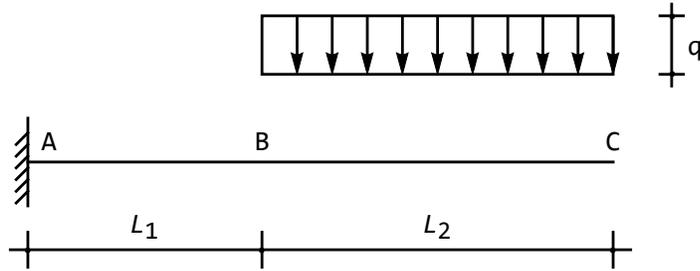


Figura 18.3: Calcolo di spostamenti e rotazioni nell'estremo libero

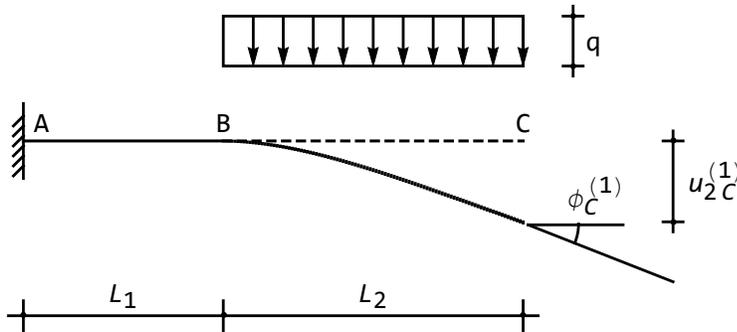


Figura 18.4: Il tratto  $AB$  è rigido,  $BC$  è una mensola di luce  $L_2$

- in un secondo passo, si studia la mensola  $AB$ , soggetta allo sforzo di taglio ed al momento flettente in  $B$ , ossia alla forza  $T_B$  diretta verso il basso, ed alla coppia flettente  $M_B$  antioraria:

$$\begin{aligned} T_B &= qL_2 \\ M_B &= -\frac{qL_2^2}{2} \end{aligned} \quad (18.4)$$

Per questa struttura, si hanno in  $B$  gli spostamenti e le rotazioni:

$$\begin{aligned} u_{2B} &= qL_2 \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{qL_2^2}{2} \frac{L_1^2}{2EI} \\ \phi_B &= -qL_2 \frac{L_1^2}{2EI} - \frac{qL_2^2}{2} \frac{L_1}{EI} \end{aligned} \quad (18.5)$$

- In questa fase, la parte  $BC$  deve essere considerata rigida, e si ha quindi la seconda aliquota di spostamenti e rotazioni in  $C$ , deducibile dalla Figura 18.5:

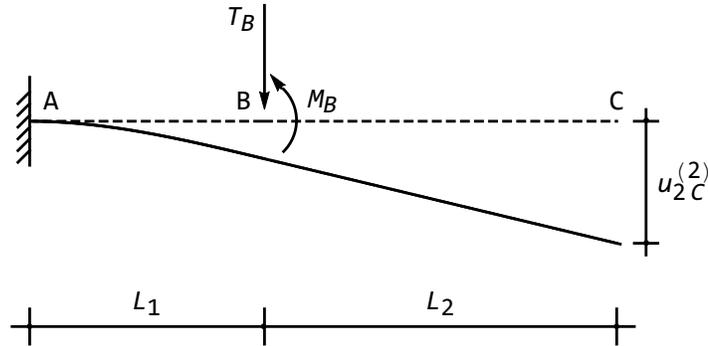


Figura 18.5: Il tratto  $BC$  è rigido,  $AB$  è soggetto al taglio ed al momento flettente

$$\begin{aligned}
 u_{2C}^{(2)} &= u_{2B} - \phi_B L_2 = qL_2 \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{qL_2^2}{2} \frac{L_1^2}{2EI} + qL_2^2 \frac{L_1^2}{2EI} + \frac{qL_2^3}{2} \frac{L_1}{EI} \\
 \phi_C^{(2)} &= \phi_B = -qL_2 \frac{L_1^2}{2EI} - \frac{qL_2^2}{2} \frac{L_1}{EI}
 \end{aligned} \quad (18.6)$$

- infine, gli spostamenti e le rotazioni sono la somma di quanto ottenuto nei due passi precedenti:

$$\begin{aligned}
 u_{2C} &= \frac{qL_2^4}{8EI} + qL_2 \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{qL_2^2}{2} \frac{L_1^2}{2EI} + qL_2^2 \frac{L_1^2}{2EI} + \frac{qL_2^3}{2} \frac{L_1}{EI} \\
 \phi_C^{(1)} &= -\frac{qL_2^3}{6EI} - qL_2 \frac{L_1^2}{2EI} - \frac{qL_2^2}{2} \frac{L_1}{EI}
 \end{aligned} \quad (18.7)$$

Se il carico si estende a metà luce, allora  $L_1 = L_2 = L/2$ , si ha:

$$\begin{aligned}
 u_{2C} &= \frac{41}{384} \frac{qL^4}{EI} \\
 \phi_C^{(1)} &= -\frac{7}{48} \frac{qL^3}{EI}
 \end{aligned} \quad (18.8)$$

### 18.3 Trave appoggiata caricata parzialmente

Si voglia ora calcolare le rotazioni agli estremi per la trave semplicemente appoggiata di Figura 18.6.

Le reazioni possono essere calcolate come:

$$\begin{aligned}
 R_A &= -\frac{q}{2(L_1 + L_2)} L_2^2 \\
 R_C &= -\frac{q}{2(L_1 + L_2)} L_2 (2L_1 + L_2)
 \end{aligned} \quad (18.9)$$

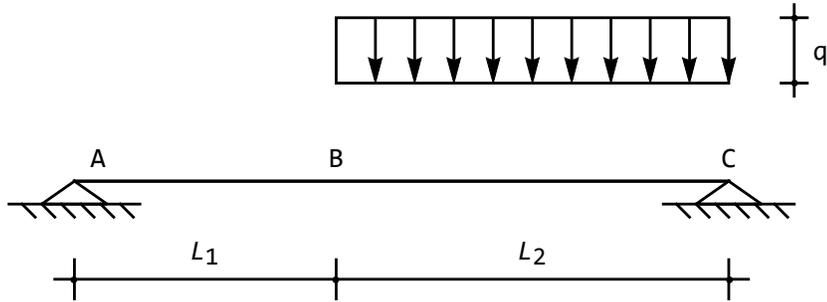


Figura 18.6: Una trave appoggiata soggetta ad un carico parziale

e quindi in  $B$  si hanno le caratteristiche:

$$\begin{aligned} T_B &= -R_A = \frac{q}{2(L_1 + L_2)} L_2^2 \\ M_B &= -R_A L_1 = \frac{q}{2(L_1 + L_2)} L_1 L_2^2 \end{aligned} \quad (18.10)$$

Ciò premesso, per utilizzare la composizione degli spostamenti, si operi secondo i seguenti passi:

- si consideri incastrato e rigido il tratto  $AB$ , mentre il tratto  $BC$ , deformabile, è soggetto al carico distribuito  $q$ , ed alla reazione dell'appoggio  $R_C$ . In questa fase si genera uno spostamento  $u_{2C}^{(1)}$  ed una rotazione  $\phi_C^{(1)}$  in  $C$ , leggibili dalla Figura 18.7.

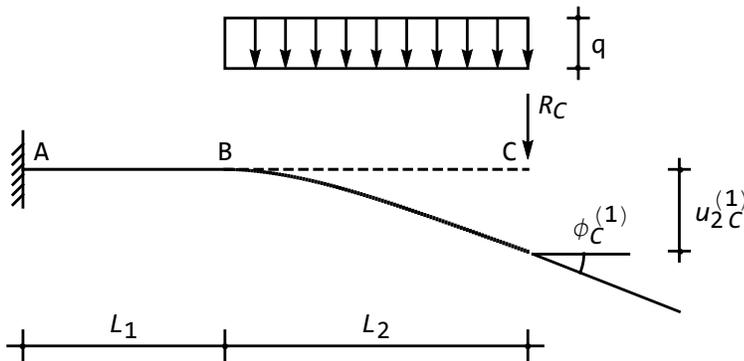


Figura 18.7: Fase 1 - Il tratto  $AB$  è rigido e vincolato con un incastro,  $BC$  è una mensola soggetta al carico ed alla reazione

- si considera il tratto  $AB$  come deformabile, e soggetto al taglio  $T_B$  ed al momento  $M_B$ , mentre il tratto  $BC$  è considerato rigido. Si ha in  $C$  uno

spostamento  $u_{2C}^{(2)}$  ed una rotazione  $\phi_C^{(2)}$ , forniti a partire dalla Figura 18.8.

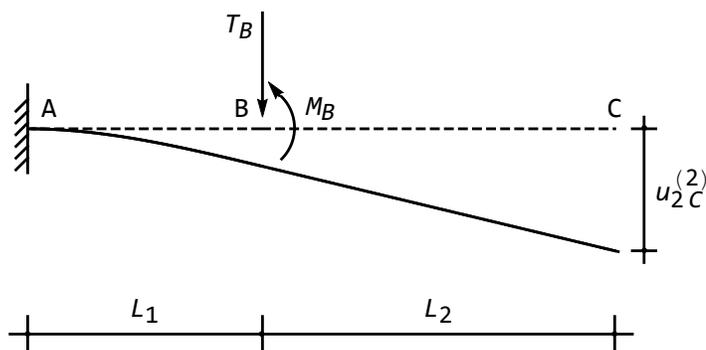


Figura 18.8: Fase 2 - Il tratto  $BC$  è rigido,  $AB$  è soggetto al taglio ed al momento flettente, ed è ancora vincolato con un incastro

- lo spostamento totale in  $C$  è quindi pari alla somma dei due contributi precedenti:

$$\begin{aligned} u_{2C}^{(3)} &= u_{2C}^{(1)} + u_{2C}^{(2)} \\ \phi_C^{(3)} &= \phi_C^{(1)} + \phi_C^{(2)} \end{aligned} \quad (18.11)$$

- si ripristina la congruenza, riportando a zero lo spostamento dell'appoggio  $C$ . A ciò fare, basta assegnare alla trave  $AC$ , rigida, una rotazione intorno ad  $A$ , pari a:

$$\phi_A = \frac{u_{2C}^{(3)}}{(L_1 + L_2)} \quad (18.12)$$

come illustrato in Figura 18.9.

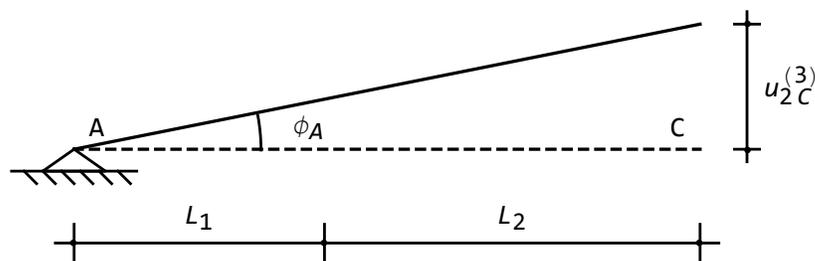


Figura 18.9: Fase 3 - L'intera trave è rigida, si ripristina la congruenza in  $C$

- Infine, la rotazione in  $C$  sarà:

$$\phi_C = \phi_C^{(3)} + \phi_A \quad (18.13)$$

Si noti che tutte queste operazioni sono condotte su schemi elementari, per cui i valori numerici sono immediatamente deducibili. Nel passo 1, si ha:

$$\begin{aligned} u_{2C}^{(1)} &= \frac{qL_2^4}{8EI} + R_C \frac{L_2^3}{3EI} \\ \phi_C^{(1)} &= -\frac{qL_2^3}{6EI} - R_C \frac{L_2^2}{2EI} \end{aligned} \quad (18.14)$$

Nel passo 2, si calcolano prima abbassamenti e rotazioni in  $B$ , dovuti a  $T_B$  ed  $M_B$ :

$$\begin{aligned} u_{2B}^{(2)} &= T_B \frac{L_1^3}{3EI} - M_B \frac{L_1^2}{2EI} \\ \phi_B^{(2)} &= -T_B \frac{L_1^2}{2EI} + M_B \frac{L_1}{EI} \end{aligned} \quad (18.15)$$

da cui possono dedursi abbassamenti e rotazioni in  $C$ :

$$\begin{aligned} u_{2C}^{(2)} &= u_{2B}^{(2)} + \phi_B^{(2)} L_2 = T_B \frac{L_1^3}{3EI} - M_B \frac{L_1^2}{2EI} + T_B \frac{L_1^2}{2EI} L_2 - M_B \frac{L_1}{EI} L_2 \\ \phi_C^{(2)} &= \phi_B^{(2)} = -T_B \frac{L_1^2}{2EI} + M_B \frac{L_1}{EI} \end{aligned} \quad (18.16)$$

Nella fase 3 si giunge agli spostamenti:

$$\begin{aligned} u_{2C}^{(3)} &= \frac{qL_2^4}{8EI} + R_C \frac{L_2^3}{3EI} + T_B \frac{L_1^3}{3EI} - M_B \frac{L_1^2}{2EI} + T_B \frac{L_1^2}{2EI} L_2 - M_B \frac{L_1}{EI} L_2 \\ \phi_C^{(3)} &= -\frac{qL_2^3}{6EI} - R_C \frac{L_2^2}{2EI} - T_B \frac{L_1^2}{2EI} + M_B \frac{L_1}{EI} \end{aligned} \quad (18.17)$$

e sostituendo i valori di reazioni e caratteristiche:

$$\begin{aligned} u_{2C}^{(3)} &= -\frac{qL_2^2 (2L_1^2 + 4L_1L_2 + L_2^2)}{24EI} \\ \phi_C^{(3)} &= \frac{qL_2^2 (3L_1 + L_2)}{12EI} \end{aligned} \quad (18.18)$$

L'ultimo passo porta a scrivere le richieste rotazioni:

$$\phi_A = \frac{u_{2C}^{(3)}}{(L_1 + L_2)} = -\frac{qL_2^2 (2L_1^2 + 4L_1L_2 + L_2^2)}{24EI (L_1 + L_2)} \quad (18.19)$$

$$\phi_C = \phi_C^{(3)} + \phi_A = \frac{qL_2^2 (2L_1 + L_2)^2}{24EI (L_1 + L_2)} \quad (18.20)$$

Se il carico si estende per metà luce, si può porre  $L_1 = L_2 = L/2$ , e le rotazioni valgono:

$$\begin{aligned}\phi_A &= -\frac{7}{384} \frac{qL^3}{EI} \\ \phi_C &= \frac{9}{384} \frac{qL^3}{EI}\end{aligned}\quad (18.21)$$

## 18.4 La cosiddetta "forca"

Si consideri la struttura di Figura 18.10, e si voglia conoscere l'abbassamento del punto di applicazione della forza.

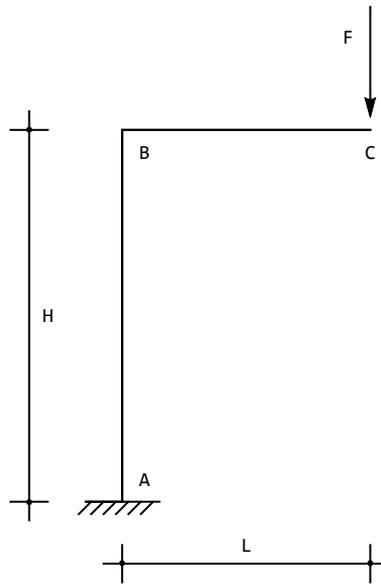


Figura 18.10: La "forca"

Il diagramma del momento è immediatamente tracciabile, in quanto esso dovrà annullarsi in corrispondenza della forza, e variare linearmente fino al punto B, dove assumerà il valore  $FL$ . Tale valore, poi, rimane costante lungo tutto il ritto AB. Ne segue che il ritto AB può riguardarsi come una mensola soggetta alla coppia  $FL$  in sommità, e quindi la rotazione del punto B è immediatamente calcolabile:

$$\phi_B = FL \frac{H}{EI} \quad (18.22)$$

Per effetto di tale rotazione, il traverso BC, *considerato rigido*, subirà degli abbassamenti, ed in particolare il punto C si abbasserà di:

$$u_{2C}^{(1)} = \phi_B L = FL^2 \frac{H}{EI} \quad (18.23)$$

A tale abbassamento bisogna aggiungere l'aliquota dovuta al traverso  $BC$ , considerato *deformabile*, e riguardato come incastrato in  $B$ :

$$u_{2C}^{(2)} = \frac{FL^3}{3EI} \quad (18.24)$$

In definitiva, il richiesto spostamento vale, come può leggersi dalla Figura 18.11:

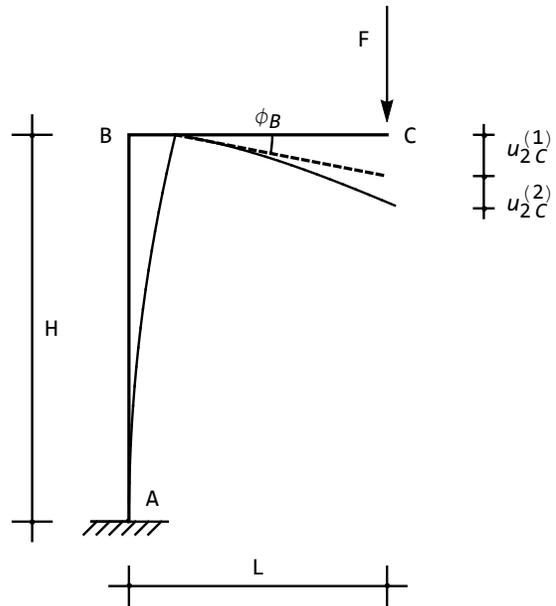


Figura 18.11: Lo spostamento del punto di applicazione della forza secondo il metodo delle composizioni

$$u_{2C} = \frac{FL^3}{3EI} + FL^2 \frac{H}{EI} = \frac{FL^2}{EI} \left( \frac{L}{3} + H \right) \quad (18.25)$$



## Capitolo 19

# Calcolo di spostamenti su strutture isostatiche

In questo Capitolo si illustrano due metodologie per il calcolo di spostamenti su strutture isostatiche intelaiate. Nel primo caso si utilizza il principio dei lavori virtuali per solidi deformabili, mentre nel secondo si scrivono e si risolvono le equazioni differenziali della linea elastica.

Più precisamente, si utilizza il principio delle forze virtuali, in quanto si adatterà sempre — come sistema di spostamenti geometricamente ammissibile — lo schema strutturale reale di partenza. Viceversa, il sistema (fittizio) di forze verrà scelto in base allo spostamento richiesto, ed in modo da semplificare la scrittura del lavoro esterno.

Per quanto riguarda l'approccio differenziale, si adotta un procedimento simile a quello della doppia integrazione già usato per le travi: tratto per tratto, si scrivono le espressioni delle caratteristiche della sollecitazione interna, basandosi sulle note equazioni differenziali che legano i carichi alle caratteristiche stesse, ed alle loro derivate. Poi si impongono le condizioni ai limiti di equilibrio in corrispondenza dei nodi, e l'isostaticità della struttura garantisce di poter risolvere le risultanti equazioni, fornendo infine il quadro tensionale.

A partire dalle espressioni così ottenute, si deducono — tratto per tratto — le espressioni di rotazioni e spostamenti (assiali e trasversali) attraverso opportune integrazioni:

$$\begin{aligned}\phi &= \int \frac{M}{EI} dx_3 \\ u_2 &= - \int \phi dx_3 \\ u_3 &= \int \frac{N}{EA} dx_3\end{aligned}\tag{19.1}$$

e le costanti di integrazione vengono dedotte attraverso la scrittura delle equazioni di congruenza nei nodi.

Il primo approccio è da preferire, qualora si desideri una singola quantità, mentre il secondo può risultare conveniente se si desiderano i diagrammi degli spostamenti lungo tutta la struttura. Infine, è spesso possibile semplificare l'approccio differenziale presupponendo che le deformabilità assiali delle aste siano trascurabili: in questa ipotesi le linee elastiche assiali si riducono a termini costanti, che possono in larga parte essere dedotti *a priori* a partire dai vincoli. Si tenga anche presente che è sempre possibile partire dai diagrammi di momenti e tagli, ottenuti attraverso il calcolo delle reazioni, ed implementare solo la seconda parte del metodo della doppia integrazione.

## 19.1 Trave appoggiata con coppia applicata

Si consideri la trave appoggiata di Figura 19.1, caricata da una coppia di intensità  $M$  in una ascissa generica. Si voglia dedurre, a partire dal principio dei lavori virtuali, l'abbassamento e la rotazione in corrispondenza della coppia.

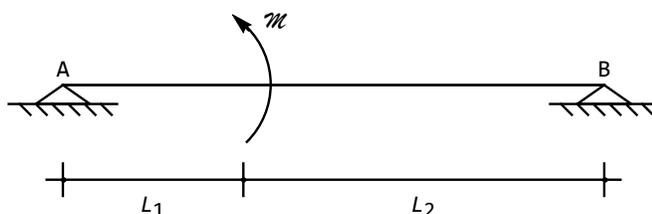


Figura 19.1: Una trave appoggiata con coppia in mezzeria

### Il calcolo dell'abbassamento

Si assume lo schema di Figura 19.1 come sistema di spostamenti, mentre il sistema di forze fittizie è riportato in Figura 19.2, ed è costituito da una singola forza verticale di valore unitario in corrispondenza della sezione di cui si vuol calcolare lo spostamento. Il principio dei lavori virtuali si scrive, trascurando le

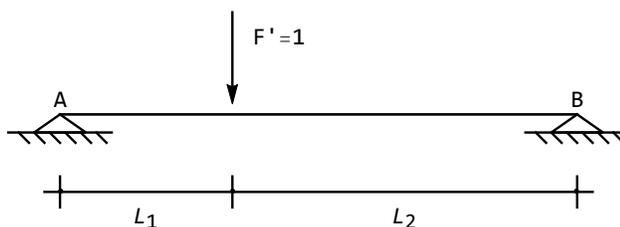


Figura 19.2: Il sistema di forze fittizie scelto per il calcolo dell'abbassamento in mezzeria

deformabilità taglianti:

$$\int_0^L M_1 \frac{M}{EI} dx_3 = u_2(L_1) \quad (19.2)$$

dove  $M_1$  è il momento fittizio da calcolare sullo schema di Figura 19.2, mentre  $M$  è il momento reale, da calcolare sullo schema di Figura 19.1. Il tracciamento dei diagrammi non presenta difficoltà, e porta a scrivere:

$$M(x_3) = \begin{cases} \frac{\mathcal{M}}{L_1 + L_2} x_3, & x_3 \in [0, L_1]; \\ \frac{\mathcal{M}}{L_1 + L_2} (x_3 - L_2) & x_3 \in [0, L_2]. \end{cases} \quad (19.3)$$

Sullo schema di Figura 19.2 si ha:

$$M_1(x_3) = \begin{cases} \frac{L_2}{L_1 + L_2} x_3, & x_3 \in [0, L_1]; \\ \frac{L_1}{L_1 + L_2} (L_2 - x_3) & x_3 \in [0, L_2]. \end{cases} \quad (19.4)$$

Sarà quindi possibile svolgere gli integrali, ottenendo il richiesto spostamento:

$$\begin{aligned} u_2(L_1) &= \frac{\mathcal{M}}{EI} \int_0^{L_1} \frac{x_3}{L_1 + L_2} \frac{L_2}{L_1 + L_2} x_3 dx_3 + \\ &\frac{\mathcal{M}}{EI} \int_0^{L_2} \frac{(x_3 - L_2)}{L_1 + L_2} \frac{L_1}{L_1 + L_2} (-x_3 + L_2) dx_3 = \\ &\frac{\mathcal{M}L_1L_2(L_1 - L_2)}{3EI(L_1 + L_2)} \end{aligned} \quad (19.5)$$

## Il calcolo della rotazione

Si assume lo schema di Figura 19.1 come sistema di spostamenti, mentre il sistema di forze fittizie è ora riportato in Figura 19.3, ed è costituito da una singola coppia di valore unitario in corrispondenza della sezione di cui si vuol calcolare la rotazione.

Il principio dei lavori virtuali si scrive, trascurando le deformabilità taglianti:

$$\int_0^L M_1 \frac{M}{EI} dx_3 = \phi(L_1) \quad (19.6)$$

dove  $M_1$  è ora il momento fittizio da calcolare sullo schema di Figura 19.3, mentre  $M$  è il momento reale, da calcolare sullo schema di Figura 19.1. Può facilmente scriversi:

$$M_1(x_3) = \begin{cases} \frac{x_3}{L_1 + L_2}, & x_3 \in [0, L_1]; \\ \frac{(x_3 - L_2)}{L_1 + L_2} & x_3 \in [0, L_2]. \end{cases} \quad (19.7)$$

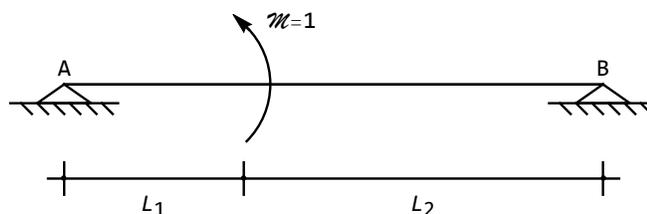


Figura 19.3: Il sistema di forze fittizio scelto per il calcolo dell'abbassamento in mezzeria

e quindi la rotazione si calcola come:

$$\phi(L_1) = \frac{M}{EI} \int_0^{L_1} \left( \frac{x_3}{L_1 + L_2} \right)^2 dx_3 + \frac{M}{EI} \int_0^{L_2} \left( \frac{(x_3 - L_2)}{L_1 + L_2} \right)^2 dx_3 = \frac{M(L_1^2 - L_1L_2 + L_2^2)}{3EI(L_1 + L_2)} \quad (19.8)$$

## 19.2 Trave appoggiata con variazione termica

Si consideri la trave appoggiata di Figura 19.4, soggetta ad una variazione termica  $\Delta T$  alla Navier, estesa a tutta la luce. Si voglia dedurre, utilizzando il principio dei lavori virtuali, l'abbassamento in corrispondenza di una sezione generica all'ascissa  $L_1$ .

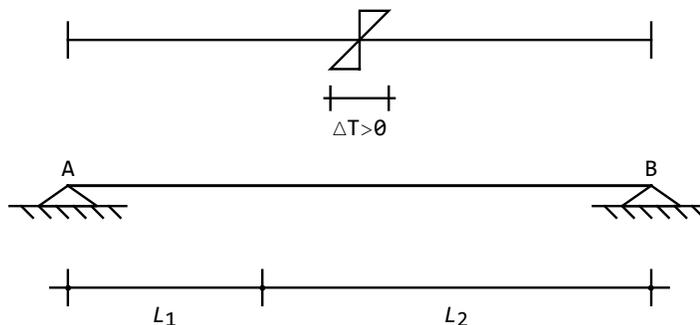


Figura 19.4: Una trave appoggiata soggetta a variazione termica

Si assume lo schema di Figura 19.4 come sistema di spostamenti, mentre il sistema di forze fittizie è riportato in Figura 19.2, ed è costituito da una singola forza verticale unitaria in corrispondenza della sezione di cui si vuol calcolare lo spostamento.

In presenza di distorsioni flessionali distribuite  $\mu(x_3)$ , il principio dei lavori virtuali si scrive, trascurando le deformabilità taglianti:

$$\int_0^L M_1 \left( \frac{M}{EI} - \mu \right) dx_3 = u_2(L_1) \quad (19.9)$$

$M$  è il momento reale, da calcolare sullo schema di Figura 19.4, ed è nullo, mentre la distorsione  $\mu$  è costante, e pari a:

$$\mu(x_3) = -\alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (19.10)$$

dove  $h$  è l'altezza della sezione retta.

Utilizzando le (19.4) si potrà quindi scrivere:

$$u_2(L_1) = \frac{\alpha \Delta T}{h} \int_0^{L_1} \frac{L_2}{L_1 + L_2} x_3 dx_3 + \frac{\alpha \Delta T}{h} \int_0^{L_2} \frac{L_1}{L_1 + L_2} (L_2 - x_3) dx_3 = \frac{\alpha \Delta T}{2h} L_1 L_2 \quad (19.11)$$

### 19.3 Trave appoggiata con cedimento elastico

Si consideri ora la trave di Figura 19.5, vincolata con un appoggio in  $A$ , ed un appoggio elasticamente cedevole in  $B$ , di rigidezza assiale  $k_{vB}$ . Sullo sbalzo agisce la forza  $F$ . Si vuol conoscere la rotazione in  $A$ . Il sistema di spostamenti

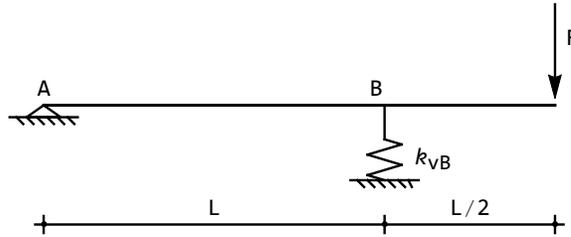


Figura 19.5: Una trave appoggiata con appoggio cedevole e sbalzo

è quello reale, mentre il sistema di forze fittizio prevede una coppia unitaria agente in  $A$ , come illustrato in Figura 19.6. Il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_0^{L+L/2} M_1 \frac{M}{EI} dx_3 = \phi(0) - c_{vB} R_B R_{B1} \quad (19.12)$$

dove  $c_{vB}$  è la cedibilità del vincolo in  $B$ , pari all'inverso della rigidezza,  $R_B$  è la reazione dell'appoggio cedevole sullo schema di Figura 19.5, ed  $R_{B1}$  è la reazione dello stesso appoggio sullo schema di Figura 19.6. Si noti infatti che il

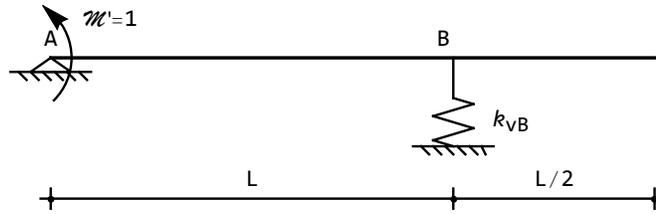


Figura 19.6: Il sistema di forze fittizio per il calcolo della rotazione in A

sistema di forze fittizie, in equilibrio, comprende sia la coppia unitaria in A, sia le reazioni vincolari, e che in questo caso la reazione fittizia  $R_{B1}$  compie lavoro.

Con semplici considerazioni di equilibrio si ha:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{F}{2} \\ R_B &= -\frac{3}{2}F \end{aligned} \quad (19.13)$$

mentre per il sistema di forze si ha:

$$\begin{aligned} R_{A1} &= -\frac{1}{L} \\ R_{B1} &= \frac{1}{L} \end{aligned} \quad (19.14)$$

I diagrammi del momento sono banali, e possono esprimersi analiticamente come:

$$M(x_3) = \begin{cases} -\frac{F}{2}x_3, & x_3 \in [0, L]; \\ -\frac{FL}{2}\left(1 - \frac{x_3}{2L}\right) & x_3 \in [0, \frac{L}{2}]. \end{cases} \quad (19.15)$$

$$M_1(x_3) = \begin{cases} 1 - \frac{x_3}{L} & x_3 \in [0, L]; \\ 0 & x_3 \in [0, \frac{L}{2}]. \end{cases} \quad (19.16)$$

Segue dalla (19.12):

$$\begin{aligned} \phi(0) &= c_{vB}R_B R_{B1} + \int_0^L M_1 \frac{M}{EI} dx_3 = \frac{3}{2} \frac{F}{L} c_{vB} + \frac{F}{2EI} \int_0^L x_3 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) dx_3 = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{F}{L} c_{vB} + \frac{FL^2}{12EI} \end{aligned} \quad (19.17)$$

Se la cedibilità si annulla, l'appoggio diviene perfetto, e la rotazione assume il valore canonico:

$$\phi(0) = \frac{FL^2}{12EI} \quad (19.18)$$

mentre la rotazione si annulla per:

$$c_{vB} = \frac{L^3}{18EI} \quad (19.19)$$

## 19.4 Trave con cedimento anelastico

Si vuole ora conoscere lo spostamento del bipendolo per la trave di Figura 19.7.

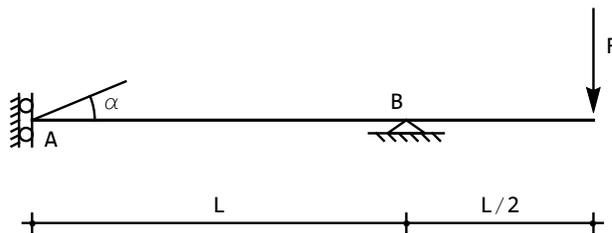


Figura 19.7: Una trave con bipendolo anelasticamente cedevole

Utilizzando lo schema reale come sistema di spostamenti geometricamente ammissibile, e lo schema di Figura 19.8 come sistema di forze staticamente ammissibile, si potrà scrivere il principio dei lavori virtuali:

$$\int_0^{L+L/2} M_1 \frac{M}{EI} dx_3 = u_2(0) + \mathcal{M}_{rA1} \alpha \quad (19.20)$$

dove  $\alpha$  è il cedimento anelastico angolare subito dal bipendolo, ed  $\mathcal{M}_{rA1}$  è la coppia reattiva fittizia che per esso compie lavoro.

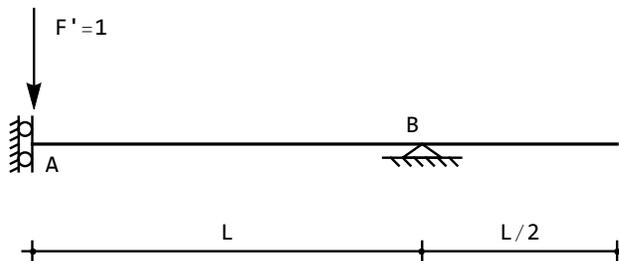


Figura 19.8: Lo schema fittizio per il calcolo dello spostamento in A

Il diagramma del momento per la trave reale è esprimibile come:

$$M(x_3) = \begin{cases} -\frac{FL}{2}, & x_3 \in [0, L]; \\ -\frac{FL}{2} \left(1 - \frac{x_3}{2L}\right), & x_3 \in [0, \frac{L}{2}]. \end{cases} \quad (19.21)$$

mentre il momento fittizio, dovuto alla forza unitaria, si esprime come:

$$M_1(x_3) = \begin{cases} L - x_3 & x_3 \in [0, L]; \\ 0 & x_3 \in [0, \frac{L}{2}]. \end{cases} \quad (19.22)$$

Infine, la coppia reattiva fittizia in  $A$  è pari al momento cambiato di segno:

$$\mathcal{M}_{rA1} = -L \quad (19.23)$$

In definitiva, la (19.20) porge:

$$u_2(0) = -\mathcal{M}_{rA1}\alpha + \int_0^{L+L/2} M_1 \frac{M}{EI} dx_3 = \alpha L - \frac{FL}{2EI} \int_0^L (L - x_3) dx_3 = \alpha L - \frac{FL^3}{4EI} \quad (19.24)$$

## 19.5 Un telaio con bipendolo interno

Si consideri il telaio di Figura 19.9, vincolato con due appoggi al piede e disconnesso con un bipendolo interno ad asse verticale nella mezzeria del traverso. Il carico  $q$ , costante, agisce sulla sola semiluce di sinistra. Si vuole calcolare lo spostamento relativo tra le due facce del bipendolo.

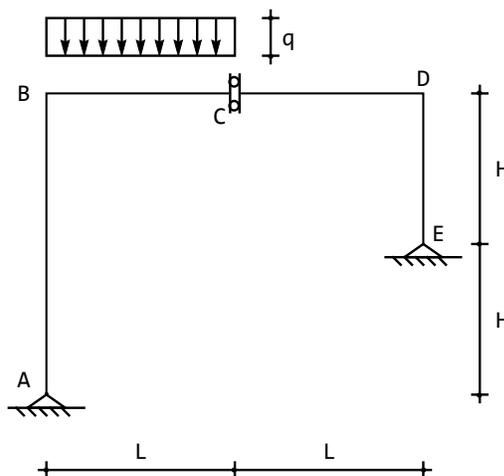


Figura 19.9: Un telaio isostatico di esempio per il calcolo di spostamenti

Utilizzando il principio dei lavori virtuali, si assume quale insieme di spostamenti quello risultante dallo schema (reale) di Figura 19.9, mentre il sistema di

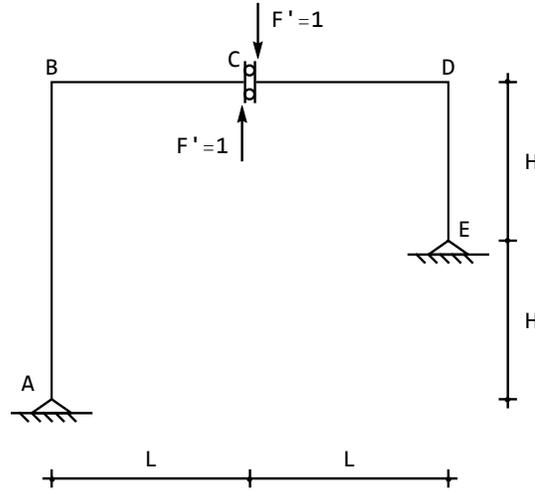


Figura 19.10: Il sistema di forze virtuali per il calcolo dello spostamento relativo in  $C$

forze (virtuali) sarà quello di Figura 19.10, in cui due forze  $F'$ , uguali e contrarie, di valore unitario, agiscono sulle due facce del bipendolo. Si avrà quindi:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = F' (u_{2Bdes} - F' u_{2Bsin}) = F' \Delta u_{2B} \quad (19.25)$$

dove  $M_1$  è il momento dovuto al sistema di Figura 19.10, ed  $M$  è il momento dovuto al sistema di Figura 19.9. Si noti che pur essendo unitarie, si è preferito continuare ad indicare le forze in modo simbolico, per dare più evidenza dimensionale alle formule.

### Il momento $M$

Il calcolo delle reazioni sul sistema di Figura 19.9 porta a scrivere:

$$\begin{aligned} R_{Ah} + N_C &= 0 \\ R_{Av} + qL &= 0 \\ M_C - 2N_C H - \frac{qL^2}{2} &= 0 \\ R_{Ev} &= 0 \\ R_{Eh} - N_C &= 0 \\ -M_C + N_C H &= 0 \end{aligned} \quad (19.26)$$

Dalla seconda si ha subito:

$$R_{Av} = -qL \quad (19.27)$$

mentre la terza e la sesta conducono a:

$$N_C = -\frac{qL^2}{2H} \quad (19.28)$$

da cui le due reazioni orizzontali:

$$R_{Ah} = -R_{Eh} = \frac{qL^2}{2H} \quad (19.29)$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 19.11.

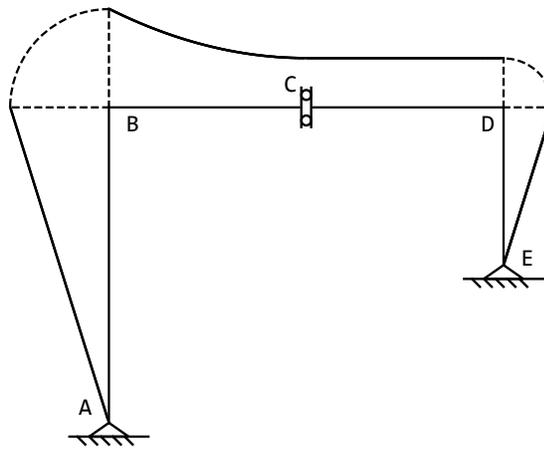


Figura 19.11: Il diagramma del momento per il telaio di Figura 19.9

Le espressioni analitiche del momento, nei vari tratti, possono trarsi immediatamente:

$$\begin{aligned} m^{BA}(x_3) &= -qL^2 \left(1 - \frac{x_3}{2H}\right) \\ m^{DE}(x_3) &= q\frac{L^2}{2} \left(1 - \frac{x_3}{H}\right) \\ m^{BC}(x_3) &= -\frac{q}{2}x_3^2 + qLx_3 - qL^2 \\ m^{CD}(x_3) &= -q\frac{L^2}{2} \end{aligned} \quad (19.30)$$

Per l'espressione del momento in  $BC$  si é considerato che:

$$\begin{aligned} m^{BC}(0) &= -qL^2 \\ m^{BC}(L) &= -q\frac{L^2}{2} \\ t^{BC}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (19.31)$$

### Il momento $M_1$

Il calcolo delle reazioni sul sistema di Figura 19.10 porta a scrivere:

$$\begin{aligned}
 R_{Ah1} + N_C &= 0 \\
 R_{Av1} - F' &= 0 \\
 M_C - 2N_C H + F' L &= 0 \\
 R_{Ev1} + F' &= 0 \\
 R_{Eh1} - N_C &= 0 \\
 -M_C + N_C H + F' L &= 0
 \end{aligned}
 \tag{19.32}$$

Dalla seconda e dalla quarta si ha subito:

$$R_{Av1} = -R_{Ev1} = F' \tag{19.33}$$

mentre sommando la terza e la sesta si ha:

$$N_C = 2 \frac{F' L}{H} \tag{19.34}$$

da cui le due reazioni orizzontali:

$$R_{Ah1} = -R_{Eh1} = -2 \frac{F' L}{H} \tag{19.35}$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 19.12, e le relative espressioni analitiche possono trarsi come:

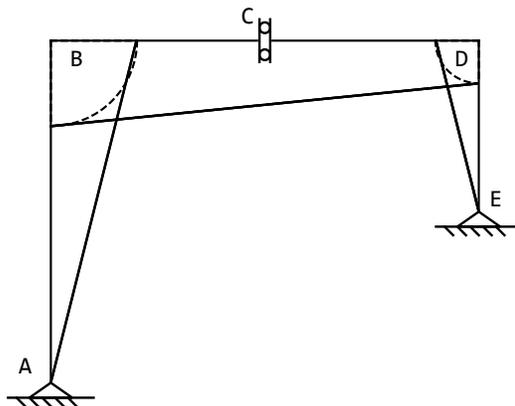


Figura 19.12: Il diagramma del momento per il telaio di Figura 19.10

$$\begin{aligned}
 m_1^{BA}(x_3) &= 4F'L \left(1 - \frac{x_3}{2H}\right) \\
 m_1^{DE}(x_3) &= -2F'L \left(1 - \frac{x_3}{H}\right) \\
 m_1^{BC}(x_3) &= 3F'L + F'L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\
 m_1^{CD}(x_3) &= 2F'L + F'L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right)
 \end{aligned} \tag{19.36}$$

L'espressione del momento lungo il traverso é stata divisa in due diverse formule, in vista dell'applicazione del principio dei lavori virtuali

### Il calcolo dello spostamento

Si può suddividere l'integrale nelle sue quattro parti, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 \Delta u_{2B} &= \int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^{2H} \left(-qL^2 \left(1 - \frac{x_3}{2H}\right)\right) \left(4F'L \left(1 - \frac{x_3}{2H}\right)\right) dx_3 + \\
 &\quad \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{q}{2}x_3^2 + qLx_3 - qL^2\right) \left(3F'L + F'L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right)\right) dx_3 + \\
 &\quad \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-q\frac{L^2}{2}\right) \left(2F'L + F'L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right)\right) dx_3 + \\
 &\quad \frac{1}{EI} \int_0^H \left(q\frac{L^2}{2} \left(1 - \frac{x_3}{H}\right)\right) \left(-2F'L \left(1 - \frac{x_3}{H}\right)\right) dx_3 = \\
 &\quad \frac{8}{3} \frac{qHL^3}{EI} + \frac{19qL^4}{8EI} + \frac{5qL^4}{4EI} + \frac{qHL^3}{3EI} = \\
 &\quad - \frac{3qHL^3}{EI} - \frac{29qL^4}{8EI}
 \end{aligned} \tag{19.37}$$

dove si é infine tenuto conto del valore unitario delle forze.

#### 19.5.1 Lo spostamento del traverso

Sullo stesso telaio di Figura 19.9, si vuole ora calcolare lo spostamento del traverso.

A tal fine si carica la struttura con una forza unitaria  $F'$  in  $B$ , dando luogo alle equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 R_{Ah1} + N_C + F' &= 0 \\
 R_{Av1} &= 0 \\
 M_C - 2N_C H - 2F' H &= 0 \\
 R_{Ev1} &= 0 \\
 R_{Eh1} - N_C &= 0 \\
 -M_C + N_C H &= 0
 \end{aligned} \tag{19.38}$$

Sommando la terza e la sesta equazione si ha:

$$N_C = -2F' \quad (19.39)$$

e quindi le due reazioni orizzontali valgono:

$$\begin{aligned} R_{Ah1} &= -N_C - F' = F' \\ R_{Eh1} &= N_C = -2F' \end{aligned} \quad (19.40)$$

Il diagramma del momento si presenta come in Figura 19.13, e da esso possono trarsi le espressioni analitiche nei vari tratti:

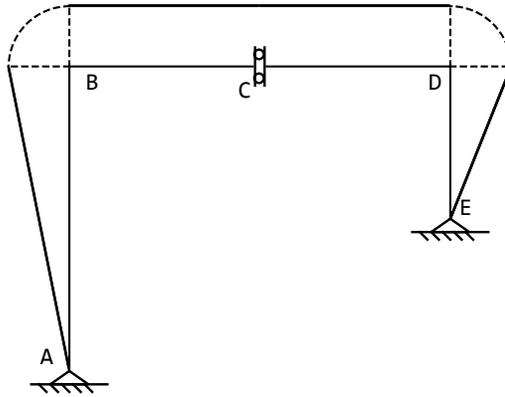


Figura 19.13: Il diagramma del momento fittizio per il calcolo dello spostamento del traverso

$$\begin{aligned} m_1^{BA}(x_3) &= -2F'H \left(1 - \frac{x_3}{2H}\right) \\ m_1^{DE}(x_3) &= 2F'H \left(1 - \frac{x_3}{H}\right) \\ m_1^{BC}(x_3) &= -2F'H \\ m_1^{CD}(x_3) &= -2F'H \end{aligned} \quad (19.41)$$

Il richiesto spostamento sarà allora fornito da:

$$\begin{aligned} w_B &= \int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^{2H} \left(-qL^2 \left(1 - \frac{x_3}{2H}\right)\right) \left(-2F'H \left(1 - \frac{x_3}{2H}\right)\right) dx_3 + \\ &\quad \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{q}{2}x_3^2 + qLx_3 - qL^2\right) \left(-2F'H \left(1 - \frac{x_3}{H}\right)\right) dx_3 + \\ &\quad \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-q \frac{L^2}{2}\right) (-2F'H) dx_3 + \frac{1}{EI} \int_0^H \left(q \frac{L^2}{2} \left(1 - \frac{x_3}{H}\right)\right) (2F'H) dx_3 = \\ &\quad \frac{qL^2H}{3EI} (5H + 7L) \end{aligned} \quad (19.42)$$

dove al termine dei calcoli si è posto unitario il valore della forza virtuale  $F$ .

### 19.5.2 Il metodo della doppia integrazione

Secondo il metodo della doppia integrazione, si calcolano prima le caratteristiche della sollecitazione interna, utilizzando le equazioni differenziali di equilibrio:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dx_3} &= -t \\ \frac{dT}{dx_3} &= -q \\ \frac{dM}{dx_3} &= T \longrightarrow \frac{d^2M}{dx_3^2} = -q\end{aligned}\quad (19.43)$$

integrandole tratto per tratto. Le costanti di integrazione che nascono nel processo di integrazione vanno poi dedotte imponendo le condizioni di equilibrio nei nodi.

#### Prima integrazione

Si identificano quindi quattro tratti, e per ciascuno di essi si sceglie un'origine ed un sistema di assi, definendo le caratteristiche:

$$\begin{aligned}m^{BA}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 \\ n^{BA}(x_3) &= e_0 \\ m^{BC}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 - q\frac{x_3^2}{2} \\ n^{BC}(x_3) &= f_0 \\ m^{CD}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 \\ n^{CD}(x_3) &= g_0 \\ m^{DE}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 \\ n^{DE}(x_3) &= h_0\end{aligned}\quad (19.44)$$

Si ricorda che la notazione adottata contiene implicitamente, per ciascun tratto, la scelta dell'origine del sistema di riferimento. Ad esempio,  $m^{BA}(x_3)$  è il momento flettente lungo il tratto  $AB$ , in un sistema di riferimento che vede l'origine in  $B$ , l'asse  $X_3$  che da  $B$  punta verso  $A$ , e l'asse  $X_2$  che ruota di  $\frac{\pi}{2}$  in senso antiorario per sovrapporsi ad  $X_3$ .

I tagli sono ottenibili semplicemente derivando le rispettive espressioni dei momenti, sicché:

$$\begin{aligned}t^{BA}(x_3) &= a_1 \\ t^{BC}(x_3) &= b_1 - qx_3 \\ t^{CD}(x_3) &= c_1 \\ t^{DE}(x_3) &= d_1\end{aligned}\quad (19.45)$$

Occorre ora imporre le condizioni di equilibrio nei punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  ed  $E$ , al fine di dedurre le dodici costanti di integrazione:

- in corrispondenza dell'appoggio  $A$  occorrerà annullare il momento flettente, e poiché per il ritto di sinistra si è scelto un sistema di riferimento con origine in  $B$ , questa condizione si scrive:

$$m^{BA}(2H) = 0 \quad (19.46)$$

- nel punto  $B$  si avranno le tre equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} n^{BA}(0) + t^{BC}(0) &= 0 \\ -t^{BA}(0) + n^{BC}(0) &= 0 \\ m^{BA}(0) + m^{BC}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (19.47)$$

- in corrispondenza del bipendolo il taglio dovrà essere nullo, mentre lo sforzo normale ed i momenti avranno un valore unico. Pertanto:

$$\begin{aligned} t^{BC}(L) &= 0 \\ t^{CD}(0) &= 0 \\ n^{BC}(L) &= n^{CD}(0) \\ m^{BC}(L) &= m^{CD}(0) \end{aligned} \quad (19.48)$$

- nel nodo  $D$  si avranno tre equazioni di equilibrio analoghe a quelle in  $B$ :

$$\begin{aligned} -n^{CD}(L) - t^{DE}(0) &= 0 \\ -t^{CD}(0) + n^{DE}(0) &= 0 \\ -m^{CD}(0) + m^{DE}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (19.49)$$

- infine, in  $E$  il momento è nullo:

$$m^{DE}(H) = 0 \quad (19.50)$$

Utilizzando le espressioni (19.44-19.45) delle caratteristiche, si giunge al sistema di dodici equazioni nelle dodici costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_1H &= 0 \\ e_0 + b_1 &= 0 \\ -a_1 + f_0 &= 0 \\ a_0 + b_0 &= 0 \\ b_1 - qL &= 0 \\ c_1 &= 0 \\ f_0 &= g_0 \\ b_0 + b_1L - q\frac{L^2}{2} &= c_0 \\ -g_0 - d_1 &= 0 \end{aligned} \quad (19.51)$$

$$\begin{aligned} -c_1 + h_0 &= 0 \\ -c_0 + d_0 &= 0 \\ d_0 + d_1 H &= 0 \end{aligned}$$

con soluzione immediata. Si hanno quindi i momenti, uguali a quelli già ricavati in precedenza:

$$\begin{aligned} m^{BA} &= \frac{1}{2} q L^2 \left( 2 - \frac{x_3}{H} \right) \\ m^{BC} &= -\frac{1}{2} q (2L^2 - 2Lx_3 + x_3^2) \\ m^{CD} &= -\frac{qL^2}{2} \\ m^{DE} &= -\frac{1}{2} q L^2 \left( 1 - \frac{x_3}{H} \right) \end{aligned} \tag{19.52}$$

e gli sforzi assiali:

$$\begin{aligned} n^{BA} &= -qL \\ n^{BC} &= -\frac{qL^2}{2H} \\ n^{CD} &= -\frac{qL^2}{2H} \\ n^{DE} &= 0 \end{aligned} \tag{19.53}$$

## Seconda integrazione

In questa seconda fase si utilizzano le equazioni costitutive e di congruenza per ottenere, tramite integrazione, rotazioni e spostamenti:

$$\begin{aligned} \frac{du_3}{dx_3} &= \frac{N}{EA} \\ \frac{d\phi}{dx_3} &= \frac{M}{EI} \\ \frac{du_2}{dx_3} &= -\phi \end{aligned} \tag{19.54}$$

Le costanti di integrazione si calcolano soddisfacendo le condizioni ai limiti di congruenza. Utilizzando le espressioni (19.52), si hanno le rotazioni:

$$\begin{aligned} \phi^{BA}(x_3) &= \frac{qL^2}{4EI} \frac{(4H - x_3)x_3}{H} + \phi_1 \\ \phi^{BC}(x_3) &= -\frac{q}{6EI} x_3 (6L^2 - 3Lx_3 + x_3^2) + \phi_2 \\ \phi^{CD}(x_3) &= -\frac{qL^2}{2EI} x_3 + \phi_3 \\ \phi^{DE}(x_3) &= \frac{qL^2}{4EI} \frac{(-2H + x_3)}{H} x_3 + \phi_4 \end{aligned} \tag{19.55}$$

e gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{BA}(x_3) &= -\frac{qL^2x_3^2}{2EI} + \frac{L^2qx_3^3}{12EIH} - x_3\phi_1 + v_1 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{qL^2x_3^2}{2EI} - \frac{Lqx_3^3}{6EI} + \frac{qx_3^4}{24EI} - x_3\phi_2 + v_2 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= \frac{qL^2x_3^2}{4EI} - x_3\phi_3 + v_3 \\
 u_2^{DE}(x_3) &= \frac{qL^2x_3^2}{4EI} - \frac{L^2qx_3^3}{12EIH} - x_3\phi_4 + v_4
 \end{aligned} \tag{19.56}$$

Gli spostamenti assiali, invece, si ottengono a partire dalle (19.53):

$$\begin{aligned}
 u_3^{BA}(x_3) &= -\frac{qLx_3}{EA} + w_1 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= -\frac{qL^2x_3}{2EAH} + w_2 \\
 u_3^{CD}(x_3) &= -\frac{qL^2x_3}{2EAH} + w_3 \\
 u_3^{DE}(x_3) &= w_4
 \end{aligned} \tag{19.57}$$

Le dodici costanti di integrazione si calcolano in base alle dodici condizioni di congruenza.

- in corrispondenza dell'appoggio in  $A$ , vengono proibite ambedue le traslazioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{BA}(2H) &= 0 \\
 u_3^{BA}(2H) &= 0
 \end{aligned} \tag{19.58}$$

- nel nodo  $B$  si ha:

$$\begin{aligned}
 u_2^{BA}(0) &= -u_3^{BC}(0) \\
 u_3^{BA}(0) &= u_2^{BC}(0) \\
 \phi^{BA}(0) &= \phi^{BC}(0)
 \end{aligned} \tag{19.59}$$

- in corrispondenza del bispodolo, le traslazioni assiali e le rotazioni saranno continue, laddove é permessa una traslazione verticale relativa, e quindi:

$$\begin{aligned}
 u_3^{BC}(L) &= u_3^{CD}(0) \\
 \phi^{BC}(L) &= \phi^{CD}(0)
 \end{aligned} \tag{19.60}$$

- nel nodo  $D$  si ha:

$$\begin{aligned}
 u_2^{CD}(L) &= u_3^{DE}(0) \\
 u_3^{CD}(L) &= -u_2^{DE}(0) \\
 \phi^{CD}(L) &= \phi^{DE}(0)
 \end{aligned} \tag{19.61}$$

- infine, in corrispondenza dell'appoggio  $E$ , vengono proibite ambedue le traslazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{DE}(H) &= 0 \\ u_3^{DE}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (19.62)$$

Risolvendo il sistema di equazioni, si hanno le costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{qL^2 (6IL + AH^2(5H + 7L))}{3EAIH} \\ v_2 &= \frac{2qHL}{EA} \\ v_3 &= -\frac{qL^3 (12IL + AH^2(18H + 25L))}{12EAIH^2} \\ v_4 &= -\frac{qL^2 (3IL + AH^2(5H + 7L))}{3EAIH} \\ \phi_1 &= -\frac{qL^2 (6IL + AH^2(9H + 7L))}{6EAIH^2} \\ \phi_2 &= -\frac{qL^2 (6IL + AH^2(9H + 7L))}{6EAIH^2} \\ \phi_3 &= -\frac{qL^2 (6IL + AH^2(9H + 11L))}{6EAIH^2} \\ \phi_4 &= -\frac{qL^2 (6IL + AH^2(9H + 14L))}{6EAIH^2} \\ w_1 &= \frac{2qHL}{EA} \\ w_2 &= \frac{qL^2 (6IL + AH^2(5H + 7L))}{3EAIH} \\ w_3 &= \frac{qL^2 (9IL + 2AH^2(5H + 7L))}{6EAIH} \\ w_4 &= 0 \end{aligned} \quad (19.63)$$

Ne seguono le espressioni, piuttosto elaborate, degli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} u_2^{BA}(x_3) &= -\frac{qL^2}{12EAIH^2} (2H - x_3) (2 (6IL + AH^2(5H + 7L)) - \\ &\quad 4AH^2x_3 + AHx_3^2) \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{q}{24EAIH^2} (48IH^3L + 4L^2 (6IL + AH^2(9H + 7L)) x_3 + \\ &\quad 12AH^2L^2x_3^2 - 4AH^2Lx_3^3 + AH^2x_3^4) \\ u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{qL^2 (L - x_3) (12IL + AH^2(18H + 25L) + 3AH^2x_3)}{12EAIH^2} \\ u_2^{DE}(x_3) &= -\frac{qL^2}{12EAIH^2} (H - x_3) (4 (3IL + AH^2(5H + 7L)) + \\ &\quad 2AH^2x_3 - AHx_3^2) \end{aligned} \quad (19.64)$$

e gli spostamenti assiali:

$$\begin{aligned}
 u_3^{BA}(x_3) &= \frac{qL}{EA} (2H - x_3) \\
 u_3^{BC}(x_3) &= \frac{qL^2 (2(6IL + AH^2(5H + 7L)) - 3Ix_3)}{6EAIH} \\
 u_3^{CD}(x_3) &= \frac{qL^2 (9IL + 2AH^2(5H + 7L) - 3Ix_3)}{6EAIH} \\
 u_3^{DE}(x_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{19.65}$$

### L'effetto della deformazione assiale

Le formule precedenti sono inutilmente complesse, in quanto é stata considerata anche l'influenza delle deformazioni assiali delle travi, e tale influenza risulta usualmente trascurabile. Un modo immediato per ricavare la soluzione flessionale consiste nel far tendere la rigidezza assiale  $EA$  ad infinito. In tal modo lo sforzo normale resta presente, ma non provoca deformazioni. Si ha, in ipotesi  $EA \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}
 u_2^{BA}(x_3) &= -\frac{qL^2 (2H - x_3) (2H(5H + 7L) - 4Hx_3 + x_3^2)}{12EIH} \\
 u_2^{BC}(x_3) &= \frac{qx_3 (4L^2(9H + 7L) + 12L^2x_3 - 4Lx_3^2 + x_3^3)}{24EI} \\
 u_2^{CD}(x_3) &= -\frac{qL^2 (L - x_3) (18H + 25L + 3x_3)}{12EI} \\
 u_2^{DE}(x_3) &= -\frac{qL^2 (H - x_3) (4H(5H + 7L) + 2Hx_3 - x_3^2)}{12EIH}
 \end{aligned} \tag{19.66}$$

$$\begin{aligned}
 u_3^{BA}(x_3) &= 0 \\
 u_3^{BC}(x_3) &= \frac{qHL^2(5H + 7L)}{3EI} \\
 u_3^{CD}(x_3) &= \frac{qHL^2(5H + 7L)}{3EI} \\
 u_3^{DE}(x_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{19.67}$$

Si noti quindi che si é ritrovato il valore (19.42) dello spostamento assiale del traverso, mentre il valore (19.37) viene calcolato come:

$$\Delta u_2^C = u_2^{CD}(0) - u_2^{BC}(L) = -\frac{L^3(24H + 29L)q}{8EI} \tag{19.68}$$

La deformata si presenta come in Figura 19.14.

## 19.6 Il caso della rigidezza assiale infinita

Se si é ragionevolmente certi che la deformabilitá assiale puó essere trascurata, non é necessario affrontare la soluzione completa, come descritto nell'esempio

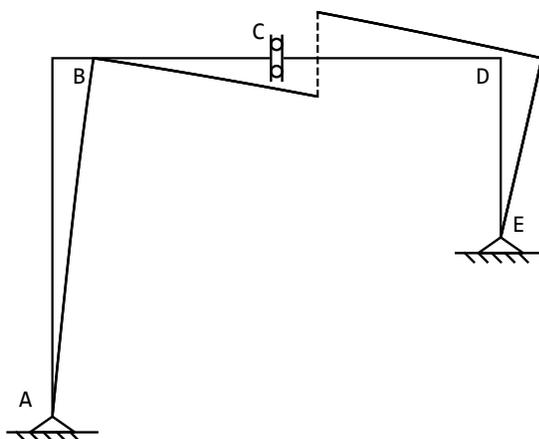


Figura 19.14: La deformata per il telaio di Figura 19.9

precedente, per poi far tendere  $EA$  ad infinito. Dopo aver effettuato la prima integrazione, o comunque dopo aver ricavato il quadro dei momenti flettenti, si può ipotizzare fin dall'inizio che le aste conservino la loro lunghezza, e trarre le opportune conclusioni nei confronti dei relativi spostamenti assiali. Ad esempio, nel telaio di Figura 19.9, l'ineestensibilità assiale e la presenza degli appoggi in  $A$  ed in  $E$  implica che:

$$\begin{aligned} u_3^{BA}(x_3) &= 0 \\ u_3^{DE}(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (19.69)$$

Inoltre, l'ineestensibilità assiale implica che i due tratti orizzontali traslino di una quantità costante, e la presenza del bipendolo ad asse verticale implica che questa quantità sarà unica. Ne segue che potrà porsi:

$$\begin{aligned} u_3^{BC}(x_3) &= \delta \\ u_3^{CD}(x_3) &= \delta \end{aligned} \quad (19.70)$$

A partire dai momenti, si ricavano rotazioni e spostamenti, come già illustrato, introducendo quindi le otto costanti di integrazione  $\phi_i$  e  $v_i$ , che potranno calcolarsi, insieme allo spostamento incognito  $\delta$ , imponendo le nove condizioni ai limiti relative alla funzione  $u_2$  ed alla sua derivata prima:

- in corrispondenza dell'appoggio in  $A$ , viene proibita la traslazione:

$$u_2^{BA}(2H) = 0 \quad (19.71)$$

- nel nodo  $B$  si ha, ipotizzando che  $\delta$  sia positivo se verso destra:

$$\begin{aligned} u_2^{BC}(0) &= 0 \\ u_2^{BA}(0) &= -\delta \\ \phi^{BA}(0) &= \phi^{BC}(0) \end{aligned} \quad (19.72)$$

- in corrispondenza del bipendolo:

$$\phi_{BC}(L) = \phi_{CD}(0) \quad (19.73)$$

- nel nodo  $D$  si ha:

$$\begin{aligned} u_2^{CD}(L) &= 0 \\ u_2^{DE}(0) &= -\delta \\ \phi^{CD}(L) &= \phi^{DE}(0) \end{aligned} \quad (19.74)$$

- infine, in corrispondenza dell'appoggio  $E$ :

$$u_2^{DE}(H) = 0 \quad (19.75)$$

Si giunge ad un sistema di nove equazioni in nove incognite, che fornisce:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{qHL^2(5H + 7L)}{3EI} \\ v_2 &= 0 \\ v_3 &= -\frac{qL^3(18H + 25L)}{12EI} \\ v_4 &= -\frac{qHL^2(5H + 7L)}{3EI} \\ \phi_1 &= -\frac{qL^2(9H + 7L)}{6EI} \\ \phi_2 &= -\frac{qL^2(9H + 7L)}{6EI} \\ \phi_3 &= -\frac{qL^2(9H + 11L)}{6EI} \\ \phi_4 &= -\frac{qL^2(9H + 14L)}{6EI} \\ \delta &= \frac{qHL^2(5H + 7L)}{3EI} \end{aligned} \quad (19.76)$$

ritrovando la soluzione dell'esempio precedente per  $EA \rightarrow \infty$ .



## Capitolo 20

# Le equazioni di congruenza

Si consideri una struttura piana costituita da  $t$  tratti, per cui quindi possano scriversi  $3t$  equazioni di equilibrio. Se il numero di reazioni vincolari incognite  $s$  è maggiore di  $3t$ , non sarà possibile risolvere le equazioni di equilibrio, e la struttura si dirà *iperstatica*, con grado di iperstaticità  $i$  pari ad  $s - 3t$ .

In questo Capitolo si illustra un metodo di calcolo delle reazioni di simili strutture iperstatiche, che conduce alla scrittura di  $i$  equazioni supplementari, che poi possono essere risolte a fornire  $i$  reazioni vincolari. Le restanti reazioni possono essere calcolate utilizzando le equazioni di equilibrio. Il metodo evolve secondo i seguenti passi:

- la struttura di partenza,  $i$  volte iperstatica, viene trasformata in un sistema isostatico equivalente (S.I.E.), attraverso la rimozione di opportuni gradi di vincolo esterno, oppure attraverso opportune sconnessioni. Ogni qualvolta si elimina un grado di vincolo, si aggiunge al sistema la reazione incognita, ed ogni qualvolta si opera una sconnessione, si aggiunge al sistema la caratteristica della sollecitazione interna incognita. Alla fine del procedimento, il sistema isostatico equivalente sarà costituito da una struttura isostatica caricata dai carichi originari, e da  $i$  quantità incognite  $X_i$  (*incognite iperstatiche*).
- Per il calcolo delle incognite iperstatiche, si scrivono  $i$  equazioni di congruenza, ripristinando le equazioni di vincolo originarie: se ad esempio si è soppresso un carrello, occorre imporre che lo spostamento corrispondente sia nullo. Si ottiene il sistema:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (20.1)$$

dove la matrice  $\mathbf{A}$ , quadrata e di ordine  $i$ , risulterà simmetrica, a causa del teorema di reciprocità. La generica colonna  $i - ma$  della matrice può calcolarsi sullo schema  $S^{(i)}$ , costituito dalla struttura isostatica caricata dalla sola incognita  $X_i$ , assunta di valore unitario, mentre la colonna dei termini noti può calcolarsi sullo schema  $S^{(0)}$ , costituito dalla struttura isostatica soggetta ai carichi originari.

- Il calcolo dei termini della matrice  $\mathbf{A}$ , e del vettore  $\mathbf{b}$  dei termini noti si riduce quindi a calcolare spostamenti e/o rotazioni su sistemi isostatici, ed a tal fine si possono utilizzare i metodi studiati in precedenza.
- riempita la matrice  $\mathbf{A}$ , ed il vettore  $\mathbf{b}$ , si risolve il sistema (20.1) e si ricavano le incognite  $X_i$ . Se si vuol conoscere anche le altre reazioni, basta scrivere le equazioni di equilibrio sul S.I.E.

Come semplice esempio, si consideri la trave continua su cinque appoggi di Figura 20.1, caricata dal carico  $q$  esteso a tutta la luce.

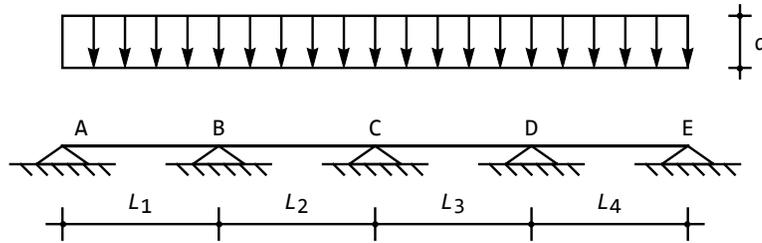


Figura 20.1: Una trave continua tre volte iperstatica

Essa è tre volte iperstatica, e come si è visto nelle Lezioni, può essere convenientemente risolta applicando le equazioni dei tre momenti, inserendo tre cerniere in corrispondenza dei tre appoggi centrali. Tuttavia, è anche possibile utilizzare un diverso sistema isostatico equivalente, rimuovendo del tutto i tre appoggi centrali, e sostituendoli con le tre reazioni incognite  $X_1$ ,  $X_2$  ed  $X_3$ . Si giunge quindi al S.I.E. di Figura 20.2, e su di esso occorre imporre il ripristino della congruenza, ossia che gli spostamenti siano nulli in corrispondenza delle ascisse dei tre appoggi rimossi:

$$\begin{aligned} u_{2B} &= 0 \\ u_{2C} &= 0 \\ u_{2D} &= 0 \end{aligned} \quad (20.2)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, ogni calcolo condotto sul S.I.E. può essere scisso nella somma di quattro contributi, calcolati sui sistemi parziali di Figura 20.3, e simbolicamente può scriversi:

$$S.I.E. = S_0 + X_1 S_1 + X_2 S_2 + X_3 S_3 \quad (20.3)$$

## 20.1 Trave con incastro ed appoggio

Come primo, immediato esempio, si consideri la trave di Figura 20.4, una volta iperstatica, e si voglia calcolarne le reazioni vincolari.

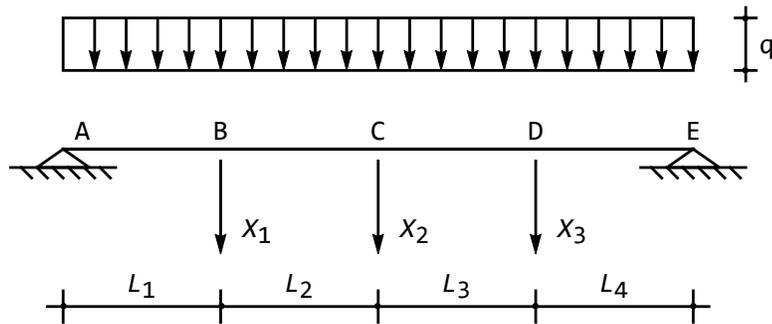


Figura 20.2: Un sistema isostatico equivalente alla struttura di Figura 20.1 (S.I.E.)

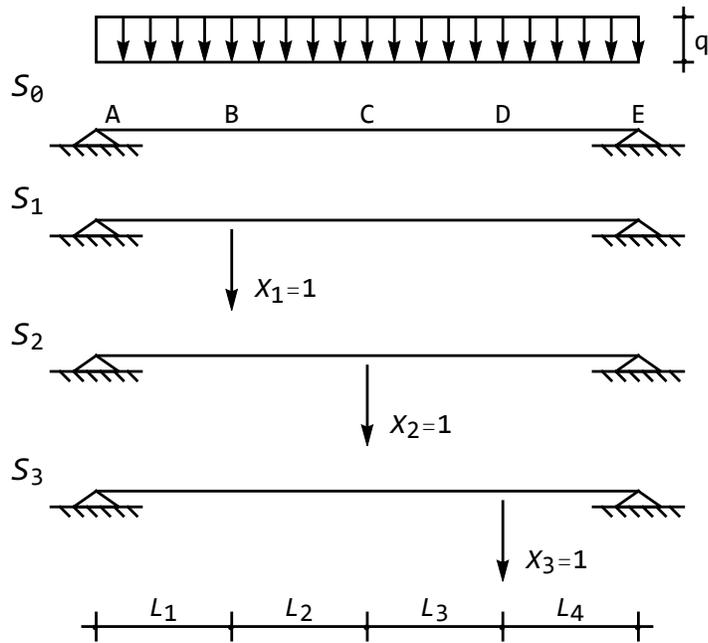


Figura 20.3: Il sistema isostatico equivalente suddiviso in aliquote singole

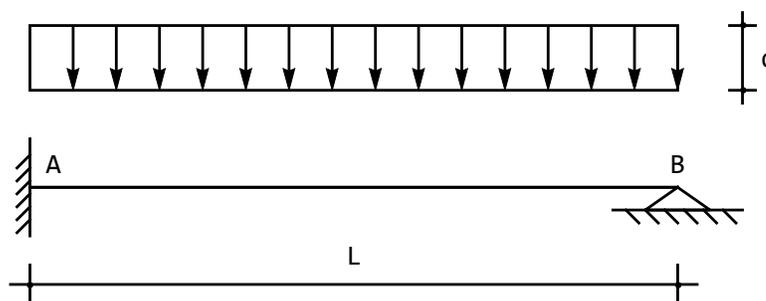


Figura 20.4: Una trave semplicemente iperstatica

**Prima soluzione** – Si elimina l'appoggio in  $B$ , sostituendolo con la sua reazione (incognita  $X_1$ ). La struttura isostatica equivalente è quindi la mensola di Figura 20.5 e l'equazione di congruenza dovrà imporre che l'abbassamento in  $B$  sia nullo:

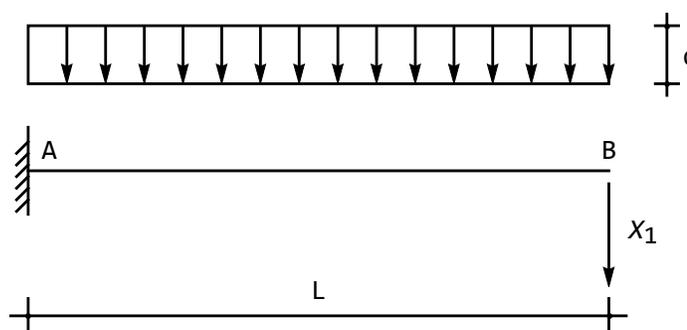


Figura 20.5: Un sistema isostatico (S.I.E.) equivalente per la trave di Figura 20.4

$$u_{2B} = 0 \quad (20.4)$$

Infine, operando sui sistemi parziali di Figura 20.6, il principio di sovrapposizione degli effetti permette di scrivere:

$$u_{2B} = u_{2B}^{(0)} + X_1 u_{2B}^{(1)} = 0 \quad (20.5)$$

Sarà quindi, in definitiva:

$$\frac{qL^4}{8EI} + X_1 \frac{L^3}{3EI} = 0 \quad (20.6)$$

da cui:

$$X_1 = R_B = -\frac{3}{8}qL \quad (20.7)$$

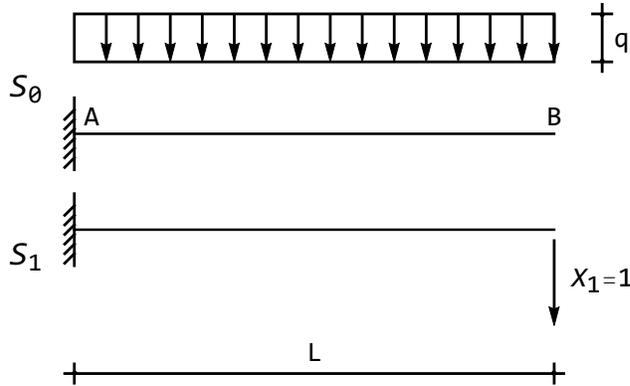


Figura 20.6: I due sistemi parziali per il calcolo dei coefficienti dell'equazione di congruenza

Le restanti reazioni possono calcolarsi sfruttando le equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_A + R_B + qL &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} - \frac{qL^2}{2} - R_B L &= 0 \end{aligned} \quad (20.8)$$

e forniscono:

$$\begin{aligned} R_A &= -\frac{5}{8}qL \\ \mathcal{M}_{rA} &= \frac{qL^2}{8} \end{aligned} \quad (20.9)$$

**Seconda soluzione** – Si introduce una cerniera in  $A$ , trasformando l'incastro in un appoggio, e si aggiunge la coppia reattiva incognita (incognita iperstatica)  $X_1$ . La struttura isostatica equivalente è ora quindi la trave appoggiata di Figura 20.7 e l'equazione di congruenza dovrà imporre che la rotazione in  $A$  sia nulla:

$$\phi_A = 0 \quad (20.10)$$

Infine, operando sui sistemi parziali di Figura 20.8, il principio di sovrapposizione degli effetti permette di scrivere:

$$\phi_A = \phi_A^{(0)} + X_1 \phi_A^{(1)} = 0 \quad (20.11)$$

ossia:

$$-\frac{qL^3}{24EI} + X_1 \frac{L}{3EI} = 0 \quad (20.12)$$

da cui:

$$X_1 = \mathcal{M}_{rA} = \frac{qL^2}{8} \quad (20.13)$$

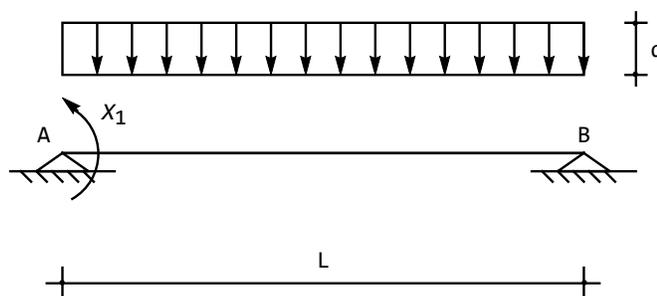


Figura 20.7: Un secondo possibile sistema isostatico equivalente (S.I.E.) per la trave di Figura 20.4

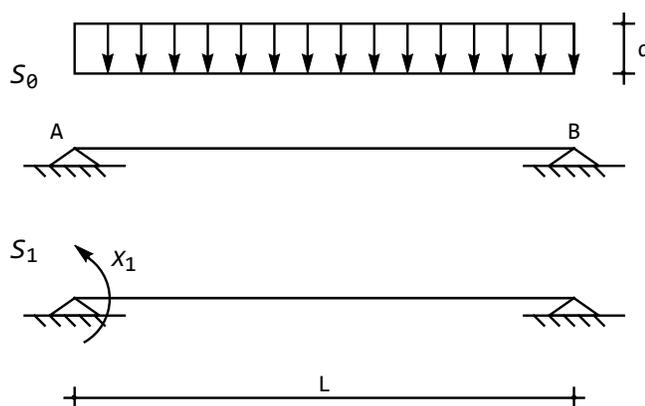


Figura 20.8: I due sistemi parziali per il calcolo dei coefficienti dell'equazione di congruenza (20.11)

Le restanti reazioni possono calcolarsi sfruttando le equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_A + R_B + qL &= 0 \\ \mathcal{M}_{rA} - \frac{qL^2}{2} - R_B L &= 0 \end{aligned} \quad (20.14)$$

e forniscono:

$$\begin{aligned} R_B &= -\frac{3}{8}qL \\ R_A &= -\frac{5}{8}qL \end{aligned} \quad (20.15)$$

Ulteriori scelte del sistema isostatico equivalente sono ovviamente possibili, come ad esempio una trave con bipendolo ed appoggio, oppure ancora una

trave con incastro, cerniera intermedia ed appoggio. Tuttavia, lo spirito del metodo consiste nel ricondursi ad una struttura isostatica equivalente che sia il più semplice e conosciuta possibile, e su di essa calcolare i coefficienti delle equazioni di congruenza

## 20.2 Una trave doppiamente iperstatica

Si consideri la trave di Figura 20.9, due volte iperstatica, e si voglia affrontare il calcolo delle reazioni attraverso la scrittura diretta di due equazioni di congruenza.

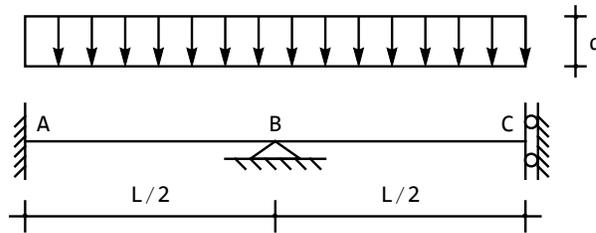


Figura 20.9: Una trave due volte iperstatica

Una possibile scelta per il sistema isostatico equivalente può essere la struttura a mensola, ottenuta rimuovendo l'appoggio in mezzeria (ed aggiungendo la sua reazione incognita  $X_1$ ) ed il bipendolo a destra (aggiungendo quindi la coppia reattiva incognita  $X_2$ ).

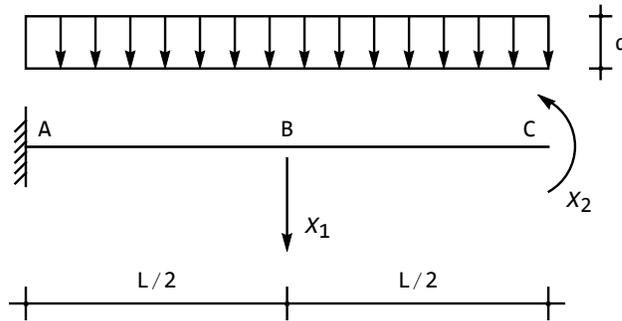


Figura 20.10: Un possibile sistema isostatico equivalente per la trave di Figura 20.9

Le equazioni che ripristinano la congruenza si scrivono come:

$$\begin{aligned} u_{2B} &= u_{2B}^{(0)} + u_{2B}^{(1)} X_1 + u_{2B}^{(2)} X_2 = 0 \\ \phi_C &= \phi_C^{(0)} + \phi_C^{(1)} X_1 + \phi_C^{(2)} X_2 = 0 \end{aligned} \quad (20.16)$$

I coefficienti di  $X_1$  e di  $X_2$  sono di immediata deduzione, e possono essere calcolati sugli schemi  $S_1$  ed  $S_2$ , rispettivamente:

$$\begin{aligned} u_{2B}^{(1)} &= \frac{1}{3EI} \left(\frac{L}{2}\right)^3 \\ \phi_C^{(1)} &= -\frac{1}{2EI} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ u_{2B}^{(2)} &= -\frac{1}{2EI} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ \phi_C^{(2)} &= \frac{L}{EI} \end{aligned} \quad (20.17)$$

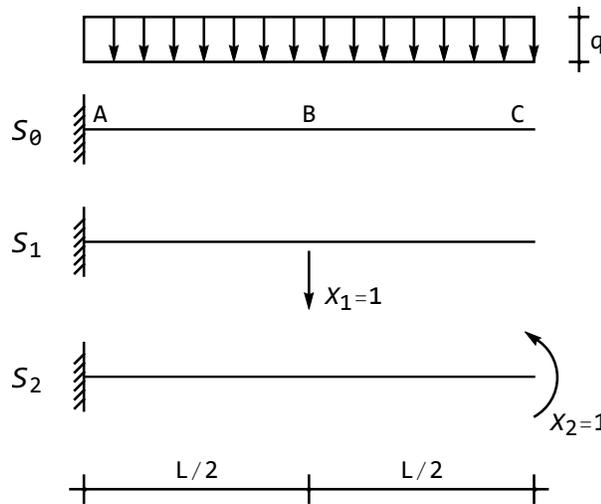


Figura 20.11: I tre sistemi parziali sui quali determinare i coefficienti delle equazioni di congruenza

Il termine noto  $\phi_C^{(0)}$  è anch'esso immediato:

$$\phi_C^{(0)} = -\frac{qL^3}{6EI} \quad (20.18)$$

mentre il termine  $u_{2B}^{(0)}$ , che rappresenta l'abbassamento in mezzeria sullo schema  $S_0$ , può essere calcolato applicando i corollari di Mohr, oppure tramite composizione degli spostamenti. Seguendo quest'ultimo procedimento, si considera la mensola di lunghezza  $L/2$ , soggetta al carico  $q$ , e caricata anche, nell'estremo libero, dal taglio e dal momento trasmessi dalla semiluce mancante. Si ha quindi:

$$u_{2B}^{(0)} = \frac{q}{8EI} \left(\frac{L}{2}\right)^4 + \frac{qL}{2} \frac{1}{3EI} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{qL^2}{8} \frac{1}{2EI} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{17}{384} \frac{qL^4}{EI} \quad (20.19)$$

in quanto:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{qL}{2} \\ M\left(\frac{L}{2}\right) &= -\frac{qL^2}{8} \end{aligned} \quad (20.20)$$

Le due equazioni di congruenza si scrivono allora:

$$\begin{aligned} \frac{17}{384} \frac{qL^4}{EI} + \frac{X_1}{3EI} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{X_2}{2EI} \left(\frac{L}{2}\right)^2 &= 0 \\ -\frac{qL^3}{6EI} - \frac{X_1}{2EI} \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{X_2L}{EI} &= 0 \end{aligned} \quad (20.21)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{9}{10}qL \\ X_2 &= \frac{13}{240}qL^2 \end{aligned} \quad (20.22)$$

### 20.3 Un'equazione dei tre momenti

Si riprende in esame la struttura di Figura 20.1, per illustrare come una opportuna scelta del sistema isostatico equivalente possa condurre ad una sostanziale riduzione del carico computazionale.

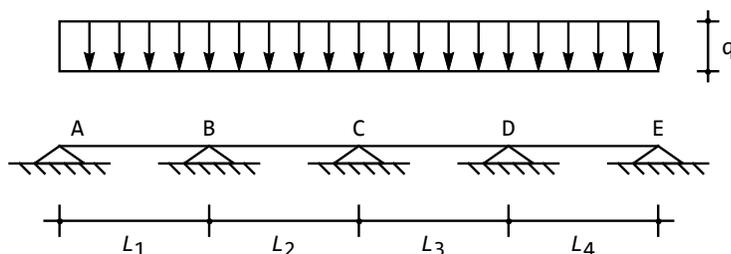


Figura 20.12: Un sistema iperstatico adatto all'equazione dei tre momenti

Si inseriscano tre cerniere in corrispondenza dei tre appoggi, operando tre sconessioni, e quindi riducendosi ad una struttura isostatica. Inoltre, si aggiungano i tre momenti flettenti (incogniti)  $X_1$ ,  $X_2$  ed  $X_3$ , agenti rispettivamente sul primo, sul secondo e sul terzo appoggio. Si è giunti al S.I.E. di Figura 20.13, su cui occorre imporre il rispetto delle tre equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_B &= 0 \\ \Delta\phi_C &= 0 \\ \Delta\phi_D &= 0 \end{aligned} \quad (20.23)$$

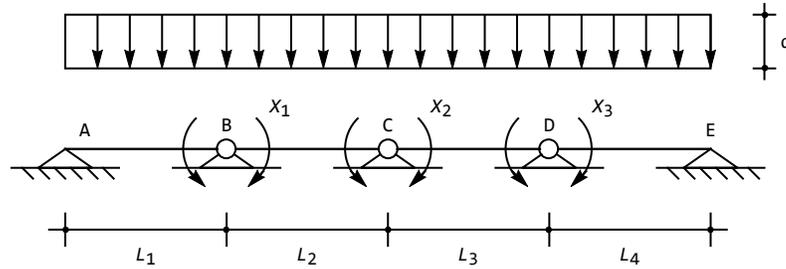


Figura 20.13: Un conveniente S.I.E. per la struttura di Figura 20.12

Come può osservarsi, la trave si è ora suddivisa in quattro travi semplicemente appoggiate, su cui è immediato leggere gli spostamenti desiderati. Ad esempio, la rotazione  $\phi_{Bsin}$  può essere calcolata sulla trave  $AB$ , soggetta al carico ed alla coppia  $X_1$  positiva, e vale:

$$\phi_{Bsin} = q \frac{L_1^3}{24EI} + X_1 \frac{L_1}{3EI} \quad (20.24)$$

Analogamente,  $\phi_{Bdes}$  è da calcolare sulla trave  $BC$ , soggetta al carico, alla coppia  $X_1$ , negativa, ed alla coppia  $X_2$ , positiva:

$$\phi_{Bdes} = -q \frac{L_2^3}{24EI} - X_1 \frac{L_2}{3EI} - X_2 \frac{L_2}{6EI} \quad (20.25)$$

La prima equazione di congruenza si scrive allora:

$$q \frac{L_1^3}{24EI} + X_1 \frac{L_1}{3EI} = -q \frac{L_2^3}{24EI} - X_1 \frac{L_2}{3EI} - X_2 \frac{L_2}{6EI} \quad (20.26)$$

mentre per gli altri due appoggi si potrà scrivere:

$$q \frac{L_2^3}{24EI} + X_1 \frac{L_2}{6EI} + X_2 \frac{L_2}{3EI} = -q \frac{L_3^3}{24EI} - X_2 \frac{L_3}{3EI} - X_3 \frac{L_3}{6EI} \quad (20.27)$$

$$q \frac{L_3^3}{24EI} + X_2 \frac{L_3}{6EI} + X_3 \frac{L_3}{3EI} = -q \frac{L_4^3}{24EI} - X_3 \frac{L_4}{3EI} \quad (20.28)$$

In notazione matriciale, le tre equazioni di congruenza assumono un aspetto compatto:

$$\begin{pmatrix} \frac{L_1 + L_2}{3} & \frac{L_2}{6} & 0 \\ \frac{L_2}{6} & \frac{L_2 + L_3}{3} & \frac{L_3}{6} \\ 0 & \frac{L_3}{6} & \frac{L_3 + L_4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = -\frac{q}{24} \begin{pmatrix} L_1^3 + L_2^3 \\ L_2^3 + L_3^3 \\ L_3^3 + L_4^3 \end{pmatrix} \quad (20.29)$$

Inoltre, l'introduzione di ulteriori appoggi intermedi non distrugge la banda tri-diagonale della matrice dei coefficienti, e la generalizzazione del sistema (20.29) al caso di  $n$  appoggi intermedi non presenta particolari difficoltà.

Risolviendo le tre equazioni (20.26–20.28) si conoscono quindi i tre momenti sugli appoggi intermedi:

$$X_1 = -\frac{qL_1^3(4L_2(L_3 + L_4) + L_3(3L_3 + 4L_4))}{8D_1} + \frac{qL_1^3L_2(-L_3^4 - 2L_3^3L_4 + L_3L_4^3 + 2L_2^3(L_3 + L_4) + L_2^2L_3(3L_3 + 4L_4))}{8D_1} \quad (20.30)$$

$$X_2 = \frac{q(L_1 + L_2)(L_3 + L_4)(L_1^2L_2 - L_1L_2^2 - L_2^3 - L_3^3 - L_3^2L_4 + L_3L_4^2)}{4D_1} \quad (20.31)$$

$$X_3 = \frac{qL_3(-L_2(L_1^3 + L_2^3) + 2(L_1 + L_2)(L_2^3 + L_3^3))}{8D_2} + \frac{q(L_2^2 - 4(L_1 + L_2)(L_2 + L_3))(L_3^3 + L_4^3)}{8D_2} \quad (20.32)$$

con:

$$D_1 = L_2(3L_2(L_3 + L_4) + L_3(3L_3 + 4L_4)) + L_1(4L_2(L_3 + L_4) + L_3(3L_3 + 4L_4)) \quad (20.33)$$

e:

$$D_2 = -(L_1 + L_2)L_3^2 + (4L_1(L_2 + L_3) + L_2(3L_2 + 4L_3))(L_3 + L_4) \quad (20.34)$$

E' ora possibile dedurre i tagli, campata per campata, scrivendo le equazioni di equilibrio. Nella prima campata, in base al diagramma di Figura 20.14, si ha:

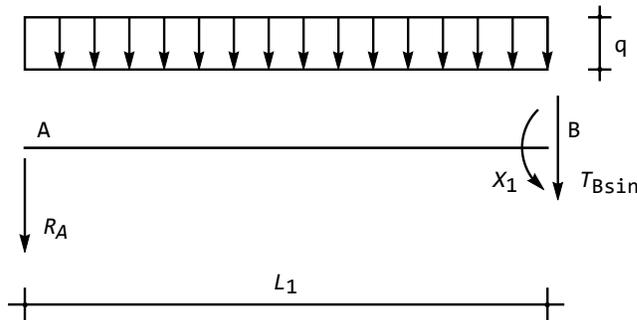


Figura 20.14: Lo schema per il calcolo di reazioni e tagli sulla prima campata

$$\begin{aligned} R_A + qL_1 + T_{Bsin} &= 0 \\ X_1 - \frac{qL_1^2}{2} - T_{Bsin}L_1 &= 0 \end{aligned} \quad (20.35)$$

da cui:

$$\begin{aligned} R_A &= -\frac{X_1}{L_1} - \frac{qL_1}{2} \\ T_{Bsin} &= \frac{X_1}{L_1} - \frac{qL_1}{2} \end{aligned} \quad (20.36)$$

Nella seconda campata, il diagramma di riferimento è quello di Figura 20.15, e su di esso si può scrivere:

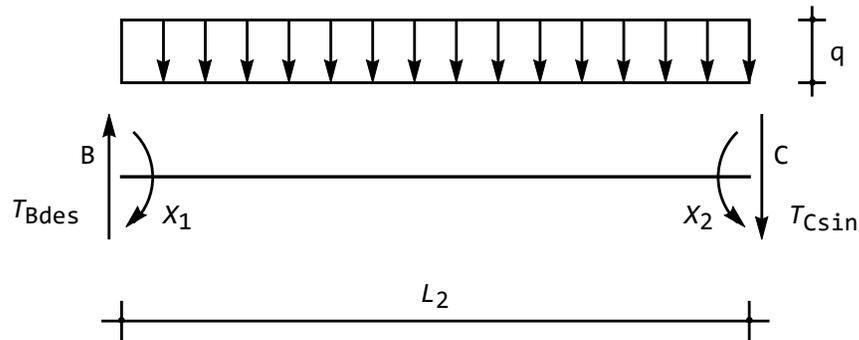


Figura 20.15: Lo schema per il calcolo di reazioni e tagli sulla seconda campata

$$\begin{aligned} -T_{Bdes} + qL_2 + T_{Csin} &= 0 \\ -X_1 + X_2 - \frac{qL_2^2}{2} - T_{Csin}L_2 &= 0 \end{aligned} \quad (20.37)$$

da cui:

$$\begin{aligned} T_{Bdes} &= \frac{qL_2}{2} - \frac{X_1}{L_2} + \frac{X_2}{L_2} \\ T_{Csin} &= \frac{-X_1}{L_2} + \frac{X_2}{L_2} - \frac{qL_2}{2} \end{aligned} \quad (20.38)$$

La reazione dell' appoggio in  $B$  è quindi fornita da:

$$R_B = T_{Bsin} - T_{Bdes} = X_1 \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) - \frac{q}{2} (L_1 + L_2) - \frac{X_2}{L_2} \quad (20.39)$$

Il restante studio è lasciato come esercizio.

## 20.4 Un telaio zoppo con sbalzo

Si vuole ora esaminare la struttura di Figura 20.16, semplicemente iperstatica, soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensità  $q$ , e ad una forza concentrata  $F$  sullo sbalzo.

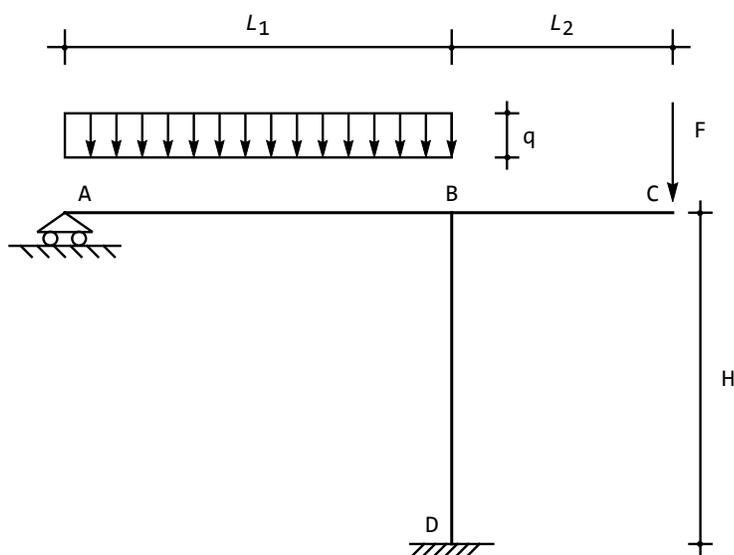


Figura 20.16: Un telaio con piedritto e sbalzo

Scegliendo come incognita iperstatica la reazione verticale del carrello in  $A$ , la struttura isostatica equivalente è quella in Figura 20.17, e la corrispondente equazione di congruenza impone che lo spostamento verticale del carrello sia nullo:

$$u_{2A} = 0 \quad (20.40)$$

Ne segue, per il principio di sovrapposizione degli effetti, che si può scrivere:

$$u_{2A}^{(01)} + u_{2A}^{(02)} + X_1 u_{2A}^{(1)} = 0 \quad (20.41)$$

dove  $u_{2A}^{(01)}$  è lo spostamento in  $A$  dovuto al carico  $q$ ,  $u_{2A}^{(02)}$  è lo spostamento in  $A$  dovuto alla forza  $F$  ed  $u_{2A}^{(1)}$  è lo spostamento in  $A$  dovuto ad una forza verticale unitaria in  $A$ . I tre contributi possono calcolarsi separatamente:

### Calcolo di $u_{2A}^{(01)}$

Il diagramma del momento dovuto al carico  $q$  si presenta come in Figura 20.18, ed aiutandosi con esso si può utilizzare il metodo della composizione degli spostamenti. Il ritto  $BD$ , infatti, può essere riguardato come una mensola caricata dalla coppia di intensità  $q L_1^2/2$ , e quindi la rotazione in  $B$  sarà pari a:

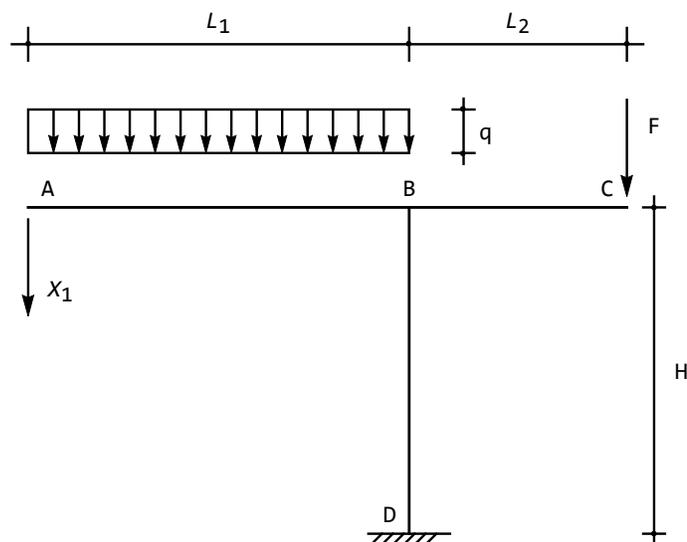


Figura 20.17: Il S.I.E. al telaio di Figura 20.16

$$\phi_B = q \frac{L_1^2}{2} \frac{H}{EI} \quad (20.42)$$

Il tratto  $AB$ , riguardato come rigido, subisce questa rotazione, che porta il punto  $A$  ad avere uno spostamento pari a  $\phi_B L_1$ , e quindi il richiesto spostamento varrà:

$$u_{2A}^{(01)} = q \frac{L_1^4}{8EI} + q \frac{L_1^3 H}{2EI} \quad (20.43)$$

### Calcolo di $u_{2A}^{(02)}$

Analogamente a quanto detto per il caso precedente, il diagramma del momento, presentato in Figura 20.19, permette di stabilire che lo spostamento del punto  $A$  è dovuto solo alla rotazione del punto  $B$ , e che tale rotazione può calcolarsi su uno schema a mensola soggetta alla coppia  $FL_2$ . Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \phi_B &= -FL_2 \frac{H}{EI} \\ u_{2A}^{(02)} &= -FL_2 \frac{H}{EI} L_1 \end{aligned} \quad (20.44)$$

### Calcolo di $u_{2A}^{(1)}$

Il diagramma del momento di Figura 20.20 permette di scrivere:

$$u_{2A}^{(1)} = \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{L_1 H}{EI} L_1 \quad (20.45)$$

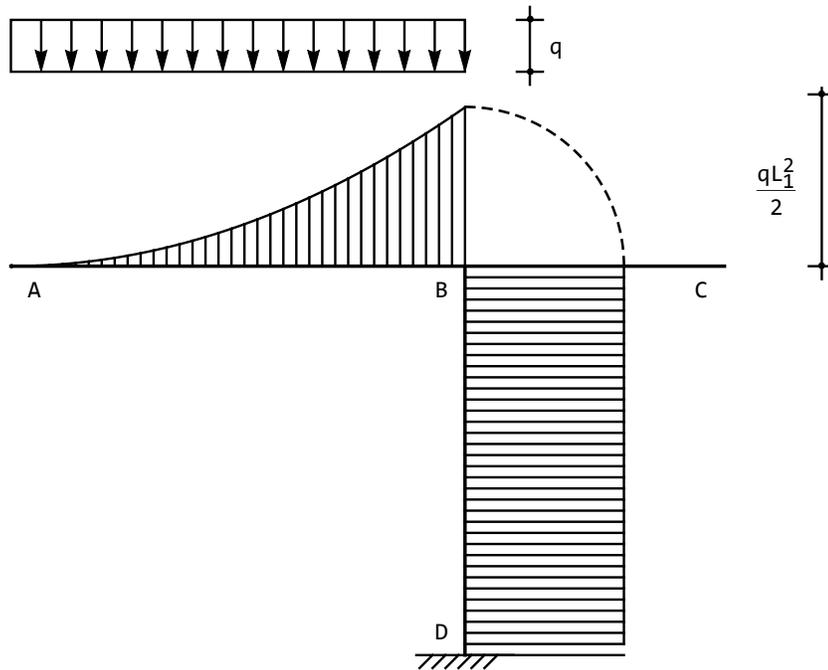


Figura 20.18: Lo schema per il calcolo dell'abbassamento in  $A$  dovuto al carico  $q$

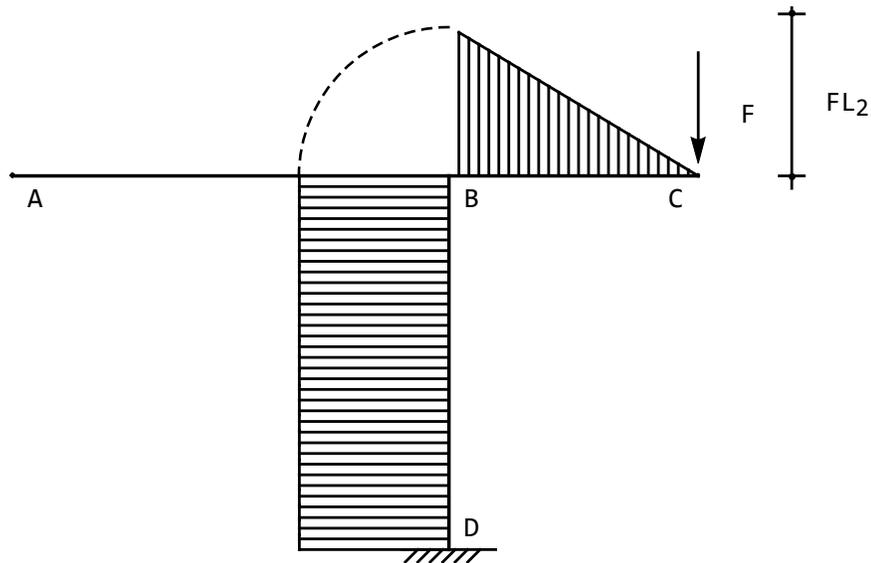


Figura 20.19: Lo schema per il calcolo dell'abbassamento in  $A$  dovuto alla forza  $F$

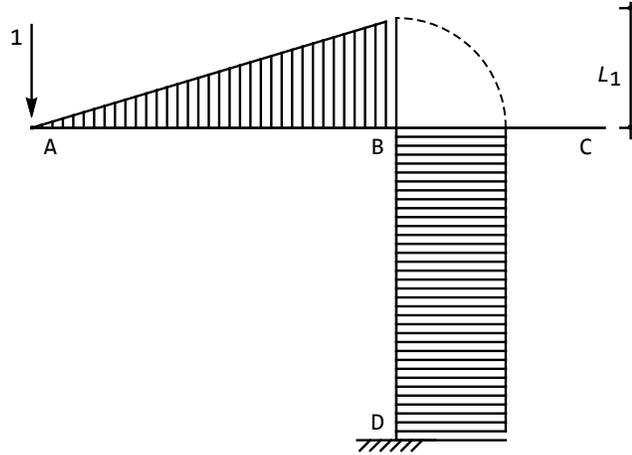


Figura 20.20: Lo schema per il calcolo dell'abbassamento in  $A$  dovuto ad una incognita iperstatica di valore unitario

La condizione di congruenza (20.41) si scrive quindi:

$$q \frac{L_1^4}{8EI} + q \frac{L_1^3 H}{2EI} - FL_2 \frac{H}{EI} L_1 + X_1 \left( \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{L_1 H}{EI} L_1 \right) = 0 \quad (20.46)$$

da cui l'incognita iperstatica:

$$X_1 = - \frac{3(4HqL_1^2 + qL_1^3 - 8FHL_2)}{8L_1(3H + L_1)} \quad (20.47)$$

## 20.5 Un telaio zoppo due volte iperstatico

Si consideri lo stesso schema dell'Esercizio precedente, ipotizzando però una cerniera in  $A$ , invece del carrello (Figura 20.21). Ciò rende ovviamente la struttura due volte iperstatica, e volendosi ricondurre allo stesso schema isostatico dell'esempio precedente occorre rimuovere la cerniera, e sostituirla con le sue due reazioni incognite.

Tale scelta presenta il vantaggio di poter utilizzare i risultati già ottenuti, e porta al sistema isostatico equivalente di Figura 20.22. Su di esso occorre imporre le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_{2A} &= 0 \\ u_{3A} &= 0 \end{aligned} \quad (20.48)$$

che per il principio di sovrapposizione degli effetti scriveremo come:

$$\begin{aligned} u_{2A}^{(01)} + u_{2A}^{(02)} + X_1 u_{2A}^{(1)} + X_2 u_{2A}^{(2)} &= 0 \\ u_{3A}^{(01)} + u_{3A}^{(02)} + X_1 u_{3A}^{(1)} + X_2 u_{3A}^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (20.49)$$

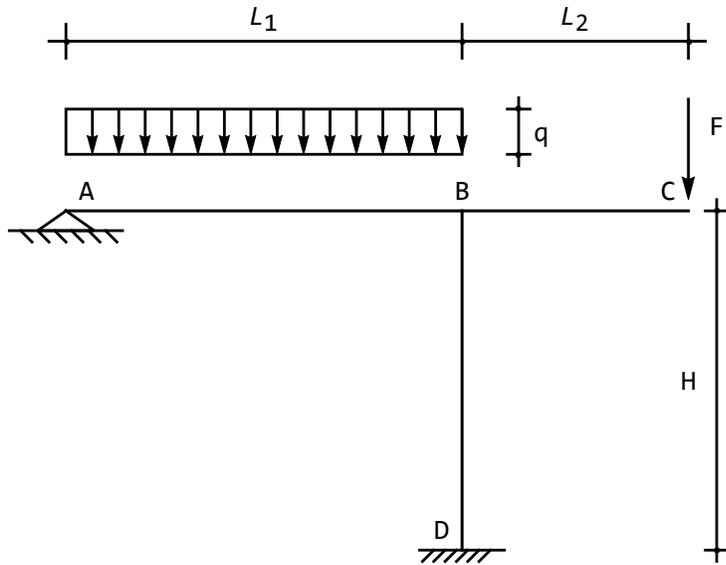


Figura 20.21: Un telaio doppiamente iperstatico

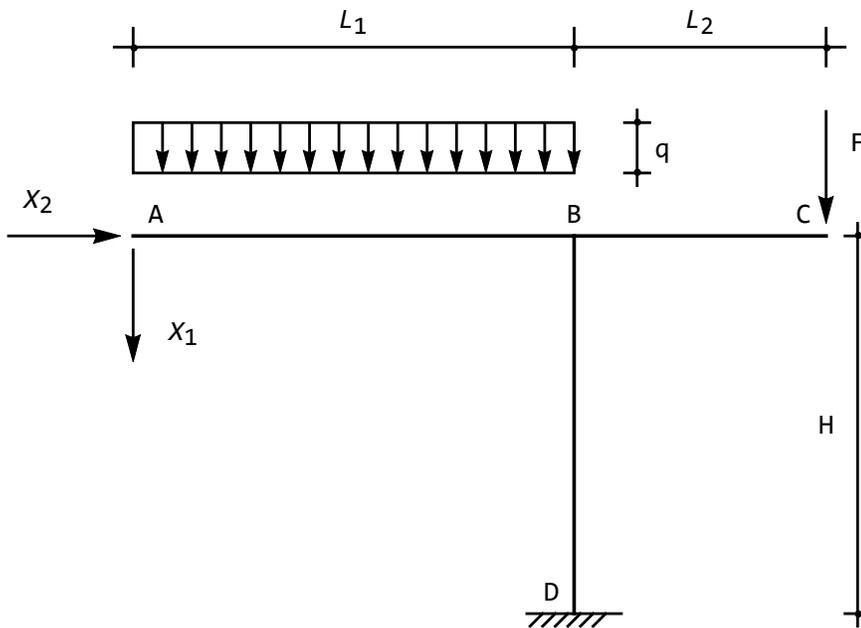


Figura 20.22: Un possibile S.I.E. al telaio di Figura 20.21

Per il calcolo dei coefficienti di queste due equazioni, occorre far riferimento ai tre diagrammi dei momenti già tracciati (vedi Figure 20.18, 20.19 e 20.20) ed al diagramma di Figura 20.23).

Per completare la prima equazione occorre il coefficiente  $u_{2A}^{(2)}$ , che rappresenta lo spostamento verticale del punto  $A$  dovuto ad una incognita  $X_2$  unitaria. Dal diagramma di Figura 20.23 si realizza che il piedritto  $BD$  può riguardarsi come una mensola soggetta alla forza trasversale di intensità unitaria, e quindi ruota di una quantità pari a:

$$\phi_B = -1 \frac{H^2}{2EI} \quad (20.50)$$

causando uno spostamento in  $A$  pari:

$$u_{2A}^{(2)} = -1 \frac{H^2}{2EI} L_1 \quad (20.51)$$

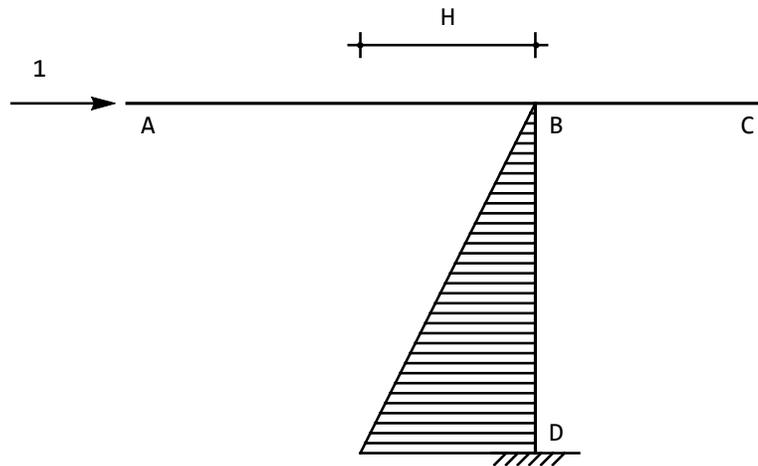


Figura 20.23: Lo schema  $S_2$  per il calcolo degli spostamenti in  $A$  dovuti ad una incognita iperstatica di valore unitario

Su questo stesso schema, è poi immediato calcolare lo spostamento assiale del punto  $A$ , pari allo spostamento trasversale dell'estremo  $B$  della mensola  $BD$ :

$$u_{3A}^{(2)} = 1 \frac{H^3}{3EI} \quad (20.52)$$

Gli altri tre spostamenti assiali, dovuti rispettivamente al carico  $q$ , alla forza  $F$  ed alla incognita iperstatica  $X_1$  assunta unitaria, possono leggersi sui rispettivi schemi, e sono pari a:

$$u_{3A}^{(01)} = -q \frac{L_1^2}{2} \frac{H^2}{2EI} \quad (20.53)$$

$$\begin{aligned} u_{3A}^{(02)} &= FL_2 \frac{H^2}{2EI} \\ u_{3A}^{(1)} &= -1L_1 \frac{H^2}{2EI} \end{aligned} \quad (20.54)$$

Le due equazioni di congruenza si esplicitano allora come:

$$\begin{aligned} q \frac{L_1^4}{8EI} + q \frac{L_1^3 H}{2EI} - FL_2 \frac{H}{EI} L_1 + X_1 \left( \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{L_1 H}{EI} L_1 \right) - X_2 \frac{H^2}{2EI} L_1 &= 0 \\ -q \frac{L_1^2}{2} \frac{H^2}{2EI} + FL_2 \frac{H^2}{2EI} - X_1 L_1 \frac{H^2}{2EI} + X_2 \frac{H^3}{3EI} &= 0 \end{aligned} \quad (20.55)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{3HqL_1^2 + 3qL_1^3 - 6FHL_2}{6HL_1 + 8L_1^2} \\ X_2 &= \frac{3qL_1^3 - 24FL_1L_2}{12H^2 + 16HL_1} \end{aligned} \quad (20.56)$$

## 20.6 Un telaio zoppo tre volte iperstatico

Si ipotizzi ora che lo stesso schema dei due esempi precedenti sia vincolato in  $A$  con un incastro, sicchè la struttura risultante di Figura 20.24 è tre volte iperstatica.

Una possibile scelta di sistema isostatico equivalente, che permette di sfruttare i risultati dei due esempi precedenti, è riportato in Figura 20.25. Su di esso occorre ora imporre le tre equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_{2A} &= 0 \\ u_{3A} &= 0 \\ \phi_A &= 0 \end{aligned} \quad (20.57)$$

che per il principio di sovrapposizione degli effetti scriveremo come:

$$\begin{aligned} u_{2A}^{(01)} + u_{2A}^{(02)} + X_1 u_{2A}^{(1)} + X_2 u_{2A}^{(2)} + X_3 u_{2A}^{(3)} &= 0 \\ u_{3A}^{(01)} + u_{3A}^{(02)} + X_1 u_{3A}^{(1)} + X_2 u_{3A}^{(2)} + X_3 u_{3A}^{(3)} &= 0 \\ \phi_A^{(01)} + \phi_A^{(02)} + X_1 \phi_A^{(1)} + X_2 \phi_A^{(2)} + X_3 \phi_A^{(3)} &= 0 \end{aligned} \quad (20.58)$$

I coefficienti non ancora valutati sono le rotazioni  $\phi_A^{(01)}$  e  $\phi_A^{(02)}$ , dovute al carico  $q$  ed alla forza  $F$ , rispettivamente (da calcolare sullo schema  $S_0$  di Figura 20.18 e 20.19):

$$\phi_A^{(01)} = \frac{qL_1^2}{2} \frac{H}{EI} + \frac{qL_1^3}{6EI} \quad (20.59)$$

$$\phi_A^{(02)} = -FL_2 \frac{H}{EI} \quad (20.60)$$

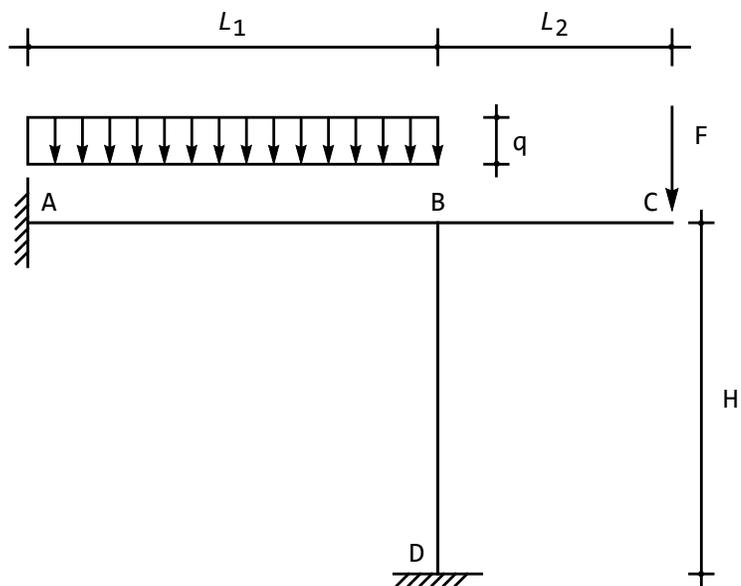


Figura 20.24: Un telaio tre volte iperstatico

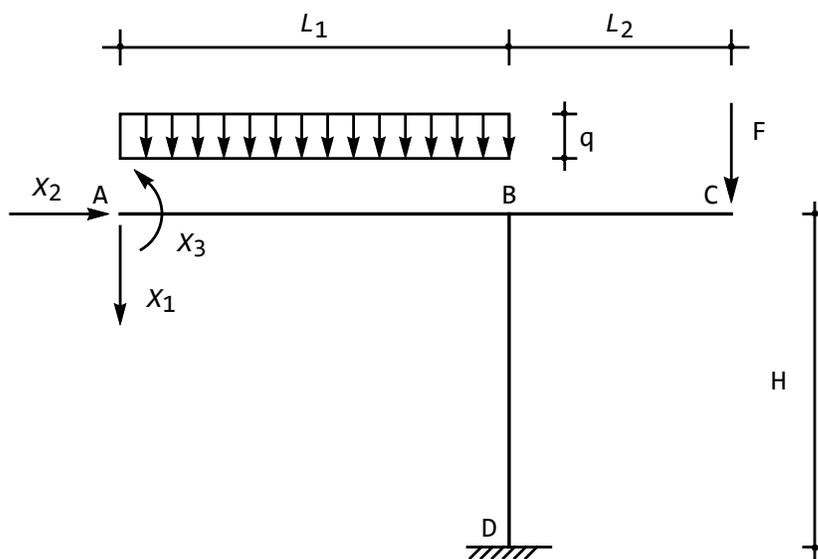


Figura 20.25: Un possibile S.I.E. al telaio di Figura 20.24

le rotazioni  $\phi_A^{(1)}$  e  $\phi_A^{(2)}$  dovute alle incognite iperstatiche unitarie  $X_1$  ed  $X_2$  (da calcolare sugli schemi  $S_1$  ed  $S_2$  di Figura 20.20 e 20.23):

$$\phi_A^{(1)} = L_1 \frac{H}{EI} + \frac{L_1^2}{2EI} \quad (20.61)$$

$$\phi_A^{(2)} = -\frac{H^2}{2EI} \quad (20.62)$$

ed infine gli spostamenti orizzontali  $u_{3A}^{(3)}$ , verticali  $u_{2A}^{(3)}$  e la rotazione  $\phi_A^{(3)}$  del punto  $A$  per effetto di una coppia unitaria in  $A$ .

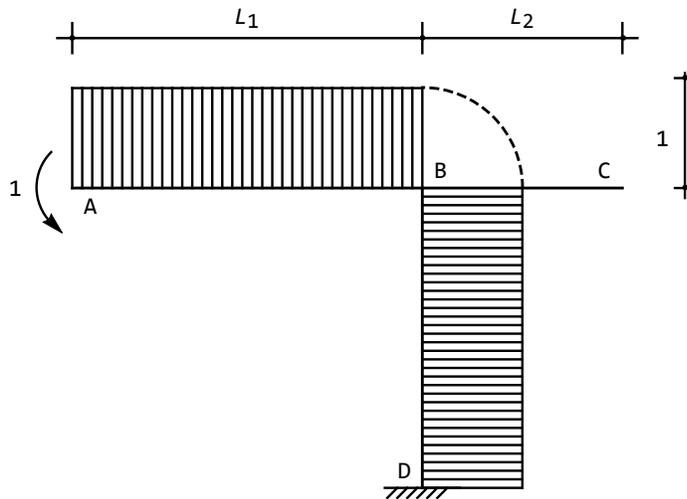


Figura 20.26: Lo schema  $S_3$  per il calcolo degli spostamenti in  $A$  dovuti ad una incognita iperstatica di valore unitario

Per essi, lo schema di riferimento  $S_3$  è quello di Figura 20.26, dove è riportato anche il diagramma del momento. Utilizzando la composizione degli spostamenti, e quindi guardando il piedritto  $BD$  come una mensola soggetta alla coppia unitaria, si ha:

$$\phi_B = 1 \frac{H}{EI} \quad (20.63)$$

Si ha perciò:

$$\begin{aligned} u_{2A}^{(3)} &= \frac{H}{EI} L_1 + \frac{L_1^2}{2EI} \\ u_{3A}^{(3)} &= -\frac{H^2}{2EI} \\ \phi_A^{(3)} &= \frac{H}{EI} + \frac{L_1}{EI} \end{aligned} \quad (20.64)$$

### La soluzione del sistema di equazioni di congruenza

Il sistema da risolvere si scrive in definitiva:

$$\begin{aligned}
 & q \frac{L_1^4}{8EI} + q \frac{L_1^3 H}{2EI} - FL_2 \frac{H}{EI} L_1 + X_1 \left( \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{L_1 H}{EI} L_1 \right) - X_2 \frac{H^2}{2EI} L_1 + \\
 & \quad X_3 \left( \frac{H}{EI} L_1 + \frac{L_1^2}{2EI} \right) = 0 \\
 & -q \frac{L_1^2}{2} \frac{H^2}{2EI} + FL_2 \frac{H^2}{2EI} - X_1 L_1 \frac{H^2}{2EI} + X_2 \frac{H^3}{3EI} - X_3 \frac{H^2}{2EI} = 0 \quad (20.65) \\
 & \frac{qL_1^2}{2} \frac{H}{EI} + \frac{qL_1^3}{6EI} - FL_2 \frac{H}{EI} + X_1 \left( L_1 \frac{H}{EI} + \frac{L_1^2}{2EI} \right) - X_2 \frac{H^2}{2EI} + \\
 & \quad X_3 \left( \frac{H}{EI} + \frac{L_1}{EI} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Riordinando e semplificando si ha:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{L_1^3}{3EI} + \frac{L_1 H}{EI} L_1 \right) X_1 - \frac{H^2}{2EI} L_1 X_2 + \left( \frac{H}{EI} L_1 + \frac{L_1^2}{2EI} \right) X_3 = \\
 & \quad -q \frac{L_1^4}{8EI} - q \frac{L_1^3 H}{2EI} + FL_2 \frac{H}{EI} L_1 \\
 & - L_1 \frac{H^2}{2EI} X_1 + \frac{H^3}{3EI} X_2 - \frac{H^2}{2EI} X_3 = q \frac{L_1^2}{2} \frac{H^2}{2EI} - FL_2 \frac{H^2}{2EI} \quad (20.66) \\
 & \left( L_1 \frac{H}{EI} + \frac{L_1^2}{2EI} \right) X_1 - \frac{H^2}{2EI} X_2 + \left( \frac{H}{EI} + \frac{L_1}{EI} \right) X_3 = \\
 & \quad - \frac{qL_1^2}{2} \frac{H}{EI} - \frac{qL_1^3}{6EI} + FL_2 \frac{H}{EI}
 \end{aligned}$$

Risolvendo, si ottengono le tre incognite iperstatiche:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{-5HqL_1^2 - 4qL_1^3 + 12FHL_2}{8L_1(H + L_1)} \\
 X_2 &= \frac{qL_1^3 - 12FL_1L_2}{8H^2 + 8HL_1} \\
 X_3 &= \frac{3HqL_1^2 + 2qL_1^3 - 12FHL_2}{24(H + L_1)} \quad (20.67)
 \end{aligned}$$

## 20.7 Un portale semplicemente iperstatico

Si vuole ora studiare il telaio di Figura 20.27, costituito da due piedritti di altezza disuguale, caricato da una forza concentrata in un punto generico del ritto.

La struttura è semplicemente iperstatica, e come sistema isostatico equivalente può scegliersi la mensola di Figura 20.28.

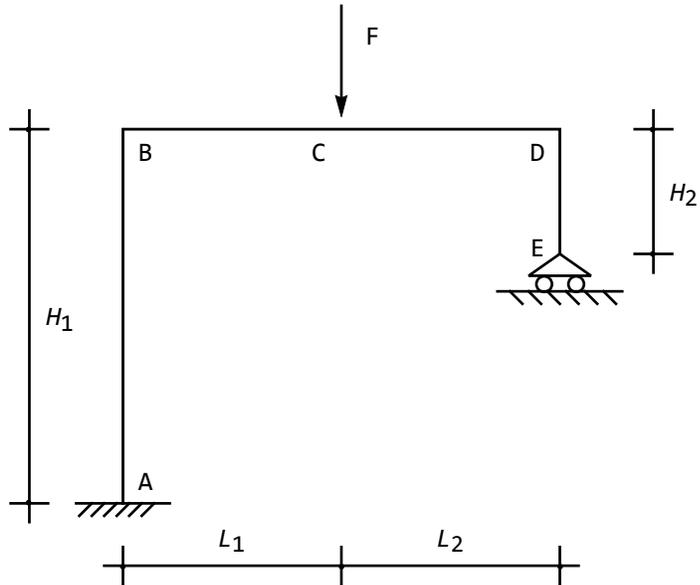


Figura 20.27: Un telaio zoppo semplicemente iperstatico

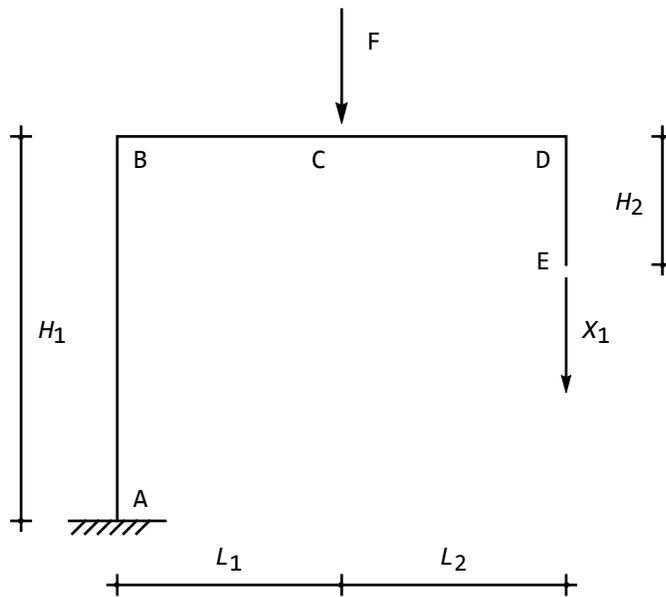


Figura 20.28: Un S.I.E. per il telaio zoppo di Figura 20.27

Su di esso occorre imporre l'equazione di congruenza:

$$u_{2E} = 0 \quad (20.68)$$

ossia, operando sugli schemi parziali  $S_0$  ed  $S_1$  :

$$u_{2E}^{(0)} + X_1 u_{2E}^{(1)} = 0 \quad (20.69)$$

### Calcolo di $u_{2E}^{(0)}$

Lo schema  $S_0$  è presentato in Figura 20.29, insieme al diagramma del momento.

Dall'esame del diagramma, si evince che lo spostamento verticale del punto  $E$  può pensarsi composto da due aliquote: la prima aliquota si ottiene considerando rigido il tratto  $BE$ , e riguardando il piedritto  $AB$  come una mensola soggetta alla coppia  $FL_1$ . Ne segue una rotazione in  $B$  pari a:

$$\phi_B = -FL_1 \frac{H_1}{EI} \quad (20.70)$$

che implica lo spostamento di  $E$  pari a:

$$u_{2E}^{(0)'} = -\phi_B (L_1 + L_2) = FL_1 \frac{H_1}{EI} (L_1 + L_2) \quad (20.71)$$

La seconda aliquota si ottiene considerando rigido il piedritto  $AB$ , mentre il tratto  $BC$  può essere visto come una mensola soggetta alla forza  $F$ . Ne segue:

$$u_{2E}^{(0)''} = \frac{FL_1^3}{3EI} + \frac{FL_1^2}{2EI} L_2 \quad (20.72)$$

ed in definitiva:

$$u_{2E}^{(0)} = FL_1 \frac{H_1}{EI} (L_1 + L_2) + \frac{FL_1^3}{3EI} + \frac{FL_1^2}{2EI} L_2 \quad (20.73)$$

### Calcolo di $u_{2E}^{(1)}$

Lo schema  $S_1$  è riportato in Figura 20.30, insieme al diagramma del momento. Considerazioni simili a quelle precedenti portano a scrivere:

$$u_{2E}^{(1)} = (L_1 + L_2) \frac{H_1}{EI} (L_1 + L_2) + \frac{(L_1 + L_2)^3}{3EI} \quad (20.74)$$

L'incognita iperstatica può infine calcolarsi come:

$$X_1 = -\frac{u_{2E}^{(0)}}{u_{2E}^{(1)}} = -\frac{FL_1 (6H_1 (L_1 + L_2) + L_1 (2L_1 + 3L_2))}{2 (L_1 + L_2)^2 (3H_1 + L_1 + L_2)} \quad (20.75)$$

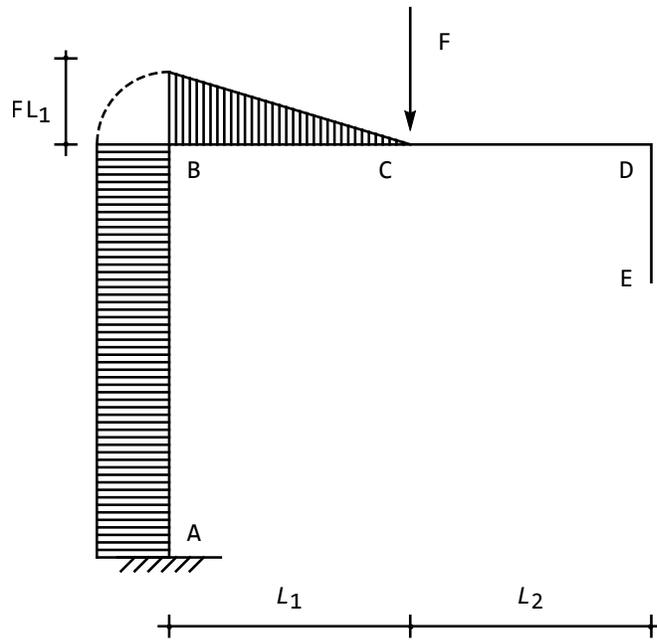


Figura 20.29: Lo schema  $S_0$  per il telaio zoppo di Figura 20.27

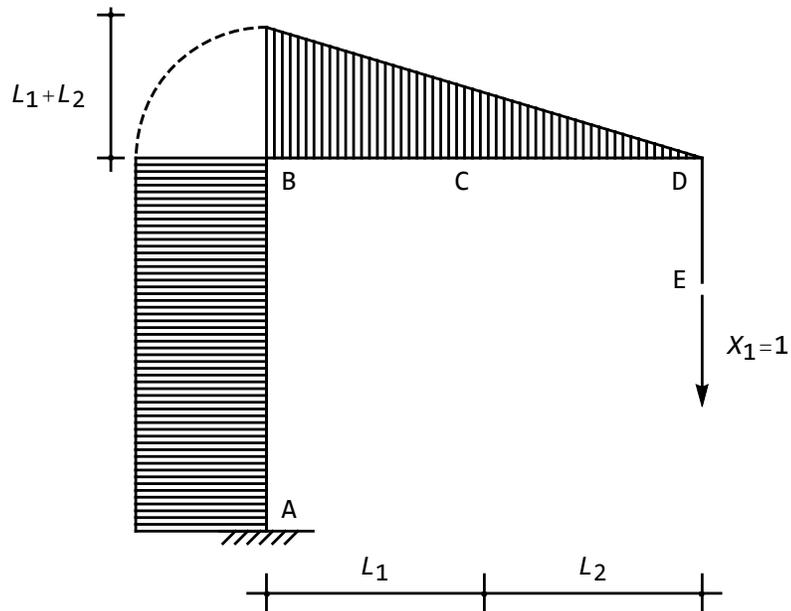


Figura 20.30: Lo schema  $S_1$  per il telaio zoppo di Figura 20.27

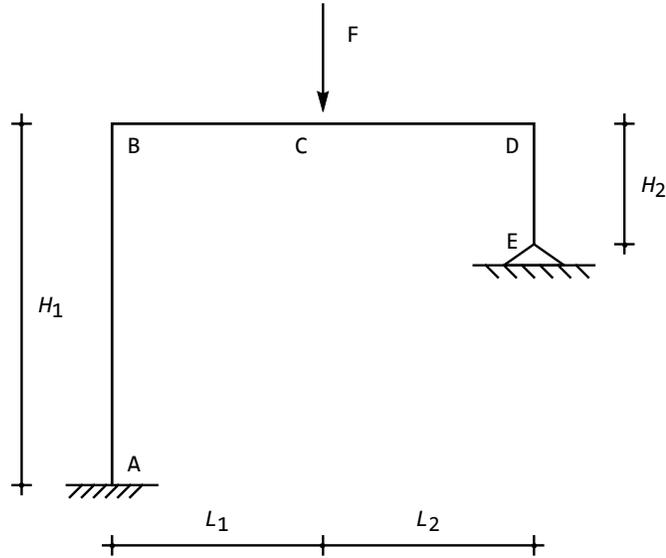


Figura 20.31: Un telaio zoppo doppiamente iperstatico

## 20.8 Un portale doppiamente iperstatico

Lo stesso telaio zoppo dell'esercizio precedente viene ora reso due volte iperstatico, vincolandolo con una cerniera in  $E$  (Figura 20.31).

Convien scegliere il sistema isostatico equivalente di Figura 20.32, in modo da utilizzare i risultati già ottenuti in precedenza. Su tale schema le equazioni di congruenza sono:

$$\begin{aligned} u_{2E} &= 0 \\ u_{3E} &= 0 \end{aligned} \quad (20.76)$$

ossia, operando sugli schemi parziali:

$$\begin{aligned} u_{2E}^{(0)} + X_1 u_{2E}^{(1)} + X_2 u_{2E}^{(2)} &= 0 \\ u_{3E}^{(0)} + X_1 u_{3E}^{(1)} + X_2 u_{3E}^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (20.77)$$

Il coefficiente  $u_{2E}^{(0)}$  è già stato calcolato, sullo schema  $S_0$  di Figura 20.29. Su questo stesso schema si può calcolare lo spostamento orizzontale di  $E$ , calcolando la rotazione in  $D$  come somma di due aliquote:

$$\phi_D = -FL_1 \frac{H_1}{EI} - \frac{FL_1^2}{2EI} \quad (20.78)$$

e quindi:

$$u_{3E}^{(0)} = FL_1 \frac{H_1^2}{2EI} + \phi_D H_2 = FL_1 \frac{H_1^2}{2EI} - FL_1 \frac{H_1}{EI} H_2 - \frac{FL_1^2}{2EI} H_2 \quad (20.79)$$

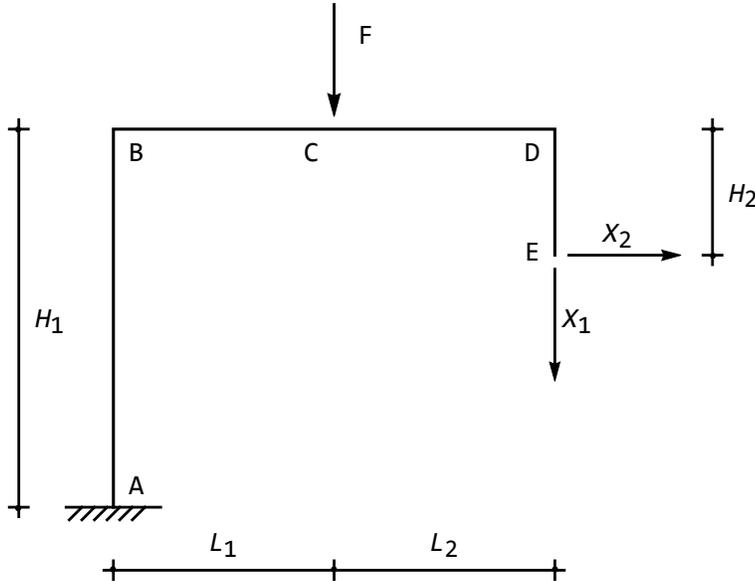


Figura 20.32: Un S.I.E. per il telaio zoppo di Figura 20.31

ed in modo totalmente analogo potrà scriversi, a partire dallo schema  $S_1$ :

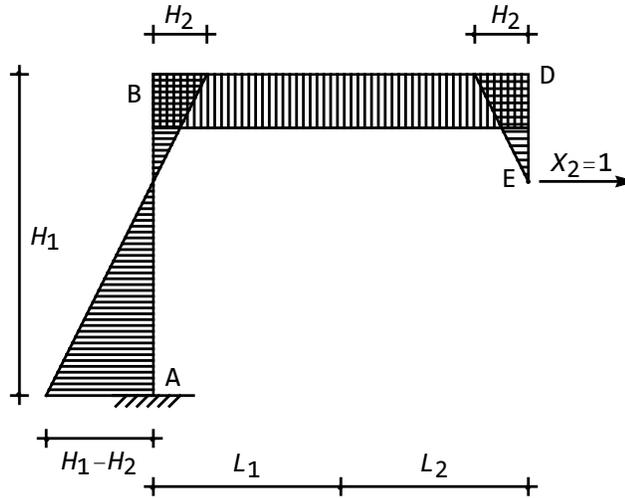
$$u_{3E}^{(1)} = \frac{H_1^2}{2EI} (L_1 + L_2) - H_2 \frac{H_1}{EI} (L_1 + L_2) - H_2 \frac{(L_1 + L_2)^2}{2EI} \quad (20.80)$$

Gli ultimi due coefficienti devono essere calcolati sullo schema  $S_2$  di Figura 20.33. Per facilitare il compito, si osservi che il diagramma lungo il tratto  $AB$  può riguardarsi come la differenza di un diagramma triangolare, nullo in  $B$  e pari ad  $H_1$  in  $A$ , e di un diagramma costante, e pari ad  $H_2$ . Ne segue lo spostamento verticale:

$$u_{2E}^{(2)} = \frac{H_1^2}{2EI} (L_1 + L_2) - H_2 \frac{H_1}{EI} (L_1 + L_2) - H_2 \frac{(L_1 + L_2)^2}{2EI} \quad (20.81)$$

Il primo termine è dovuto al diagramma triangolare del momento lungo  $AB$ , che può pensarsi generato da una forza unitaria in  $B$ . Esso quindi causa una rotazione oraria in  $B$  pari ad  $\frac{H_1^2}{2EI}$ , che a sua volta causa un abbassamento del punto  $E$  pari a  $\frac{H_1^2}{2EI} (L_1 + L_2)$ .

Il secondo termine è dovuto al diagramma costante del momento lungo  $AB$ , che può pensarsi generato da una coppia in  $B$  di valore  $-H_2$ . Essa provoca la rotazione  $H_2 \frac{H_1}{EI}$ , che a sua volta provoca l'innalzamento in  $E$  pari a  $-H_2 \frac{H_1}{EI} (L_1 + L_2)$ .


 Figura 20.33: Lo schema  $S_2$  per il telaio zoppo di Figura 20.30

Il terzo termine, infine, è dovuto al momento lungo  $BD$ , che provoca l'innalzamento  $-H_2 \frac{(L_1 + L_2)^2}{2EI}$ .

Si osservi anche, che in base al teorema di Betti si ha l'uguaglianza  $u_{3E}^{(1)} = u_{2E}^{(2)}$ .

Analogamente, lo spostamento orizzontale può scriversi:

$$u_{3E}^{(2)} = \frac{H_1^3}{3EI} - H_2 \frac{H_1^2}{2EI} - H_2 \frac{H_1^2}{2EI} + H_2 \frac{H_1}{EI} H_2 + H_2 \frac{(L_1 + L_2)}{EI} H_2 + \frac{H_2^3}{3EI} \quad (20.82)$$

I primi due termini sono dovuti al diagramma triangolare del momento, che causa uno spostamento orizzontale in  $B$  pari a  $\frac{H_1^3}{3EI}$ , ed una rotazione oraria pari a  $\frac{H_1^2}{2EI}$ . A sua volta, questa rotazione comporta uno spostamento orizzontale in  $E$  pari a  $-H_2 \frac{H_1^2}{2EI}$ . I successivi due termini sono dovuti all'aliquota costante di momento lungo  $AB$ , che provoca uno spostamento orizzontale pari a  $-H_2 \frac{H_1^2}{2EI}$ , ed una rotazione antioraria pari a  $H_2 \frac{H_1}{EI}$ . Tale rotazione provoca uno spostamento orizzontale in  $E$  pari a  $H_2 \frac{H_1}{EI} H_2$ . Il penultimo termine è dovuto al momento lungo  $BC$ , di valore  $-H_2$ , che causa una rotazione antioraria in  $C$  pari a  $H_2 \frac{(L_1 + L_2)}{EI}$ , e quindi uno spostamento orizzontale in  $E$  pari a  $H_2 \frac{(L_1 + L_2)}{EI} H_2$ . Infine, l'ultimo termine è dovuto al diagramma triangolare del momento lungo  $DE$ .

### 20.8.1 L'utilizzo del principio dei lavori virtuali

Attesa la complessità del calcolo dei coefficienti attraverso la composizione degli spostamenti, conviene controllare i risultati utilizzando il principio dei lavori virtuali, che — sebbene computazionalmente più impegnativo — fornisce i risultati in modo più “automatico”.

A tal fine, utilizzando i diagrammi dei momenti calcolati in precedenza sugli schemi  $S_0$ ,  $S_1$  ed  $S_2$ , si potrà dedurre il diagramma del momento per la struttura iperstatica. Sarà infatti, per il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \quad (20.83)$$

Si scriva ora il principio dei lavori virtuali, assumendo come sistema di forze virtuali il sistema di forze sul sistema  $S_1$ , e come insieme di spostamenti il sistema reale. Si ha:

$$\int_s M_1 M dz = 0 \quad (20.84)$$

ossia, per la (20.83):

$$\int_s M_1 M_0 dz + X_1 \int_s M_1^2 dz + X_2 \int_s M_1 M_2 dz = 0 \quad (20.85)$$

Un semplice confronto con la prima equazione di congruenza (20.77) permette di scrivere:

$$\begin{aligned} u_{2E}^{(0)} &= \int_s M_1 M_0 dz \\ u_{2E}^{(1)} &= \int_s M_1^2 dz \\ u_{2E}^{(2)} &= \int_s M_1 M_2 dz \end{aligned} \quad (20.86)$$

Analogamente, utilizzando il sistema di forze virtuali agenti su  $S_2$ , si ottiene

$$\int_s M_2 M dz = 0 \quad (20.87)$$

e quindi gli altri coefficienti della seconda equazione di congruenza :

$$\begin{aligned} u_{3E}^{(0)} &= \int_s M_2 M_0 dz \\ u_{3E}^{(1)} &= \int_s M_2 M_1 dz \\ u_{3E}^{(2)} &= \int_s M_2^2 dz \end{aligned} \quad (20.88)$$

**Nota 1** — Poichè si è utilizzato l'insieme di spostamenti reali, in realtà si sta utilizzando il *principio delle forze virtuali*

**Nota 2** — La simmetria della matrice dei coefficienti è resa esplicita dall'essere  $u_{2E}^{(2)} = u_{3E}^{(1)}$

### Il calcolo dei coefficienti

I diagrammi dei momenti hanno andamento lineare, o addirittura costante, e quindi la loro legge di variazione è facilmente deducibile dai relativi diagrammi. Si avrà:

$$\begin{aligned}
 m_0^{AB}(z) &= -FL_1 \\
 m_0^{BC}(z) &= F(-L_1 + z) \\
 m_1^{AB}(z) &= -(L_1 + L_2) \\
 m_1^{BC}(z) &= -(L_1 + L_2 - z) \\
 m_1^{CD}(z) &= (-L_2 + z) \\
 m_2^{AB}(z) &= (-H_1 + H_2 + z) \\
 m_2^{BC}(z) &= H_2 \\
 m_2^{CD}(z) &= H_2 \\
 m_2^{DE}(z) &= -z
 \end{aligned}
 \tag{20.89}$$

Il calcolo degli integrali non presenta alcuna difficoltà:

$$\begin{aligned}
 u_{2E}^{(0)} &= F(L_1 + L_2)L_1 \int_0^{H_1} dz - \int_0^{L_1} (L_1 + L_2 - z)F(-L_1 + z) dz \\
 &= \frac{FL_1^3}{3} + \frac{1}{2}FL_1^2L_2 + FH_1L_1(L_1 + L_2)
 \end{aligned}
 \tag{20.90}$$

coincidente con la (20.73). Analogamente si avrà:

$$\begin{aligned}
 u_{2E}^{(1)} &= \int_0^{H_1} (L_1 + L_2)^2 dz + \int_0^{L_1} (L_1 + L_2 - z)^2 dz + \int_0^{L_2} (-L_2 + z)^2 dz \\
 &= \frac{1}{3}(L_1 + L_2)^2(3H_1 + L_1 + L_2)
 \end{aligned}
 \tag{20.91}$$

coincidente con la (20.74). Si avrà poi ancora:

$$\begin{aligned}
 u_{2E}^{(2)} &= - \int_0^{H_1} (-H_1 + H_2 + z)(L_1 + L_2) dz - H_2 \int_0^{L_1} (L_1 + L_2 - z) dz + \\
 &\quad H_2 \int_0^{L_2} (-L_2 + z) dz = -\frac{1}{2}(L_1 + L_2)(-H_1^2 + 2H_1H_2 + H_2(L_1 + L_2))
 \end{aligned}
 \tag{20.92}$$

coincidente con la (20.81). Per la seconda equazione, si avrà :

$$\begin{aligned}
 u_{3E}^{(0)} &= -FL_1 \int_0^{H_1} (-H_1 + H_2 + z) dz + H_2 \int_0^{L_1} F(-L_1 + z) dz \\
 &= -F \left( -\frac{H_1^2}{2} + H_1H_2 \right) L_1 - \frac{1}{2}FH_2L_1^2
 \end{aligned}
 \tag{20.93}$$

$$\begin{aligned}
 u_{3E}^{(2)} &= \int_0^{H_1} (-H_1 + H_2 + z)^2 dz + H_2^2 \int_0^{L_1} dz + H_2^2 \int_0^{L_2} dz + \int_0^{H_2} (z)^2 dz \\
 &= \frac{1}{3} (H_1^3 - 3H_1^2 H_2 + 3H_1 H_2^2 + H_2^2 (H_2 + 3(L_1 + L_2)))
 \end{aligned} \tag{20.94}$$

coincidenti con le (20.79) e le (20.82), rispettivamente.

### La soluzione delle equazioni

Risolvendo le (20.77) si avranno infine le due incognite iperstatiche:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{-FL_1}{(L_1 + L_2)^2 \Delta} (3H_1^4 (L_1 + L_2) + 2H_1^3 L_1 (2L_1 + 3L_2) + \\
 &\quad 3H_1^2 H_2 (2L_1^2 + 3L_1 L_2 + 3L_2^2) + 6H_1 H_2^2 (2L_1^2 + \\
 &\quad 6L_1 L_2 + 3L_2^2 + 2H_2 (L_1 + L_2)) + \\
 &\quad H_2^2 L_1 (H_2 (4L_1 + 6L_2) + 3(L_1^2 + 4L_1 L_2 + 3L_2^2)))
 \end{aligned} \tag{20.95}$$

$$X_2 = -\frac{3FL_1 L_2 (H_2 L_1 (L_1 + L_2) + 2H_1 H_2 (2L_1 + L_2) + H_1^2 (L_1 + 2L_2))}{(L_1 + L_2) \Delta} \tag{20.96}$$

con :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 3H_1^4 + 4H_1^3 (L_1 + L_2) + 6H_1^2 H_2 (L_1 + L_2) + 12H_1 H_2^2 (H_2 + L_1 + L_2) + \\
 &\quad H_2^2 (L_1 + L_2) (4H_2 + 3(L_1 + L_2))
 \end{aligned} \tag{20.97}$$

Se la forza agisce in mezzeria, ponendo  $L_1 = L_2 = L$  si ha:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{-F}{4L\Delta} (6H_1^4 L + 10H_1^3 L^2 + 24H_1^2 H_2 L^2 + 6H_1 H_2^2 (4H_2 L + 11L^2) \\
 &\quad + H_2^2 L (10H_2 L + 24L^2))
 \end{aligned} \tag{20.98}$$

$$X_2 = -\frac{3FL^2 (3H_1^2 + 6H_1 H_2 + 2H_2 L)}{2(3H_1^4 + 8H_1^3 L + 12H_1^2 H_2 L + 12H_1 H_2^2 (H_2 + 2L) + 4H_2^2 L (2H_2 + 3L))} \tag{20.99}$$

con :

$$\Delta = 3H_1^4 + 8H_1^3 L + 12H_1^2 H_2 L + 12H_1 H_2^2 (H_2 + 2L) + 2H_2^2 L (4H_2 + 6L) \tag{20.100}$$

e se i due piedritti hanno altezza uguale,  $H_1 = H_2 = H$ , e le incognite valgono:

$$X_1 = -\frac{F(15H^2 + 55HL + 12L^2)}{30H^2 + 104HL + 24L^2} \tag{20.101}$$

$$X_2 = -\frac{3FL^2(9H + 2L)}{2H(15H^2 + 52HL + 12L^2)} \tag{20.102}$$

## 20.9 Un telaio tre volte iperstatico

Si calcolino le reazioni e si disegni il diagramma delle c.s.i. per il telaio in Figura 20.34.

### Il calcolo delle incognite iperstatiche

Il telaio è tre volte iperstatico, ed una possibile scelta di incognite iperstatiche è riportata in Figura 20.35: si sono inserite tre cerniere in  $A$ , in  $B$  ed in  $C$ , e corrispondentemente sono stati aggiunti i momenti incogniti. Si è indicato con  $M^{IJ}$  il momento nel nodo  $I$  agente sul tratto  $IJ$ , sicchè, per l'equilibrio dei concii:

$$\begin{aligned} M^{AB} &= X_1 \\ M^{BA} &= -M^{BC} = X_2 \\ M^{CB} &= M^{CD} = X_3 \end{aligned} \quad (20.103)$$

Per ripristinare la situazione originaria, occorrerà rispettare le tre condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} \phi_A &= 0 \\ \Delta\phi_B = 0 &\longrightarrow \phi_{BA} = \phi_{BC} \\ \Delta\phi_C = 0 &\longrightarrow \phi_{CB} = \phi_{CD} \end{aligned} \quad (20.104)$$

dove con  $\phi_{IJ}$  si è indicata la rotazione in  $I$  del tratto  $IJ$ . Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} \phi_A^{(0)} + X_1\phi_A^{(1)} + X_2\phi_A^{(2)} + X_3\phi_A^{(3)} &= 0 \\ \phi_{BA}^{(0)} + X_1\phi_{BA}^{(1)} + X_2\phi_{BA}^{(2)} + X_3\phi_{BA}^{(3)} &= \phi_{BC}^{(0)} + X_1\phi_{BC}^{(1)} + X_2\phi_{BC}^{(2)} + X_3\phi_{BC}^{(3)} \\ \phi_{CB}^{(0)} + X_1\phi_{CB}^{(1)} + X_2\phi_{CB}^{(2)} + X_3\phi_{CB}^{(3)} &= \phi_{CD}^{(0)} + X_1\phi_{CD}^{(1)} + X_2\phi_{CD}^{(2)} + X_3\phi_{CD}^{(3)} \end{aligned} \quad (20.105)$$

La particolare scelta della struttura isostatica equivalente implica che il telaio si è suddiviso in schemi parziali, e quindi molti coefficienti delle equazioni precedenti si annulleranno, e le equazioni di congruenza si semplificheranno in:

$$\begin{aligned} M^{AB}\phi_A^{(1)} + M^{BA}\phi_A^{(2)} &= 0 \\ M^{AB}\phi_{BA}^{(1)} + M^{BA}\phi_{BA}^{(2)} &= M^{BC}\phi_{BC}^{(2)} + M^{CB}\phi_{BC}^{(3)} \\ M^{BC}\phi_{CB}^{(2)} + M^{CB}\phi_{CB}^{(3)} &= M^{CD}\phi_{CD}^{(3)} + \phi_{CD}^{(0)} \end{aligned} \quad (20.106)$$

Il coefficiente  $\phi_A^{(1)}$  è la rotazione in  $A$  calcolata sullo schema (1), ossia sul telaio isostatico caricato da una coppia  $M^{AB}$  unitaria in  $A$ . Sarà quindi:

$$\phi_A^{(1)} = \frac{H}{3EI} \quad (20.107)$$

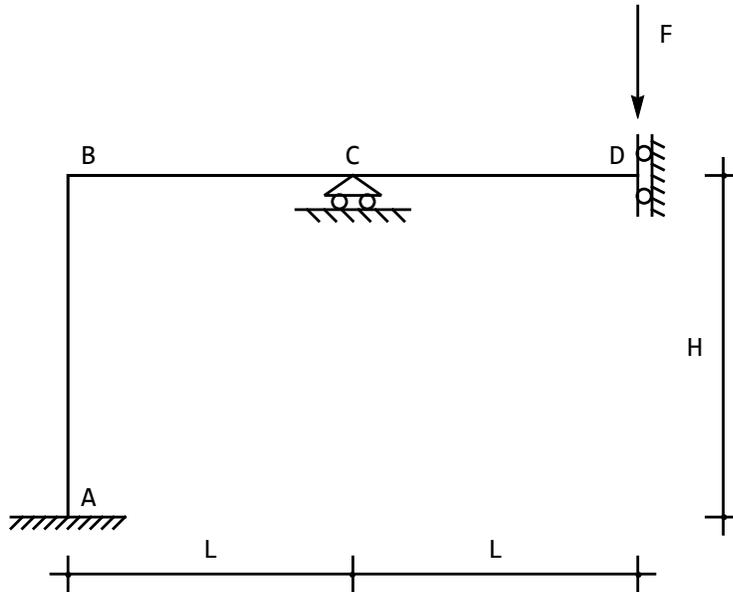


Figura 20.34: Un telaio tre volte iperstatico

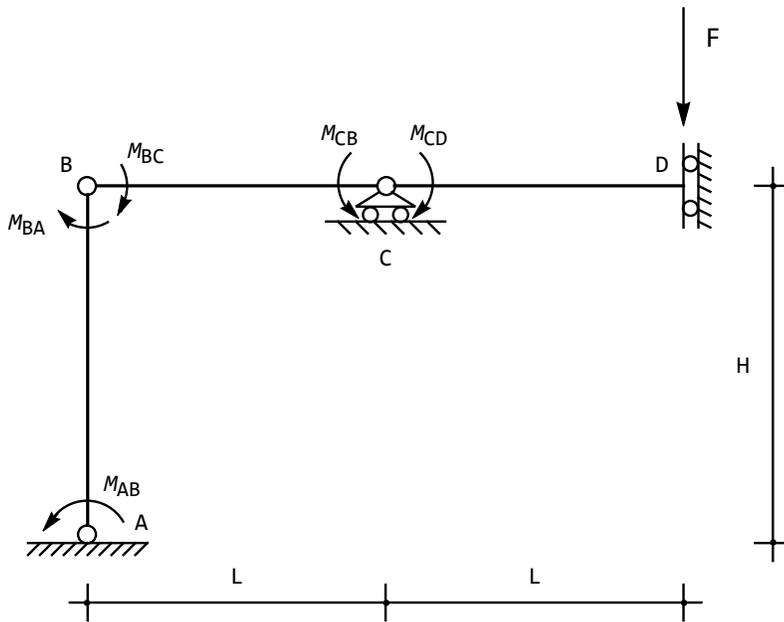


Figura 20.35: Un possibile S.I.E. per il telaio di Figura 20.34

Il coefficiente  $\phi_A^{(2)}$  è la rotazione in  $A$  calcolata sullo schema (2), ossia sul telaio isostatico caricato da una coppia  $M^{BA}$  unitaria in  $B$ . Sarà quindi:

$$\phi_A^{(2)} = \frac{H}{6EI} \quad (20.108)$$

Analogamente si ha, operando sempre su schemi di travi appoggiate e caricate da una coppia all'estremo:

$$\begin{aligned} \phi_{BA}^{(1)} &= -\frac{H}{6EI} \\ \phi_{BA}^{(2)} &= -\frac{H}{3EI} \\ \phi_{BC}^{(2)} &= -\frac{L}{3EI} \\ \phi_{BC}^{(3)} &= -\frac{L}{6EI} \\ \phi_{CB}^{(2)} &= \frac{L}{6EI} \\ \phi_{CB}^{(3)} &= \frac{L}{3EI} \end{aligned} \quad (20.109)$$

I due coefficienti  $\phi_{CD}^{(3)}$  e  $\phi_{CD}^{(0)}$ , invece, devono essere calcolati sullo schema di trave appoggiata a sinistra e con bipendolo a destra. Una banalissima applicazione dei corollari di Mohr permette di scrivere:

$$\begin{aligned} \phi_{CD}^{(3)} &= -\frac{L}{EI} \\ \phi_{CD}^{(0)} &= -\frac{FL^2}{2EI} \end{aligned} \quad (20.110)$$

In definitiva, le equazioni si scrivono:

$$\begin{aligned} \frac{H}{3EI}M^{AB} + \frac{H}{6EI}M^{BA} &= 0 \\ -\frac{H}{6EI}M^{AB} - \frac{H}{3EI}M^{BA} &= -\frac{L}{3EI}M^{BC} - \frac{L}{6EI}M^{CB} \\ \frac{L}{6EI}M^{BC} + \frac{L}{3EI}M^{CB} &= -\frac{L}{EI}M^{CD} - \frac{FL^2}{2EI} \end{aligned} \quad (20.111)$$

ed utilizzando le (20.103):

$$\begin{aligned} \frac{H}{3EI}M^{AB} - \frac{H}{6EI}M^{BC} &= 0 \\ -\frac{H}{6EI}M^{AB} + \frac{H}{3EI}M^{BC} &= -\frac{L}{3EI}M^{BC} - \frac{L}{6EI}M^{CB} \\ \frac{L}{6EI}M^{BC} + \frac{L}{3EI}M^{CB} &= -\frac{L}{EI}M^{CB} - \frac{FL^2}{2EI} \end{aligned} \quad (20.112)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 M^{AB} &= \frac{FL^2}{2(4H + 5L)} \\
 M^{BC} &= \frac{FL^2}{4H + 5L} \\
 M^{CB} &= -\frac{FL(3H + 4L)}{2(4H + 5L)}
 \end{aligned}
 \tag{20.113}$$

e nel caso  $L = H$ , cui d'ora in poi ci si limiterà:

$$\begin{aligned}
 M^{AB} &= \frac{FL}{18} \\
 M^{BC} &= \frac{FL}{9} \\
 M^{CB} &= -\frac{7}{18}FL \\
 M^{BA} &= -\frac{FL}{9}
 \end{aligned}
 \tag{20.114}$$

### Il calcolo delle reazioni, dei tagli e degli sforzi normali

Il quadro completo delle forze agenti sulla struttura è riportato in Figura 20.36, e da essa deve essere possibile estrarre le informazioni necessarie, utilizzando considerazioni di equilibrio.

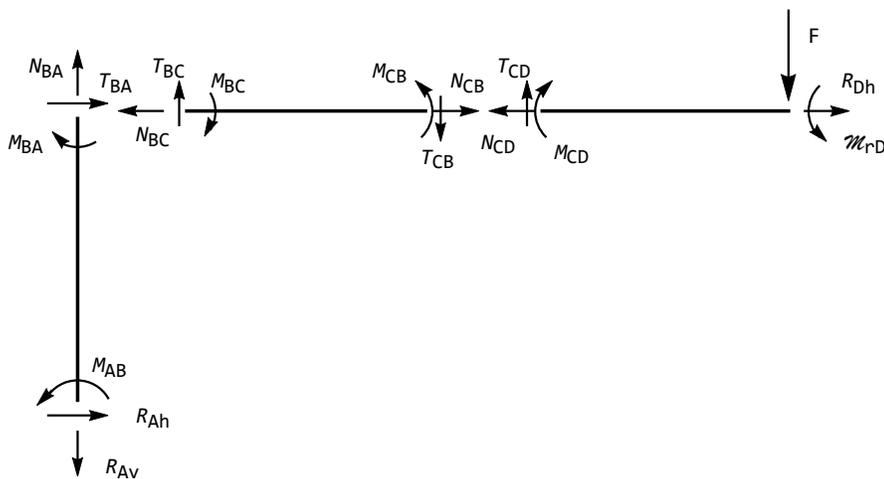


Figura 20.36: Le forze agenti sulla struttura

L'equazione di equilibrio del tratto  $AB$  alla rotazione intorno al polo  $B$  fornisce la reazione orizzontale:

$$R_{Ah}L + M^{AB} - M^{BA} = 0 \longrightarrow R_{Ah} = -\frac{F}{18} - \frac{F}{9} = -\frac{F}{6} \quad (20.115)$$

e l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale dello stesso tratto fornisce il taglio  $T^{BA}$  in testa al piedritto:

$$T^{BA} + R_{Ah} = 0 \longrightarrow T^{BA} = \frac{F}{6} \quad (20.116)$$

L'equilibrio del nodo in  $B$  alla traslazione orizzontale garantisce che:

$$T^{BA} - N^{BC} = 0 \longrightarrow N^{BC} = \frac{F}{6} \quad (20.117)$$

e gli altri equilibri alla traslazione orizzontale portano a scrivere:

$$\begin{aligned} -N^{BC} - N^{CB} &= 0 \longrightarrow N^{CB} = \frac{F}{6} \\ N^{CB} - N^{CD} &= 0 \longrightarrow N^{CD} = \frac{F}{6} \\ -N^{CD} + R_{Dh} &= 0 \longrightarrow R_{Dh} = \frac{F}{6} \end{aligned} \quad (20.118)$$

L'equilibrio alla rotazione del secondo tratto, con polo in  $B$ , fornisce:

$$-T^{CB}L - M^{BC} + M^{CB} = 0 \longrightarrow T^{CB} = -\frac{M^{BC}}{L} + \frac{M^{CB}}{L} = -\frac{F}{9} - \frac{7}{18}F = -\frac{F}{2} \quad (20.119)$$

ed anche, per l'equilibrio del secondo tratto alla traslazione verticale:

$$-T^{BC} + T^{CB} = 0 \longrightarrow T^{CB} = -\frac{F}{2} \quad (20.120)$$

L'equilibrio del nodo in  $B$  alla traslazione verticale garantisce che:

$$-N^{BA} - T^{BC} = 0 \longrightarrow N^{BA} = \frac{F}{2} \quad (20.121)$$

e quindi la reazione verticale dell'incastro:

$$-N^{BA} + R_{Av} = 0 \longrightarrow R_{Av} = \frac{F}{2} \quad (20.122)$$

Infine, dall'equilibrio del terzo tratto si trae:

$$\begin{aligned} -T^{CD} + F &= 0 \longrightarrow T^{CD} = F \\ \mathcal{M}_{rD} - FL - M^{CD} &= 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{rD} = FL + M^{CD} = FL - \frac{7}{18}FL = \frac{11}{18}FL \end{aligned} \quad (20.123)$$

e quindi l'equilibrio del concio in  $C$  permette di calcolare la reazione dell'appoggio:

$$-T^{CB} + R_C + T^{CD} = 0 \longrightarrow R_C = T^{CB} - T^{CD} = -\frac{3}{2}F \quad (20.124)$$

## Il tracciamento dei diagrammi

In base ai valori delle reazioni, appena calcolati, è possibile tracciare i diagrammi di sforzo normale, taglio e momento flettente, come riportato in Figura 20.37. Basta infatti realizzare che gli sforzi normali ed i tagli sono costanti a tratti, laddove il momento varia con legge lineare, e la sua pendenza è fornita dal diagramma del taglio.

## 20.10 Una diversa scelta di incognite iperstatiche

Si vuole ora affrontare lo stesso esempio precedente assumendo un diverso sistema isostatico equivalente, ed utilizzando il metodo della composizione degli spostamenti. A tal fine si sceglie la struttura a mensola di Figura 20.38, e su di essa si impongono le tre condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_{2C} &= 0 \\ u_{3D} &= 0 \\ \phi_D &= 0 \end{aligned} \quad (20.125)$$

Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti si scriverà allora:

$$\begin{aligned} u_{2C} &= u_{2C}^{(0)} + X_1 u_{2C}^{(1)} + X_2 u_{2C}^{(2)} + X_3 u_{2C}^{(3)} = 0 \\ u_{3D} &= u_{3D}^{(0)} + X_1 u_{3D}^{(1)} + X_2 u_{3D}^{(2)} + X_3 u_{3D}^{(3)} = 0 \\ \phi_D &= \phi_D^{(0)} + X_1 \phi_D^{(1)} + X_2 \phi_D^{(2)} + X_3 \phi_D^{(3)} = 0 \end{aligned} \quad (20.126)$$

## Il calcolo dei coefficienti

Lo schema 1 è riportato in Figura 20.39, e su di esso si calcolano i coefficienti  $u_{2C}^{(1)}$ ,  $u_{3D}^{(1)}$  e  $\phi_D^{(1)}$ . Si ha immediatamente:

$$\begin{aligned} u_{2C}^{(1)} &= 1L \frac{H}{EI} L + 1 \frac{L^3}{3EI} = \frac{HL^2}{EI} + \frac{L^3}{3EI} \\ u_{3D}^{(1)} &= 1L \frac{H^2}{2EI} \\ \phi_D^{(1)} &= -1L \frac{H}{EI} - 1 \frac{L^2}{2EI} \end{aligned} \quad (20.127)$$

Il secondo schema prevede una forza orizzontale unitaria in  $D$ , che causa il momento riportato in Figura 20.40. Su di esso si calcolano i coefficienti  $u_{2C}^{(2)}$ ,  $u_{3D}^{(2)}$  e  $\phi_D^{(2)}$ , anch'essi deducibili immediatamente da una semplice composizione

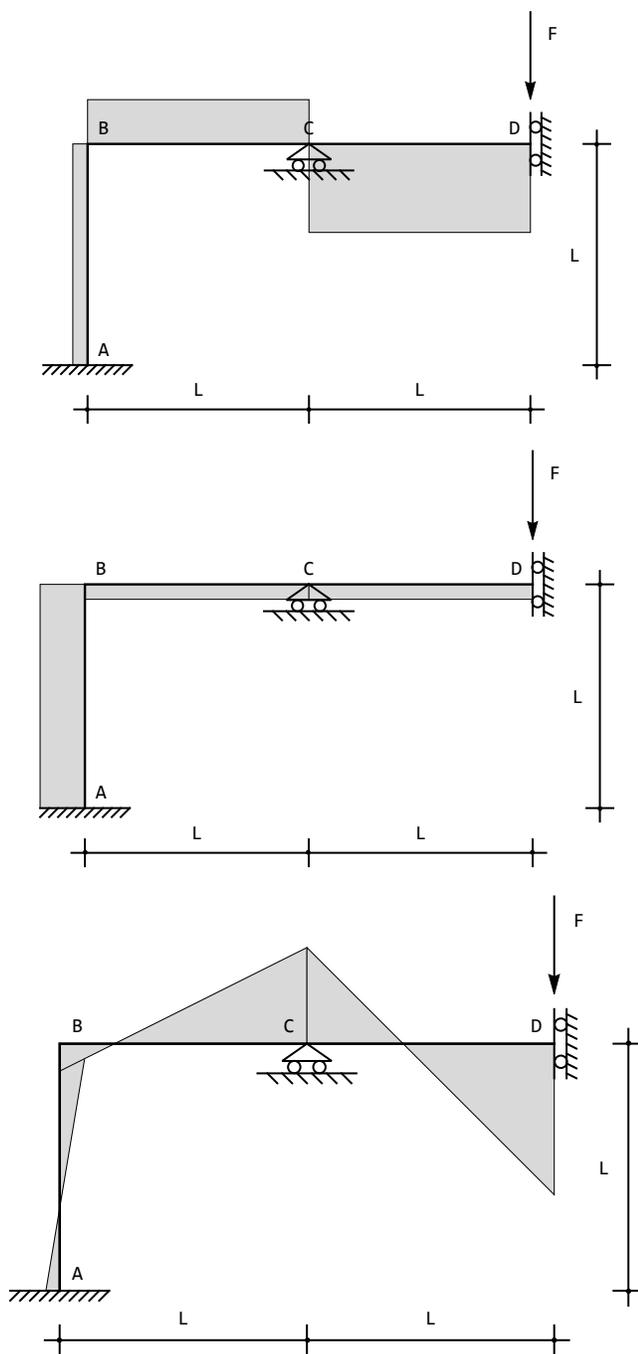


Figura 20.37: I diagrammi di sforzo normale, sforzo di tagli e momento flettente

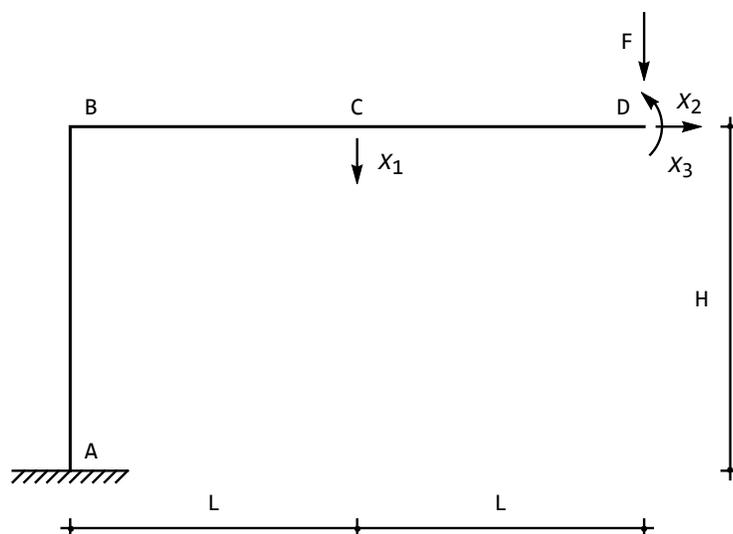


Figura 20.38: Un altro possibile sistema isostatico equivalente

di spostamenti:

$$\begin{aligned}
 u_{2C}^{(2)} &= 1 \frac{H^2}{2EI} L = \frac{H^2 L}{2EI} \\
 u_{3D}^{(2)} &= 1 \frac{H^3}{3EI} \\
 \phi_D^{(2)} &= -1 \frac{H^2}{2EI}
 \end{aligned}
 \tag{20.128}$$

Il terzo schema prevede una coppia unitaria in  $D$ , che causa il momento riportato in Figura 20.41. Su di esso si calcolano i coefficienti  $u_{2C}^{(3)}$ ,  $u_{3D}^{(3)}$  e  $\phi_D^{(3)}$ :

$$\begin{aligned}
 u_{2C}^{(3)} &= -1 \frac{H}{EI} L - 1 \frac{L^2}{2EI} \\
 u_{3D}^{(3)} &= -1 \frac{H^2}{2EI} \\
 \phi_D^{(3)} &= 1 \frac{H}{EI} + 12 \frac{L}{EI}
 \end{aligned}
 \tag{20.129}$$

Infine, lo schema zero prevede la presenza delle forze applicate, ossia — in questo caso — della forza  $F$  in  $D$ . Il diagramma del momento è riportato in Figura 20.42, ed i relativi coefficienti si ottengono come:

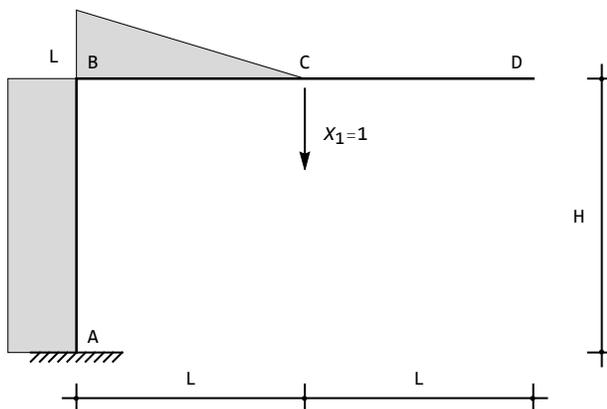


Figura 20.39: Lo schema  $S_1$

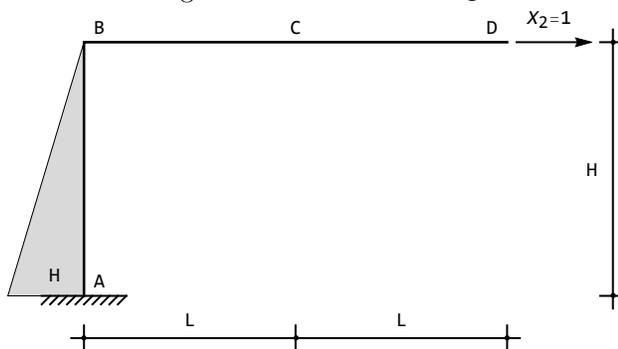


Figura 20.40: Lo schema  $S_2$

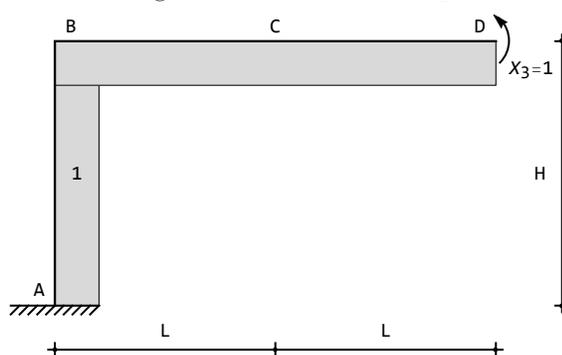
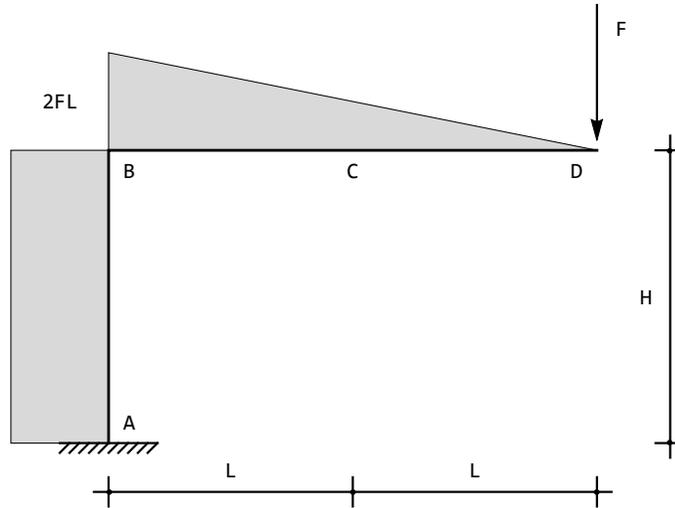


Figura 20.41: Lo schema  $S_3$


 Figura 20.42: Lo schema  $S_0$ 

$$\begin{aligned}
 u_{2C}^{(0)} &= 2FL \frac{H}{EI} L + \frac{FL L^2}{EI \cdot 2} + \frac{1}{2} \frac{FL}{EI} L \frac{2}{3} L = 2 \frac{FL^2 H}{EI} + \frac{5FL^3}{6EI} \\
 u_{3D}^{(0)} &= 2FL \frac{H^2}{2EI} \\
 \phi_D^{(0)} &= -2FL \frac{H}{EI} - F \frac{(2L)^2}{2EI} = -2 \frac{FLH}{EI} - \frac{2FL^2}{EI}
 \end{aligned} \tag{20.130}$$

Si è utilizzato il metodo di Mohr per ottenere lo spostamento trasversale in mezzeria per una mensola caricata in un estremo.

### La soluzione delle equazioni di congruenza

Sostituendo i valori dei coefficienti nelle (20.126) si giunge al sistema:

$$\begin{aligned}
 u_{2C} &= 2 \frac{FL^2 H}{EI} + \frac{5FL^3}{6EI} + X_1 \left( \frac{HL^2}{EI} + \frac{L^3}{3EI} \right) + X_2 \frac{H^2 L}{2EI} - \\
 &X_3 \left( \frac{HL}{EI} + \frac{L^2}{2EI} \right) = 0 \\
 u_{3D} &= 2FL \frac{H^2}{2EI} + X_1 \frac{LH^2}{2EI} + X_2 \frac{H^3}{3EI} - X_3 \frac{H^2}{2EI} = 0 \\
 \phi_D &= -2 \frac{FLH}{EI} - \frac{2FL^2}{EI} - X_1 \left( \frac{LH}{EI} + \frac{L^2}{2EI} \right) - X_2 \frac{H^2}{2EI} + \\
 &X_3 \left( \frac{H}{EI} + \frac{2L}{EI} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{20.131}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{F(11H + 16L)}{8H + 10L} \\ X_2 &= \frac{3FL^2}{8H^2 + 10HL} \\ X_3 &= \frac{FL(5H + 6L)}{8H + 10L} \end{aligned} \quad (20.132)$$

e nel caso in cui  $H = L$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{3F}{2} \\ X_2 &= \frac{F}{6} \\ X_3 &= \frac{11FL}{18} \end{aligned} \quad (20.133)$$

confermando i valori ottenuti nell' esercizio precedente.

## Capitolo 21

# Il principio dei lavori virtuali per le strutture iperstatiche

Un secondo utilizzo del principio dei lavori virtuali, accanto al calcolo di spostamenti nelle strutture isostatiche, è nella scrittura delle equazioni di congruenza per i sistemi iperstatici.

### 21.1 Un portale semplicemente iperstatico

Si consideri il portale di Figura 21.1, semplicemente iperstatico. Si vuole applicare il principio dei lavori virtuali per il calcolo dell'incognita iperstatica, tenendo conto del contributo di taglio e sforzo normale

Si sceglie—come incognita iperstatica—la reazione orizzontale della cerniera in  $A$ , riducendosi quindi al sistema isostatico equivalente di Figura 21.2.

Leggendo, come usuale, gli spostamenti sul sistema reale, e le forze sul sistema virtuale di Figura 21.3, si potrà scrivere il principio delle forze virtuali come segue:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds + \kappa \int_s T_1 \frac{T}{GA} ds + \int_s N_1 \frac{N}{EA} ds = 0 \quad (21.1)$$

Le caratteristiche  $M_1$ ,  $T_1$  ed  $N_1$  sono da calcolare sullo schema di Figura 21.3, e rappresentano il contributo del sistema di forze virtuali, mentre le caratteristiche  $M$ ,  $T$  ed  $N$  sono da calcolare sul sistema effettivo di Figura 21.1, o più appropriatamente sul sistema isostatico equivalente. Sarà allora, per il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{aligned} M &= M_0 + M_1 X_1 \\ T &= T_0 + T_1 X_1 \\ N &= N_0 + N_1 X_1 \end{aligned} \quad (21.2)$$

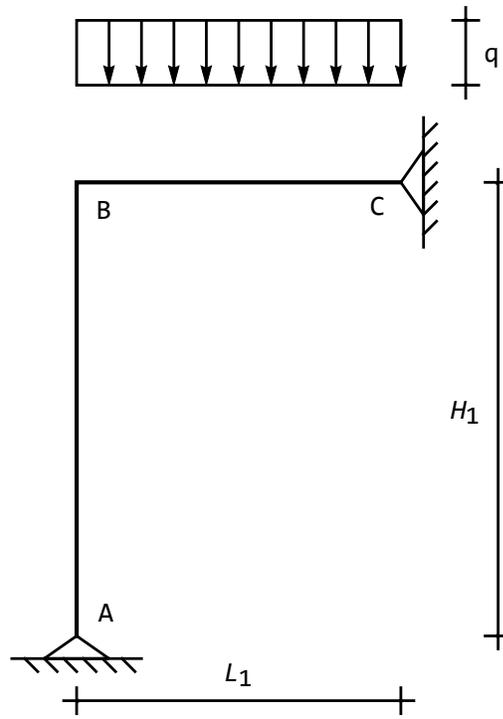


Figura 21.1: Un portale semplicemente iperstatico

dove le caratteristiche  $M_0$ ,  $T_0$  ed  $N_0$  vanno calcolate sullo schema  $S_0$ , caricato dai soli carichi esterni.

Utilizzando le (21.2), il principio dei lavori virtuali (p.l.v.) si scrive:

$$\int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds + \kappa \int_s T_1 \frac{T_0}{GA} ds + \int_s N_1 \frac{N_0}{EA} ds + X_1 \left( \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds + \kappa \int_s \frac{T_1^2}{GA} ds + \int_s \frac{N_1^2}{EA} ds \right) = 0 \quad (21.3)$$

da cui può ottenersi l'incognita iperstatica  $X_1$ .

**Il calcolo di  $\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds$ ,  $\int_s \frac{T_1^2}{GA} ds$ ,  $\int_s \frac{N_1^2}{EA} ds$**

Il diagramma del momento  $M_1$  è riportato in Figura 21.4, e l'integrale non presenta particolari difficoltà:

$$\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^{H_1} z^2 dz + \frac{H_1}{EI} \int_0^{L_1} \left(1 - \frac{z}{L_1}\right)^2 dz = \frac{H_1^3}{3EI} + \frac{H_1^2 L_1}{3EI} \quad (21.4)$$

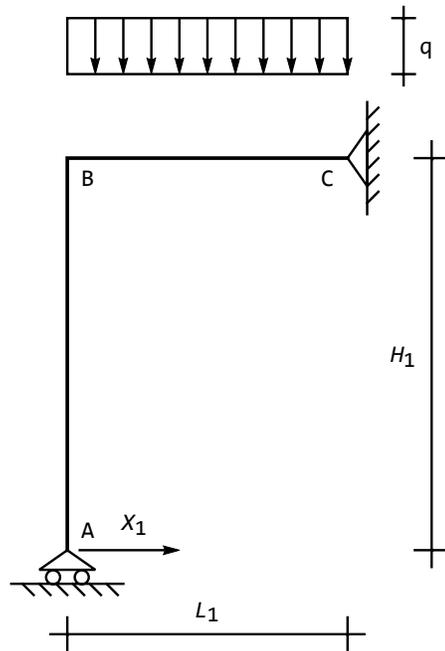


Figura 21.2: Il sistema isostatico equivalente

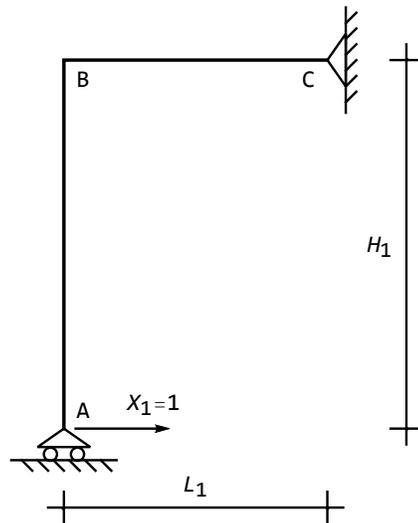
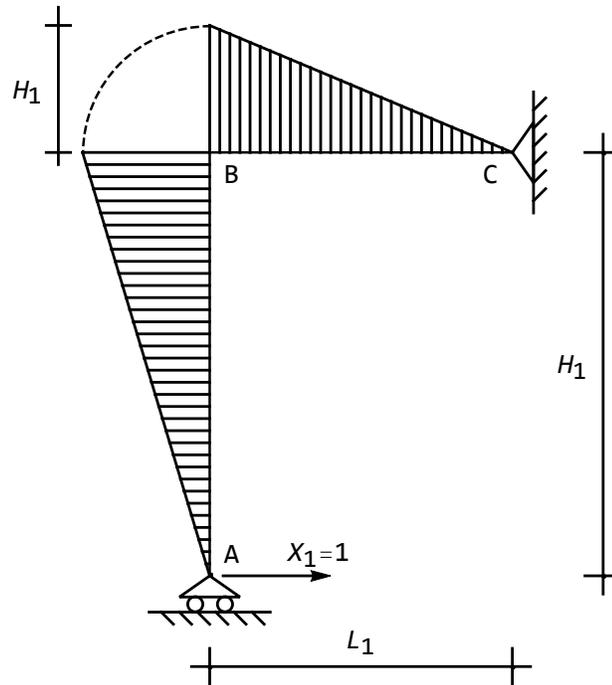


Figura 21.3: Il sistema  $S_1$  di forze virtuali

Figura 21.4: Il diagramma del momento sul sistema  $S_1$ 

I diagrammi del taglio e dello sforzo normale possono tracciarsi partendo dalla conoscenza delle reazioni:

$$\begin{aligned} R_{Av1} &= -\frac{H_1}{L_1} \\ R_{Ch1} &= -1 \\ R_{Cv1} &= \frac{H_1}{L_1} \end{aligned} \quad (21.5)$$

Sul ritto  $AB$ , si avrà quindi:

$$\begin{aligned} T_1^{AB} &= -1 \\ N_1^{AB} &= -\frac{H_1}{L_1} \end{aligned} \quad (21.6)$$

mentre l'equilibrio del concio in  $B$  permette di dedurre:

$$\begin{aligned} T_1^{BC} &= \frac{H_1}{L_1} \\ N_1^{BC} &= -1 \end{aligned} \quad (21.7)$$

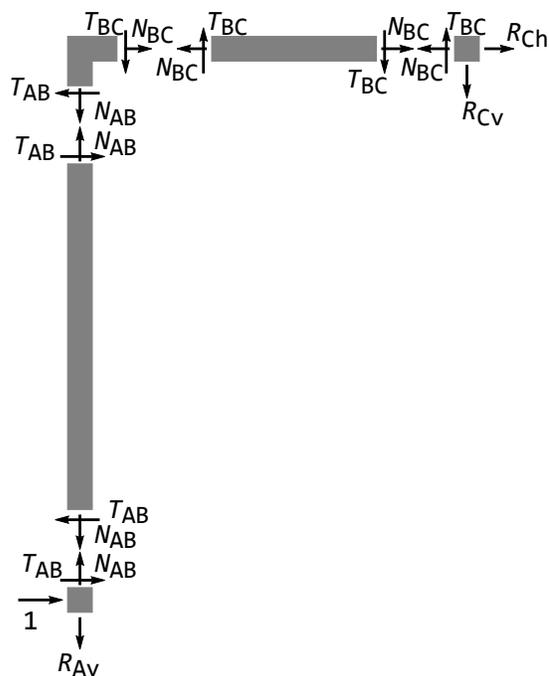


Figura 21.5: I diagrammi delle forze per il calcolo di sforzi normali e tagli

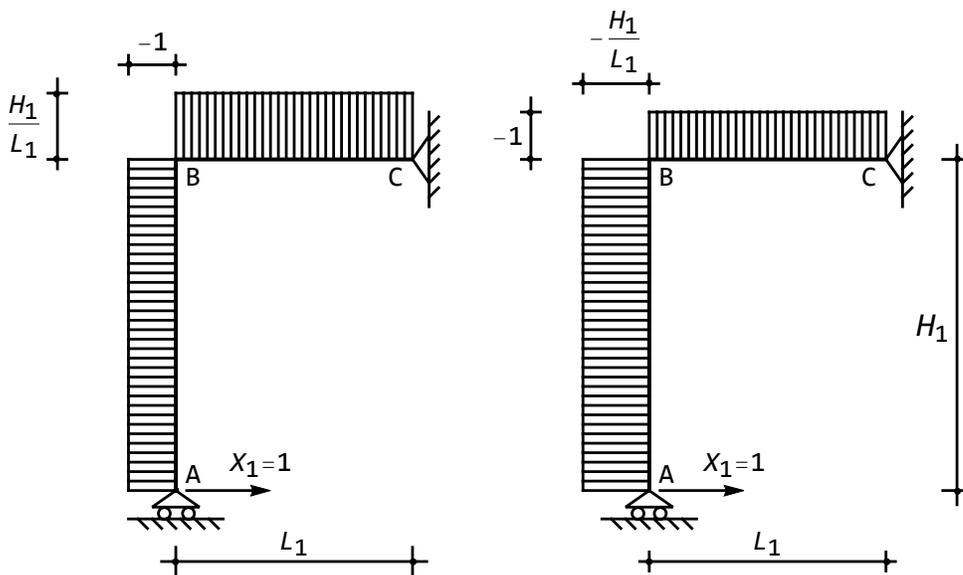


Figura 21.6: I diagrammi del taglio e dello sforzo normale sul sistema  $S_1$

come illustrato in Figura 21.5. Si ricorda che la convenzione sui segni degli sforzi normali prevede che essi siano positivi se di trazione, mentre i tagli sono positivi se fanno ruotare il concio in senso orario. Si giunge quindi ai diagrammi di Figura 21.6.

Data la costanza dei diagrammi in questione, gli integrali sono banali:

$$\int_s \frac{T_1^2}{GA} ds = \frac{H_1}{GA} + \frac{H_1^2}{L_1 GA} \quad (21.8)$$

$$\int_s \frac{N_1^2}{EA} ds = \frac{H_1^2}{EAL_1^2} H_1 + \frac{L_1}{EA} \quad (21.9)$$

**Il calcolo di  $\int_s \frac{M_0 M_1}{EI} ds$ ,  $\int_s \frac{T_0 T_1}{GA} ds$ ,  $\int_s \frac{N_0 N_1}{EA} ds$**

Il diagramma del momento  $M_0$ , da calcolare sullo schema  $S_0$  di Figura 21.7, è diverso da zero solo sul traverso, mentre risulta nullo lungo il piedritto, ed il suo andamento è quello da trave semplicemente appoggiata. Sarà quindi:

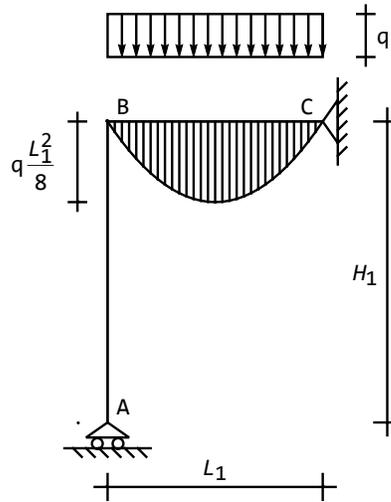


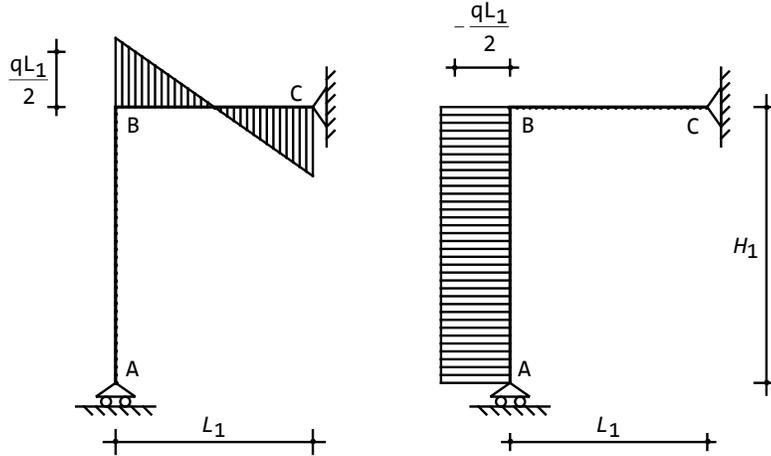
Figura 21.7: Il diagramma del momento sul sistema  $S_0$

$$\int_s \frac{M_0 M_1}{EI} ds = -\frac{qH_1}{2EI} \int_0^{L_1} z(L_1 - z) \left(1 - \frac{z}{L_1}\right) dz = -\frac{qH_1 L_1^3}{24EI} \quad (21.10)$$

I diagrammi di taglio  $T_0$  e di sforzo normale  $N_0$  sono riportati in Figura 21.8, per cui diviene possibile il calcolo dei due integrali seguenti:

$$\int_s \frac{T_0 T_1}{GA} ds = -\frac{qH_1}{2L_1 GA} \int_0^{L_1} \left(\frac{L_1}{2} - z\right) dz = 0 \quad (21.11)$$

$$\int_s \frac{N_0 N_1}{EA} ds = -\frac{qH_1 L_1}{2L_1 EA} \int_0^{H_1} dz = -\frac{qH_1^2}{2EA} \quad (21.12)$$


 Figura 21.8: Il diagramma del taglio e dello sforzo normale sul sistema  $S_0$ 

### Il calcolo dell'incognita iperstatica

Dalla (21.3) si ha subito:

$$X_1 = -\frac{\int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds + \kappa \int_s T_1 \frac{T_0}{GA} ds + \int_s N_1 \frac{N_0}{EA} ds}{\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds + \kappa \int_s \frac{T_1^2}{GA} ds + \int_s \frac{N_1^2}{EA} ds} \quad (21.13)$$

ossia:

$$X_1 = \frac{\frac{qH_1 L_1^3}{24EI} + \frac{qH_1^2}{2EA}}{\frac{H_1^3}{3EI} + \frac{H_1^2 L_1}{3EI} + \kappa \left( \frac{H_1}{GA} + \frac{H_1^2}{L_1 GA} \right) + \frac{H_1^3}{EAL_1^2} + \frac{L_1}{EA}} \quad (21.14)$$

Se si vogliono trascurare le deformazioni taglianti, occorre eliminare da questa formula i termini in cui compare la rigidezza tagliante  $GA$ , che si suppone infinita. Ne segue:

$$X_1 = \frac{\frac{qH_1 L_1^3}{24EI} + \frac{qH_1^2}{2EA}}{\frac{H_1^3}{3EI} + \frac{H_1^2 L_1}{3EI} + \frac{H_1^3}{EAL_1^2} + \frac{L_1}{EA}} \quad (21.15)$$

Se si vuole trascurare anche la deformazione da sforzo assiale, occorre eliminare i termini in cui compare la rigidezza assiale  $EA$ , che si suppone infinita:

$$X_1 = \frac{\frac{qH_1L_1^3}{24EI}}{\frac{H_1^3}{3EI} + \frac{H_1^2L_1}{3EI}} = \frac{q}{8} \frac{L_1^3}{H_1(H_1 + L_1)} \quad (21.16)$$

## 21.2 Portale con cedimento anelastico

Lo stesso telaio dell'esempio precedente subisce anche un cedimento anelastico orizzontale della cerniera di sinistra, che si sposta della quantità  $\delta$  (Figura 21.9). Si vuole studiare la struttura con l'ausilio del principio dei lavori virtuali, trascurando gli effetti delle deformazioni taglianti ed assiali.

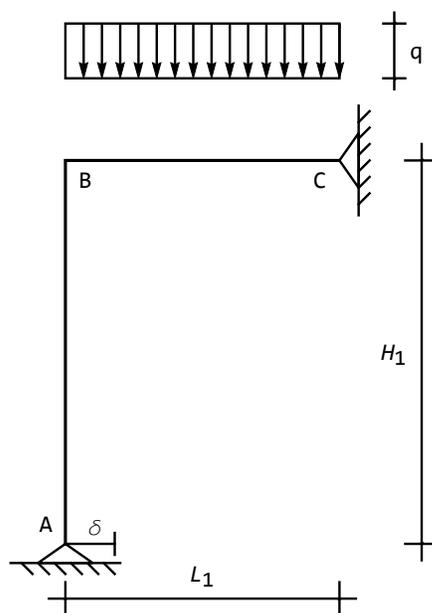


Figura 21.9: La presenza di un vincolo imperfetto

In questo caso, il lavoro esterno compiuto dalla forza virtuale unitaria in  $A$  non è nullo, e quindi il p.l.v. si scrive, limitandosi ai soli effetti flessionali:

$$\int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds + X_1 \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds = 1 \times \delta \quad (21.17)$$

e quindi, utilizzando i valori degli integrali già dedotti:

$$X_1 = \frac{\left(1 \times \delta - \int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds\right)}{\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds} = \frac{\delta - \frac{qH_1L_1^3}{24EI}}{-\frac{H_1^3}{3EI} + \frac{H_1^2L_1}{3EI}} = \frac{-24EI\delta + qH_1L_1^3}{8H_1^2(H_1 - L_1)} \quad (21.18)$$

### 21.3 Un portale sospeso

Si consideri ora il portale sospeso di Figura 21.10, costituito da tre tratti di diversa sezione retta, con momento di inerzia  $I_1$  (tratto  $AB$ ),  $I_2$  (tratto  $BC$ ) ed  $I_3$  (tratto  $CD$ ), soggetto ad una forza orizzontale concentrata ad altezza  $H_3$ .

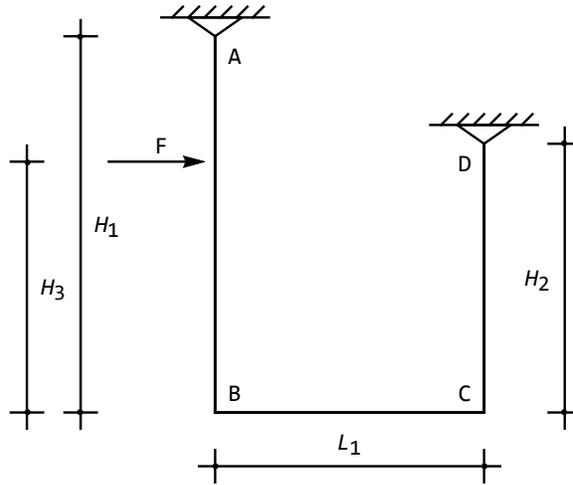


Figura 21.10: Un portale sospeso

La struttura è una volta iperstatica, e come struttura isostatica equivalente si sceglierà il sistema di Figura 21.11.

Sullo schema  $S_0$  le reazioni possono calcolarsi a partire dalle tre equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_{Ah0} &= -F \\ R_{Dv0} &= F \frac{H_1 - H_3}{L_1} \\ R_{Av0} &= -R_{Dv} \end{aligned} \quad (21.19)$$

ed il relativo diagramma  $M_0$  del momento si presenta come in Figura 21.12.

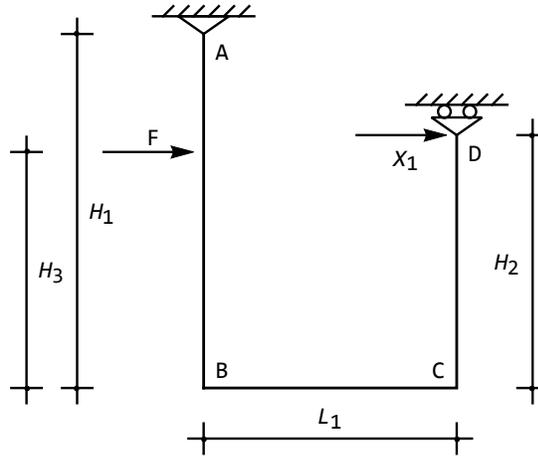


Figura 21.11: Un S.I.E. per il portale sospeso

Sullo schema  $S_1$  le equazioni di equilibrio forniscono:

$$\begin{aligned} R_{Ah1} &= -1 \\ R_{Dv1} &= \frac{H_1 - H_2}{L_1} \\ R_{Av1} &= -R_{Dv1} \end{aligned} \quad (21.20)$$

Ne segue che il momento assume l'aspetto di Figura 21.13, variando linearmente lungo il traverso dal valore  $1 \times H_1$  a sinistra, al valore  $1 \times H_2$  a destra.

Il principio dei lavori virtuali, limitandosi agli effetti flessionali, si scriverà:

$$\int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds + X_1 \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds = 0 \quad (21.21)$$

ed occorrerà esplicitare gli integrali, basandosi sui diagrammi precedenti.

**Il calcolo di  $\int_s \frac{M_0 M_1}{EI} ds$**

Si divide l'integrale in più tratti, scrivendo:

$$\int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds = \int_{H_3}^{H_1} M_1 \frac{M_0}{EI_1} dz + \int_0^{H_3} M_1 \frac{M_0}{EI_1} dz + \int_0^{L_1} M_1 \frac{M_0}{EI_2} dz \quad (21.22)$$

Si noti che il ritto di destra non compare, in quanto su di esso il momento  $M_0$  è nullo, e che si è diviso in due il ritto di sinistra. Le espressioni analitiche sono molto semplici:

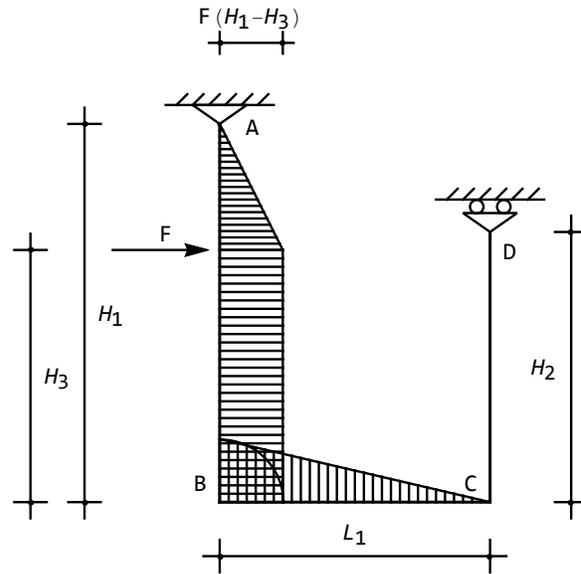


Figura 21.12: Il diagramma  $M_0$  per il portale sospeso

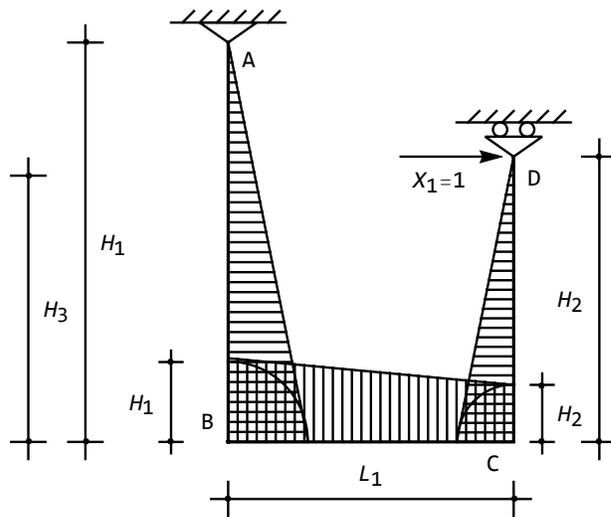


Figura 21.13: Il diagramma  $M_1$  per il portale sospeso

- per il primo tratto, da  $A$  all'ascissa della forza  $F$ , si sceglie l'origine in  $A$ , ottenendo:

$$\begin{aligned} M_0 &= Fz \\ M_1 &= z \end{aligned} \quad (21.23)$$

- per il secondo tratto, dall'ascissa della forza  $F$ , al punto  $B$ , si sceglie l'origine in  $B$ , ottenendo:

$$\begin{aligned} M_0 &= F (H_1 - H_3) \\ M_1 &= H_1 - z \end{aligned} \quad (21.24)$$

- per il terzo tratto, dal punto  $B$  al punto  $C$ , si sceglie l'origine in  $B$ , ottenendo:

$$\begin{aligned} M_0 &= F (H_1 - H_3) \left(1 - \frac{z}{L_1}\right) \\ M_1 &= H_1 - (H_1 - H_2) \frac{z}{L_1} \end{aligned} \quad (21.25)$$

e quindi il richiesto integrale può dedursi come

$$\begin{aligned} \int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds &= \frac{F}{EI_1} \int_0^{H_1-H_3} z^2 dz + \frac{F(H_1-H_3)}{EI_1} \int_0^{H_3} (H_1-z) dz + \\ &\frac{F(H_1-H_3)}{EI_2} \int_0^{L_1} \left(1 - \frac{z}{L_1}\right) \left(H_1 - (H_1-H_2) \frac{z}{L_1}\right) dz = \\ &\frac{F(H_1-H_3)^3}{3EI_1} + \frac{F(H_1-H_3)}{EI_1} \left(H_1 H_3 - \frac{H_3^2}{2}\right) + \frac{F(H_1-H_3)}{EI_2} \left(\frac{H_1 L_1}{3} + \frac{H_2 L_1}{6}\right) \end{aligned} \quad (21.26)$$

**Il calcolo di  $\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds$**

Alle leggi di variazione di  $M_1$  già dedotte, deve aggiungersi la legge di variazione lungo il ritto di destra. Scegliendo l'origine del riferimento in  $D$  si ottiene:

$$M_1 = z \quad (21.27)$$

e quindi subito:

$$\begin{aligned} \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds &= \frac{1}{EI_1} \int_0^{H_1} z^2 ds + \frac{1}{EI_2} \int_0^{L_1} \left(H_1 + (H_2 - H_1) \frac{z}{L_1}\right)^2 ds + \\ &\frac{1}{EI_3} \int_0^{H_2} z^2 ds = \frac{H_1^3}{3EI_1} + \frac{H_2^3}{3EI_3} + \frac{\frac{1}{3}H_1^2 L_1 + \frac{1}{3}H_1 H_2 L_1 + \frac{1}{3}H_2^2 L_1}{EI_2} \end{aligned} \quad (21.28)$$

## Il calcolo dell'incognita iperstatica

Si ha immediatamente, dalla (21.21):

$$X_1 = -F \frac{I_3 (I_2 (2H_1^3 - 3H_1H_2^2 + H_2^3) + I_1 (2H_1 + H_2) (H_1 - H_2) L_1)}{2I_2 (I_3H_1^3 + I_1H_2^3) + 2I_1I_3 (H_1^2 + H_1H_2 + H_2^2) L_1} \quad (21.29)$$

## 21.4 Un telaio semplicemente iperstatico

Si vuole ora studiare il telaio di Figura 21.14, tenendo conto dei soli effetti della deformabilità flessionale.

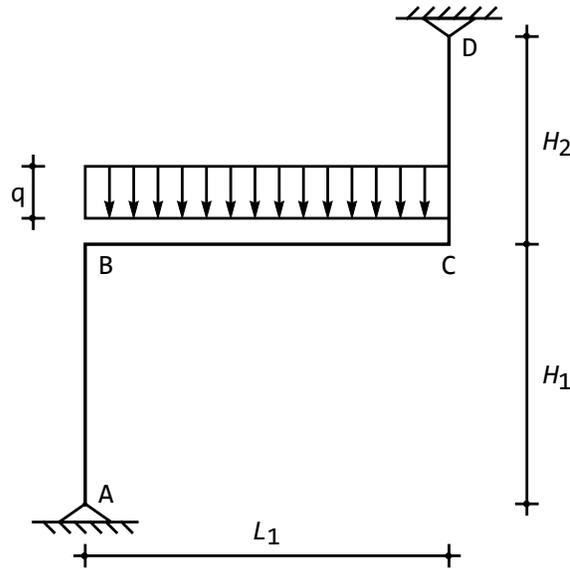


Figura 21.14: Un telaio semplicemente iperstatico

Si utilizza il sistema isostatico equivalente di Figura 21.15, dove è anche evidenziata l'incognita iperstatica  $X_1$ .

Il principio dei lavori virtuali, limitandosi agli effetti flessionali, si scriverà:

$$\int_s M_0 \frac{M_0}{EI} ds + X_1 \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds = 0 \quad (21.30)$$

dove i diagrammi  $M_0$  ed  $M_1$  devono essere calcolati sullo schema  $S_0$ , in presenza del solo carico applicato  $q$ , ed  $S_1$ , in presenza di una incognita iperstatica unitaria  $X_1 = 1$ .

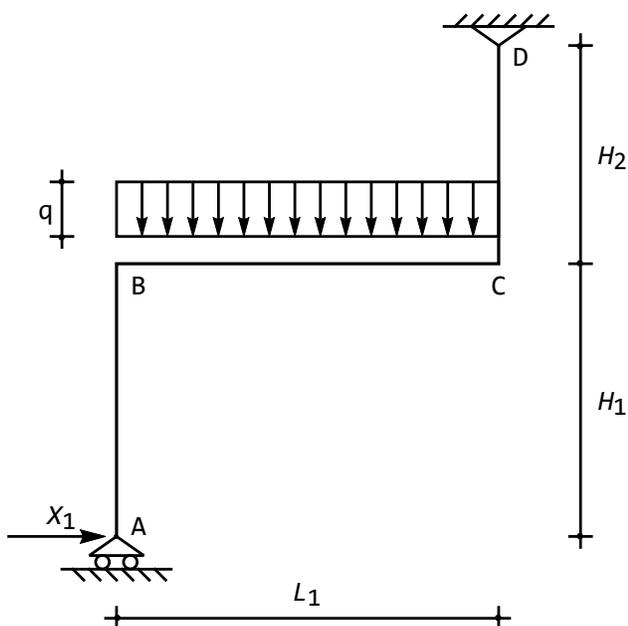


Figura 21.15: Un S.I.E. per il telaio semplicemente iperstatico di Figura 21.14

Le reazioni vincolari per lo schema  $S_0$  sono ricavabili dalle tre equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_{Dh0} &= 0 \\ R_{Av0} + R_{Dv0} + qL_1 &= 0 \\ \frac{qL_1^2}{2} + R_{Av0}L_1 &= 0 \end{aligned} \quad (21.31)$$

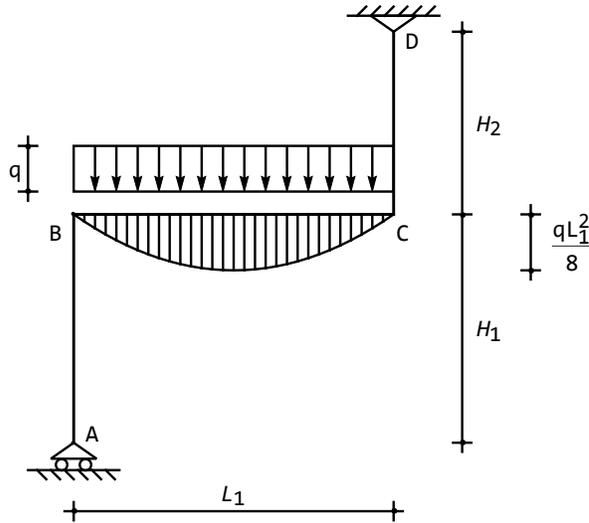
da cui subito:

$$\begin{aligned} R_{Dh0} &= 0 \\ R_{Av0} &= -\frac{qL_1}{2} \\ R_{Dv0} &= -\frac{qL_1}{2} \end{aligned} \quad (21.32)$$

Il diagramma dei momenti è quindi limitato al traverso, dove assume l'aspetto quadratico, (Figura 21.16), ed ha equazione (origine in  $B$ ):

$$M_0 = q\frac{z}{2} (L_1 - z) \quad (21.33)$$

Sullo schema  $S_1$ , le equazioni di equilibrio si scrivono, scegliendo il polo in  $D$ :


 Figura 21.16: Il diagramma  $M_0$ 

$$\begin{aligned}
 R_{Dh1} + 1 &= 0 \\
 R_{Av1} + R_{Dv1} &= 0 \\
 R_{Av1}L_1 + 1(H_1 + H_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{21.34}$$

da cui subito:

$$\begin{aligned}
 R_{Dh1} &= -1 \\
 R_{Av1} &= -\frac{H_1 + H_2}{L_1} \\
 R_{Dv1} &= \frac{H_1 + H_2}{L_1}
 \end{aligned} \tag{21.35}$$

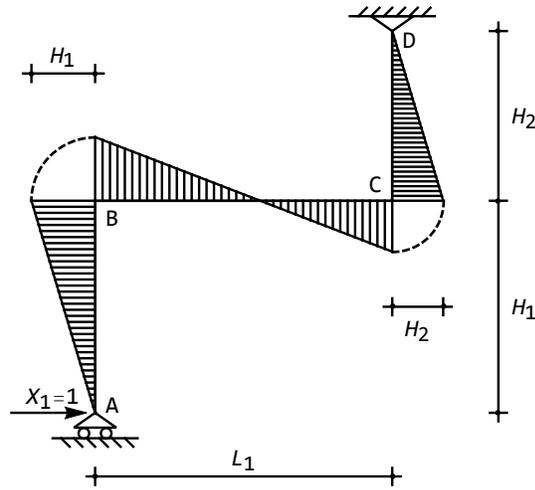
ed il diagramma dei momenti è riportato in Figura 21.17

**Il calcolo di  $\int_s \frac{M_0 M_1}{EI} ds$**

L'integrale sarà diverso da zero solo lungo il traverso, dove può scriversi (origine in  $B$ ):

$$\begin{aligned}
 \int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds &= -\frac{q}{2EI} \int_0^{L_1} z(L_1 - z) \left( H_1 - (H_1 + H_2) \frac{z}{L_1} \right) dz = \\
 &= -\frac{qL_1^3}{24EI} (H_1 - H_2)
 \end{aligned} \tag{21.36}$$

Si noti subito che, se i ritti hanno uguale lunghezza, tale integrale si annulla, in quanto prodotto di una funzione simmetrica per una antisimmetrica.


 Figura 21.17: Il diagramma  $M_1$ 

### Il calcolo di $\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds$

L'integrale potrà essere suddiviso in tre tratti:

$$\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^{H_1} z^2 dz + \frac{1}{EI} \int_0^{L_1} \left( H_1 - (H_1 + H_2) \frac{z}{L_1} \right)^2 dz + \frac{1}{EI} \int_0^{H_2} z^2 dz = \frac{H_1^3}{3EI} + \frac{H_2^3}{3EI} + \frac{(H_1^2 - H_1 H_2 + H_2^2) L_1}{3EI} \quad (21.37)$$

L'incognita iperstatica, quindi, sarà fornita da:

$$X_1 = \frac{qL_1^3}{8} \frac{H_1 - H_2}{H_1^3 + H_2^3 + (H_1^2 - H_1 H_2 + H_2^2) L_1} \quad (21.38)$$

### L'influenza dello sforzo normale

Nei casi in cui  $H_1$  ed  $H_2$  assumono valori molto prossimi, se non addirittura coincidenti, il valore dell'incognita iperstatica  $X_1$  diviene molto piccolo, ed è opportuno indagare se l'influenza dello sforzo normale non possa essere rilevante. A ciò fare occorre calcolare il diagramma  $N_0$  sullo schema  $S_0$  ed il diagramma  $N_1$  sullo schema  $S_1$ . Nel primo caso, le reazioni (21.32) garantiscono l'assenza di sforzi normali sul traverso, mentre i due ritti vedranno uno sforzo normale costante, e pari alla metà della risultante del carico applicato:

$$\begin{aligned} N_0^{AB} &= R_{Av0} = -\frac{qL_1}{2} \\ N_0^{CD} &= -R_{Dv0} = \frac{qL_1}{2} \end{aligned} \quad (21.39)$$

Come ovvio, il ritto di sinistra risulta compresso, quello di destra è teso.

Nel secondo caso, invece, le reazioni (21.35) implicano uno sforzo normale nel traverso pari a  $-1$ , mentre per i ritto si ha, analogamente al caso precedente:

$$\begin{aligned} N_1^{AB} &= R_{Av1} = -\frac{H_1 + H_2}{L_1} \\ N_1^{CD} &= -R_{Dv1} = -\frac{H_1 + H_2}{L_1} \end{aligned} \quad (21.40)$$

e si noti che ora ambedue i ritto risultano compressi. Ciò basta a calcolare gli integrali richiesti per il principio dei lavori virtuali:

$$\int_s N_1 \frac{N_0}{EA} ds = \frac{q}{2EA} (H_1^2 - H_2^2) \quad (21.41)$$

$$\int_s \frac{N_1^2}{EA} ds = \frac{1}{EA} \left( \frac{H_1 + H_2}{L_1} \right)^2 (H_1 + H_2) + \frac{L_1}{EA} \quad (21.42)$$

e quindi l'incognita iperstatica diviene ora:

$$X = -\frac{\int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds + \int_s N_1 \frac{N_0}{EA} ds}{\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds + \int_s \frac{N_1^2}{EA} ds} \quad (21.43)$$

ossia:

$$X = \frac{q \frac{L_1^3 (H_1 - H_2)}{24EI} - q \frac{H_1^2 - H_2^2}{2EA}}{\frac{H_1^3 + H_2^3 + (H_1^2 - H_1 H_2 + H_2^2) L_1}{3EI} + \frac{1}{EA} \left( \frac{H_1 + H_2}{L_1} \right)^2 (H_1 + H_2) + \frac{L_1}{EA}} \quad (21.44)$$

## 21.5 Una trave tre volte iperstatica

Si vuol calcolare le incognite iperstatiche per la struttura di Figura 21.18. Essa è tre volte iperstatica, e come struttura isostatica equivalente si sceglie la trave di Figura 21.19.

Tale scelta, come noto, risulta particolarmente conveniente, in quanto suddivide la trave originaria in due distinte travi semplicemente appoggiate. Sullo schema  $S_0$ , ad esempio, il diagramma del momento è limitato alla seconda campata, e coincide con quello di trave semplicemente appoggiata in  $B$  e  $C$ .

Si potrà scrivere, simbolicamente:

$$S.I.E. = S_0 + X_1 S_1 + X_2 S_2 + X_3 S_3 \quad (21.45)$$

ed i sistemi  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  ed  $S_3$  sono presentati nella Figure 21.20–21.23, insieme ai relativi diagrammi dei momenti. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il momento sulla struttura effettiva sarà pari a:

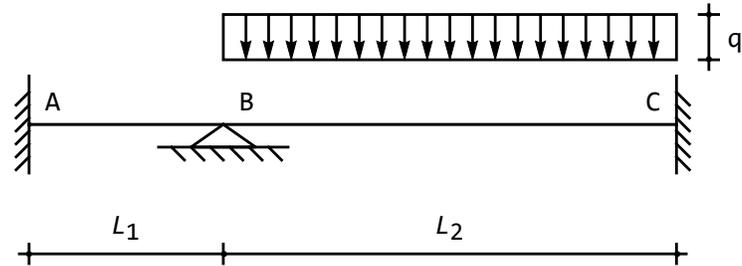


Figura 21.18: Una trave tre volte iperstatica

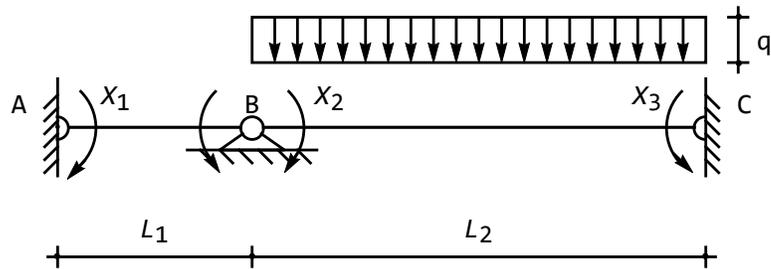


Figura 21.19: Un S.I.E. per la trave di Figura 21.18

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3 \quad (21.46)$$

Si scriva ora il principio dei lavori virtuali, assumendo come insieme di forze (virtuali) quelle agenti sul sistema  $S_1$ , e come insieme di spostamenti quelli effettivi, calcolabili sul S.I.E.. Limitandosi ai soli effetti flessionali, si ha:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (21.47)$$

Analogamente, possono scriversi altre due equazioni, scegliendo come insiemi di forze quelli agenti sul sistema  $S_2$  e rispettivamente sul sistema  $S_3$ , e come spostamenti quelli effettivi:

$$\int_s M_2 \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (21.48)$$

$$\int_s M_3 \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (21.49)$$

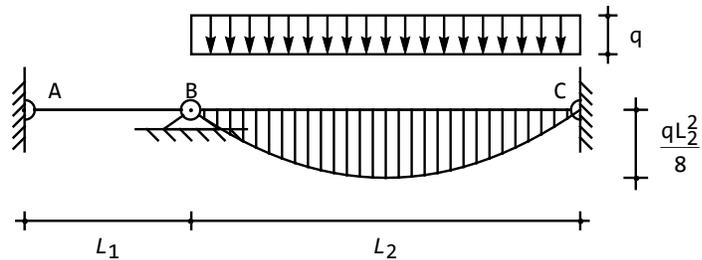


Figura 21.20: Il diagramma del momento per il sistema  $S_0$

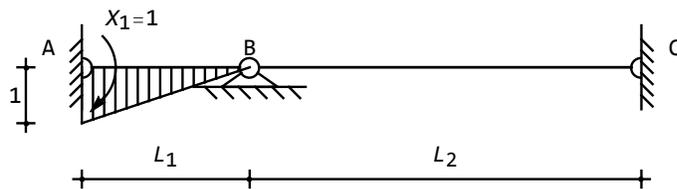


Figura 21.21: Il diagramma del momento per il sistema  $S_1$

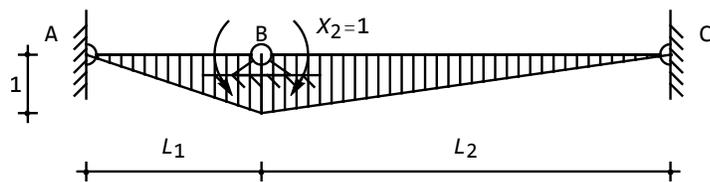


Figura 21.22: Il diagramma del momento per il sistema  $S_2$

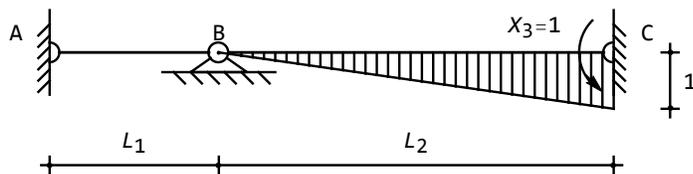


Figura 21.23: Il diagramma del momento per il sistema  $S_3$

Utilizzando la (21.46) si giunge quindi ad un sistema di tre equazioni nelle tre incognite iperstatiche:

$$\begin{aligned} X_1 \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds + X_2 \int_s M_1 \frac{M_2}{EI} ds + X_3 \int_s M_1 \frac{M_3}{EI} ds &= - \int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds \\ X_1 \int_s M_2 \frac{M_1}{EI} ds + X_2 \int_s \frac{M_2^2}{EI} ds + X_3 \int_s M_2 \frac{M_3}{EI} ds &= - \int_s M_2 \frac{M_0}{EI} ds \\ X_1 \int_s M_3 \frac{M_1}{EI} ds + X_2 \int_s M_3 \frac{M_2}{EI} ds + X_3 \int_s \frac{M_3^2}{EI} ds &= - \int_s M_3 \frac{M_0}{EI} ds \end{aligned} \quad (21.50)$$

i cui coefficienti possono agevolmente dedursi a partire dalle leggi di variazione dei momenti:

$$\begin{aligned} \int_s M_1^2 ds &= \int_0^{L_1} \left(1 - \frac{z}{L_1}\right)^2 dz = \frac{L_1}{3} \\ \int_s M_1 M_2 ds &= \int_0^{L_1} \left(1 - \frac{z}{L_1}\right) \frac{z}{L_1} dz = \frac{L_1}{6} \\ \int_s M_1 M_3 ds &= 0 \\ \int_s M_2^2 ds &= \int_0^{L_1} \left(\frac{z}{L_1}\right)^2 ds + \int_0^{L_2} \left(1 - \frac{z}{L_2}\right)^2 ds = \frac{L_1}{3} + \frac{L_2}{3} \\ \int_s M_2 M_3 ds &= \int_0^{L_2} \left(1 - \frac{z}{L_2}\right) \frac{z}{L_2} dz = \frac{L_2}{6} \\ \int_s M_3^2 ds &= \int_0^{L_2} \left(1 - \frac{z}{L_2}\right)^2 dz = \frac{L_2}{3} \\ \int_s M_1 M_0 ds &= 0 \\ \int_s M_2 M_0 ds &= \frac{q}{2} \int_0^{L_2} \left(1 - \frac{z}{L_2}\right) z (L_2 - z) dz = \frac{qL_2^3}{24} \\ \int_s M_3 M_0 ds &= \frac{q}{2} \int_0^{L_2} \frac{z}{L_2} z (L_2 - z) dz = \frac{qL_2^3}{24} \end{aligned} \quad (21.51)$$

Il sistema (21.50) si scrive allora come:

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{3} X_1 + \frac{L_1}{6} X_2 &= 0 \\ \frac{L_1}{6} X_1 + \left(\frac{L_1}{3} + \frac{L_2}{3}\right) X_2 + \frac{L_2}{6} X_3 &= -\frac{qL_2^3}{24} \\ \frac{L_2}{6} X_2 + \frac{L_2}{3} X_3 &= -\frac{qL_2^3}{24} \end{aligned} \quad (21.52)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{qL_2^3}{24(L_1 + L_2)} \\ X_2 &= -\frac{qL_2^3}{12(L_1 + L_2)} \\ X_3 &= -\frac{L_2^2(3qL_1 + 2qL_2)}{24(L_1 + L_2)} \end{aligned} \quad (21.53)$$

## 21.6 Una struttura spingente iperstatica

Si consideri la struttura di Figura 21.24, una volta iperstatica, e si voglia utilizzare il principio dei lavori virtuali al fine di ottenere l'incognita iperstatica. Attesa la geometria della struttura, si vuole tener conto degli effetti da deformazione assiale delle due aste.

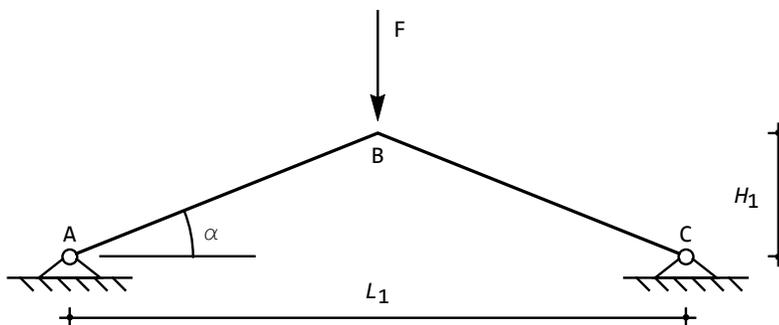


Figura 21.24: Una struttura spingente semplicemente iperstatica

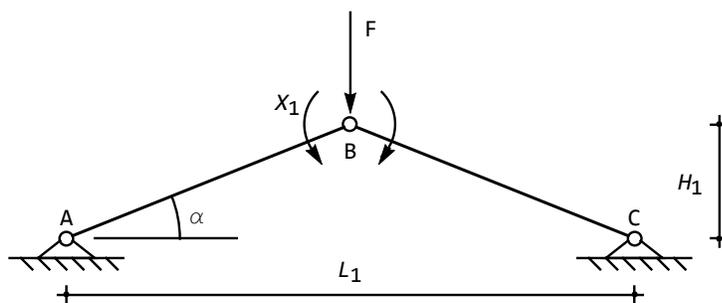


Figura 21.25: Un S.I.E. per la struttura di Figura 21.24

Si scelga, quale sistema isostatico equivalente, la struttura di Figura 21.25, ottenuta posizionando una cerniera in mezzeria.

### L'esame del sistema $S_0$

Sulla struttura  $S_0$ , caricata dalla forza  $F$ , il diagramma del momento risulta identicamente nullo, mentre gli sforzi assiali nelle due aste possono calcolarsi dalle equazioni di equilibrio della cerniera in  $B$ , come illustrato in Figura 21.26:

$$\begin{aligned} -N_0^{AB} \cos(\alpha) + N_0^{BC} \cos(\alpha) &= 0 \\ N_0^{AB} \sin(\alpha) + N_0^{BC} \sin(\alpha) + F &= 0 \end{aligned} \quad (21.54)$$

e quindi:

$$N_0^{AB} = N_0^{BC} = -\frac{F}{2 \sin(\alpha)} \quad (21.55)$$

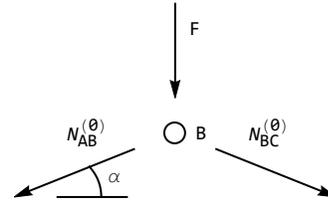


Figura 21.26: L'equilibrio della cerniera in sommità per il sistema  $S_0$

### L'esame del sistema $S_1$

Il sistema  $S_1$  è riportato in Figura 21.27, insieme al diagramma del momento. Su ciascuna delle aste il momento decresce linearmente da 1, in corrispondenza della cerniera  $B$ , a zero in corrispondenza delle cerniere al suolo.

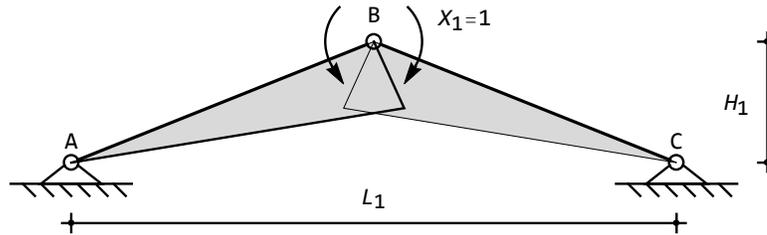


Figura 21.27: Il diagramma del momento sul sistema  $S_1$

Per il calcolo dello sforzo normale, si osservi che le equazioni di equilibrio dell'intera struttura si scrivono:

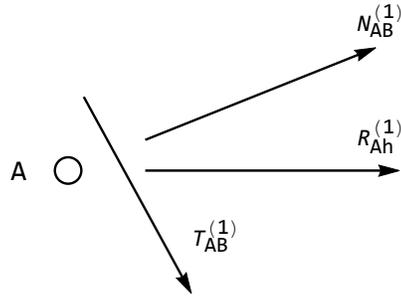
$$\begin{aligned} R_{Ah1} + R_{Ch1} &= 0 \\ R_{Av1} + R_{Cv1} &= 0 \\ R_{Av1} L_1 &= 0 \end{aligned} \quad (21.56)$$

avendo scelto il polo in  $C$ . Ne segue che le componenti verticali delle reazioni sono nulle, mentre le componenti orizzontali sono uguali e contrarie. Inoltre, l'equazione di equilibrio dell'asta  $AB$ , scegliendo come polo il punto  $B$ , fornisce:

$$-T_1^{AB} L + 1 = 0 \quad (21.57)$$

e quindi:

$$T_1^{AB} = \frac{1}{L} = \frac{\sin(\alpha)}{H_1} \quad (21.58)$$


 Figura 21.28: L'equilibrio della cerniera in  $A$  per il sistema  $S_1$ 

Infine, l'equilibrio della cerniera in  $A$  fornisce, come illustrato in Figura 21.28:

$$\begin{aligned} R_{Ah1}^{(1)} + N_1^{AB} \cos(\alpha) + T_1^{AB} \sin(\alpha) &= 0 \\ -N_1^{AB} \sin(\alpha) + T_1^{AB} \cos(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (21.59)$$

da cui:

$$\begin{aligned} N_1^{AB} &= \frac{\cos(\alpha)}{H_1} \\ R_1^{Ah} &= -\frac{1}{H_1} \end{aligned} \quad (21.60)$$

### La scrittura del p.l.v.

Dovrà scriversi, per il principio dei lavori virtuali:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds + \int_s N_1 \frac{N}{EA} ds = 0 \quad (21.61)$$

e tramite il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{aligned} M &= M_0 + X_1 M_1 \\ N &= N_0 + X_1 N_1 \end{aligned} \quad (21.62)$$

da cui l'equazione:

$$\left( \int_s \frac{M_1^2}{EI} ds + \int_s \frac{N_1^2}{EA} ds \right) X_1 = - \int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds - \int_s N_1 \frac{N_0}{EA} ds = 0 \quad (21.63)$$

Sarà poi possibile calcolare gli integrali nel seguente modo:

$$\int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds = 0 \quad (21.64)$$

$$\begin{aligned}
\int_s \frac{M_1^2}{EI} ds &= \frac{2}{EI} \int_0^L \left(\frac{z}{L}\right)^2 dz = \frac{2L}{3EI} \\
\int_s N_1 \frac{N_0}{EA} ds &= -2 \frac{F}{2 \sin(\alpha)} \frac{\cos(\alpha)}{H_1} \frac{L}{EA} = -\frac{F}{H_1 \tan(\alpha)} \frac{L}{EA} \\
\int_s \frac{N_1^2}{EA} ds &= 2 \frac{\cos^2(\alpha)}{H_1^2} \frac{L}{EA}
\end{aligned} \tag{21.65}$$

e quindi l'incognita iperstatica si scrive:

$$X_1 = \frac{3F}{2 \tan(\alpha)} \frac{H_1 AI}{AH_1^2 + 3I \cos^2(\alpha)} \tag{21.66}$$

## 21.7 Una maglia triangolare chiusa

La maglia triangolare chiusa di Figura 21.29 è soggetta ad una stesa di carico uniformemente distribuita di intensità  $q$  lungo l'asta orizzontale. Essa è isostatica per vincoli esterni, e tre volte internamente iperstatica.

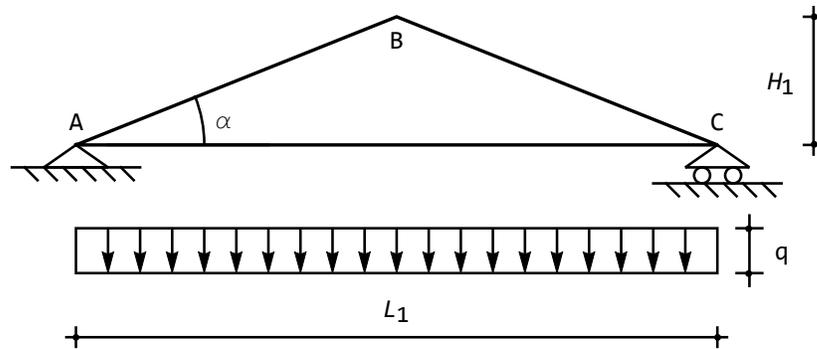


Figura 21.29: Una maglia triangolare chiusa, tre volte iperstatica

Come sistema isostatico equivalente si sceglie la struttura di Figura 21.30, in cui sono state introdotte tre cerniere nei tre vertici della maglia, insieme alle corrispondenti incognite iperstatiche.

Come usuale, si scriveranno tre espressioni del principio dei lavori virtuali, utilizzando sempre il sistema di spostamenti effettivo come sistema di spostamenti geometricamente ammissibile, mentre i tre sistemi virtuali di forze assumeranno  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 1$  ed  $X_3 = 1$ , rispettivamente.

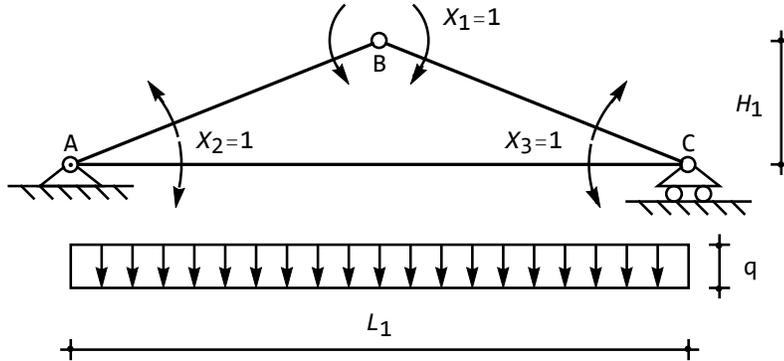


Figura 21.30: Il sistema isostatico equivalente alla maglia chiusa di Figura 21.29

Con le usuali terminologie, si ha:

$$\begin{aligned} \int_s M_1 \frac{M}{EI} ds + \int_s N_1 \frac{N}{EA} ds &= 0 \\ \int_s M_2 \frac{M}{EI} ds + \int_s N_2 \frac{N}{EA} ds &= 0 \\ \int_s M_3 \frac{M}{EI} ds + \int_s N_3 \frac{N}{EA} ds &= 0 \end{aligned} \quad (21.67)$$

dove si è tenuto conto anche dell'effetto delle deformazioni assiali. Per il principio di sovrapposizione degli effetti si ha:

$$\begin{aligned} M &= M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3 \\ N &= N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 + X_3 N_3 \end{aligned} \quad (21.68)$$

e quindi le (21.67) si tramutano nel sistema di dimensione tre:

$$a_{ij} X_j + b_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (21.69)$$

con:

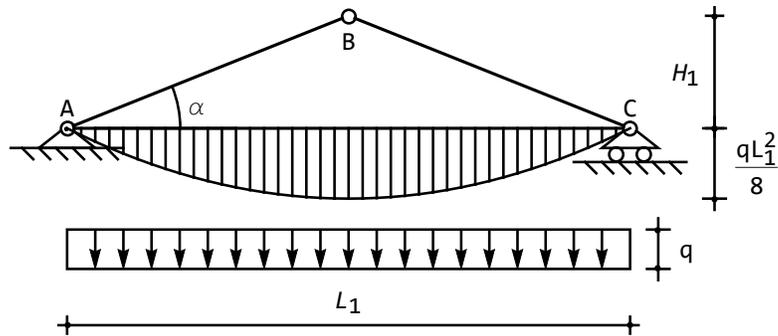
$$a_{ij} = \int_s M_i \frac{M_j}{EI} ds + \int_s N_i \frac{N_j}{EA} ds \quad (21.70)$$

$$b_i = \int_s M_i \frac{M_0}{EI} ds + \int_s N_i \frac{N_0}{EA} ds \quad (21.71)$$

Occorre quindi studiare i sistemi  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  ed  $S_3$ , e per ciascuno di essi tracciare il diagramma del momento e dello sforzo normale.

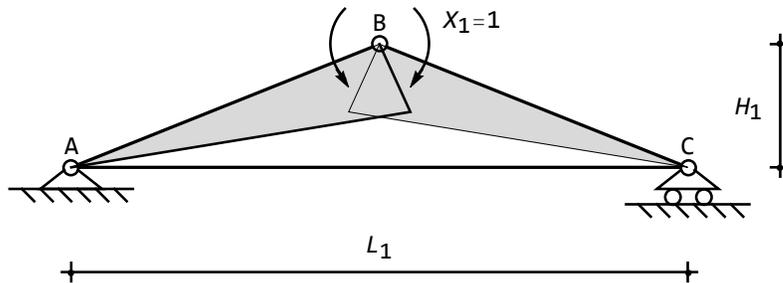
### Lo studio del sistema $S_0$

Il diagramma del momento sul sistema  $S_0$  è limitato all'asta orizzontale caricata, dove assume andamento parabolico, come riportato in Figura 21.31. Lo sforzo normale è invece identicamente nullo

Figura 21.31: Il diagramma del momento sul sistema  $S_0$ 

### Lo studio del sistema $S_1$

Il diagramma del momento su sistema  $S_1$  è limitato alle due aste inclinate, caricate da una coppia unitaria in un estremo. Nell'asta  $AB$  il momento decresce linearmente da  $B$ , dove ha valore unitario, ad  $A$ , dove si annulla, ed analogo diagramma può tracciarsi per l'asta  $BC$ . Il relativo diagramma è illustrato in Figura 21.32.

Figura 21.32: Il diagramma del momento sul sistema  $S_1$ 

Per dedurre il valore degli sforzi normali, si consideri l'asta  $AB$ , e si scriva l'equazione di equilibrio intorno al punto  $B$  (analogo ragionamento può farsi per l'asta  $BC$ ):

$$-T_1^{AB}L + 1 = 0 \quad (21.72)$$

e quindi si conosce il taglio in  $AB$ :

$$T_1^{AB} = \frac{1}{L} \quad (21.73)$$

Ciò è anche deducibile dal diagramma del momento, e dalla sua pendenza. Conosciuto il taglio  $AB$ , l'equilibrio della cerniera in  $A$  fornisce gli sforzi normali

nelle aste  $AB$  ed  $AC$ , in quanto le reazioni esterne sono identicamente nulle, così come nullo è il taglio in  $AC$ . Dalla Figura 21.33 si trae:

$$\begin{aligned} T_1^{AB} \sin(\alpha) + N_1^{AB} \cos(\alpha) + N_1^{AC} &= 0 \\ T_1^{AB} \cos(\alpha) - N_1^{AB} \sin(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (21.74)$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} N_1^{AB} &= \frac{T_1^{AB}}{\tan(\alpha)} = \frac{L_1}{2LH_1} \\ N_1^{AC} &= -\frac{\sin(\alpha)}{L} - \frac{L_1}{2LH_1} \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (21.75)$$

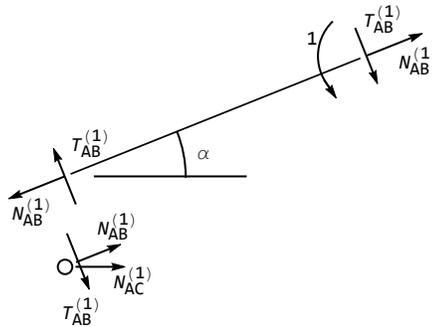


Figura 21.33: Le forze agenti sull'asta AB e sulla cerniera in A

Ma:

$$\begin{aligned} L \sin(\alpha) &= H_1 \\ L \cos(\alpha) &= \frac{L_1}{2} \end{aligned} \quad (21.76)$$

e quindi infine:

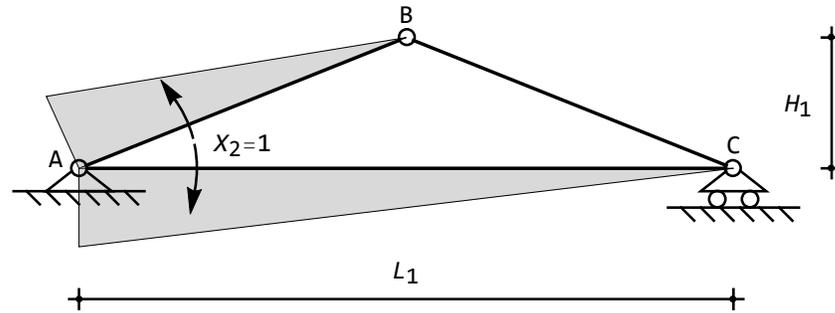
$$N_1^{AC} = -\frac{\sin(\alpha)}{L} - \frac{L_1}{2LH_1} \cos(\alpha) = -\frac{1}{H_1} \quad (21.77)$$

### Lo studio del sistema $S_2$

Il diagramma del momento per il sistema  $S_2$ , riportato in Figura 21.34, è analogo al precedente, con le aste  $AB$  ed  $AC$  interessate da un momento linearmente variabile tra uno e zero, e con l'asta  $BC$  scarica.

L'equilibrio alla rotazione delle due aste  $AB$  ed  $AC$ , o più semplicemente lo studio della pendenza del diagramma del momento portano a conoscere i rispettivi tagli:

$$\begin{aligned} T_2^{AB} &= \frac{1}{L} \\ T_2^{AC} &= -\frac{1}{L_1} \end{aligned} \quad (21.78)$$


 Figura 21.34: Il diagramma del momento sul sistema  $S_2$ 

mentre l'equilibrio della cerniera in  $A$  porta a scrivere:

$$\begin{aligned} N_2^{AB} \cos(\alpha) + T_2^{AB} \sin(\alpha) + N_2^{AC} &= 0 \\ -N_2^{AB} \sin(\alpha) + T_2^{AB} \cos(\alpha) + T_2^{AC} &= 0 \end{aligned} \quad (21.79)$$

ossia:

$$\begin{aligned} N_2^{AB} &= \frac{1 \cos(\alpha)}{L \sin(\alpha)} - \frac{1}{L_1 \sin(\alpha)} = \frac{L_1}{2H_1 L} - \frac{L}{L_1 H_1} \\ N_2^{AC} &= -\frac{1 \cos(\alpha) \cos(\alpha)}{L \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha)}{L_1 \sin(\alpha)} - \frac{1}{L} \sin(\alpha) = \\ &= -\frac{1}{L \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha)}{L_1 \sin(\alpha)} = -\frac{1}{H_1} + \frac{1}{2H_1} = -\frac{1}{2H_1} \end{aligned} \quad (21.80)$$

L'equilibrio della cerniera in  $C$  fornisce:

$$\begin{aligned} -N_2^{BC} \cos(\alpha) + T_2^{BC} \sin(\alpha) - N_2^{AC} &= 0 \\ -N_2^{BC} \sin(\alpha) - T_2^{BC} \cos(\alpha) - T_2^{AC} &= 0 \end{aligned} \quad (21.81)$$

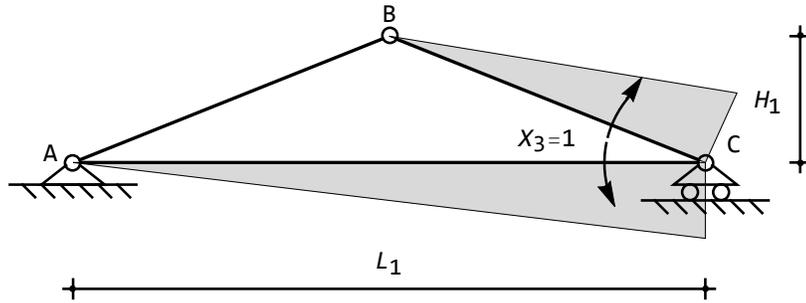
e quindi:

$$N_2^{BC} = -N_2^{AC} \cos(\alpha) - T_2^{AC} \sin(\alpha) = \frac{L_1}{4LH_1} + \frac{H_1}{LL_1} \quad (21.82)$$

### Lo studio del sistema $S_3$

Il diagramma del momento per il sistema  $S_3$ , riportato in Figura 21.35, è analogo al precedente, con le aste  $AB$  ed  $AC$  interessate da un momento linearmente variabile tra uno e zero, e con l'asta  $BC$  scarica.

L'equilibrio alla rotazione delle due aste  $BC$  ed  $AC$ , o più semplicemente lo studio della pendenza del diagramma del momento portano a conoscere i


 Figura 21.35: Il diagramma del momento sul sistema  $S_3$ 

rispettivi tagli:

$$\begin{aligned} T_3^{BC} &= -\frac{1}{L} \\ T_3^{AC} &= \frac{1}{L_1} \end{aligned} \quad (21.83)$$

mentre l'equilibrio della cerniera in  $C$  porta a scrivere:

$$\begin{aligned} -N_3^{BC} \cos(\alpha) + T_3^{BC} \sin(\alpha) - N_3^{AC} &= 0 \\ -N_3^{BC} \sin(\alpha) - T_3^{BC} \cos(\alpha) - T_3^{AC} &= 0 \end{aligned} \quad (21.84)$$

ossia:

$$\begin{aligned} N_3^{BC} &= \frac{1}{L} \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} - \frac{1}{L_1} \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{L_1}{2LH_1} - \frac{L}{H_1L_1} \\ N_3^{AC} &= -\left( \frac{L_1}{2LH_1} - \frac{L}{H_1L_1} \right) \cos(\alpha) - \frac{1}{L} \sin(\alpha) = -\frac{1}{2H_1} \end{aligned} \quad (21.85)$$

L'equilibrio della cerniera in  $A$  fornisce:

$$\begin{aligned} N_3^{AB} \cos(\alpha) + T_3^{AB} \sin(\alpha) + N_3^{AC} &= 0 \\ -N_3^{AB} \sin(\alpha) + T_3^{AB} \cos(\alpha) + T_3^{AC} &= 0 \end{aligned} \quad (21.86)$$

e quindi:

$$N_3^{AB} = -N_3^{AC} \cos(\alpha) + T_3^{AC} \sin(\alpha) = \frac{1}{2H_1} \cos(\alpha) + \frac{1}{L_1} \sin(\alpha) = \frac{L_1}{4LH_1} + \frac{H_1}{LL_1} \quad (21.87)$$

## Il calcolo dei coefficienti

Gli integrali che compaiono nelle tre equazioni di congruenza possono calcolarsi agevolmente. Si ha infatti, per i momenti:

$$\begin{aligned}
 \int_s M_1 M_0 \, ds &= 0 \\
 \int_s M_2 M_0 \, ds &= \frac{q}{2} \int_0^{L_1} \left(1 - \frac{z}{L_1}\right) z (L_1 - z) \, dz = \frac{qL_1^3}{24} \\
 \int_s M_3 M_0 \, ds &= \frac{q}{2} \int_0^{L_1} \left(\frac{z}{L_1}\right) z (L_1 - z) \, dz = \frac{qL_1^3}{24} \\
 \int_s M_1^2 \, ds &= 2 \int_0^L \left(\frac{z}{L}\right)^2 \, dz = \frac{2L}{3} \\
 \int_s M_1 M_2 \, ds &= - \int_0^L \left(\frac{z}{L}\right) \left(1 - \frac{z}{L}\right) \, dz = -\frac{L}{6} \\
 \int_s M_1 M_3 \, ds &= - \int_0^L \left(\frac{z}{L}\right) \left(1 - \frac{z}{L}\right) \, dz = -\frac{L}{6} \\
 \int_s M_2^2 \, ds &= \int_0^L \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \, dz + \int_0^{L_1} \left(1 - \frac{z}{L_1}\right)^2 \, dz = \frac{L}{3} + \frac{L_1}{3} \\
 \int_s M_2 M_3 \, ds &= \int_0^{L_1} \left(\frac{z}{L_1}\right) \left(1 - \frac{z}{L_1}\right) \, dz = \frac{L_1}{6} \\
 \int_s M_3^2 \, ds &= \int_0^L \left(\frac{z}{L}\right)^2 \, dz + \int_0^{L_1} \left(\frac{z}{L_1}\right)^2 \, dz = \frac{L}{3} + \frac{L_1}{3}
 \end{aligned} \tag{21.88}$$

mentre per gli sforzi normali, costanti nelle aste, gli integrali sono immediati:

$$\begin{aligned}
 \int_s N_1 N_0 \, ds &= \int_s N_2 N_0 \, ds = \int_s N_3 N_0 \, ds = 0 \\
 \int_s N_1^2 \, ds &= 2 \left(\frac{L_1}{2LH_1}\right)^2 L + \left(\frac{1}{H_1}\right)^2 L_1 = \frac{L_1(2L + L_1)}{2LH_1^2} \\
 \int_s N_1 N_2 \, ds &= \left(\frac{L_1}{2LH_1}\right) \left(\frac{L_1}{2H_1L} - \frac{L}{L_1H_1}\right) L + \left(\frac{1}{H_1}\right) \left(\frac{1}{2H_1}\right) L_1 + \\
 &\quad \left(\frac{L_1}{2LH_1}\right) \left(\frac{L_1}{4LH_1} + \frac{H_1}{LL_1}\right) L = \frac{-4L^2 + 4H_1^2 + 4LL_1 + 3L_1^2}{8LH_1^2} \\
 \int_s N_1 N_3 \, ds &= \left(\frac{L_1}{2LH_1}\right) \left(\frac{L_1}{4LH_1} + \frac{H_1}{LL_1}\right) L + \left(\frac{1}{H_1}\right) \left(\frac{1}{2H_1}\right) L_1 + \\
 &\quad \left(\frac{L_1}{2LH_1}\right) \left(\frac{L_1}{2LH_1} - \frac{L}{H_1L_1}\right) L = \frac{-4L^2 + 4H_1^2 + 4LL_1 + 3L_1^2}{8LH_1^2}
 \end{aligned} \tag{21.89}$$

$$\begin{aligned}
 \int_s N_2^2 ds &= \left( \frac{L_1}{2H_1L} - \frac{L}{L_1H_1} \right)^2 L + \left( \frac{1}{2H_1} \right)^2 L_1 + \left( \frac{L_1}{4LH_1} + \frac{H_1}{LL_1} \right)^2 L = \\
 &= \frac{16L^4 + 16H_1^4 - 16L^2L_1^2 + 8H_1^2L_1^2 + 4LL_1^3 + 5L_1^4}{16LH_1^2L_1^2} \\
 \int_s N_2N_3 ds &= \left( \frac{L_1}{2H_1L} - \frac{L}{L_1H_1} \right) \left( \frac{L_1}{4LH_1} + \frac{H_1}{LL_1} \right) L + \left( \frac{1}{2H_1} \right) \left( \frac{1}{2H_1} \right) L_1 \\
 &+ \left( \frac{L_1}{4LH_1} + \frac{H_1}{LL_1} \right) \left( \frac{L_1}{2LH_1} - \frac{L}{H_1L_1} \right) L = \frac{1}{4} \left( \frac{4}{L} - \frac{8L}{L_1^2} + \frac{-2L + L_1 + \frac{L_1^2}{L}}{H_1^2} \right) \\
 \int_s N_3^2 ds &= \frac{16L^4 + 16H_1^4 - 16L^2L_1^2 + 8H_1^2L_1^2 + 4LL_1^3 + 5L_1^4}{16LH_1^2L_1^2}
 \end{aligned}$$

### La soluzione del sistema

La matrice  $\mathbf{A}$  dei coefficienti del sistema di equazioni (21.70) e (21.71) può riempirsi come segue:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{2L}{3I} + \frac{L_1(2L + L_1)}{2ALH_1^2} \\
 a_{12} &= -\frac{L}{6I} + \frac{-4L^2 + 4H_1^2 + 4LL_1 + 3L_1^2}{8ALH_1^2} \\
 a_{13} &= \frac{-L}{6I} + \frac{-4L^2 + 4H_1^2 + 4LL_1 + 3L_1^2}{8ALH_1^2} \\
 a_{22} &= \frac{L}{3I} + \frac{L_1}{3I} + \frac{16L^4 + 16H_1^4 - 16L^2L_1^2 + 8H_1^2L_1^2 + 4LL_1^3 + 5L_1^4}{16ALH_1^2L_1^2} \\
 a_{23} &= \frac{L_1}{6I} + \frac{1}{4A} \left( \frac{4}{L} - \frac{8L}{L_1^2} + \frac{-2L + L_1 + \frac{L_1^2}{L}}{H_1^2} \right) \\
 a_{33} &= \frac{L}{3I} + \frac{L_1}{3I} + \frac{16L^4 + 16H_1^4 - 16L^2L_1^2 + 8H_1^2L_1^2 + 4LL_1^3 + 5L_1^4}{16ALH_1^2L_1^2}
 \end{aligned} \tag{21.90}$$

mentre il vettore  $\mathbf{b}$  contiene i tre termini noti:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 0 \\
 b_2 &= -\frac{qL_1^3}{24I} \\
 b_3 &= -\frac{qL_1^3}{24I}
 \end{aligned} \tag{21.91}$$

La soluzione del sistema può ottenersi come:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{(AH_1^2qL_1^5(4H_1^2(3I - AL^2) + 3I(-4L^2 + 4LL_1 + 3L_1^2)))}{/D_1} \\
 X_2 = X_3 &= \frac{-(AH_1^2qL_1^5(4AH_1^2L^2 + 3IL_1(2L + L_1)))}{D_2}
 \end{aligned} \tag{21.92}$$

con:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= 6 \left( 8A^2 H_1^4 L^2 L_1^2 (L + 2L_1) + 3I^2 L_1 (4H_1^2 - 4L^2 + L_1^2)^2 + 2AH_1^2 I \right. \\
 &\quad \left. (16H_1^4 L + 16L^5 - 32L^3 L_1^2 + 24L^2 L_1^3 + 31LL_1^4 + 6L_1^5 - 32H_1^2 (L^3 - LL_1^2)) \right) \\
 D_2 &= \left( 8A^2 H_1^4 L^2 L_1^2 (L + 2L_1) + 3I^2 L_1 (4H_1^2 - 4L^2 + L_1^2)^2 + \right. \\
 &\quad \left. 2AH_1^2 I (16H_1^4 L + 16L^5 - 32L^3 L_1^2 + 24L^2 L_1^3 + 31LL_1^4 + 6L_1^5 - \right. \\
 &\quad \left. 32H_1^2 (L^3 - LL_1^2)) \right)
 \end{aligned} \tag{21.93}$$

Per trascurare gli effetti della deformazione assiale, si calcola il limite per  $A$  che tende ad infinito, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -\frac{qL_1^3}{12(L + 2s)} \\
 X_2 = X_3 &= -\frac{qL_1^3}{6(L + 2s)}
 \end{aligned} \tag{21.94}$$

### Un esempio numerico

Si ipotizzi ora di voler esaminare una struttura di luce  $L_1 = 14$  metri, ed altezza  $H_1 = 7$  metri, soggetta al carico  $q$  pari a  $3t\,m^{-1}$ . Inoltre, la struttura sia metallica con sezione caratterizzata da un'area  $A = 198\,cm^2$  ed un momento di inerzia  $I = 57680\,cm^4$  (corrispondente ad un profilato HE 400 B). Sarà ovviamente:

$$L = \sqrt{7^2 + 7^2} = 9.90m \tag{21.95}$$

e quindi i momenti incogniti sono pari a:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -17.95 \\
 X_2 = X_3 &= -36.13
 \end{aligned} \tag{21.96}$$

Ponendo invece  $A \rightarrow \infty$  si hanno i valori:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= -18.10 \\
 X_2 = X_3 &= -36.20
 \end{aligned} \tag{21.97}$$

## 21.8 Una trave doppia con pendolo di collegamento

La trave doppia collegata da un pendolo di Figura 21.36 è già stata studiata attraverso il cosiddetto metodo misto. In questa sede, invece, si vuol utilizzare il p.l.v. per la scrittura delle due equazioni di congruenza sul sistema isostatico equivalente di Figura 21.37.

Si sono quindi scelte come incognite lo sforzo normale nel pendolo  $DE$  (positivo se di trazione), e la reazione del carrello in  $C$ .

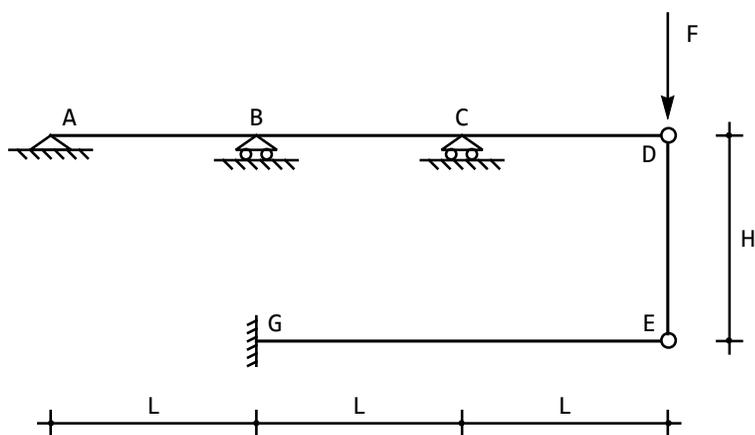


Figura 21.36: Una trave doppia collegata da un pendolo

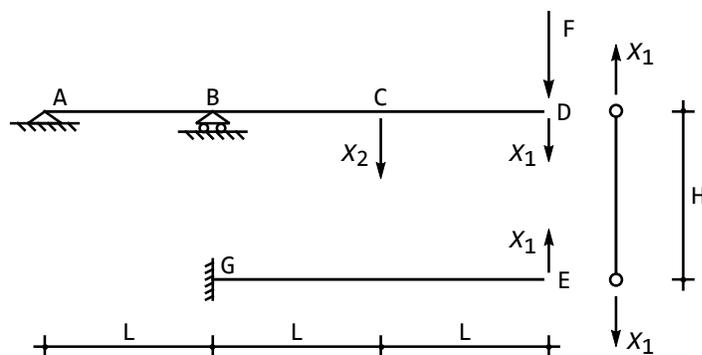


Figura 21.37: Il sistema isostatico equivalente alla struttura di Figura 21.36

Siano ora  $M$  i momenti flettenti effettivi,  $M_1$  i momenti flettenti generati da uno sforzo normale unitario  $X_1 = 1$ , ed  $M_2$  i momenti generati da una reazione  $X_2 = 1$ . Utilizzando il sistema di spostamenti effettivo, ed il sistema di forze virtuali in cui  $X_1 = 1$ , si può scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = -1 \frac{X_1 H}{EA} \quad (21.98)$$

Il segno negativo dipende dall'aver scelto lo sforzo normale positivo se di trazione, e quindi la forza unitaria con cui è caricata la struttura compie lavoro negativo per effetto dell'allungamento del pendolo. Utilizzando invece il sistema di spostamenti effettivo, ed il sistema di forze virtuali in cui  $X_2 = 1$ , si può

scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$\int_s M_2 \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (21.99)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il momento  $M$  può esprimersi come somma dei momenti generati dalla forza  $F$ , dalla  $X_1$  e dalla  $X_2$  :

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \quad (21.100)$$

e quindi le due equazioni di congruenza divengono:

$$\begin{aligned} \int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds + X_1 \int_s M_1 \frac{M_1}{EI} ds + X_2 \int_s M_1 \frac{M_2}{EI} ds &= -1 \frac{X_1 H}{EA} \\ \int_s M_2 \frac{M_0}{EI} ds + X_1 \int_s M_2 \frac{M_1}{EI} ds + X_2 \int_s M_2 \frac{M_2}{EI} ds &= 0 \end{aligned} \quad (21.101)$$

Si tratta quindi di calcolare i coefficienti di un sistema di equazioni nelle due incognite  $X_1$  ed  $X_2$ . A tal fine, nelle Figure 21.38–21.40, si riportano i diagrammi dei momenti  $M_0$ ,  $M_1$  ed  $M_2$ , su cui è immediato calcolare gli integrali richiesti.

Sarà quindi possibile esprimere analiticamente i tre diagrammi del momento, e scrivere:

$$\begin{aligned} \int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds &= \int_0^L \frac{4Fz^2}{EI} dz + \int_0^{2L} 2FL \left(1 - \frac{z}{2L}\right) \frac{2L}{EI} \left(1 - \frac{z}{2L}\right) dz = 4 \frac{FL^3}{EI} \\ \int_s M_2 \frac{M_0}{EI} ds &= \int_0^L (2Fz) \frac{z}{EI} dz + \int_0^L 2FL \left(1 - \frac{z}{2L}\right) \frac{(L-z)}{EI} dz = 3 \frac{FL^3}{EI} \\ \int_s M_1 \frac{M_1}{EI} ds &= \int_0^L (2z) \frac{2z}{EI} dz + \int_0^{2L} 2L \left(1 - \frac{z}{2L}\right) \frac{2L}{EI} \left(1 - \frac{z}{2L}\right) dz + \\ &\quad \int_0^{2L} 2L \left(1 - \frac{z}{2L}\right) \frac{2L}{EI} \left(1 - \frac{z}{2L}\right) dz = \frac{20L^3}{3EI} \\ \int_s M_1 \frac{M_2}{EI} ds &= \int_0^L (2z) \frac{z}{EI} dz + \int_0^L 2L \left(1 - \frac{z}{2L}\right) \frac{(L-z)}{EI} dz = \frac{3L^3}{2EI} \\ \int_s M_2 \frac{M_2}{EI} ds &= \int_0^L z \frac{z}{EI} dz + \int_0^L \frac{(L-z)^2}{EI} dz = \frac{2L^3}{3EI} \end{aligned} \quad (21.102)$$

Le equazioni divengono quindi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{20L^3}{3EI} + \frac{H}{EA}\right) X_1 + \frac{3L^3}{2EI} X_2 &= -4 \frac{FL^3}{EI} \\ \frac{3L^3}{2EI} X_1 + \frac{2L^3}{3EI} X_2 &= -\frac{3FL^3}{2EI} \end{aligned} \quad (21.103)$$

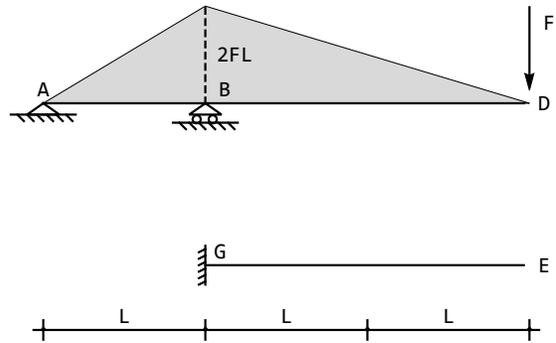


Figura 21.38: Il sistema  $S_0$  ed il relativo diagramma dei momenti  $M_0$

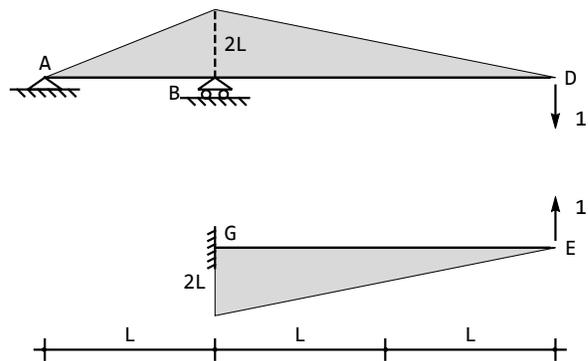


Figura 21.39: Il sistema  $S_1$  ed il relativo diagramma dei momenti  $M_1$

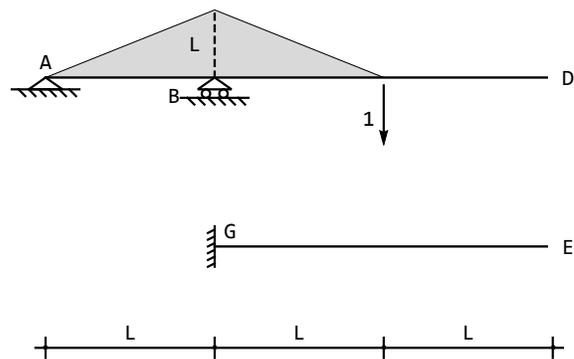


Figura 21.40: Il sistema  $S_2$  ed il relativo diagramma dei momenti  $M_2$

con soluzione:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{15EAF L^3}{79EAL^3 + 24EIH} \\ X_2 &= -\frac{18(8EAF L^3 + 3EIFH)}{79EAL^3 + 24EIH} \end{aligned} \quad (21.104)$$

Per riottenere i risultati del metodo misto, non resta che trascurare la deformabilità assiale del pendolo, e far tendere  $EA$  all'infinito. Si ottiene:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{15}{79}F \\ X_2 &= -\frac{144}{79}F \end{aligned} \quad (21.105)$$

### Il caso del carico distribuito

Un vantaggio dell'utilizzo del principio dei lavori virtuali risiede nel poter studiare facilmente diverse condizioni di carico, calcolando volta a volta il solo diagramma  $M_0$  dovuto ai carichi. Se ad esempio la struttura precedente fosse caricata da una stesa di carico uniformemente distribuita di intensità  $q$  su tutta la trave superiore, bisognerebbe utilizzare l'espressione:

$$M_0 = -\frac{1}{2}qz(3L + z) \quad (21.106)$$

nella prima campata, e:

$$M_0 = -\frac{1}{2}q(-2L + z)^2 \quad (21.107)$$

nella seconda, sicchè risulta:

$$\begin{aligned} \int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds &= \int_0^L \left( -\frac{1}{2}qz(3L + z) \right) \frac{2z}{EI} dz + \\ &\int_0^{2L} \left( -\frac{1}{2}q(-2L + z)^2 \right) \frac{2L}{EI} \left( 1 - \frac{z}{2L} \right) dz = -\frac{13L^4 q}{4EI} \\ \int_s M_2 \frac{M_0}{EI} ds &= \int_0^L \left( -\frac{1}{2}qz(3L + z) \right) \frac{z}{EI} dz + \\ &\int_0^L \left( -\frac{1}{2}q(-2L + z)^2 \right) \frac{(L - z)}{EI} dz = -\frac{4L^4 q}{3EI} \end{aligned} \quad (21.108)$$

Gli altri termini restano inalterati, sicchè le equazioni di congruenza si scrivono:

$$\begin{aligned} \left( \frac{20L^3}{3EI} + \frac{H}{EA} \right) X_1 + \frac{3L^3}{2EI} X_2 &= -\frac{13L^4 q}{4EI} \\ \frac{3L^3}{2EI} X_1 + \frac{2L^3}{3EI} X_2 &= -\frac{4L^4 q}{3EI} \end{aligned} \quad (21.109)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{6EAL^4q}{79EAL^3 + 24EIH} \\ X_2 &= \frac{L(289EAL^3q + 96EIHq)}{2(79EAL^3 + 24EIH)} \end{aligned} \quad (21.110)$$

Per riottenere i risultati del metodo misto, non resta che trascurare la deformabilità assiale del pendolo, e far tendere  $EA$  all'infinito. Si ottiene:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{6}{79}qL \\ X_2 &= \frac{289}{158}qL \end{aligned} \quad (21.111)$$

## 21.9 Un telaio doppiamente iperstatico

Si consideri il telaio di Figura 21.41, costituito da un traverso, incastrato al piede, di altezza  $H$ , e da un ritto di luce  $3L$ , poggiante su due carrelli.

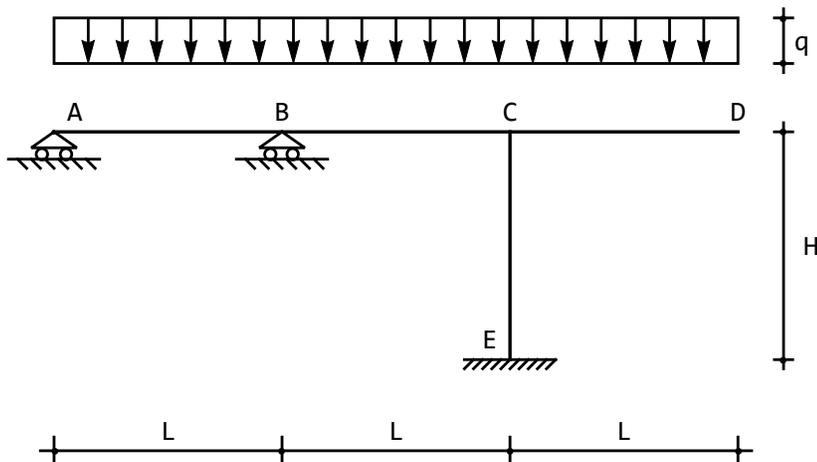


Figura 21.41: Un telaio doppiamente iperstatico

La struttura è manifestamente doppiamente iperstatica, e può essere risolta col metodo misto, introducendo tre cerniere in  $B$ ,  $C$  ed  $E$ , oppure utilizzando il metodo della composizione degli spostamenti per la scrittura diretta di due equazioni di congruenza. In questo Esempio, si vuole utilizzare il principio dei lavori virtuali al fine di calcolare le incognite iperstatiche di Figura 21.42.

Siano ora  $M$  i momenti flettenti effettivi,  $M_1$  i momenti flettenti generati da una reazione unitaria  $X_1 = 1$ , ed  $M_2$  i momenti generati da una reazione

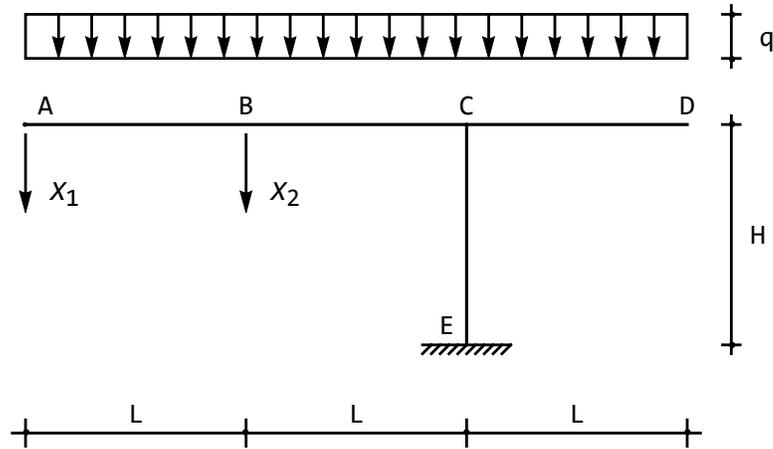


Figura 21.42: Un sistema isostatico equivalente per il telaio di Figura 21.41

unitaria  $X_2 = 1$ . Utilizzando il sistema di spostamenti effettivo, ed il sistema di forze virtuali in cui  $X_1 = 1$ , si può scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (21.112)$$

Utilizzando invece il sistema di spostamenti effettivo, ed il sistema di forze virtuali in cui  $X_2 = 1$ , si può scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$\int_s M_2 \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (21.113)$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il momento  $M$  può esprimersi come somma dei momenti generati dal carico  $q$ , dalla  $X_1$  e dalla  $X_2$  :

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \quad (21.114)$$

e quindi le equazioni di congruenza divengono:

$$\begin{aligned} \int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds + X_1 \int_s M_1 \frac{M_1}{EI} ds + X_2 \int_s M_1 \frac{M_2}{EI} ds &= 0 \\ \int_s M_2 \frac{M_0}{EI} ds + X_1 \int_s M_2 \frac{M_1}{EI} ds + X_2 \int_s M_2 \frac{M_2}{EI} ds &= 0 \end{aligned} \quad (21.115)$$

### Il calcolo degli integrali

Il tracciamento dei diagrammi del momento non presenta alcuna difficoltà: in Figura 21.43 è riportato il diagramma  $M_0$ , calcolato sullo schema isostatico

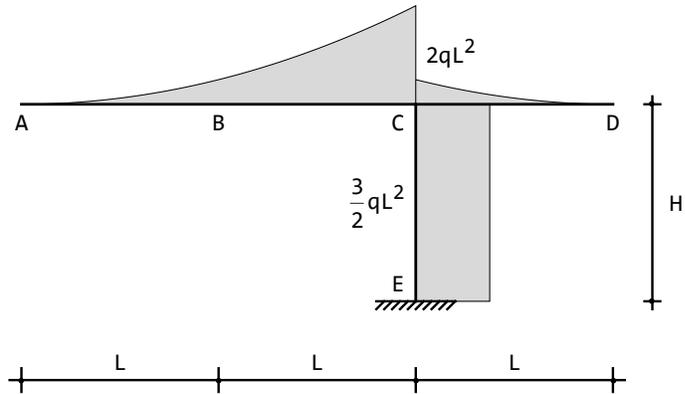


Figura 21.43: Il diagramma  $M_0$  per il telaio di Figura 21.41

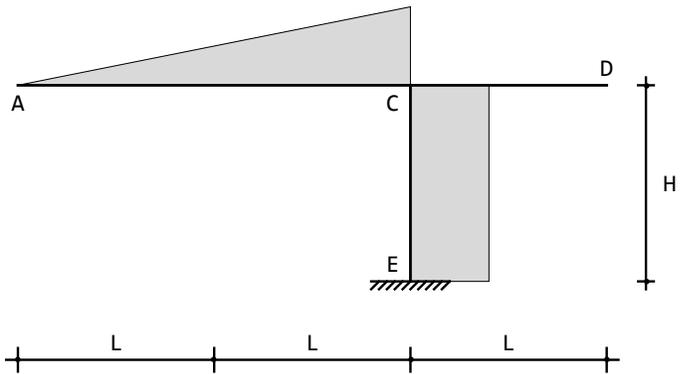


Figura 21.44: Il diagramma  $M_1$  per il telaio di Figura 21.41

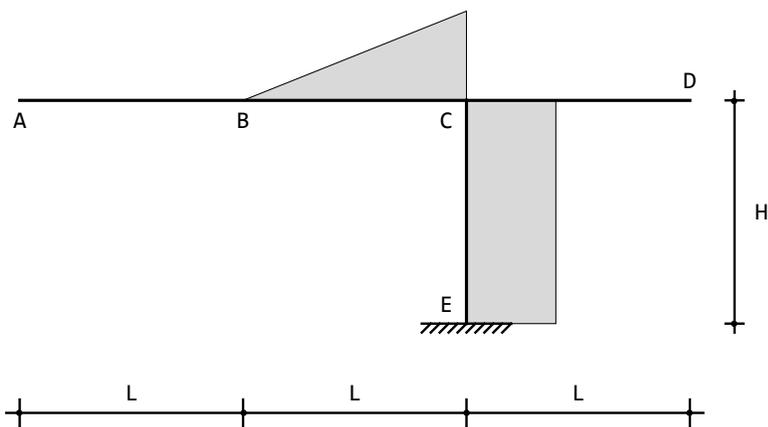


Figura 21.45: Il diagramma  $M_2$  per il telaio di Figura 21.41

caricato dalle forze esterne: l'espressione analitica è facilmente deducibile:

$$\begin{aligned} M_0^{AC} &= -q \frac{z^2}{2} \\ M_0^{CD} &= -q \frac{L^2}{2} - q \frac{z^2}{2} + qLz \\ M_0^{CE} &= -\frac{3}{2}qL^2 \end{aligned} \quad (21.116)$$

Il diagramma  $M_1$ , riportato in Figura 21.44, è ancora più semplice, in quanto costituito da tratti lineari:

$$\begin{aligned} M_1^{AC} &= -z \\ M_1^{CE} &= -2L \end{aligned} \quad (21.117)$$

ed analogamente per il diagramma  $M_2$ , riportato in Figura 21.45:

$$\begin{aligned} M_2^{BC} &= -z \\ M_2^{CE} &= -L \end{aligned} \quad (21.118)$$

Sarà quindi:

$$\begin{aligned} \int_s M_1 \frac{M_0}{EI} ds &= \int_0^{2L} \left( -\frac{1}{2}qz^2 \right) \frac{z}{EI} dz - \int_0^L \left( \frac{3}{2}qL^2 \right) 2 \frac{L}{EI} dz = -5 \frac{qL^4}{EI} \\ \int_s M_2 \frac{M_0}{EI} ds &= \int_L^{2L} \left( -\frac{1}{2}qz^2 \right) \frac{(z-L)}{EI} dz - \int_0^L \left( \frac{3}{2}qL^2 \right) \frac{L}{EI} dz = -\frac{53}{24} \frac{qL^4}{EI} \end{aligned} \quad (21.119)$$

Si noti che per il calcolo del secondo integrale sul tratto  $BC$  si è riportata l'origine del sistema di riferimento di  $M_2$  nel punto  $A$ , traslando di  $-L$ , e quindi l'espressione analitica di  $M_{BC}^{(2)}$  è divenuta  $(z-L)$ .

$$\begin{aligned} \int_s M_1 \frac{M_1}{EI} ds &= \int_0^{2L} z \frac{z}{EI} dz + \int_0^L 2L2 \frac{L}{EI} dz = \frac{20}{3} \frac{L^3}{EI} \\ \int_s M_2 \frac{M_2}{EI} ds &= \int_0^L z \frac{z}{EI} dz + \int_0^L L \frac{L}{EI} dz = \frac{4}{3} \frac{L^3}{EI} \\ \int_s M_1 \frac{M_2}{EI} ds &= \int_L^{2L} z(z-L) dz + \int_0^L 2LL dz = \frac{17}{6} \frac{L^3}{EI} \end{aligned} \quad (21.120)$$

In definitiva, si hanno le due equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned} \frac{20L^3 X_1}{3} + \frac{17L^3 X_2}{6} &= 5L^4 q \\ \frac{17L^3 X_1}{6} + \frac{4L^3 X_2}{3} &= \frac{53L^4 q}{24} \end{aligned} \quad (21.121)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{59}{124}qL \\ X_2 &= \frac{20}{31}qL \end{aligned} \quad (21.122)$$



## Capitolo 22

# Il metodo misto per le strutture iperstatiche

E' talvolta conveniente operare una scelta di incognite iperstatiche che rende la struttura labile, e non isostatica. Su tale struttura labile, è poi possibile scrivere le equazioni di congruenza, insieme ad una, o più, condizioni di equilibrio. Di qui il nome del metodo, detto "metodo misto". In questo Capitolo si forniscono alcuni esempi, rinviando a A. Carpinteri, G. Lacedogna, C. Surace, *Calcolo dei telai piani*, Pitagora Editrice (2002) per una trattazione più approfondita.

### 22.1 Un telaio zoppo

Si calcolino le reazioni e si disegni il diagramma delle c.s.i. per il telaio in Figura 22.1:

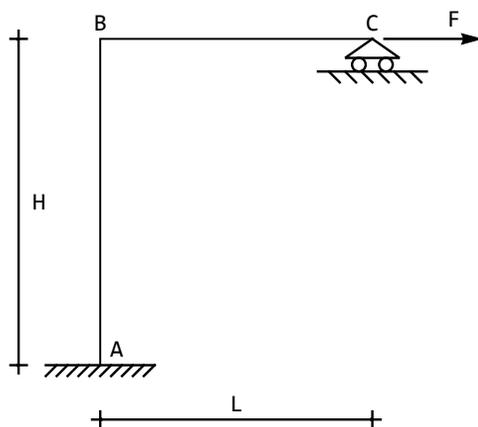


Figura 22.1: Un telaio zoppo

### La scelta delle incognite iperstatiche

Il telaio è una volta iperstatico, ed una ovvia scelta della relativa incognita potrebbe essere la reazione verticale dell'appoggio. La conseguente equazione di congruenza:

$$u_{2C} = u_{2C}^{(0)} + X_1 u_{2C}^{(1)} = 0 \quad (22.1)$$

si risolve facilmente col metodo della composizione degli spostamenti:

$$F \frac{H^2}{2EI} L + X_1 \left( L \frac{H}{EI} L + \frac{L^3}{3EI} \right) = 0 \quad (22.2)$$

da cui:

$$X_1 = -F \frac{3H^2}{2L(3H + L)} \quad (22.3)$$

Si immagini ora di voler ricondurre la struttura ad una coppia di travi appoggiate, introducendo all'uopo due cerniere in  $A$  ed in  $B$ , insieme alle *due* incognite  $X_1$  ed  $X_2$ . Si giunge allo schema *labile* di Figura 22.2, ed un possibile cinematismo è indicato in Figura 22.3.

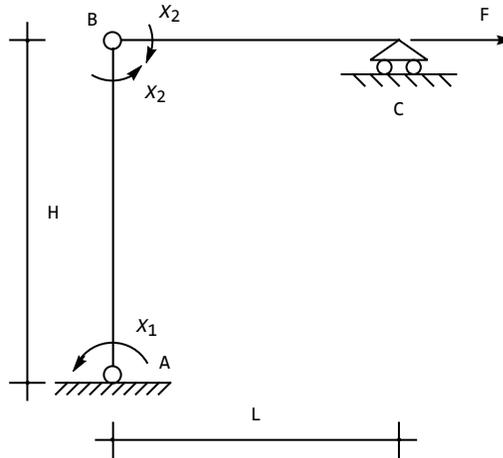


Figura 22.2: Un possibile sistema labile equivalente

Si noti quindi che si è introdotta una terza incognita, la coordinata lagrangiana  $\phi$ , e che quindi accanto alle due equazioni di congruenza, intese ad annullare la rotazione in  $A$ , ed a ripristinare la continuità delle rotazioni in  $B$ , occorre scrivere una condizione di equilibrio (principio di Lagrange):

$$\begin{aligned} \phi_A = 0 &\longrightarrow X_1 \frac{H}{3EI} - X_2 \frac{H}{6EI} + \phi = 0 \\ \phi_{BA} = \phi_{BC} &\longrightarrow -X_1 \frac{H}{6EI} + X_2 \frac{H}{3EI} + \phi = -X_2 \frac{L}{3EI} \\ X_1 \phi + X_2 \phi - FH\phi &= 0 \end{aligned} \quad (22.4)$$

con soluzione:

$$X_1 = \frac{FH(3H + 2L)}{2(3H + L)} \quad (22.5)$$

$$X_2 = \frac{3FH^2}{2(3H + L)} \quad (22.6)$$

$$\phi = -\frac{FH^2(3H + 4L)}{12EI(3H + L)} \quad (22.7)$$

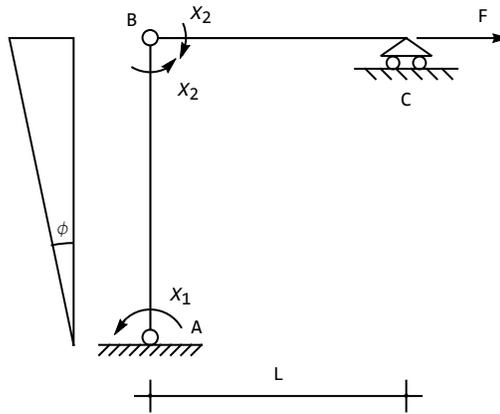


Figura 22.3: Il cinematismo del sistema labile equivalente

### Le caratteristiche della sollecitazione interna

Il diagramma del momento è costituito da tratti lineari con valori noti agli estremi, ed è illustrato in Figura 22.4.

L'equilibrio alla rotazione del ritto permette il calcolo del taglio:

$$T_{AB} = \frac{X_1 + X_2}{H} = F \quad (22.8)$$

come del resto ovvio, in base all'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale della struttura. Sul traverso si ha invece, ancora più semplicemente:

$$-T_{BC}L - X_2 = 0 \quad (22.9)$$

e quindi :

$$T_{BC} = -\frac{X_2}{L} = -\frac{3FH^2}{2L(3H + L)} \quad (22.10)$$

da cui la reazione dell' appoggio in C, già calcolata con altro metodo.

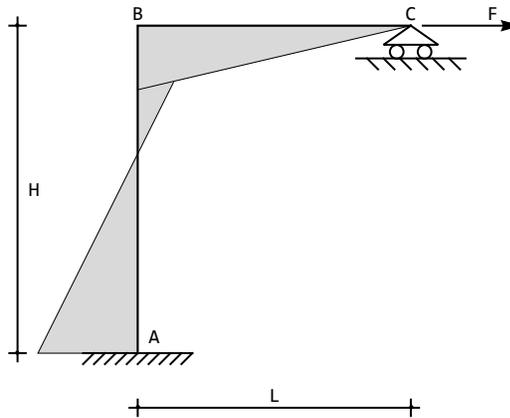


Figura 22.4: Il diagramma del momento

Infine, l'equilibrio del nodo in  $B$  permette di affermare :

$$N_{BA} = -T_{BC} = \frac{3FH^2}{2L(3H + L)} \quad (22.11)$$

$$N_{BC} = T_{BA} = F \quad (22.12)$$

## 22.2 Una trave doppia

Si calcolino le reazioni e si disegni il diagramma delle c.s.i. per il telaio in Figura 22.5.

### La scelta delle incognite iperstatiche

Il telaio è due volte iperstatico, e seguendo il metodo misto, ossia introducendo cerniere nei nodi  $B$ ,  $C$  e  $G$  si giunge ad una struttura labile. Di qui la necessità di identificare il corrispondente meccanismo, e su di esso imporre l'equilibrio con il metodo di Lagrange. La struttura labile equivalente è quindi riportata in Figura 22.6, ed un suo possibile cinematismo è riprodotto in Figura 22.7.

Si devono scrivere le tre equazioni di *congruenza*:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_B = 0 &\longrightarrow \phi_{BC} = \phi_{BA} \longrightarrow X_1 \frac{L}{3EI} = -X_1 \frac{L}{3EI} - X_2 \frac{L}{6EI} \\ \Delta\phi_C = 0 &\longrightarrow \phi_{CB} = \phi_{CD} \longrightarrow X_1 \frac{L}{6EI} + X_2 \frac{L}{3EI} = -X_2 \frac{L}{3EI} + \phi \\ \phi_G = 0 &\longrightarrow -X_3 \frac{2L}{3EI} + \frac{\phi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (22.13)$$

Inoltre, la struttura ammette il cinematismo di Figura 22.7, e su di esso occorre scrivere la condizione di *equilibrio* dettata dal principio dei lavori virtuali:

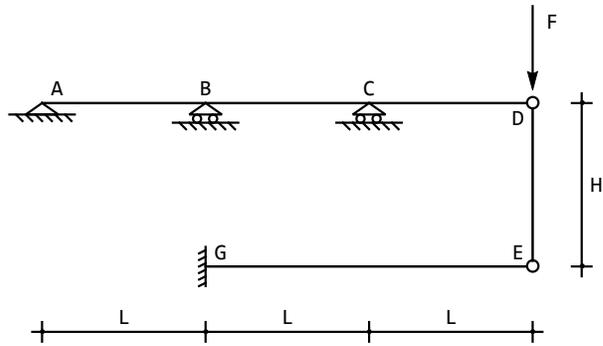


Figura 22.5: Una trave doppia

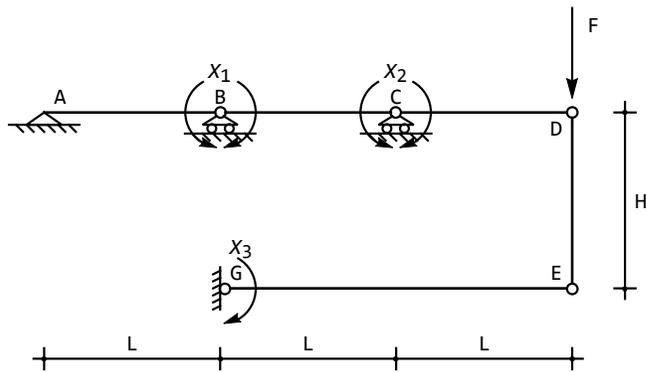


Figura 22.6: La struttura labile equivalente del sistema di Figura 22.5

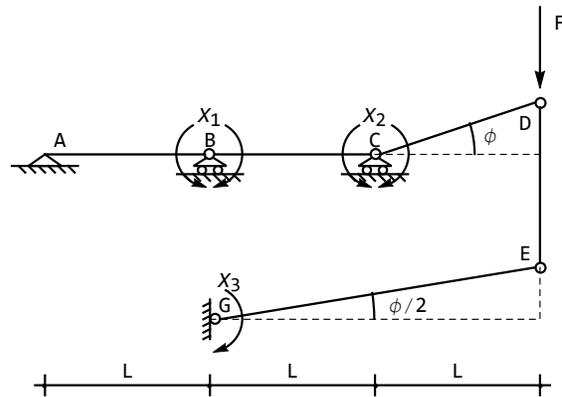


Figura 22.7: Un possibile cinematismo del sistema labile equivalente

$$-X_2\phi - FL\phi - X_3\frac{\phi}{2} = 0 \quad (22.14)$$

Queste quattro equazioni forniscono:

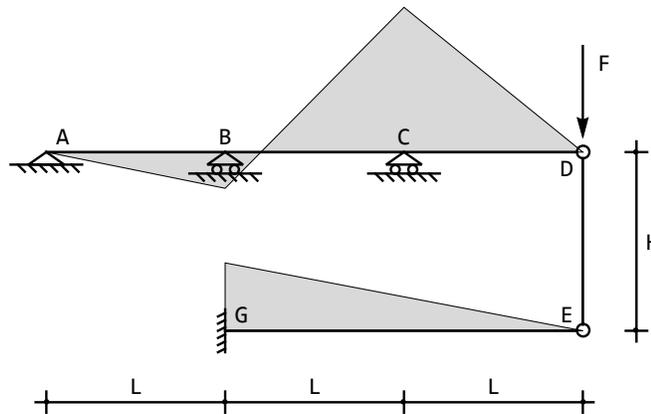


Figura 22.8: Il diagramma dei momenti

$$X_1 = \frac{16FL}{79} \quad (22.15)$$

$$X_2 = -\frac{64FL}{79} \quad (22.16)$$

$$X_3 = -\frac{30FL}{79} \quad (22.17)$$

$$\phi = -\frac{40FL^2}{79EI} \quad (22.18)$$

### Le caratteristiche della sollecitazione interna

Il diagramma del momento è immediato, in quanto costituito da tratti lineari con valori noti agli estremi, ed è riprodotto in Figura 22.8.

I diagrammi di taglio e sforzo normale vengono lasciati come esercizio. Lo sforzo normale nel pendolo sarà pari a:

$$N_{ED} = -\frac{15}{79}F \quad (22.19)$$

Lo stesso esercizio è studiato anche, nel corrispondente capitolo, attraverso il principio dei lavori virtuali.

## Capitolo 23

# Vincoli imperfetti e variazioni termiche

In questo capitolo si studiano le travi con vincoli cedevoli, elasticamente ed anelasticamente, e si introducono le variazioni termiche, assiale e flessionali.

Si ricorda, a tal proposito, che ci si limita alle variazioni termiche alla Volterra, in cui si conserva l'ipotesi di planeità delle sezioni rette, e quindi una trave potrà essere soggetta ad una variazione termica *uniforme*  $\Delta t$ , oppure ad una variazione termica *alla Navier*  $\Delta T$ . Nel primo caso si genera uno spostamento assiale relativo tra i punti della trave, e sorge quindi una distorsione assiale pari a:

$$\lambda = -\alpha \Delta t \quad (23.1)$$

dove  $\alpha$  è il *coefficiente di dilatazione termica lineare*, esprimibile in 1/Celsius, e caratteristico del materiale. Esso rappresenta l'allungamento di un elemento di lunghezza unitaria per un incremento di un grado di temperatura. In Tabella 23.1 si riporta il valore di  $\alpha$  per i più comuni materiali ingegneristici. Si noti che l'acciaio ed il calcestruzzo hanno lo stesso coefficiente di dilatazione termica lineare, rendendo possibile la tecnologia del cemento armato.

Nel caso di variazione termica alla Navier, invece, si ha una differenza di temperatura  $\Delta T$  tra l'estradosso e l'intradosso, che produce tra le due sezioni a distanza unitaria una rotazione relativa pari a:

$$\frac{d\phi}{ds} = \alpha \frac{T_s}{h_s} = \alpha \frac{T_i}{h_i} = \alpha \frac{T_s - T_i}{h_s - h_i} = \alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (23.2)$$

dove  $\Delta T = T_s - T_i$  è la differenza di temperatura tra il bordo superiore ed il bordo inferiore della sezione retta, alta  $h$  (Figura 23.1). Sorge quindi la distorsione flessionale:

$$\mu = -\alpha \frac{\Delta T}{h} \quad (23.3)$$

Acciaio	0.000012
Calcestruzzo	0.000012
Alluminio	0.000024
Mattoni	0.000006
Piombo	0.000029
Porcellana	0.000004
Legno secondo le fibre	0.000004
Legno trasversalmente alle fibre	0.000058
Ferro	0.000012
Ghisa	0.000010
Grafite	0.000003

Tabella 23.1: Valori del coefficiente  $\alpha$  per i materiali più comuni

che rappresenta una curvatura flessionale aggiuntiva, sicchè la relazione tra il momento flettente e la curvatura si scriverà:

$$\chi = \frac{d\phi}{dx_3} = \frac{M}{EI} - \mu \quad (23.4)$$

e per le travi di Eulero-Bernoulli:

$$M = -EI \frac{d^2 u_2}{dx_3^2} + EI\mu \quad (23.5)$$

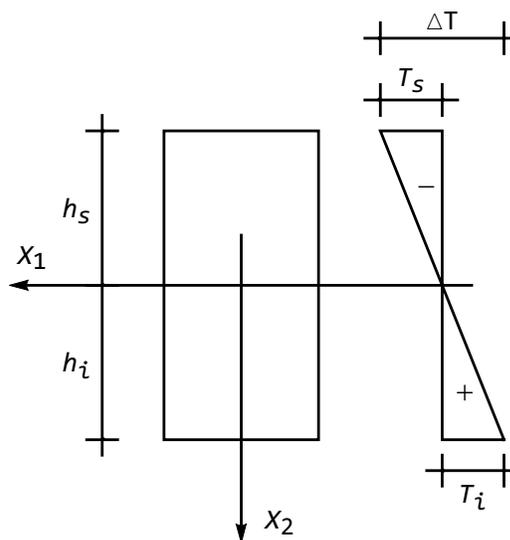


Figura 23.1: La distorsione termica flessionale (alla Navier)

### 23.1 Trave con cedimento anelastico

Si consideri la trave su tre appoggi di Figura 23.2, il cui appoggio di destra subisca un cedimento anelastico verticale pari a  $\delta$ , e si vogliano conoscere gli spostamenti e le caratteristiche della sollecitazione interna generate dal cedimento.

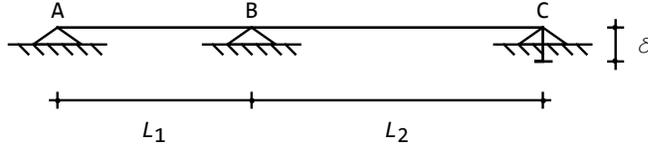


Figura 23.2: Una trave su tre appoggi soggetta a cedimento anelastico di uno dei tre appoggi

A ciò fare, si potranno scrivere le due equazioni differenziali della linea elastica:

$$\frac{d^4 u_2^{AB}}{dx_3^4} = 0 \quad (23.6)$$

in  $AB$ , e

$$\frac{d^4 u_2^{BC}}{dx_3^4} = 0 \quad (23.7)$$

in  $BC$ . Si hanno quindi le soluzioni generali:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\ u_2^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 + d_2 x_3^2 + d_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (23.8)$$

e le otto costanti di integrazione possono calcolarsi imponendo le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3 = 0) &= 0 \\ m^{AB}(x_3 = 0) &= 0 \\ u_2^{AB}(x_3 = L_1) &= 0 \\ u_2^{BC}(x_3 = 0) &= 0 \\ \phi^{AB}(x_3 = L_1) &= \phi^{BC}(x_3 = 0) \\ m^{AB}(x_3 = L_1) &= m^{BC}(x_3 = 0) \\ u_2^{BC}(x_3 = L_2) &= \delta \\ m^{BC}(x_3 = L_2) &= 0 \end{aligned} \quad (23.9)$$

Lo spostamento sarà allora fornito da:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{x_3 (x_3^2 - L_1^2)}{2L_1 L_2 (L_1 + L_2)} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{x_3 (-x_3^2 + (3x_3 + 2L_1) L_2)}{2L_2^2 (L_1 + L_2)} \delta \end{aligned} \quad (23.10)$$

e quindi, in cascata, si possono ottenere rotazioni, momenti e tagli:

$$\begin{aligned}
 \phi^{AB}(x_3) &= \frac{L_1^2 - 3x_3^2}{2L_1L_2(L_1 + L_2)}\delta \\
 \phi^{BC}(x_3) &= \frac{3x_3^2 - 2(3x_3 + L_1)L_2}{2L_2^2(L_1 + L_2)} \\
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{3EI x_3}{L_1L_2(L_1 + L_2)}\delta \\
 m^{BC}(x_3) &= \frac{3EI(x_3 - L_2)\delta}{L_2^2(L_1 + L_2)} \\
 t^{AB}(x_3) &= -\frac{3EI}{L_1L_2(L_1 + L_2)}\delta \\
 t^{BC}(x_3) &= \frac{3EI}{L_2^2(L_1 + L_2)}\delta
 \end{aligned}
 \tag{23.11}$$

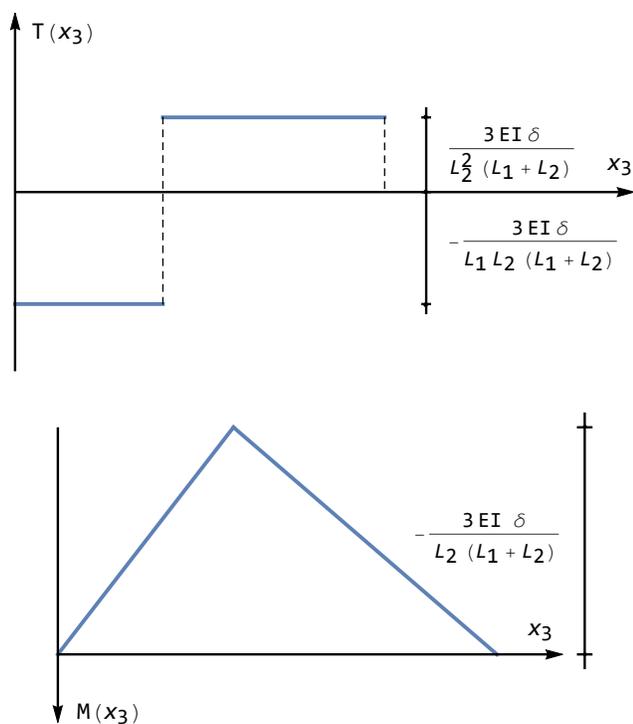


Figura 23.3: Momenti e tagli per la trave di Figura 23.2

I relativi diagrammi sono presentati in Figura 23.3, per le caratteristiche taglio e momento, ed in Figura 23.4 per le rotazioni e gli abbassamenti

L'esempio appena trattato schematizza la colonna di cui parla Galileo nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali*:

“Era una grossissima Colonna di marmo distesa, e posata, presso alle sue estremità, sopra due pezzi di trave; cadde in pensiero dopo un certo tempo ad un Mecanico che fusse bene, per maggiormente assicurarsi che gravata dal proprio peso non si rompesse nel mezzo, supporgli anco in questa parte un terzo simile sostegno: parve il consiglio generalmente molto oportuno, ma l'esito lo dimostrò essere stato tutto l'opposito, atteso che non passarono molti mesi che la colonna si trovò fessa e rotta, giusto sopra il nuovo appoggio di mezzo [...] Deposti in piana terra i due pezzi della Colonna, si vedde che l'uno de i travi, sùl quale appoggiava una delle testate, si era, per la lunghezza del tempo, infracidato ed avvallato, e, restando quel di mezzo durissimo e forte, fu causa che la metà della Colonna restasse in aria, abbandonata dall'estremo sostegno”.

Sull'argomento, vedi anche E. Benvenuto, *La Scienza delle Costruzioni ed il suo sviluppo storico*, Sansoni, Firenze, pag.107-108

## 23.2 La matrice di rigidezza di una trave di Eulero–Bernoulli

Si vuole ora introdurre il concetto di *matrice di rigidezza* di un elemento strutturale, prendendo a riferimento una trave di luce  $L$  in regime flesso–tagliante. A tal fine, si definiscano il vettore  $\mathbf{d}$  dei possibili spostamenti degli estremi della trave:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} u_{2A} \\ \phi_A \\ u_{2B} \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad (23.12)$$

dove  $A$  e  $B$  indicano gli estremi iniziali e finali della trave, ed il vettore  $\mathbf{F}$  delle forze agenti agli estremi:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_A \\ \mathcal{M}_A \\ F_B \\ \mathcal{M}_B \end{pmatrix} \quad (23.13)$$

Potrà scriversi la relazione lineare

$$\begin{pmatrix} F_A \\ \mathcal{M}_A \\ F_B \\ \mathcal{M}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2A} \\ \phi_A \\ u_{2B} \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad (23.14)$$

che lega ciascuna forza ai quattro possibili spostamenti. La matrice  $\mathbf{k}$  è la richiesta matrice di rigidezza, e per esplicitarla occorre eseguire i seguenti passi:

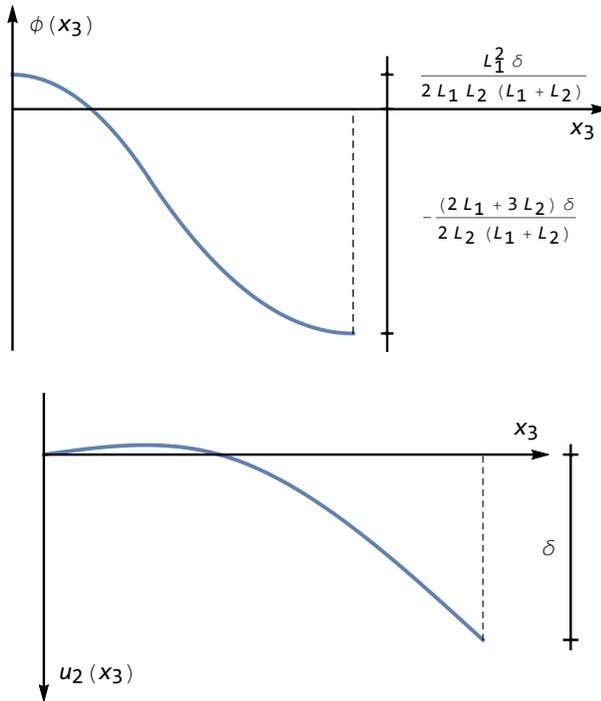


Figura 23.4: Spostamenti e rotazioni per la trave di Figura 23.2

1. ricavare la linea elastica di una trave soggetta ai cedimenti anelastici agli estremi:

$$\begin{aligned}
 u_2(x_3 = 0) &= u_{2A} \\
 u_2'(x_3 = 0) &= -\phi_A \\
 u_2(x_3 = L) &= u_{2B} \\
 u_2'(x_3 = L) &= -\phi_B
 \end{aligned}
 \tag{23.15}$$

2. dedurre la distribuzione di momenti e tagli:

$$\begin{aligned}
 M(x_3) &= -EIu_2''(x_3) \\
 T(x_3) &= -EIu_2'''(x_3)
 \end{aligned}
 \tag{23.16}$$

3. dedurre le forze nodali:

$$\begin{aligned}
 F_A &= -T(0) \\
 \mathcal{M}_A &= -M(0) \\
 F_B &= T(L) \\
 \mathcal{M}_B &= M(L)
 \end{aligned}
 \tag{23.17}$$

### Passo 1 e 2: deduzione della linea elastica

In assenza di forze distribuite, la deformata della trave sarà esprimibile come una equazione cubica:

$$u_2(x_3) = c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \quad (23.18)$$

e le quattro costanti di integrazione si determinano soddisfacendo le condizioni (23.15). Si avrà infine:

$$u_2(x_3) = N_1(x_3)v_A + N_2(x_3)\phi_A + N_3(x_3)v_B + N_4(x_3)\phi_B \quad (23.19)$$

avendo definito le quattro *funzioni di forma*:

$$\begin{aligned} N_1(x_3) &= 1 - 3\frac{x_3^2}{L^2} + 2\frac{x_3^3}{L^3} \\ N_2(x_3) &= -x_3 + 2\frac{x_3^2}{L} - \frac{x_3^3}{L^2} \\ N_3(x_3) &= 3\frac{x_3^2}{L^2} - 2\frac{x_3^3}{L^3} \\ N_4(x_3) &= \frac{x_3^2}{L} - \frac{x_3^3}{L^2} \end{aligned} \quad (23.20)$$

I momenti ed i tagli sono allora forniti da:

$$\begin{aligned} M(x_3) &= -EI(N_1''(x_3)v_A + N_2''(x_3)\phi_A + N_3''(x_3)v_B + N_4''(x_3)\phi_B) \\ T(x_3) &= -EI(N_1'''(x_3)v_A + N_2'''(x_3)\phi_A + N_3'''(x_3)v_B + N_4'''(x_3)\phi_B) \end{aligned} \quad (23.21)$$

### Passo 3: deduzione della matrice di rigidezza

In base alle (23.17) si ottiene:

$$\begin{aligned} F_A &= EI(N_1'''(0)v_A + N_2'''(0)\phi_A + N_3'''(0)v_B + N_4'''(0)\phi_B) \\ \mathcal{M}_A &= EI(N_1''(0)v_A + N_2''(0)\phi_A + N_3''(0)v_B + N_4''(0)\phi_B) \\ F_B &= -EI(N_1'''(L)v_A + N_2'''(L)\phi_A + N_3'''(L)v_B + N_4'''(L)\phi_B) \\ \mathcal{M}_B &= -EI(N_3'''(L)v_A + N_2''(L)\phi_A + N_3''(L)v_B + N_4''(L)\phi_B) \end{aligned} \quad (23.22)$$

e quindi la matrice di rigidezza si scriverà, in base alla (23.14):

$$\mathbf{k} = EI \begin{pmatrix} N_1'''(0) & N_2'''(0) & N_3'''(0) & N_4'''(0) \\ N_1''(0) & N_2''(0) & N_3''(0) & N_4''(0) \\ -N_1'''(L) & -N_2'''(L) & -N_3'''(L) & -N_4'''(L) \\ -N_1''(L) & -N_2''(L) & -N_3''(L) & -N_4''(L) \end{pmatrix} \quad (23.23)$$

oppure, esplicitando:

$$\mathbf{k} = EI \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix} \quad (23.24)$$

Si noti la simmetria della matrice, dovuta ai teoremi di reciprocità

### 23.3 I corollari di Mohr e le distorsioni

Si consideri la trave di Figura 23.5, soggetta ad una variazione termica  $\Delta T$  alla Navier lungo la campata di destra. Si vogliono lo spostamento e la rotazione relativa tra le due facce della cerniera in  $B$ .

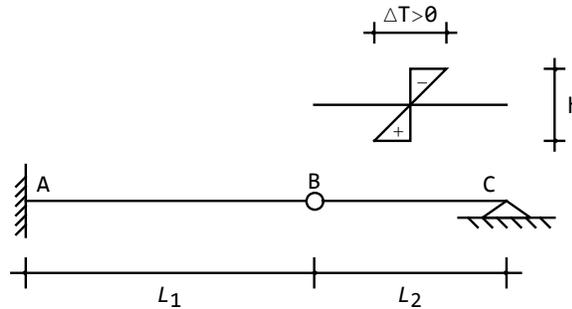


Figura 23.5: Una trave isostatica soggetta a variazione termica

Si osservi, preliminarmente, che per applicare i corollari di Mohr in presenza della distorsione  $\mu$  occorre utilizzare l'espressione (23.5), e quindi sfruttare l'analogia tra le due formule:

$$\frac{d^2 M}{dx_3^2} = -q \quad (23.25)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx_3^2} = -\frac{M}{EI} + \mu \quad (23.26)$$

Il carico fittizio diviene quindi:

$$q^* = \frac{M}{EI} - \mu = \frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta T}{h} \quad (23.27)$$

ossia, nella fattispecie, si riduce ad una stesa di carico uniforme sulla campata di destra, di intensità pari a  $-\mu$ . Si ha così la trave ausiliaria di Figura 23.6, soggetta al carico fittizio uniforme.

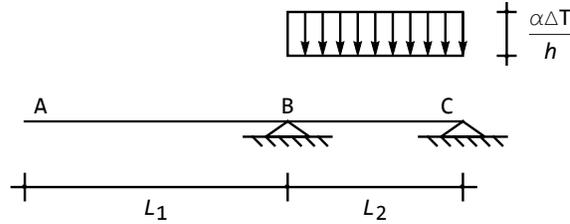


Figura 23.6: La trave ausiliaria per la trave di Figura 23.5

Su di essa è immediato calcolare la reazione dell'appoggio in  $B$ , ed il momento corrispondente:

$$\begin{aligned} R_B^* &= -q^* \frac{L_2}{2} = -\frac{\alpha \Delta T}{2h} L_2 \\ M_B^* &= 0 \end{aligned} \quad (23.28)$$

da cui:

$$\begin{aligned} \Delta \phi_B &= -\frac{\alpha \Delta T}{2h} L_2 \\ u_{2B} &= 0 \end{aligned} \quad (23.29)$$

## 23.4 La linea elastica in presenza di distorsioni

Si voglia risolvere lo stesso esempio di Figura 23.5 con il metodo della linea elastica. A tal fine, si premette che in presenza di distorsioni  $\mu$  di tipo flessionale si avrà:

$$M = -EIu_2'' + EI\mu \quad (23.30)$$

e quindi, derivando due volte, ed utilizzando la legge:

$$M'' = -p \quad (23.31)$$

si giunge all'equazione differenziale del quarto ordine in presenza di distorsioni  $\mu$ :

$$EIu_2'''' = \frac{p}{EI} + \mu'' \quad (23.32)$$

Infine, continuando a valere la legge di equilibrio che impone al taglio di essere pari alla derivata del momento, potrà scriversi:

$$T = -EIu_2''' + EI\mu' \quad (23.33)$$

Ciò premesso, per la trave di Figura 23.5 si ha una distorsione  $\mu$  costante, e quindi potrà scriversi:

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\ u_2^{BC}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 + d_2 x_3^2 + d_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (23.34)$$

rispettivamente per la prima e la seconda campata. Le otto condizioni ai limiti, che permettono il calcolo delle otto costanti di integrazione, sono:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(0) &= 0 \\
 \phi^{AB}(0) &= 0 \\
 u_2^{AB}(L_1) &= u_2^{BC}(0) \\
 m^{AB}(L_1) &= 0 \\
 -EIu_2^{BC''}(0) + EI\mu &= 0 \\
 t^{AB}(L_1) &= t^{BC}(0) \\
 u_2^{BC}(L_2) &= 0 \\
 -EIu_2^{BC''}(L) + EI\mu &= 0
 \end{aligned} \tag{23.35}$$

e risolvendo:

$$\begin{aligned}
 c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0 = d_0 &= 0 \\
 d_1 &= \frac{\alpha\Delta TL_2}{2h} \\
 d_2 &= -\frac{\alpha\Delta T}{2h} \\
 d_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{23.36}$$

La prima linea elastica è quindi identicamente nulla, la seconda si scrive:

$$u_2^{BC}(x_3) = \frac{\alpha\Delta TL_2}{2h}x_3 - \frac{\alpha\Delta T}{2h}x_3^2 \tag{23.37}$$

da cui subito:

$$\begin{aligned}
 \phi^{BC}(x_3) &= -\frac{\alpha\Delta TL_2}{2h} + \frac{\alpha\Delta T}{h}x_3 \\
 m^{BC}(x_3) &= -EIu_2^{BC''} + EI\mu = EI\frac{\alpha\Delta T}{h} - EI\frac{\alpha\Delta T}{h} = 0 \\
 t^{BC}(x_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{23.38}$$

confermando i risultati dell'esercizio precedente.

## 23.5 La trave continua in presenza di variazioni termiche

Si consideri la trave continua a quattro luci uguali di Figura 23.7, e si supponga che la seconda e quarta luce siano soggette ad una variazione termica flessionale:

$$\mu = -\alpha\frac{\Delta T}{h} \tag{23.39}$$

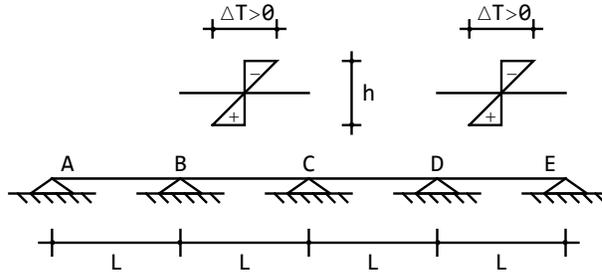


Figura 23.7: Una trave continua soggetta a variazione termica su due campate

Si vogliono dedurre i diagrammi di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli.

Poichè la struttura è (tre volte) iperstatica, ed è richiesto lo studio completo del suo comportamento statico-cinematico, conviene affrontare la struttura con il metodo della scrittura di opportune linee elastiche. Sarà quindi necessario risolvere le quattro equazioni differenziali del quarto ordine:

$$\begin{aligned}
 EIu_2^{AB''''} &= 0 \\
 EIu_2^{BC''''} &= \mu'' \\
 EIu_2^{CD''''} &= 0 \\
 EIu_2^{DE''''} &= \mu''
 \end{aligned} \tag{23.40}$$

valide da  $A$  a  $B$ , da  $B$  a  $C$ , da  $C$  a  $D$ , e da  $D$  ad  $E$ , rispettivamente. Poichè si assume che la variazione termica sia costante, si hanno le soluzioni cubiche:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(x_3) &= a_1 + a_2x_3 + a_3x_3^2 + a_4x_3^3 \\
 u_2^{BC}(x_3) &= b_1 + b_2x_3 + b_3x_3^2 + b_4x_3^3 \\
 u_2^{CD}(x_3) &= c_1 + c_2x_3 + c_3x_3^2 + c_4x_3^3 \\
 u_2^{DE}(x_3) &= d_1 + d_2x_3 + d_3x_3^2 + d_4x_3^3
 \end{aligned} \tag{23.41}$$

Le sedici costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni ai limiti:

- nell'appoggio in  $A$  si annulleranno spostamenti e momenti:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 -u_2''(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{23.42}$$

- nell'appoggio intermedio  $B$  la congruenza impone che lo spostamento sia nullo, sia per la prima che per la seconda linea elastica, e che le rotazioni siano continue. Per l'equilibrio i momenti dovranno essere continui, e

quindi:

$$\begin{aligned}
 u_2^{AB}(L) &= 0 \\
 u_2^{BC}(0) &= 0 \\
 u_2^{AB'}(L) &= u_2^{BC'}(0) \\
 -u_2^{AB''} &= -u_2^{BC''}(0) + \mu
 \end{aligned}
 \tag{23.43}$$

- nell'appoggio intermedio  $C$ , del tutto analogamente:

$$\begin{aligned}
 u_2^{BC}(L) &= 0 \\
 u_2^{CD}(0) &= 0 \\
 u_2^{BC'}(L) &= u_2^{CD'}(0) \\
 -u_2^{BC''}(L) + \mu &= -u_2^{CD''}(0)
 \end{aligned}
 \tag{23.44}$$

- nell'appoggio intermedio  $D$ :

$$\begin{aligned}
 u_2^{CD}(L) &= 0 \\
 u_2^{DE}(0) &= 0 \\
 u_2^{CD'}(L) &= u_2^{DE'}(0) \\
 -u_2^{CD''}(L) &= -u_2^{DE''}(0) + \mu
 \end{aligned}
 \tag{23.45}$$

- ed infine nell'appoggio  $E$ , all'estrema destra:

$$\begin{aligned}
 u_2^{DE}(L) &= 0 \\
 -u_2^{DE''}(L) + \mu &= 0
 \end{aligned}
 \tag{23.46}$$

Il sistema di sedici equazioni si scrive allora:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0 \\
 2a_3 &= 0 \\
 a_1 + La_2 + L^2a_3 + L^3a_4 &= 0 \\
 b_1 &= 0 \\
 a_2 + 2La_3 + 3L^2a_4 - b_2 &= 0 \\
 \frac{\alpha\Delta T}{h} - (2a_3 + 6La_4) + 2b_3 &= 0 \\
 b_1 + Lb_2 + L^2b_3 + L^3b_4 &= 0 \\
 c_1 &= 0 \\
 b_2 + 2Lb_3 + 3L^2b_4 - c_2 &= 0 \\
 -\frac{\alpha\Delta T}{h} - (2b_3 + 6Lb_4) + 2c_3 &= 0 \\
 c_1 + Lc_2 + L^2c_3 + L^3c_4 &= 0 \\
 d_1 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{23.47}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 + 2Lc_3 + 3L^2c_4 - d_2 &= 0 \\
 \frac{\alpha\Delta T}{h} - (2c_3 + 6Lc_4) + 2d_3 &= 0 \\
 d_1 + Ld_2 + L^2d_3 + L^3d_4 &= 0 \\
 -\frac{\alpha\Delta T}{h} - (2d_3 + 6Ld_4) &= 0
 \end{aligned}$$

e, semplificando ed ordinando si ottiene il sistema di undici equazioni in undici incognite, caratterizzato da una matrice dei coefficienti a banda molto stretta:

$$A = \begin{pmatrix}
 1 & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 3L^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 6L & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & L & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 6L & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & L^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6L & 0 & -2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & L^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6L
 \end{pmatrix} \quad (23.48)$$

La soluzione è facilmente ottenibile come:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0 \\
 a_2 &= -\frac{3L\alpha\Delta T}{28h} \\
 a_3 &= 0 \\
 a_4 &= \frac{3\alpha\Delta T}{28hL} \\
 b_1 &= 0 \\
 b_2 &= \frac{3L\alpha\Delta T}{14h} \\
 b_3 &= -\frac{5\alpha\Delta T}{28h} \\
 b_4 &= -\frac{\alpha\Delta T}{28hL} \\
 c_1 &= 0 \\
 c_2 &= -\frac{L\alpha\Delta T}{4h} \\
 c_3 &= \frac{3\alpha\Delta T}{14h} \\
 c_4 &= \frac{\alpha\Delta T}{28hL}
 \end{aligned} \quad (23.49)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= 0 \\ d_2 &= \frac{2L\alpha\Delta T}{7h} \\ d_3 &= -\frac{5\alpha\Delta T}{28h} \\ d_4 &= -\frac{3\alpha\Delta T}{28hL} \end{aligned}$$

e quindi infine gli spostamenti sono ottenibili come (Figura 23.8):

$$\begin{aligned} u_2^{AB}(x_3) &= \frac{3}{28} \frac{x_3(x_3^2 - L^2)}{L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\ u_2^{BC}(x_3) &= \frac{x_3(6L^2 - 5Lx_3 - x_3^2)}{28L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\ u_2^{CD}(x_3) &= \frac{x_3(-7L^2 + 6Lx_3 + x_3^2)}{28L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\ u_2^{DE}(x_3) &= \frac{x_3(8L^2 - 5Lx_3 - 3x_3^2)}{28L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \end{aligned} \quad (23.50)$$

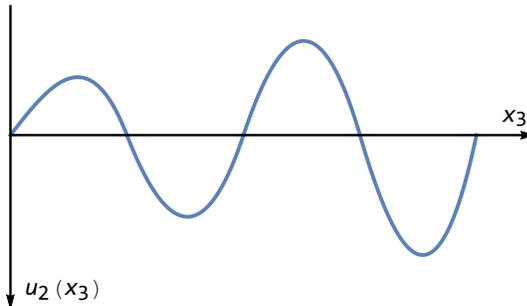


Figura 23.8: Il diagramma degli spostamenti per la trave continua

Le rotazioni si ottengono immediatamente, tramite derivazione (Figura 23.9):

$$\begin{aligned} \phi^{AB}(x_3) &= -\frac{3}{28} \frac{(3x_3^2 - L^2)}{L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\ \phi^{BC}(x_3) &= -\frac{(6L^2 - 10Lx_3 - 3x_3^2)}{28L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\ \phi^{CD}(x_3) &= -\frac{(-7L^2 + 12Lx_3 + 3x_3^2)}{28L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\ \phi^{DE}(x_3) &= -\frac{(8L^2 - 10Lx_3 - 9x_3^2)}{28L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \end{aligned} \quad (23.51)$$

mentre per ottenere i momenti flettenti occorre utilizzare la (23.30) nella

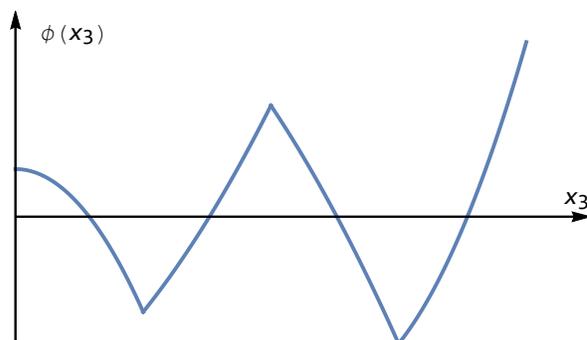


Figura 23.9: Il diagramma delle rotazioni per la trave continua

seconda e quarta campata, ottenendo (Figura 23.10):

$$\begin{aligned}
 m^{AB}(x_3) &= -\frac{9EI}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} x_3 \\
 m^{BC}(x_3) &= EI \frac{5L + 3x_3}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} - EI \alpha \frac{\Delta T}{h} \\
 m^{CD}(x_3) &= -EI \frac{(6L + 3x_3)}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\
 m^{DE}(x_3) &= EI \frac{(5L + 9x_3)}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} - EI \alpha \frac{\Delta T}{h}
 \end{aligned} \tag{23.52}$$

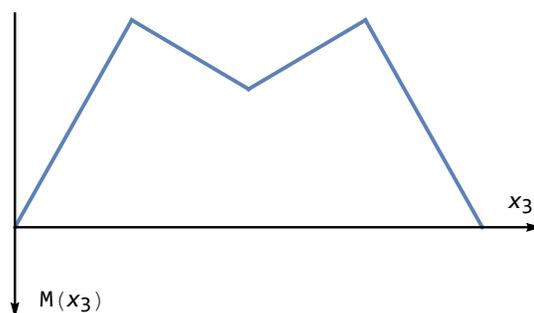


Figura 23.10: Il diagramma dei momenti per la trave continua

I tagli, infine, sono costanti su ciascuna luce, e valgono (Figura 23.11):

$$\begin{aligned}
 t^{AB}(x_3) &= -\frac{9EI}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\
 t^{BC}(x_3) &= \frac{3EI}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h}
 \end{aligned} \tag{23.53}$$

$$\begin{aligned} t^{CD}(x_3) &= -\frac{3EI}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \\ t^{DE}(x_3) &= \frac{9EI}{14L} \alpha \frac{\Delta T}{h} \end{aligned} \quad (23.54)$$

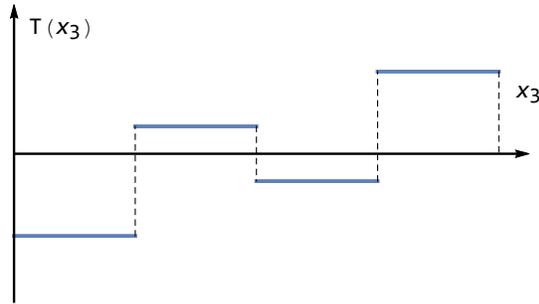


Figura 23.11: Il diagramma dei tagli per la trave continua

## 23.6 Il principio dei lavori virtuali in presenza di variazioni termiche

Si consideri la trave di Figura 23.12, soggetta ad una variazione termica alla Navier lungo il tratto terminale di destra. Essa è manifestamente una volta iperstatica, si sceglie la mensola quale struttura isostatica equivalente, e si applica il principio dei lavori virtuali al fine di esplicitare la condizione di congruenza:

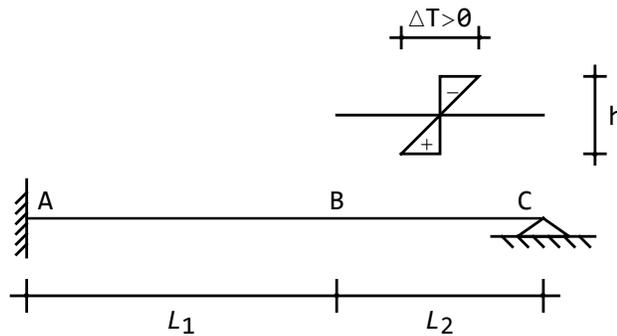


Figura 23.12: Una trave iperstatica soggetta a variazione termica

$$u_{2C} = 0 \quad (23.55)$$

A tal fine, si ricorda che in presenza di distorsioni flessionali  $\mu$ , il p.l.v. si scrive (limitandosi ai soli effetti flessionali):

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds - \int_s M_1 \mu ds = 0 \quad (23.56)$$

leggendo, come usuale, gli spostamenti sul sistema reale (o meglio, sul sistema isostatico equivalente di Figura 23.13), e le forze sul sistema virtuale di Figura 23.14.

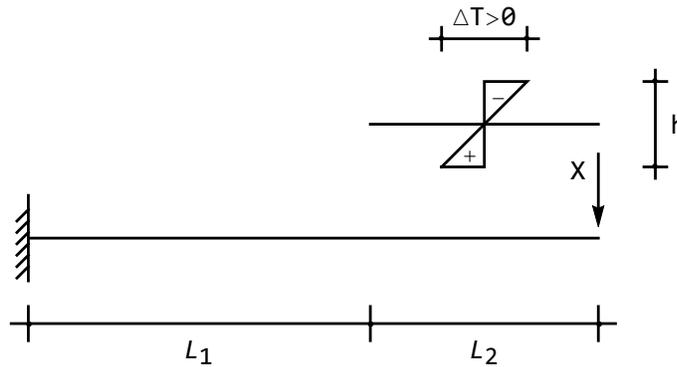


Figura 23.13: Il S.I.E. per la trave di Figura 23.12: su di esso si calcola il momento  $M$



Figura 23.14: Il sistema di forze virtuali per la trave di Figura 23.12: su di esso si calcola il momento  $M_1$

Il calcolo del momento  $M$  sul sistema isostatico equivalente è immediato, in quanto la variazione termica non provoca caratteristiche, e quindi  $M$  risulta dovuto alla sola incognita  $X$ :

$$M(x_3) = (L_1 + L_2 - x_3) X \quad (23.57)$$

mentre il momento  $M_1$ , in modo del tutto analogo, è fornito da:

$$M_1(x_3) = (L_1 + L_2 - x_3) \quad (23.58)$$

La (23.56) si scriverà allora:

$$\frac{X}{EI} \int_0^{L_1+L_2} (L_1 + L_2 - x_3)^2 dx_3 + \frac{\alpha \Delta T}{h} \int_{L_1}^{L_1+L_2} (L_1 + L_2 - x_3) dx_3 = 0 \quad (23.59)$$

da cui subito:

$$X = -\frac{3EI \alpha \Delta T}{2 h} \frac{L_2^2}{(L_1 + L_2)^3} \quad (23.60)$$

Se la variazione termica si estende sulla mezziera della trave, si avrà  $L_1 = L_2 = L/2$ , e:

$$X = -\frac{3EI \alpha \Delta T}{8hL} \quad (23.61)$$

### 23.7 Un telaio a tre cerniere con pendolo interno

Si consideri il telaio di Figura 23.15, costituito da due tratti incernierati al suolo e collegati tra loro da una cerniera. Esiste inoltre un pendolo che collega i due tratti nel modo illustrato. Si vuol conoscere lo sforzo normale nel pendolo, causato da una variazione termica agente sulla semiluce di destra del traverso.

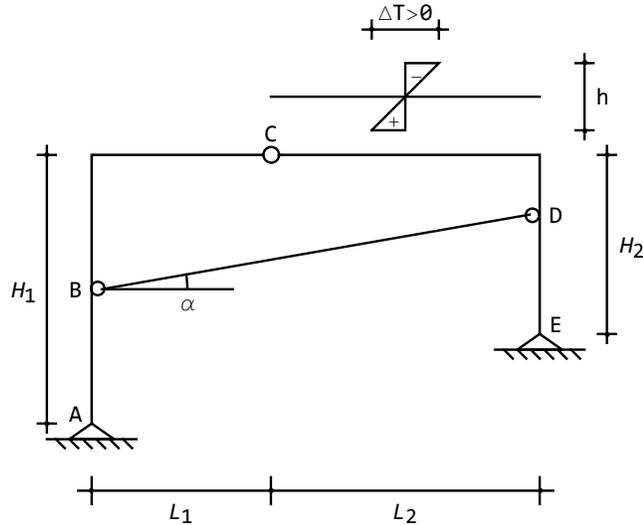


Figura 23.15: Un telaio a tre cerniere con pendolo interno

La struttura è una volta iperstatica, e quale incognita iperstatica  $X$  conviene assumere proprio la reazione nel pendolo. Il sistema isostatico equivalente è quindi quello di Figura 23.16, ed è assunto come sistema su cui calcolare gli spostamenti.

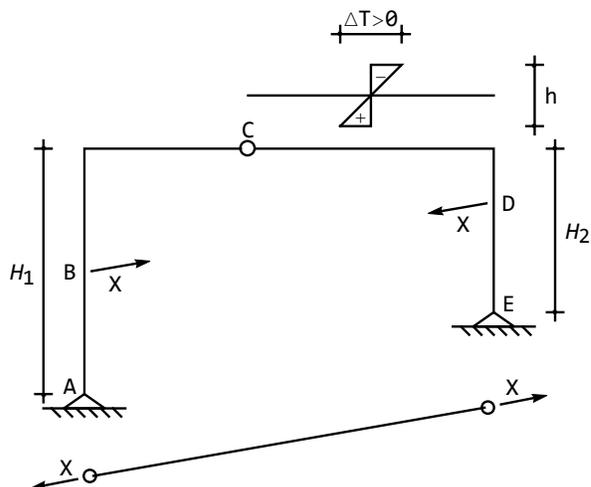


Figura 23.16: Il S.I.E. al telaio di Figura 23.15

Il sistema di forze virtuali, invece, sarà invece quello di Figura 23.17, ossia è costituito da due forze unitarie, uguali e contrarie, agenti in  $B$  e  $D$  secondo la retta del pendolo soppresso.

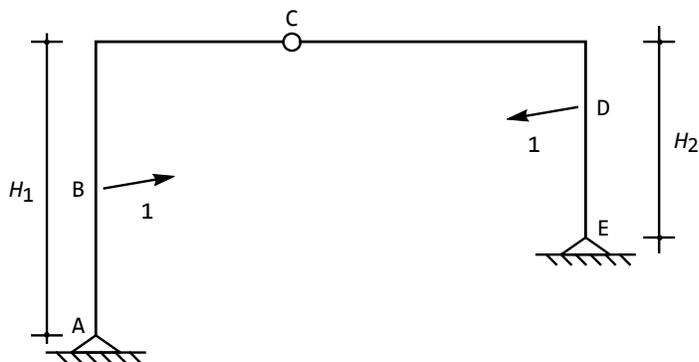


Figura 23.17: Il sistema di forze virtuali per l'esercizio di Figura 23.15

Ciò permette di scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$\int_s M_1 \frac{M}{EI} ds - \int_s M_1 \mu ds = -1 \frac{X l_{BD}}{EA_{BD}} \quad (23.62)$$

Il primo membro di questa uguaglianza rappresenta il lavoro interno,  $M^{(1)}$  è il diagramma dei momenti flettenti calcolato sul sistema virtuale, mentre  $M$  è il diagramma del momento calcolato sul sistema isostatico equivalente. Per il

principio di sovrapposizione degli effetti si può scrivere:

$$M = M_0 + XM_1 \quad (23.63)$$

ed  $M_0$  risulta identicamente nullo, in quanto la variazione termica non induce caratteristiche sulla struttura isostatica.

Il secondo membro della (23.62) è il lavoro delle due forze virtuali (unitarie) per effetto dello spostamento relativo effettivo tra i punti  $B$  e  $D$  della struttura isostatica equivalente. Se  $l_{BD}$  denota la lunghezza del pendolo, ed  $A_{BD}$  è l'area del pendolo, tale spostamento relativo è pari a:

$$\Delta l_{BD} = \frac{Xl_{BD}}{EA_{BD}} \quad (23.64)$$

Tale spostamento è positivo se di allontanamento, mentre le forze virtuali di Figura 23.17 tendono a far avvicinare i due punti  $B$  e  $D$ , e quindi il lavoro risulta negativo.

La (23.62) può quindi scriversi:

$$X \left( \frac{1}{EI} \int_s M_1^2 ds + \frac{l_{BD}}{EA_{BD}} \right) = -\frac{\alpha \Delta T}{h} \int_s M_1 ds \quad (23.65)$$

da cui è possibile ricavare l'incognita  $X$ , non appena dedotto il momento  $M_1$ .

## Capitolo 24

# La linea elastica e le strutture a telaio isostatiche

In questo Capitolo si illustra la generalizzazione del metodo della doppia integrazione al caso dei telai piani isostatici. Secondo questo approccio, in una prima fase si calcolano i diagrammi dello sforzo normale, del taglio e del momento flettente, utilizzando le note equazioni di equilibrio:

$$\frac{dN}{dx_3} = -t \quad (24.1)$$

$$\frac{dT}{dx_3} = -p \quad (24.2)$$

$$\frac{dM}{dx_3} = T \quad (24.3)$$

A tal fine, si suddivide il telaio in  $t$  tratti, dove per “tratto” si intende un elemento strutturale in cui non vi siano discontinuità nelle caratteristiche e nelle loro derivate. Poi, per ciascun tratto  $IJ$ , si fissa un sistema di riferimento con origine in  $I$ , asse  $X_3$  diretto da  $I$  verso  $J$ , ed asse  $X_2$  che forma un angolo di  $\pi/2$  per sovrapporsi ad  $X_3$ . Ciò fatto, si definiscono le caratteristiche  $n^{(IJ)}(x_3)$ ,  $t^{(IJ)}(x_3)$  ed  $m^{(IJ)}(x_3)$ , in base alla distribuzione dei carichi assiali  $t(x_3)$  e dei carichi trasversali  $p(x_3)$ : se — ad esempio — i carichi sono distribuiti con legge costante, allora si porrà:

$$\begin{aligned} n^{(IJ)}(x_3) &= c_0 + t_0 x_3 \\ t^{(IJ)}(x_3) &= c_1 - p_0 x_3 \\ m^{(IJ)}(x_3) &= c_2 + c_1 x_3 - p_0 \frac{x_3^2}{2} \end{aligned} \quad (24.4)$$

Poichè il telaio è isostatico, si potranno scrivere  $3t$  equazioni di equilibrio, che saranno sufficienti a ricavare le  $3t$  costanti di integrazione, e quindi a definire univocamente le caratteristiche.

In una seconda fase, si utilizzano le relazioni di congruenza e le leggi costitutive. In assenza di distorsioni distribuite si avrà:

$$\begin{aligned}\frac{du_3}{dx_3} &= \frac{N}{EA} \\ \frac{d\phi}{dx_3} &= \frac{M}{EI} \\ \frac{du_2}{dx_3} &= -\phi\end{aligned}\tag{24.5}$$

giungendo a definire le linee elastiche:

$$\begin{aligned}u_3^{(IJ)}(x_3) &= \int_{IJ} \frac{n^{(IJ)}}{EA} dx_3 + d_0 \\ \phi^{(IJ)}(x_3) &= \int_{IJ} \frac{m^{(IJ)}}{EI} dx_3 + d_1 \\ u_2^{(IJ)}(x_3) &= - \int_{IJ} \phi^{(IJ)} dx_3 + D_1 x_3 + d_2\end{aligned}\tag{24.6}$$

Le  $3t$  costanti di integrazione andranno ora determinate a partire dalle  $3t$  condizioni di congruenza che potranno scriversi agli estremi dei tratti.

E' spesso possibile ipotizzare l'indefornabilità assiale del telaio, equivalente all'assumere:

$$\frac{du_3}{dx_3} = 0\tag{24.7}$$

e quindi la prima delle (24.6) si semplifica in:

$$u_3^{(IJ)}(x_3) = d_0\tag{24.8}$$

Alternativamente, si può svolgere il calcolo in ipotesi di deformabilità assiale, e poi far tendere la rigidità assiale  $EA$  ad infinito. In ambedue i casi la deformata del telaio sarà dovuta ai soli effetti flessionali.

## 24.1 Un telaio zoppo

Si consideri il semplice telaio di Figura 24.1, costituito da un traverso di luce  $2L$ , interrotto da una cerniera in mezzeria, ed un ritto di altezza  $H$ . A sinistra il telaio è vincolato con un bipendolo, al piede si ha una cerniera, sicchè la struttura risulta manifestamente isostatica. Il carico è definito da una coppia di valore  $M$  agente nel nodo di destra  $C$ , e da una variazione termica assiale di valore  $\Delta T$  agente sul ritto.

Si utilizza il metodo della doppia integrazione: in un primo momento si determinano le caratteristiche della sollecitazione interna, ossia momenti, tagli e

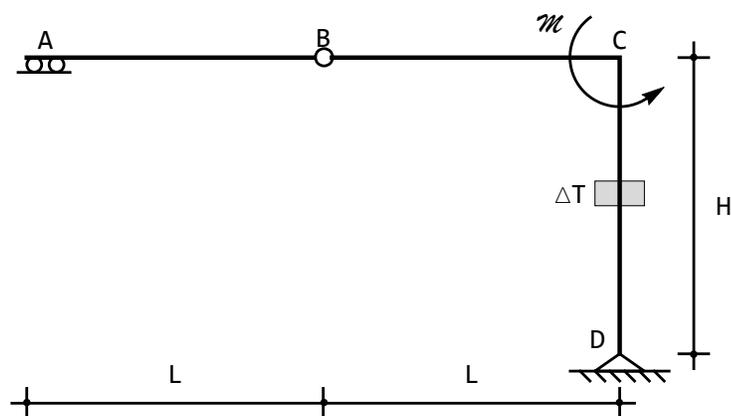
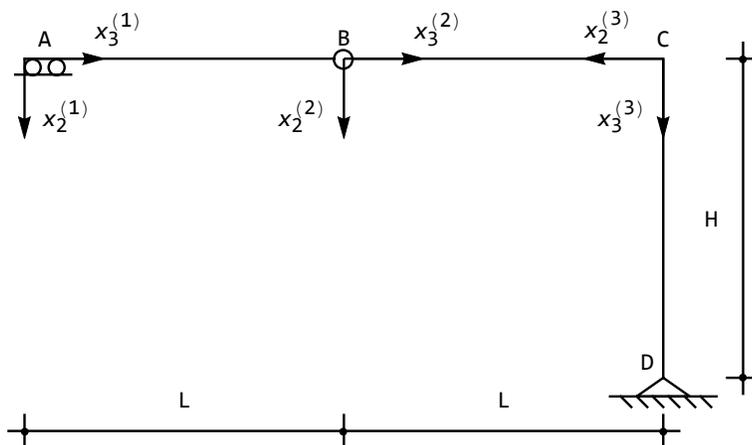


Figura 24.1: Un semplice telaio zoppo

sforzi normali, applicando le equazioni differenziali di equilibrio. In un secondo momento si deducono gli spostamenti assiali e trasversali, attraverso la soluzione delle equazioni di congruenza e costitutive. Si ricorda che la possibilità di suddividere in tal modo il calcolo è dovuta all'isostaticità della struttura.

### Prima fase: il calcolo delle caratteristiche

Si identificano tre sistemi di riferimento, con origine in  $A$ ,  $B$  e  $C$ , e col sistema di assi locali definito in Figura 24.2. In assenza di carichi distribuiti sarà possibile scrivere:


 Figura 24.2: I tre sistemi di riferimento per i tre tratti  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$

$$\begin{aligned} m^{(AB)}(x_3) &= ax_3 + b \\ m^{(BC)}(x_3) &= cx_3 + d \end{aligned} \quad (24.9)$$

$$\begin{aligned} m^{(CD)}(x_3) &= ex_3 + f \\ n^{(AB)}(x_3) &= n_1 \\ n^{(BC)}(x_3) &= n_2 \\ n^{(CD)}(x_3) &= n_3 \end{aligned} \quad (24.10)$$

Le condizioni (di equilibrio) che permettono il calcolo delle costanti di integrazione sono:

— nel bipendolo a piano di scorrimento orizzontale, in  $A$ , si dovrà annullare lo sforzo normale:

$$n^{(AB)}(x_3 = 0) = 0 \quad (24.11)$$

— in corrispondenza della cerniera in  $B$  il momento dovrà annullarsi, sia per il primo che il secondo tratto, mentre sforzi normali e tagli devono essere continui:

$$\begin{aligned} m^{(AB)}(x_3 = L) &= 0 \\ m^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \\ t^{(AB)}(x_3 = L) &= t^{(BC)}(x_3 = 0) \\ n^{(AB)}(x_3 = L) &= n^{(BC)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.12)$$

— nel nodo in  $C$ , caricato da una coppia concentrata  $\mathcal{M}$ , l'equilibrio alla traslazione ed alla rotazione fornisce tre equazioni:

$$\begin{aligned} -m^{(BC)}(x_3 = L) + m^{(CD)}(x_3 = 0) + \mathcal{M} &= 0 \\ -n^{(BC)}(x_3 = L) - T^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -t^{(BC)}(x_3 = L) + n^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.13)$$

— infine, nell'appoggio in  $D$ , si annullerà il momento flettente:

$$m^{(CD)}(x_3 = H) = 0 \quad (24.14)$$

Utilizzando le (24.9) e le (24.10) si trasformano le nove condizioni ai limiti in nove equazioni algebriche lineari nelle nove costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} aL + b &= 0 \\ a &= c \\ d &= 0 \\ -(cL + d) + f + \mathcal{M} &= 0 \\ eH + f &= 0 \\ n_1 &= 0 \\ n_1 &= n_2 \\ n_2 + e &= 0 \\ -c + n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (24.15)$$

La soluzione si può facilmente ottenere come:

$$\begin{aligned} a = c = n_3 &= \frac{\mathcal{M}}{L} \\ b &= -\mathcal{M} \\ d = e = f = n_1 = n_2 &= 0 \end{aligned} \quad (24.16)$$

e quindi i momenti flettenti possono scriversi come:

$$\begin{aligned} m^{(AB)}(x_3) &= -\mathcal{M} \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ m^{(BC)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{L} x_3 \\ m^{(CD)}(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (24.17)$$

I tagli si ottengono, a partire dai momenti, con una semplice derivazione:

$$\begin{aligned} t^{(AB)}(x_3) = t^{(BC)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{L} \\ t^{(CD)}(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (24.18)$$

mentre gli sforzi normali sono pari a:

$$\begin{aligned} n^{(AB)}(x_3) = n^{(BC)}(x_3) &= 0 \\ n^{(CD)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{L} \end{aligned} \quad (24.19)$$

### Il tracciamento grafico del diagramma del momento

Una veloce conferma dei risultati ottenuti si può ottenere deducendo graficamente le direzioni delle reazioni, e tracciando il relativo diagramma del momento. Scrivendo le equazioni simboliche di equilibrio dei due tratti, e l'equilibrio globale dell'intera struttura, si ha:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ b + \mathcal{M} + d &= 0 \\ a + \mathcal{M} + d &= 0 \end{aligned} \quad (24.20)$$

La prima equazione detta che le reazioni  $a$  del bipendolo e  $b$  della cerniera devono avere la stessa retta d'azione: poichè la reazione del bipendolo deve essere verticale, mentre la retta d'azione della cerniera deve passare per la cerniera stessa, tale retta d'azione non può che essere la verticale per  $B$ . La terza equazione, di equilibrio globale, implica che  $a$  e  $d$  devono formare una coppia (oraria) in grado di equilibrare la coppia applicata: quindi anche  $d$  sarà verticale.

Per tracciare il diagramma del momento si consideri anzitutto che il ritto  $CD$  non subirà momento, in quanto la reazione  $d$  ha braccio nullo. Si può quindi partire assegnando un valore arbitrario (la cosiddetta *scala*) al momento nel punto  $C$ , e riportando dalla parte delle fibre tese, e si completa il diagramma tracciando una retta da  $C$  ad  $A$ , passante per la cerniera in  $B$ . Si giunge quindi al diagramma di Figura 24.3.

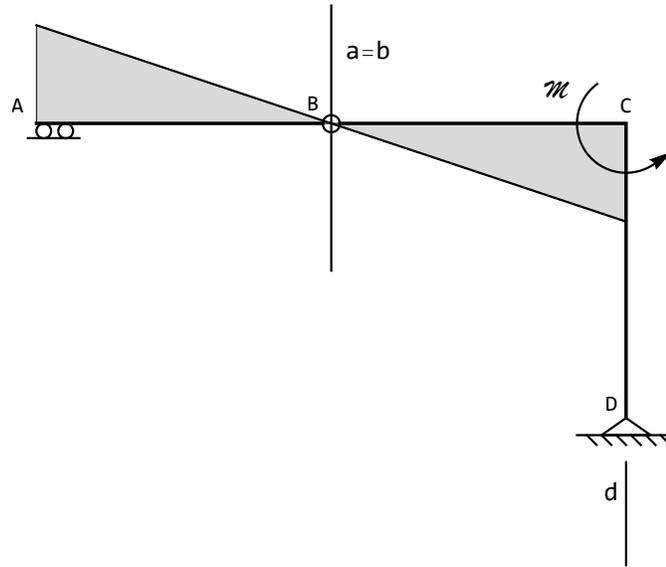


Figura 24.3: Il momento per il telaio zoppo di Figura 24.1

### Seconda fase: il calcolo degli spostamenti

Le equazioni da utilizzare sono ora quelle che legano gli spostamenti alle caratteristiche, o più precisamente, le curvature, ai momenti e gli allungamenti percentuali agli sforzi normali:

$$\begin{aligned} u_2''(x_3) &= -\frac{M}{EI} \\ u_3'(x_3) &= \frac{N}{EA} - \lambda = \frac{N}{EA} + \alpha\Delta T \end{aligned} \quad (24.21)$$

Sarà quindi, nei tre tratti  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$ :

$$\begin{aligned} u_2''^{(AB)}(x_3) &= \frac{M}{EI} \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\ u_2''^{(BC)}(x_3) &= -\frac{M}{EI} \frac{x_3}{L} \\ u_2''^{(CD)}(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (24.22)$$

$$\begin{aligned} u_3'^{(AB)}(x_3) &= 0 \\ u_3'^{(BC)}(x_3) &= 0 \\ u_3'^{(CD)}(x_3) &= \frac{M}{EAL} + \alpha\Delta T \end{aligned} \quad (24.23)$$

ed integrando opportunamente:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{EI} \left( \frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6L} \right) + ax_3 + b \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{x_3^3}{6L} + cx_3 + d \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= ex_3 + f \\
 u_3^{(AB)}(x_3) &= s_1 \\
 u_3^{(BC)}(x_3) &= s_2 \\
 u_3^{(CD)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{EAL} x_3 + \alpha \Delta T x_3 + s_3
 \end{aligned} \tag{24.24}$$

Questa volta le condizioni ai limiti dovranno imporre la congruenza degli spostamenti. In corrispondenza del punto  $A$ , il bipendolo a scorrimento orizzontale proibisce gli spostamenti trasversali e le rotazioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 \phi^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{24.25}$$

mentre la cerniera in  $B$  garantisce la continuità degli spostamenti assiali e trasversali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3 = L) &= u_2^{(BC)}(x_3 = 0) \\
 u_3^{(AB)}(x_3 = L) &= u_2^{(BC)}(x_3 = 0)
 \end{aligned} \tag{24.26}$$

Nel nodo  $C$  lo spostamento trasversale del traverso deve essere uguale allo spostamento assiale del ritto, mentre — considerando la scelta degli assi — lo spostamento assiale del traverso dovrà essere uguale e contrario allo spostamento trasversale del ritto. Le rotazioni dovranno essere uguali, giungendo a scrivere le tre condizioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(BC)}(x_3 = L) &= u_3^{(CD)}(x_3 = 0) \\
 u_3^{(BC)}(x_3 = L) &= -u_2^{(CD)}(x_3 = 0) \\
 \phi^{(BC)}(x_3 = L) &= \phi^{(CD)}(x_3 = 0)
 \end{aligned} \tag{24.27}$$

Infine, l'appoggio in  $D$  proibisce ambedue gli spostamenti, e quindi impone le due condizioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(CD)}(x_3 = H) &= 0 \\
 u_3^{(CD)}(x_3 = H) &= 0
 \end{aligned} \tag{24.28}$$

Utilizzando le espressioni (24.24) delle linee elastiche, le nove condizioni precedenti conducono al sistema di nove equazioni nelle costanti di integrazione:

$$\begin{aligned}
 b &= 0 \\
 a &= 0 \\
 \frac{\mathcal{M}}{3EI}L^2 + aL + b &= d \\
 s_1 &= s_2 \\
 -\frac{\mathcal{M}}{EI}\frac{L^3}{6L} + cL + d &= s_3 \\
 s_2 &= -f \\
 \frac{\mathcal{M}}{EI}\frac{L}{2} - c &= -e \\
 eH + f &= 0 \\
 \frac{\mathcal{M}}{EA} + \alpha\Delta TH + s_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{24.29}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 a &= b = 0 \\
 c &= -\frac{\mathcal{M}}{EI}\frac{L}{6} - \frac{\mathcal{M}H}{EAL^2} - \frac{H}{L}\alpha\Delta T \\
 d &= \frac{\mathcal{M}}{3EI}L^2 \\
 e &= -\frac{\mathcal{M}}{EI}\frac{2L}{3} - \frac{\mathcal{M}H}{EAL^2} - \frac{H}{L2}\alpha\Delta T \\
 f &= \frac{\mathcal{M}}{EI}\frac{2HL}{3} + \frac{\mathcal{M}H^2}{EAL^2} + \frac{H^2}{L}\alpha\Delta T \\
 s_1 = s_2 &= -\frac{\mathcal{M}}{EI}\frac{2HL}{3} - \frac{\mathcal{M}H^2}{EAL^2} - \frac{H^2}{L}\alpha\Delta T \\
 s_3 &= -\frac{\mathcal{M}H}{EAL} - H\alpha\Delta T
 \end{aligned} \tag{24.30}$$

Le linee elastiche flessionali sono quindi:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{EI} \left( \frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6L} \right) \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}}{6EI}\frac{x_3^3}{L} - \frac{\mathcal{M}}{6EI}Lx_3 + \frac{\mathcal{M}}{3EI}L^2 - \frac{\mathcal{M}H + EAHL\alpha\Delta T}{EAL^2}x_3 \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= \frac{(2EAL^3\mathcal{M} + 3EIH(\mathcal{M} + EAL\alpha\Delta T))(H - x_3)}{3EAEIL^2}
 \end{aligned} \tag{24.31}$$

mentre le linee elastiche assiali sono date da:

$$u_3^{(AB)}(x_3) = -\frac{H(2EAL^3\mathcal{M} + 3EIH(\mathcal{M} + EAL\alpha\Delta T))}{3EAEIL^2} \tag{24.32}$$

$$u_3^{(BC)}(x_3) = - \frac{H(2EAL^3\mathcal{M} + 3EIH(\mathcal{M} + EAL\alpha\Delta T))}{3EAEIL^2}$$

$$u_3^{(CD)}(x_3) = - \frac{(\mathcal{M} + EAL\alpha\Delta T)(H - x_3)}{EAL}$$

Appare in evidenza l'influenza dei vari termini flessionali ed assiali. Se si vuol trascurare, come usuale, la deformabilità assiale delle aste, basta far crescere la rigidità  $EA$  all'infinito, ottenendo le formule semplificate:

$$u_2^{(AB)}(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EI} \left( \frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6L} \right)$$

$$u_2^{(BC)}(x_3) = - \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{x_3^3}{6L} - \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{L}{6} x_3 + \frac{\mathcal{M}}{3EI} L^2 - \frac{H}{L} \alpha \Delta T x_3$$

$$u_2^{(CD)}(x_3) = \left( \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2L}{3} + \frac{H}{L} \alpha \Delta T \right) (H - x_3) \quad (24.33)$$

$$u_3^{(AB)}(x_3) = - \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2HL}{3} - \frac{H^2}{L} \alpha \Delta T$$

$$u_3^{(BC)}(x_3) = - \frac{\mathcal{M}}{EI} \frac{2LH}{3} - \frac{H^2}{L} \alpha \Delta T$$

$$u_3^{(CD)}(x_3) = - \alpha \Delta T (H - x_3)$$

Una possibile deformata — in assenza di variazioni termiche — è riportata in Figura 24.4, insieme ai valori dello spostamento orizzontale del traverso  $AC$ , e dell'abbassamento della cerniera in  $B$ .

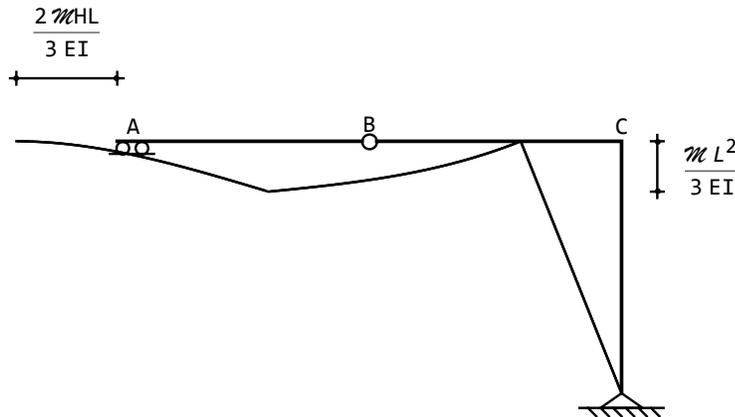


Figura 24.4: La deformata per il telaio zoppo di Figura 24.1

La rotazione relativa tra le due facce della cerniera può agevolmente calcolarsi a partire dalla definizione:

$$\Delta\phi_B = \phi_{des} - \phi_{sin} = \frac{2ML}{3EI} \quad (24.34)$$

## 24.2 Una maglia chiusa a tre cerniere

Si consideri ora il telaio di Figura 24.5, costituito da una maglia quadrata chiusa a tre cerniere, vincolata con un appoggio a sinistra ed un carrello a destra, sollecitata da una forza  $P$  sul tratto inferiore. La struttura è quindi palesemente isostatica, come può essere confermato da un veloce computo dei tratti di cui è composta ( $t = 3$ ) e del numero di incognite statiche presenti ( $s = 9$ ).

### Prima fase: il calcolo delle caratteristiche

Si inizia con lo scegliere i sistemi di riferimento, ossia i versi di percorrenza delle aste, che permettono di scrivere, in assenza di carichi distribuiti:

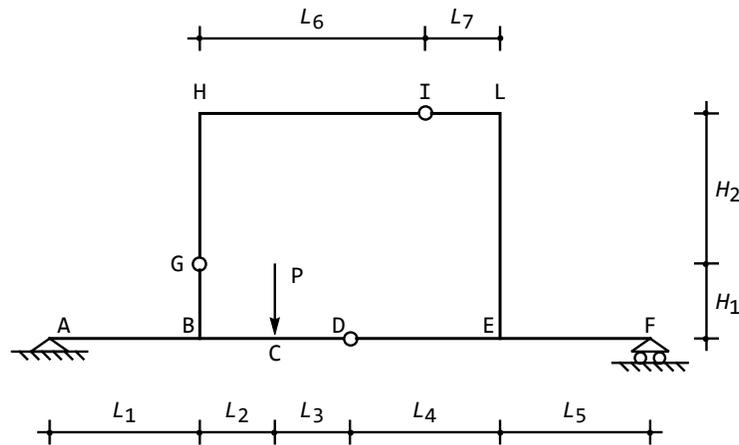


Figura 24.5: Una maglia chiusa a tre cerniere

$$\begin{aligned}
 m^{(AB)}(x_3) &= t_1 x_3 + m_1 \\
 m^{(BC)}(x_3) &= t_2 x_3 + m_2 \\
 m^{(CD)}(x_3) &= t_3 x_3 + m_3 \\
 m^{(DE)}(x_3) &= t_4 x_3 + m_4 \\
 m^{(EF)}(x_3) &= t_5 x_3 + m_5 \\
 m^{(GB)}(x_3) &= t_6 x_3 + m_6 \\
 m^{(HG)}(x_3) &= t_7 x_3 + m_7 \\
 m^{(HI)}(x_3) &= t_8 x_3 + m_8 \\
 m^{(IL)}(x_3) &= t_9 x_3 + m_9 \\
 m^{(LE)}(x_3) &= t_{10} x_3 + m_{10}
 \end{aligned} \tag{24.35}$$

$$\begin{aligned}
 n^{(AB)}(x_3) &= n_1 \\
 n^{(BC)}(x_3) &= n_2 \\
 n^{(CD)}(x_3) &= n_3 \\
 n^{(DE)}(x_3) &= n_4 \\
 n^{(EF)}(x_3) &= n_5 \\
 n^{(GB)}(x_3) &= n_6 \\
 n^{(HG)}(x_3) &= n_7 \\
 n^{(HI)}(x_3) &= n_8 \\
 n^{(IL)}(x_3) &= n_9 \\
 n^{(LE)}(x_3) &= n_{10}
 \end{aligned} \tag{24.36}$$

Le condizioni (di equilibrio) che permettono il calcolo delle costanti di integrazione sono:

— in corrispondenza dell'appoggio in  $A$  si annulla il momento:

$$m^{(AB)}(x_3 = 0) = 0 \tag{24.37}$$

— in corrispondenza del nodo triplo  $B$ :

$$\begin{aligned}
 -n^{(AB)}(x_3 = L_1) + t^{(GB)}(x_3 = H_1) + n^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 -t^{(AB)}(x_3 = L_1) - n^{(GB)}(x_3 = H_1) + t^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 -m^{(AB)}(x_3 = L_1) - m^{(GB)}(x_3 = H_1) + m^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{24.38}$$

— in corrispondenza della forza  $P$ :

$$\begin{aligned}
 -n^{(BC)}(x_3 = L_2) + n^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 -t^{(BC)}(x_3 = L_2) + t^{(CD)}(x_3 = 0) + P &= 0 \\
 -m^{(BC)}(x_3 = L_2) + m^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{24.39}$$

— in corrispondenza della cerniera  $D$ :

$$\begin{aligned}
 -n^{(CD)}(x_3 = L_3) + n^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 -t^{(CD)}(x_3 = L_3) + t^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 m^{(CD)}(x_3 = L_3) &= 0 \\
 m^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{24.40}$$

— in corrispondenza del nodo triplo  $E$ :

$$\begin{aligned}
 -n^{(DE)}(x_3 = L_4) + t^{(LE)}(x_3 = H_1 + H_2) + n^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 -t^{(DE)}(x_3 = L_4) - n^{(LE)}(x_3 = H_1 + H_2) + t^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 -m^{(DE)}(x_3 = L_4) - m^{(LE)}(x_3 = H_1 + H_2) + m^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{24.41}$$

— in corrispondenza del carrello in  $F$ :

$$\begin{aligned} m^{(EF)}(x_3 = L_5) &= 0 \\ n^{(EF)}(x_3 = L_5) &= 0 \end{aligned} \quad (24.42)$$

— in corrispondenza della cerniera in  $G$ :

$$\begin{aligned} -n^{(HG)}(x_3 = H_2) + n^{(GB)}(x_3 = 0) &= 0 \\ t^{(HG)}(x_3 = H_2) - t^{(GB)}(x_3 = 0) &= 0 \\ m^{(HG)}(x_3 = H_2) &= 0 \\ m^{(GB)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.43)$$

— in corrispondenza del nodo  $H$ :

$$\begin{aligned} -t^{(HG)}(x_3 = 0) + n^{(HI)}(x_3 = 0) &= 0 \\ n^{(HG)}(x_3 = 0) + t^{(HI)}(x_3 = 0) &= 0 \\ m^{(HG)}(x_3 = 0) + m^{(HI)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.44)$$

— in corrispondenza della cerniera in  $I$ :

$$\begin{aligned} -n^{(HI)}(x_3 = L_6) + n^{(IL)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -t^{(HI)}(x_3 = L_6) + t^{(IL)}(x_3 = 0) &= 0 \\ m^{(HI)}(x_3 = L_6) &= 0 \\ m^{(IL)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.45)$$

— in corrispondenza del nodo  $L$ :

$$\begin{aligned} -n^{(IL)}(x_3 = L_7) - t^{(LE)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -t^{(IL)}(x_3 = L_7) + n^{(LE)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -m^{(IL)}(x_3 = L_7) + m^{(LE)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.46)$$

Utilizzando le (24.35–24.36) si giunge ad un sistema di trenta equazioni, che può essere agevolmente risolto con l'ausilio di un qualsiasi programma di calcolo simbolico. Per semplicità di scrittura, da ora in poi si ipotizzano le seguenti relazioni geometriche:

$$\begin{aligned} L_1 = L_4 = L_5 = H_2 &= 2L \\ L_2 = L_3 = L_7 = H_1 &= L \\ L_6 &= 3L \end{aligned} \quad (24.47)$$

in modo da poter esprimere la soluzione in funzione del solo parametro  $L$ . Si hanno quindi i momenti:

$$\begin{aligned} m^{(AB)}(x_3) &= \frac{5Px_3}{8} \\ m^{(BC)}(x_3) &= \frac{17PL}{28} + \frac{11Px_3}{56} \\ m^{(CD)}(x_3) &= \frac{45}{56}P(L - x_3) \\ m^{(DE)}(x_3) &= -\frac{45Px_3}{56} \end{aligned} \quad (24.48)$$

$$\begin{aligned} m^{(EF)}(x_3) &= \frac{3PL}{4} - \frac{3Px_3}{8} \\ m^{(GB)}(x_3) &= -\frac{9Px_3}{14} \\ m^{(HG)}(x_3) &= \frac{9PL}{7} - \frac{9Px_3}{14} \\ m^{(HI)}(x_3) &= -\frac{9PL}{7} + \frac{3Px_3}{7} \\ m^{(IL)}(x_3) &= \frac{3Px_3}{7} \\ m^{(LE)}(x_3) &= \frac{3PL}{7} + \frac{9Px_3}{14} \end{aligned} \quad (24.49)$$

e gli sforzi assiali :

$$\begin{aligned} n^{(AB)}(x_3) &= n^{(EF)}(x_3) = 0 \\ n^{(BC)}(x_3) &= n^{(CD)}(x_3) = n^{(DE)}(x_3) = \frac{9P}{14} \\ n^{(GB)}(x_3) &= n^{(HG)}(x_3) = -\frac{3P}{7} \\ n^{(LE)}(x_3) &= \frac{3P}{7} \\ n^{(HI)}(x_3) &= n^{(IL)}(x_3) = -\frac{9P}{14} \end{aligned} \quad (24.50)$$

Il diagramma dei momenti è riportato in Figura 24.6, e può essere facilmente controllato utilizzando la via grafica.

### Il tracciamento grafico del diagramma del momento

Si inizi col dedurre le rette d'azione delle reazioni, imponendo l'equilibrio dei tre tratti, nonchè l'equilibrio globale. Simbolicamente si scriverà:

$$\begin{aligned} a + g + P + d &= 0 \\ g + i &= 0 \\ i + d + f &= 0 \\ a + P + f &= 0 \end{aligned} \quad (24.51)$$

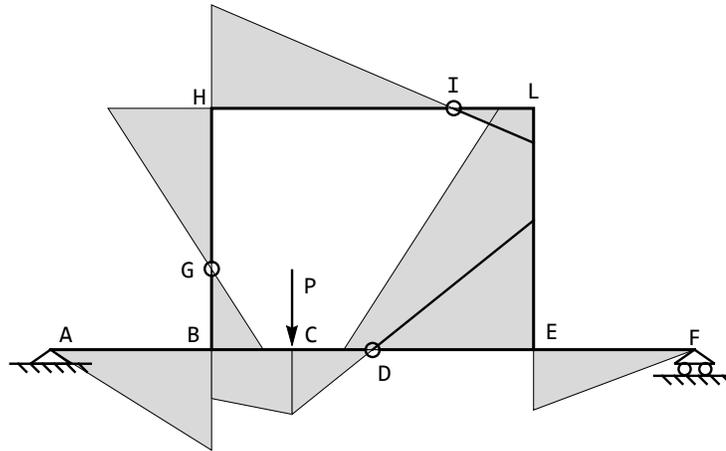


Figura 24.6: Il diagramma dei momenti per la maglia chiusa di Figura 24.5

La seconda equazione permette di dedurre la direzione delle due reazioni nelle cerniere  $G$  ed  $I$ , in quanto la condizione di equilibrio impone che esse siano uguali e contrarie. Ne segue che esse sono dirette secondo la retta che congiunge  $G$  ed  $I$ . A questo punto la terza equazione permette di dedurre la direzione della reazione in  $D$ : ed infatti essa deve passare per  $D$  e per l'intersezione  $K$  tra  $GI$  e la verticale per il carrello.

Infine, l'equazione di equilibrio globale implica che la reazione dell'appoggio in  $A$  deve essere verticale, come la forza e come la reazione del carrello.

La prima equazione di equilibrio permette il tracciamento dell'ausiliaria  $a + g = P + d$ : a tal fine basta congiungere l'intersezione tra  $g$  ed  $a$  con l'intersezione tra  $P$  e  $d$ , ottenendo la retta  $MN$ . Si ottiene quindi la situazione di Figura 24.7.

A questo punto si è pronti a tracciare il diagramma del momento. Si parte, ad esempio, tracciando un segmento arbitrario al disotto della forza  $P$ , e così stabilendo la scala del diagramma. Procedendo verso destra, si annulla il diagramma in  $D$  e si prosegue fino al nodo triplo in  $E$ . Per completare il diagramma lungo  $EF$ , si consideri che esso dovrà annullarsi in  $F$ , e che quindi occorre un altro valore noto. Per ottenerlo, si consideri che il momento lungo  $EF$  è dovuto alla reazione  $d$  ed alla reazione  $i$ , e che nel punto  $R$ , laddove la reazione  $i$  interseca il tratto  $EF$  (o meglio, il suo prolungamento ideale), il momento sarà dovuto alla sola reazione  $d$ , in quanto  $i$  ha braccio nullo. Quindi, il valore  $RR_1$  è il valore richiesto, ed il tracciamento del momento lungo  $EF$  si conclude congiungendo  $R_1$  con  $F$ .

Equilibrando il nodo in  $E$  si ottiene subito il valore del momento in  $E$  lungo il ritto. Ed infatti esso dovrà essere pari in valore alla somma dei due momenti sul traverso, e dovrà essere orario, tendendo le fibre a sinistra del ritto. Lungo il ritto il momento sarà dovuto alla sola reazione  $i$ , e quindi si annullerà laddove  $i$

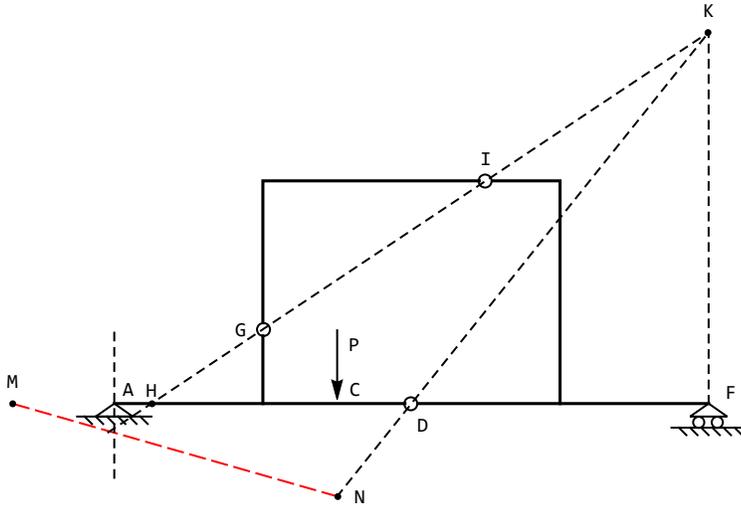


Figura 24.7: Le reazioni per la maglia chiusa di Figura 24.5

interseca il ritto (o meglio, il suo prolungamento). Si giunge così in  $L$ , si equilibra il nodo, e si prosegue sul traverso superiore, annullando in  $I$ , e proseguendo fino ad  $H$ . Anche in  $H$  l'equilibrio del nodo è immediato, e può proseguirsi fino in  $B$ , annullando il diagramma in corrispondenza della cerniera  $G$ .

Per studiare il nodo triplo in  $B$ , si consideri che il diagramma nel tratto  $BC$  è immediatamente tracciabile congiungendo il valore del momento in  $C$  con il punto  $M$ , in cui l'ausiliaria  $g+a = P+d$  interseca l'orizzontale. Ed infatti lungo  $BC$  il momento è causato da  $a$  e da  $g$ , oppure da  $P$  e  $d$ . Il nodo triplo, poi, può essere facilmente equilibrato, ottenendo il valore del momento in  $B$  lungo  $AB$ . Si ha quindi il diagramma di Figura 24.8

## Seconda fase: il calcolo degli spostamenti

Le equazioni da utilizzare sono ora quelle che legano gli spostamenti alle caratteristiche, o più precisamente, le curvature ai momenti e gli allungamenti percentuali agli sforzi normali. In assenza di distorsioni si ha:

$$u_2''(x_3) = -\frac{M}{EI} \quad (24.52)$$

$$u_3'(x_3) = \frac{N}{EA} \quad (24.53)$$

Sarà quindi necessario, per ottenere gli spostamenti trasversali, operare due

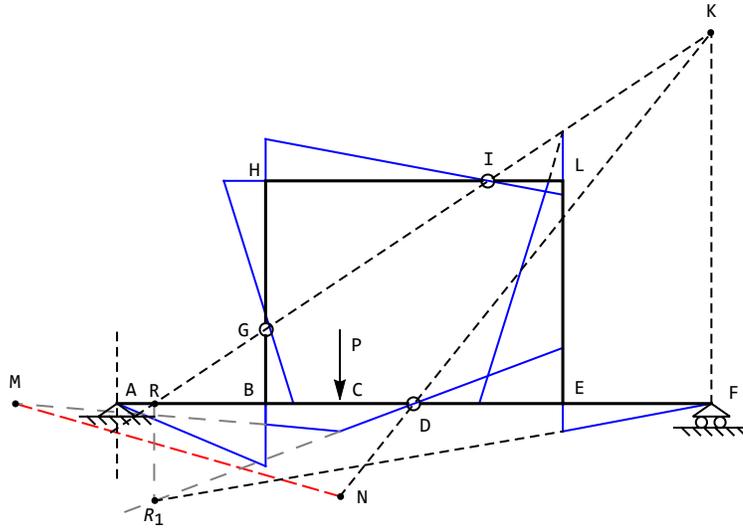


Figura 24.8: Il tracciamento grafico per la maglia chiusa di Figura 24.5

integrazioni successive, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{5Px_3^3}{48EI} + c_0x_3 + c_1 \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= \frac{17PL}{56EI}x_3^2 + \frac{11Px_3^3}{336EI} + c_2x_3 + c_3 \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= \frac{45}{56} \frac{P}{EI} \left( L \frac{x_3^2}{2} - \frac{x_3^3}{6} \right) + c_4x_3 + c_5 \\
 u_2^{(DE)}(x_3) &= -\frac{15Px_3^3}{112EI} + c_6x_3 + c_7 \\
 u_2^{(EF)}(x_3) &= \frac{3PL}{8EI}x_3^2 - \frac{3Px_3^3}{48} + c_2x_8 + c_9 \\
 u_2^{(GB)}(x_3) &= -\frac{3Px_3^3}{28EI} + c_{10}x_3 + c_{11} \\
 \\ 
 u_2^{(HG)}(x_3) &= \frac{9PL}{14EI}x_3^2 - \frac{3Px_3^3}{14EI} + c_{12}x_3 + c_{13} \\
 u_2^{(HI)}(x_3) &= -\frac{9PL}{14EI}x_3^2 + \frac{Px_3^3}{14EI} + c_{14}x_3 + c_{15} \\
 u_2^{(IL)}(x_3) &= \frac{Px_3^3}{14EI} + c_{16}x_3 + c_{17} \\
 u_2^{(LE)}(x_3) &= \frac{3PL}{14EI}x_3^2 + \frac{3Px_3^3}{28EI} + c_{18}x_3 + c_{19}
 \end{aligned} \tag{24.54}$$

mentre per gli spostamenti assiali una singola integrazione fornisce:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(AB)}(x_3) &= d_0 \\
 u_3^{(BC)}(x_3) &= \frac{9P}{14EA}x_3 + d_1 \\
 u_3^{(CD)}(x_3) &= \frac{9P}{14EA}x_3 + d_2 \\
 u_3^{(DE)}(x_3) &= \frac{9P}{14EA}x_3 + d_3 \\
 u_3^{(EF)}(x_3) &= d_4
 \end{aligned} \tag{24.55}$$

$$\begin{aligned}
 u_3^{(GB)}(x_3) &= -\frac{3P}{7EA}x_3 + d_5 \\
 u_3^{(HG)}(x_3) &= -\frac{3P}{7EA}x_3 + d_6 \\
 u_3^{(HI)}(x_3) &= -\frac{9P}{14EA}x_3 + d_7 \\
 u_3^{(IL)}(x_3) &= -\frac{9P}{14EA}x_3 + d_8 \\
 u_3^{(LE)}(x_3) &= \frac{3P}{7EA}x_3 + d_9
 \end{aligned} \tag{24.56}$$

Le condizioni ai limiti dovranno imporre la congruenza degli spostamenti, e condurranno alla deduzione delle costanti di integrazione:

— in corrispondenza dell'appoggio in  $A$  si annullano ambedue gli spostamenti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\
 u_3^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{24.57}$$

— in corrispondenza del nodo triplo  $B$  occorrerà imporre che gli spostamenti e le rotazioni dei due tratti orizzontali siano uguali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3 = L_1) &= u_2^{(BC)}(x_3 = 0) \\
 u_3^{(AB)}(x_3 = L_1) &= u_3^{(BC)}(x_3 = 0) \\
 \phi^{(AB)}(x_3 = L_1) &= \phi^{(BC)}(x_3 = 0)
 \end{aligned} \tag{24.58}$$

che lo spostamento trasversale del traverso sia pari allo spostamento assiale del ritto, mentre lo spostamento assiale del traverso è uguale e contrario allo spostamento trasversale del ritto. Infine, il ritto deve ruotare della stessa quantità del traverso:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3 = L_1) &= u_3^{(GB)}(x_3 = H_1) \\
 u_3^{(AB)}(x_3 = L_1) &= -u_2^{(GB)}(x_3 = H_1) \\
 \phi^{(AB)}(x_3 = L_1) &= \phi^{(GB)}(x_3 = H_1)
 \end{aligned} \tag{24.59}$$

— in corrispondenza della forza in  $C$  gli spostamenti e le rotazioni non dovranno presentare discontinuità:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(x_3 = L_2) &= u_2^{(CD)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(BC)}(x_3 = L_2) &= u_3^{(CD)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(BC)}(x_3 = L_2) &= \phi^{(CD)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.60)$$

— in corrispondenza della cerniera in  $D$  gli spostamenti non dovranno presentare discontinuità:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}(x_3 = L_3) &= u_2^{(DE)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(CD)}(x_3 = L_3) &= u_3^{(DE)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.61)$$

— in corrispondenza del nodo triplo in  $E$ , a somiglianza di quanto già visto in  $B$ :

$$\begin{aligned} u_2^{(DE)}(x_3 = L_4) &= u_2^{(EF)}(x_3 = 0) \\ u_2^{(DE)}(x_3 = L_4) &= u_3^{(LE)}(x_3 = H_1 + H_2) \\ u_3^{(DE)}(x_3 = L_4) &= u_3^{(EF)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(DE)}(x_3 = L_4) &= -u_2^{(LE)}(x_3 = H_1 + H_2) \\ \phi^{(DE)}(x_3 = L_4) &= \phi^{(EF)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(DE)}(x_3 = L_4) &= \phi^{(LE)}(x_3 = H_1 + H_2) \end{aligned} \quad (24.62)$$

— in corrispondenza del carrello in  $F$  si annulla il solo spostamento trasversale:

$$u_2^{(EF)}(x_3 = L_5) = 0 \quad (24.63)$$

— in corrispondenza della cerniera in  $G$  occorre garantire la continuità degli spostamenti:

$$\begin{aligned} u_2^{(HG)}(x_3 = H_2) &= u_2^{(BG)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(HG)}(x_3 = H_2) &= u_3^{(BG)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.64)$$

— in corrispondenza del nodo  $H$  lo spostamento trasversale del ritto — positivo se verso sinistra — dovrà essere uguale e contrario allo spostamento assiale del traverso, positivo se verso destra. Viceversa, lo spostamento assiale del ritto è uguale allo spostamento trasversale del traverso, in quanto ambedue verso il basso. Le rotazioni dovranno essere uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{(HG)}(x_3 = 0) &= -u_3^{(HI)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(HG)}(x_3 = 0) &= u_2^{(HI)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(HG)}(x_3 = 0) &= \phi^{(HI)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.65)$$

— in corrispondenza della cerniera in  $I$ , come usuale, si impone la continuità degli spostamenti:

$$\begin{aligned} u_2^{(HI)}(x_3 = L_6) &= u_2^{(IL)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(HI)}(x_3 = L_6) &= u_3^{(IL)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.66)$$

— in corrispondenza del nodo in  $L$  lo spostamento trasversale del traverso è uguale allo spostamento assiale del ritto (ambidue verso il basso), mentre lo spostamento assiale del traverso — positivo se verso destra — è uguale e contrario allo spostamento trasversale del ritto, positivo verso sinistra. Le rotazioni dovranno essere uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{(IL)}(x_3 = L_7) &= u_3^{(LE)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(IL)}(x_3 = 0) &= -u_2^{(LE)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(IL)}(x_3 = 0) &= \phi^{(LE)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.67)$$

Risolvendo il sistema di trenta equazioni, e portando la rigidezza assiale  $EA$  ad infinito, in modo da annullare le deformabilità assiali, si ottengono le linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{Px_3(12527L^2 - 245x_3^2)}{2352EI} \\ u_2^{(BC)}(x_3) &= \frac{P(23094L^3 + 9587L^2x_3 - 714Lx_3^2 - 77x_3^3)}{2352EI} \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= \frac{P(31890L^3 + 7928L^2x_3 - 945Lx_3^2 + 315x_3^3)}{2352EI} \\ u_2^{(DE)}(x_3) &= \frac{P(39188L^3 - 11729L^2x_3 + 315x_3^3)}{2352EI} \\ u_2^{(EF)}(x_3) &= \frac{P(2L - x_3)(9125L^2 + 588Lx_3 - 147x_3^2)}{2352EI} \\ u_2^{(GB)}(x_3) &= \frac{P(-9083L^3 - 8831L^2x_3 + 252x_3^3)}{2352EI} \\ u_2^{(HG)}(x_3) &= \frac{P(5703L^3 - 5377L^2x_3 - 1512Lx_3^2 + 252x_3^3)}{2352EI} \\ u_2^{(HI)}(x_3) &= \frac{P(23094L^3 - 5377L^2x_3 + 1512Lx_3^2 - 168x_3^3)}{2352EI} \\ u_2^{(IL)}(x_3) &= \frac{P(16035L^3 + 2383L^2x_3 - 168x_3^3)}{2352EI} \\ u_2^{(LE)}(x_3) &= \frac{P(5703L^3 + 1879L^2x_3 - 504Lx_3^2 - 252x_3^3)}{2352EI} \end{aligned} \quad (24.68)$$

per gli spostamenti trasversali, e:

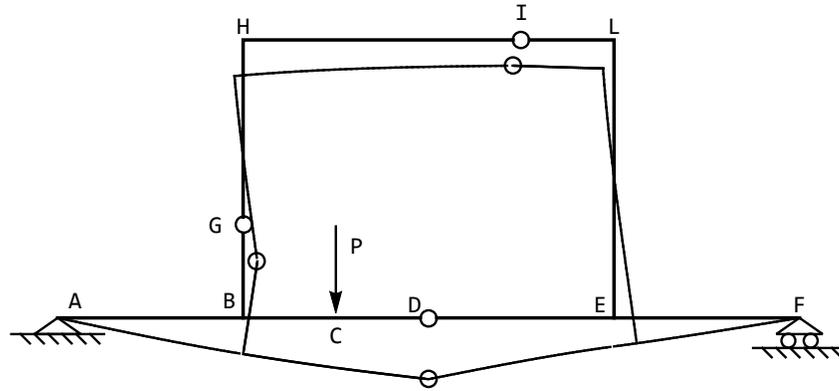


Figura 24.9: Il diagramma degli spostamenti per la maglia chiusa di Figura 24.5, in ipotesi di  $EA = \infty$

$$\begin{aligned}
 u_3^{(AB)}(x_3) &= u_3^{(BC)}(x_3) = u_3^{(CD)}(x_3) = u_3^{(DE)}(x_3) = u_3^{(EF)}(x_3) = 0 \\
 u_3^{(GB)}(x_3) &= u_3^{(HG)}(x_3) = \frac{3849PL^3}{392EI} \\
 u_3^{(HI)}(x_3) &= u_3^{(IL)}(x_3) = -\frac{1901PL^3}{784EI} \\
 u_3^{(LE)}(x_3) &= \frac{9125PL^3}{1176EI}
 \end{aligned} \tag{24.69}$$

per gli spostamenti assiali. Si noti che — coerentemente con l'assunzione sulla indeformabilità assiale — gli spostamenti assiali sono nulli, oppure costanti. Ne segue la deformata di Figura 24.9.

## 24.3 Un telaio zoppo con pendolo

Si consideri il telaio zoppo di Figura 24.10, appoggiato agli estremi e con doppio bipendolo ad interrompere il traverso. Un pendolo collega i due ritti.

La struttura è isostatica, in quanto costituita da due tratti ( $t = 2$ ) con sei incognite statiche (le due reazioni dei due appoggi, la coppia del doppio bipendolo, lo sforzo normale nel pendolo  $BG$ ). Si identificano i sistemi di riferimento, in modo da poter scrivere le linee elastiche:

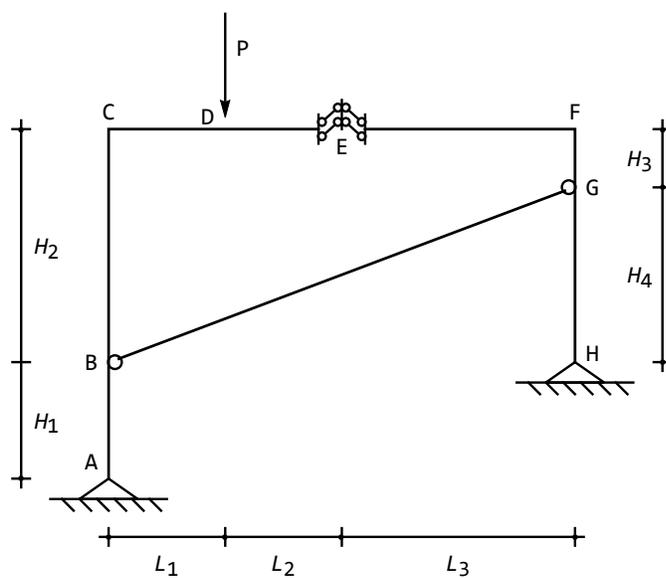


Figura 24.10: Un telaio zoppo con pendolo

$$\begin{aligned}
 m^{(BA)}(x_3) &= t_1 x_3 + m_1 \\
 m^{(CB)}(x_3) &= t_2 x_3 + m_2 \\
 m^{(CD)}(x_3) &= t_3 x_3 + m_3 \\
 m^{(DE)}(x_3) &= t_4 x_3 + m_4 \\
 m^{(EF)}(x_3) &= t_5 x_3 + m_5 \\
 m^{(FG)}(x_3) &= t_6 x_3 + m_6 \\
 m^{(GH)}(x_3) &= t_7 x_3 + m_7
 \end{aligned}
 \tag{24.70}$$

$$\begin{aligned}
 n^{(BA)}(x_3) &= n_1 \\
 n^{(CB)}(x_3) &= n_2 \\
 n^{(CD)}(x_3) &= n_3 \\
 n^{(DE)}(x_3) &= n_4 \\
 n^{(EF)}(x_3) &= n_5 \\
 n^{(FG)}(x_3) &= n_6 \\
 n^{(GH)}(x_3) &= n_7 \\
 n^{(BG)}(x_3) &= n_8
 \end{aligned}
 \tag{24.71}$$

Si noti che per il pendolo si è definito il solo sforzo assiale, in quanto momento e taglio sono identicamente nulli. Le condizioni di equilibrio che permettono il calcolo delle ventidue costanti di integrazione sono:

— in corrispondenza dell' appoggio in  $A$  il momento dovrà annullarsi:

$$m^{(BA)}(x_3 = H_1) = 0 \quad (24.72)$$

— in corrispondenza del nodo  $B$  gli sforzi di taglio nel ritto e la componente verticale dello sforzo normale nel pendolo dovranno farsi equilibrio, mentre gli sforzi normali nel ritto e la componente orizzontale dello sforzo normale nel pendolo dovranno farsi equilibrio. Infine, il momento non dovrà presentare discontinuità nel nodo. In base alla scelta dei sistemi di riferimento adottati si avrà:

$$\begin{aligned} -t^{(BA)}(x_3 = 0) + t^{(CB)}(x_3 = H_2) + n^{(BG)} \cos(\alpha) &= 0 \\ n^{(BA)}(x_3 = 0) - n^{(CB)}(x_3 = H_1) - n^{(BG)} \sin(\alpha) &= 0 \\ m^{(BA)}(x_3 = 0) - m^{(CB)}(x_3 = H_2) &= 0 \end{aligned} \quad (24.73)$$

— in corrispondenza del nodo  $C$  lo sforzo di taglio nel ritto e lo sforzo normale nel traverso dovranno farsi equilibrio, così come lo sforzo normale nel ritto e lo sforzo di taglio nel traverso. Infine, l'equilibrio alla rotazione impone che la somma dei momenti sia nulla:

$$\begin{aligned} -t^{(CB)}(x_3 = 0) + n^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \\ n^{(CB)}(x_3 = 0) + t^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \\ m^{(CB)}(x_3 = 0) + m^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.74)$$

— in corrispondenza della forza  $P$  sforzi normali e momenti flettenti sono continui, mentre il taglio subisce una discontinuità pari alla forza applicata:

$$\begin{aligned} -n^{(CD)}(x_3 = L_1) + n^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -t^{(CD)}(x_3 = L_1) + t^{(DE)}(x_3 = 0) + P &= 0 \\ -m^{(CD)}(x_3 = L_1) + m^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.75)$$

— in corrispondenza del doppio bipendolo in  $E$  occorrerà annullare sia lo sforzo normale che lo sforzo di taglio, mentre i momenti dovranno conservare la continuità:

$$\begin{aligned} n^{(DE)}(x_3 = L_2) &= 0 \\ n^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \\ t^{(DE)}(x_3 = L_2) &= 0 \\ t^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \\ m^{(DE)}(x_3 = L_2) &= m^{(EF)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.76)$$

— in corrispondenza del nodo  $F$  si hanno condizioni analoghe a quelle già scritte nel nodo  $C$ . Si faccia solo attenzione ai segni dei momenti:

$$\begin{aligned} -t^{(EF)}(x_3 = L_3) + n^{(FG)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -n^{(EF)}(x_3 = L_3) - t^{(FG)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -m^{(EF)}(x_3 = L_3) + m^{(FG)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.77)$$

— in corrispondenza del nodo  $G$  si hanno tre condizioni analoghe a quelle scritte in  $B$ :

$$\begin{aligned} t^{(FG)}(x_3 = H_3) - t^{(GH)}(x_3 = 0) - n^{(BG)} \cos(\alpha) &= 0 \\ -n^{(FG)}(x_3 = H_3) + n^{(GH)}(x_3 = 0) + n^{(BG)} \sin(\alpha) &= 0 \\ -m^{(FG)}(x_3 = H_3) + m^{(GH)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.78)$$

— in corrispondenza dell' appoggio in  $H$  si annulla il momento flettente:

$$m^{(GH)}(x_3 = H_4) = 0 \quad (24.79)$$

Svolgendo i calcoli, e risolvendo il sistema di equazioni si ha il quadro flessionale:

$$\begin{aligned} m^{(BA)}(x_3) &= \frac{PL_1(L_1 - x_3)}{H_1 - H_4} \\ m^{(CB)}(x_3) &= \frac{PH_1L_1}{H_1 - H_4} \\ m^{(CD)}(x_3) &= Px_3 - \frac{PH_1L_1}{H_1 - H_4} \\ m^{(DE)}(x_3) &= -\frac{PH_4L_1}{H_1 - H_4} \\ m^{(EF)}(x_3) &= -\frac{PH_4L_1}{H_1 - H_4} \\ m^{(FG)}(x_3) &= -\frac{PH_4L_1}{H_1 - H_4} \\ m^{(GH)}(x_3) &= \frac{PL_1(-H_4 + x_3)}{H_1 - H_4} \end{aligned} \quad (24.80)$$

ed il quadro di sforzi assiali:

$$\begin{aligned} n^{(BA)}(x_3) &= P \left( -1 - \frac{L_1 \tan(\alpha)}{H_1 - H_4} \right) \\ n^{(CB)}(x_3) &= -P \\ n^{(CD)}(x_3) &= N^{(DE)}(x_3) = N^{(EF)}(x_3) = N^{(FG)}(x_3) = 0 \\ n^{(GH)}(x_3) &= \frac{PL_1 \tan(\alpha)}{H_1 - H_4} \\ n^{(BG)}(x_3) &= -\frac{P \sec(\alpha)L_1}{H_1 - H_4} \end{aligned} \quad (24.81)$$

Si noti che il caso particolare  $H_1 = H_4$  corrisponde a denominatori nulli, e quindi a caratteristiche infinite. In realtà, come si vedrà tra breve, in questo caso particolare le reazioni negli appoggi sono uguali e contrarie, e l'equilibrio alla rotazione non è soddisfatto.

Si assume, d'ora in poi:

$$L_1 = L_2 = H_1 = H_3 = L \quad (24.82)$$

$$L_3 = H_4 = 2L \quad (24.83)$$

$$H_2 = 3L \quad (24.84)$$

$$(24.85)$$

ottenendo il diagramma di Figura 24.11.

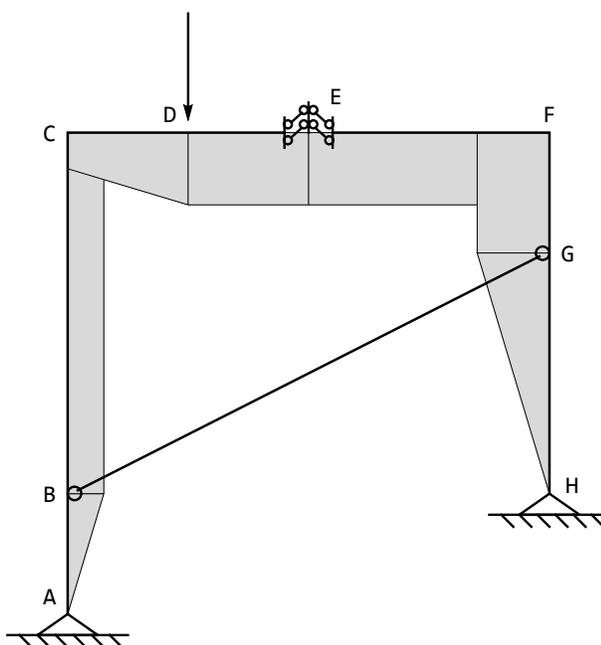


Figura 24.11: Il diagramma dei momenti per il telaio di Figura 24.10.

### La verifica grafica

Una verifica grafica dei risultati ottenuti può condursi ricercando le reazioni dei vincoli, scrivendo le equazioni simboliche di equilibrio, per i due tratti rigidi, nonché l'equazione globale di equilibrio:

$$\begin{aligned} a + p + P + \mathcal{M}_e &= 0 \\ \mathcal{M}_e + p + h &= 0 \\ a + P + h &= 0 \end{aligned} \quad (24.86)$$

La seconda equazione permette di affermare che la reazione del pendolo e la reazione dell'appoggio in  $H$  devono equilibrare la coppia del doppio bipendolo: quindi devono a loro volta formare una coppia, e la reazione in  $H$  deve essere parallela alla retta d'azione del pendolo.

Ciò permette di utilizzare la terza equazione, al fine di ottenere la retta d'azione dell'appoggio in  $A$ , che dovrà necessariamente passare per l'intersezione tra la retta d'azione della forza  $P$  e la retta d'azione della reazione in  $H$ . Il caso particolare in cui  $H_1 = H_4$  conduce ad una reazione  $h$  passante per l'appoggio in  $A$ , e quindi non è possibile equilibrare il telaio alla rotazione.

Eliminato questo caso particolare, un triangolo di equilibrio permette di conoscere anche il verso delle reazioni.

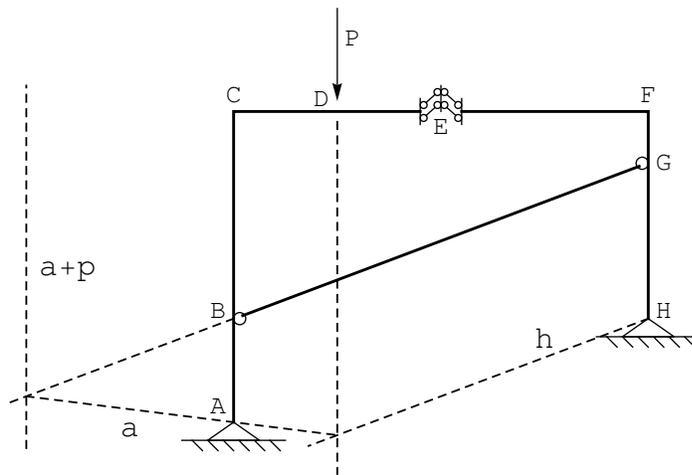


Figura 24.12: La ricerca grafica delle reazioni per il telaio di Figura 24.10.

Iniziando a tracciare il diagramma a partire da  $H$ , si assegna una inclinazione arbitraria al diagramma stesso, giungendo in  $G$ , e facendo attenzione a riportare il momento dalla parte delle fibre tese. Per proseguire lungo  $GF$ , si consideri che il momento è dovuto alla sola coppia reattiva del doppio bipendolo, e quindi è costante, così come costante resterà fino al punto  $D$ , sotto la forza.

Per proseguire, si consideri che in  $CD$  il momento dovuto alla risultante di  $p$  ed  $a$ . Dalla prima equazione si trae che questa risultante deve formare una coppia con il carico  $P$ , al fine di equilibrare la coppia reattiva del bipendolo. Quindi la risultante di  $p$  ed  $a$  deve essere verticale, e deve passare per l'intersezione di  $p$  ed  $a$ . In questo modo si ottiene il punto di nullo per il momento sul tratto  $CD$ . Tutto ciò è illustrato in Figura 24.12.

Infine, lungo  $BC$  il momento è ancora dovuto alla risultante di  $p$  ed  $a$ , e quindi risulta costante, per poi annullarsi in  $A$ .

## Seconda fase: il calcolo degli spostamenti

In questa seconda fase del metodo della doppia integrazione si ottengono le componenti di spostamento, sia assiale che trasversale, partendo dalle equazioni costitutive (24.53). Per ottenere gli spostamenti trasversali, sarà quindi necessario integrare due volte le espressioni (24.80) dei momenti flettenti. Poichè il pendolo è *a priori* non soggetto a momenti flettenti, si assume che la linea elastica  $u_2^{(BG)}$  sia fornita da una funzione lineare. Si ha infine:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(x_3) &= -\frac{P}{EI} \frac{x_3^3}{6} + \frac{P}{EI} L \frac{x_3^2}{2} + c_0 x_3 + c_1 \\ u_2^{(CB)}(x_3) &= \frac{P}{EI} L \frac{x_3^2}{2} + c_2 x_3 + c_3 \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= -\frac{P}{EI} \frac{x_3^3}{6} - \frac{P}{EI} L \frac{x_3^2}{2} + c_4 x_3 + c_5 \\ u_2^{(DE)}(x_3) &= -\frac{P}{EI} L x_3^2 + c_6 x_3 + c_7 \end{aligned} \quad (24.87)$$

$$\begin{aligned} u_2^{(EF)}(x_3) &= -\frac{P}{EI} L x_3^2 + c_8 x_3 + c_9 \\ u_2^{(FG)}(x_3) &= -\frac{P}{EI} L x_3^2 + c_{10} x_3 + c_{11} \\ u_2^{(GH)}(x_3) &= \frac{P}{EI} \frac{x_3^3}{6} - \frac{P}{EI} L x_3^2 + c_{12} x_3 + c_{13} \\ u_2^{(GH)}(x_3) &= c_{14} x_3 + c_{15} \end{aligned} \quad (24.88)$$

mentre per gli spostamenti assiali occorre integrare una volta l'espressione (24.81) degli sforzi assiali:

$$\begin{aligned} u_3^{(BA)}(x_3) &= -\frac{P}{2EA} x_3 + d_0 \\ u_3^{(CB)}(x_3) &= \frac{-P}{EA} x_3 + d_1 \\ u_3^{(CD)}(x_3) &= d_2 \\ u_3^{(DE)}(x_3) &= d_3 \\ u_3^{(EF)}(x_3) &= d_4 \\ u_3^{(FG)}(x_3) &= d_5 \\ u_3^{(GH)}(x_3) &= -\frac{P}{2EA} x_3 x_3 + d_6 \\ u_3^{(BG)}(x_3) &= \frac{\sqrt{5}P}{2EA} x_3 + d_7 \end{aligned} \quad (24.89)$$

Le costanti di integrazione potranno ora essere determinate a partire dall'imposizione delle condizioni di congruenza al contorno:

— in corrispondenza dell'appoggio in  $A$  si annullano le componenti assiale e trasversale degli spostamenti:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(x_3 = H_1) &= 0 \\ u_3^{(BA)}(x_3 = H_1) &= 0 \end{aligned} \quad (24.90)$$

— in corrispondenza del nodo  $B$  si impone che gli spostamenti assiale e trasversale del ritto siano continui, così come la rotazione:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(x_3 = 0) &= u_2^{(CB)}(x_3 = H_2) \\ u_3^{(BA)}(x_3 = 0) &= u_3^{(CB)}(x_3 = H_2) \\ \phi^{(BA)}(x_3 = 0) &= \phi^{(CB)}(x_3 = H_2) \end{aligned} \quad (24.91)$$

Inoltre, la componente orizzontale dello spostamento del pendolo) — positiva se verso destra — deve essere uguale e contraria allo spostamento trasversale del traverso, positiva se verso sinistra. Similmente, la componente verticale dello spostamento del pendolo) — positiva se verso l'alto — deve essere uguale e contraria allo spostamento assiale del traverso, positiva se verso il basso:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(x_3 = 0) &= -u_3^{(BG)}(x_3 = 0) \cos(\alpha) - u_2^{(BG)}(x_3 = 0) \sin(\alpha) \\ u_3^{(BA)}(x_3 = 0) &= -u_3^{(BG)}(x_3 = 0) \sin(\alpha) + u_2^{(BG)}(x_3 = 0) \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (24.92)$$

— in corrispondenza del nodo  $C$  lo spostamento trasversale del ritto — positivo se verso sinistra — dovrà essere uguale e contrario allo spostamento assiale del traverso, positivo se verso destra. Viceversa, lo spostamento assiale del ritto è uguale allo spostamento trasversale del traverso, in quanto ambedue verso il basso. Le rotazioni dovranno essere uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{(CB)}(x_3 = 0) &= -u_3^{(CD)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(CB)}(x_3 = 0) &= u_2^{(CD)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(CB)}(x_3 = 0) &= \phi^{(CD)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.93)$$

— in corrispondenza della forza in  $D$  gli spostamenti e le rotazioni non dovranno subire variazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}(x_3 = L_1) &= u_2^{(DE)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(CD)}(x_3 = L_1) &= u_3^{(DE)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(CD)}(x_3 = 0) &= \phi^{(DE)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.94)$$

— in corrispondenza del doppio bipendolo in  $E$  l'unica condizione di congruenza riguarda le rotazioni:

$$\phi^{(DE)}(x_3 = L_2) = \phi^{(EF)}(x_3 = 0) \quad (24.95)$$

— in corrispondenza del nodo in  $F$  si hanno condizioni analoghe a quelle già illustrate nel nodo  $C$ :

$$\begin{aligned} u_2^{(EF)}(x_3 = L_3) &= u_3^{(FG)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(EF)}(x_3 = L_3) &= -u_2^{(FG)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(EF)}(x_3 = L_3) &= \phi^{(FG)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.96)$$

— in corrispondenza del nodo  $G$  si ha, analogamente a quanto ottenuto in  $B$ :

$$\begin{aligned} u_2^{(FG)}(x_3 = H_3) &= u_2^{(GH)}(x_3 = 0) \\ u_2^{(FG)}(x_3 = H_3) &= -u_3^{(BG)}(x_3 = L_p) \cos(\alpha) - u_2^{(BG)}(x_3 = L_p) \sin(\alpha) \\ u_3^{(FG)}(x_3 = H_3) &= u_3^{(GH)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(FG)}(x_3 = H_3) &= -u_3^{(BG)}(x_3 = L_p) \sin(\alpha) + u_2^{(BG)}(x_3 = L_p) \cos(\alpha) \\ \phi^{(FG)}(x_3 = H_3) &= \phi^{(GH)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.97)$$

dove  $L_p$  è la lunghezza del pendolo:

$$L_p = \frac{(L_1 + L_2 + L_3)}{\cos(\alpha)}, \quad (24.98)$$

— in corrispondenza dell'appoggio in  $H$ , infine, si annullano le due componenti di spostamento:

$$\begin{aligned} u_2^{(GH)}(x_3 = H_4) &= 0 \\ u_3^{(GH)}(x_3 = H_4) &= 0 \end{aligned} \quad (24.99)$$

Risolviendo il sistema di ventidue equazioni, e portando la rigidezza assiale  $EA$  ad infinito, si ottengono le linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(x_3) &= -\frac{P(170L^3 - 168L^2x_3 - 3Lx_3^2 + x_3^3)}{6EI} \\ u_2^{(CB)}(x_3) &= \frac{PL(-647L^2 + 150Lx_3 + 3x_3^2)}{6EI} \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= -\frac{Px_3(-150L^2 + 3Lx_3 + x_3^2)}{6EI} \\ u_2^{(DE)}(x_3) &= \frac{PL(146L^2 + 141Lx_3 - 6x_3^2)}{3EI} \\ u_2^{(EF)}(x_3) &= -\frac{PL(78L^2 - 43Lx_3 + 2x_3^2)}{EI} \\ u_2^{(FG)}(x_3) &= -\frac{PL(269L^2 - 105Lx_3 + 6x_3^2)}{3EI} \\ u_2^{(GH)}(x_3) &= \frac{P(-170L^3 + 93L^2x_3 - 6Lx_3^2 + x_3^3)}{6EI} \\ u_2^{(BG)}(x_3) &= \frac{85PL^3 \sin(\alpha)}{6EI} \end{aligned} \quad (24.100)$$

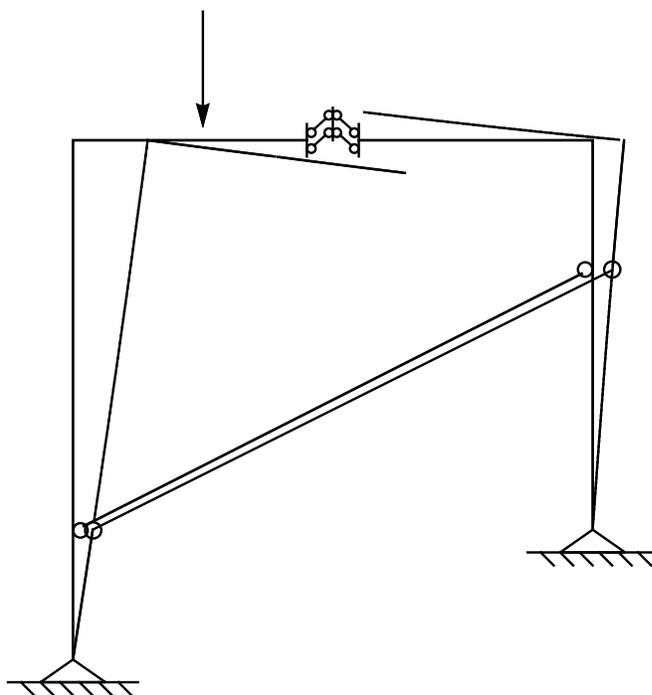


Figura 24.13: Il diagramma degli spostamenti per il telaio di Figura 24.10, in ipotesi  $EA = \infty$

per gli spostamenti trasversali, e:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(BA)}(x_3) &= u_3^{(CB)}(x_3) = 0 \\
 u_3^{(CD)}(x_3) &= u_3^{(DE)}(x_3) = \frac{647PL^3}{6EI} \\
 u_3^{(EF)}(x_3) &= \frac{269PL^3}{6EI} \\
 u_3^{(FG)}(x_3) &= u_3^{(GH)}(x_3) = 0 \\
 u_3^{(BG)}(x_3) &= \frac{38\sqrt{5}PL^3}{3EI}
 \end{aligned} \tag{24.101}$$

per gli spostamenti assiali. Ne segue la deformata di Figura 24.13.

Da essa, a partire dalle (24.100–24.101), è immediato calcolare l’abbassamento in corrispondenza della forza, i due spostamenti relativi in corrispondenza del doppio bipendolo, l’allungamento del pendolo, etc.

## 24.4 Un telaio zoppo con sbalzo

Un ulteriore esempio è illustrato in Figura 24.14, in cui un telaio zoppo presenta uno sbalzo di luce  $L_1$  caricato da una forza all'estremo. Trattandosi di un telaio a tre cerniere, l'isostaticità è ovvia.

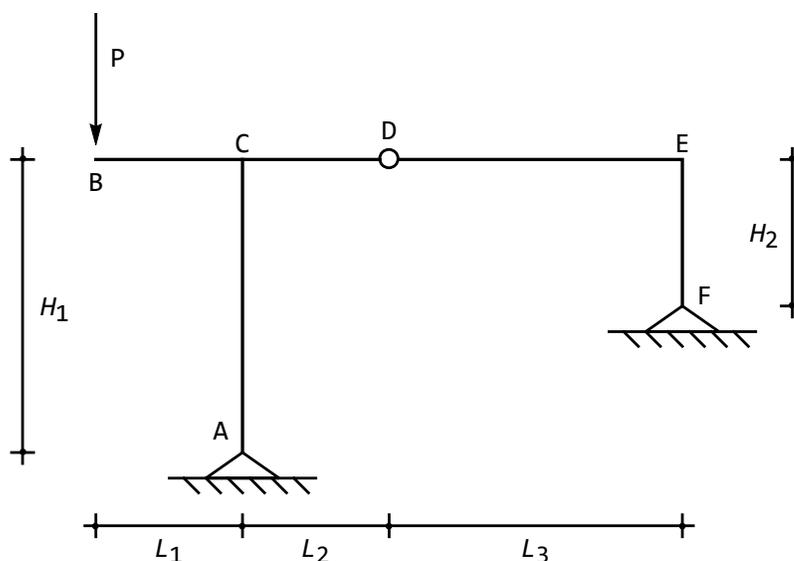


Figura 24.14: Un telaio zoppo con sbalzo

La solita scelta dei sistemi di riferimento porta a scrivere:

$$m^{(BC)}(x_3) = t_1 x_3 + m_1 \quad (24.102)$$

$$m^{(CA)}(x_3) = t_2 x_3 + m_2 \quad (24.103)$$

$$m^{(CD)}(x_3) = t_3 x_3 + m_3 \quad (24.104)$$

$$m^{(DE)}(x_3) = t_4 x_3 + m_4 \quad (24.105)$$

$$m^{(EF)}(x_3) = t_5 x_3 + m_5 \quad (24.106)$$

$$n^{(BC)}(x_3) = n_1 \quad (24.107)$$

$$n^{(CA)}(x_3) = n_2 \quad (24.108)$$

$$n^{(CD)}(x_3) = n_3 \quad (24.109)$$

$$n^{(DE)}(x_3) = n_4 \quad (24.110)$$

$$n^{(EF)}(x_3) = n_5 \quad (24.111)$$

Le costanti di integrazione si possono determinare imponendo quindici condizioni di equilibrio, così come segue:

— in corrispondenza dell'appoggio in  $A$  bisognerà annullare il momento:

$$m^{(CA)}(x_3 = H_1) = 0 \quad (24.112)$$

— in corrispondenza dell'estremo libero  $B$  soggetto alla forza  $P$ , lo sforzo normale ed il momento flettente dovranno essere nulli, mentre il taglio è uguale e contrario alla forza applicata:

$$\begin{aligned} t^{(BC)}(x_3 = 0) + P &= 0 \\ n^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \\ m^{(BC)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.113)$$

— in corrispondenza del nodo  $C$  lo studio del concio porta a scrivere le tre equazioni:

$$\begin{aligned} -n^{(BC)}(x_3 = L_1) + n^{(CD)}(x_3 = 0) - t^{(CA)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -t^{(BC)}(x_3 = L_1) + t^{(CD)}(x_3 = 0) + n^{(CA)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -m^{(BC)}(x_3 = L_1) + m^{(CD)}(x_3 = 0) + m^{(CA)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.114)$$

— in corrispondenza della cerniera in  $D$  gli sforzi normali ed i tagli dovranno rispettare la continuità, mentre il momento si annullerà:

$$\begin{aligned} -n^{(CD)}(x_3 = L_2) + n^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -t^{(CD)}(x_3 = L_2) + t^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \\ m^{(CD)}(x_3 = L_2) &= 0 \\ m^{(DE)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.115)$$

— in corrispondenza del nodo  $E$  lo studio del concio porta a scrivere le tre equazioni:

$$\begin{aligned} -t^{(DE)}(x_3 = L_3) + n^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -n^{(DE)}(x_3 = L_3) - t^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -m^{(DE)}(x_3 = L_3) + n^{(EF)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.116)$$

— in corrispondenza dell'appoggio in  $F$  si imporrà l'annullarsi del momento flettente:

$$m^{(EF)}(x_3 = H_1 - H_2) = 0 \quad (24.117)$$

Si assume, d'ora in poi:

$$\begin{aligned} L_1 = L_2 = H_2 &= 2L \\ L_3 = H_1 &= 4L \end{aligned} \quad (24.118)$$

Svolgendo i calcoli, e risolvendo il sistema di equazioni si ha il quadro flessionale:

$$\begin{aligned}
 m^{(BC)}(x_3) &= -Px_3 \\
 m^{(CA)}(x_3) &= -\frac{8PL}{5} + \frac{2Px_3}{5} \\
 m^{(CD)}(x_3) &= -\frac{2PL}{5} + \frac{Px_3}{5} \\
 m^{(DE)}(x_3) &= \frac{Px_3}{5} \\
 m^{(EF)}(x_3) &= \frac{4PL}{5} - \frac{2Px_3}{5}
 \end{aligned}
 \tag{24.119}$$

che porta al diagramma di Figura 24.15, ed il quadro di sforzi assiali:

$$\begin{aligned}
 n^{(BC)}(x_3) &= 0 \\
 n^{(CA)}(x_3) &= -\frac{6P}{5} \\
 n^{(CD)}(x_3) &= n^{(DE)}(x_3) = \frac{2P}{5} \\
 n^{(EF)} &= \frac{P}{5}
 \end{aligned}
 \tag{24.120}$$

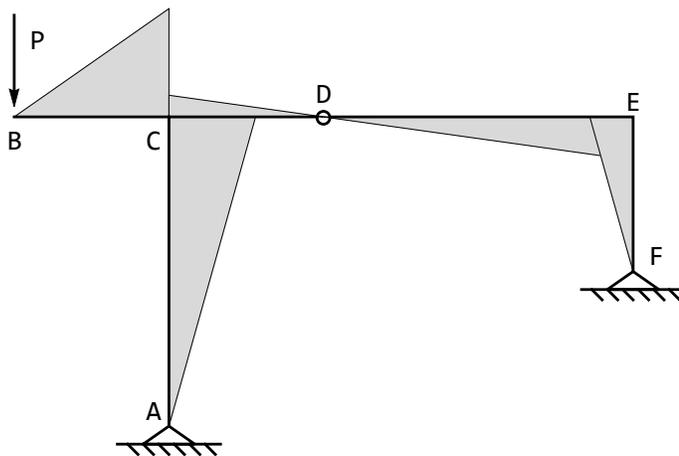


Figura 24.15: Il diagramma dei momenti per il telaio di Figura 24.14

Si verifichi graficamente il diagramma di Figura 24.15, ricercando prima le reazioni.

## Seconda fase: il calcolo degli spostamenti

Le equazioni da utilizzare sono ancora le (24.53), e quindi sarà, per gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(BC)}(x_3) &= \frac{P}{EI} \frac{x_3^3}{6} + c_0 x_3 + c_1 \\
 u_2^{(CA)}(x_3) &= \frac{4PL}{5} x_3^2 - \frac{Px_3^3}{15} + c_2 x_3 + c_3 \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= \frac{PL}{5} x_3^2 - \frac{Px_3^3}{30} + c_4 x_3 + c_5 \\
 u_2^{(DE)}(x_3) &= -\frac{Px_3^3}{30} + c_6 x_3 + c_7 \\
 u_2^{(EF)}(x_3) &= -\frac{2PL}{5} x_3^2 + \frac{Px_3^3}{15} + c_8 x_3 + c_9
 \end{aligned} \tag{24.121}$$

e per gli spostamenti assiali:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(BC)}(x_3) &= d_0 \\
 u_3^{(CA)}(x_3) &= -\frac{6P}{5EA} x_3 + d_1 \\
 u_3^{(CD)}(x_3) &= \frac{2P}{5EA} x_3 + d_2 \\
 u_3^{(DE)}(x_3) &= \frac{2P}{5EA} x_3 + d_3 \\
 u_3^{(EF)}(x_3) &= \frac{P}{5EA} x_3 + d_4
 \end{aligned} \tag{24.122}$$

Questa volta le condizioni ai limiti dovranno imporre la congruenza degli spostamenti:

— in corrispondenza dell' appoggio in  $A$  le componenti di spostamento saranno nulle:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(CA)}(x_3 = H_1) &= 0 \\
 u_3^{(CA)}(x_3 = H_1) &= 0
 \end{aligned} \tag{24.123}$$

— in corrispondenza del nodo  $C$  gli spostamenti orizzontali e verticali, e le rotazioni del traverso saranno continui:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(BC)}(x_3 = L_1) &= u_2^{(CD)}(x_3 = 0) \\
 u_3^{(BC)}(x_3 = L_1) &= u_3^{(CD)}(x_3 = 0) \\
 \phi^{(BC)}(x_3 = L_1) &= \phi^{(CD)}(x_3 = 0)
 \end{aligned} \tag{24.124}$$

Inoltre, lo spostamento trasversale del ritto — positivo se verso sinistra — dovrà essere uguale e contrario allo spostamento assiale del traverso, positivo se verso destra, mentre lo spostamento assiale del ritto è uguale allo spostamento

trasversale del traverso, in quanto ambedue verso il basso. Le rotazioni dovranno essere uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(x_3 = L_1) &= u_3^{(CA)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(BC)}(x_3 = L_1) &= -u_3^{(CA)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(BC)}(x_3 = L_1) &= \phi^{(CA)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.125)$$

— in corrispondenza della cerniera in  $D$  le due componenti di spostamento saranno continue:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}(x_3 = L_2) &= u_2^{(DE)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(CD)}(x_3 = L_2) &= u_3^{(DE)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.126)$$

— in corrispondenza del nodo in  $E$  : lo spostamento trasversale del traverso sarà uguale allo spostamento assiale del traverso, mentre lo spostamento assiale del traverso sarà uguale e contrario al corrispondente spostamento trasversale del traverso. Le rotazioni, come sempre, saranno uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{(DE)}(x_3 = L_3) &= u_3^{(EF)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(DE)}(x_3 = L_3) &= -u_2^{(EF)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(DE)}(x_3 = L_3) &= \phi^{(EF)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.127)$$

— in corrispondenza dell'appoggio in  $F$  si annullano le componenti di spostamento:

$$\begin{aligned} u_2^{(EF)}(x_3 = H_1 - H_2) &= 0 \\ u_3^{(EF)}(x_3 = H_1 - H_2) &= 0 \end{aligned} \quad (24.128)$$

Risolvendo il sistema di quindici equazioni, e portando la rigidezza assiale  $EA$  ad infinito, si ottengono le linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(x_3) &= \frac{P(224L^3 - 132L^2x_3 + 5x_3^3)}{30EI} \\ u_2^{(CA)}(x_3) &= \frac{P(4L - x_3)(4L^2 - 8Lx_3 + x_3^2)}{15EI} \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= -\frac{Px_3(72L^2 - 6Lx_3 + x_3^2)}{30EI} \\ u_2^{(DE)}(x_3) &= -\frac{P(-4L + x_3)^2(8L + x_3)}{30EI} \\ u_2^{(EF)}(x_3) &= \frac{P(16L^3 - 6Lx_3^2 + x_3^3)}{15EI} \end{aligned} \quad (24.129)$$

Gli spostamenti assiali dei ritti sono identicamente nulli, mentre il traverso ha uno spostamento unico:

$$\begin{aligned} u_3^{(CA)}(x_3) &= u_3^{(EF)}(x_3) = 0 \\ u_3^{(BC)}(x_3) &= u_3^{(CD)}(x_3) = u_3^{(DE)}(x_3) = -\frac{16PL^3}{15EI} \end{aligned} \quad (24.130)$$

per gli spostamenti assiali. Ne segue la deformata di Figura 24.16.

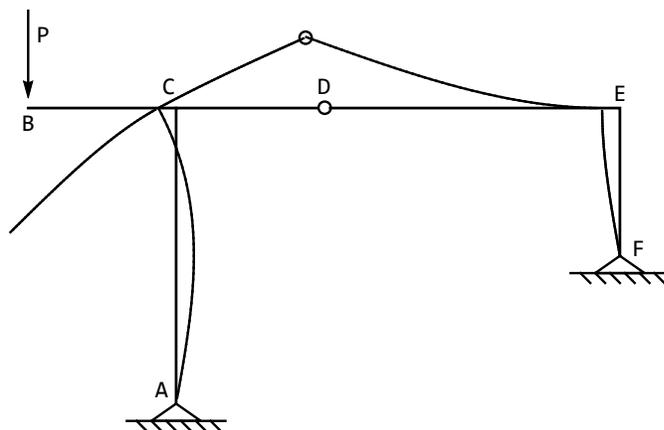


Figura 24.16: Il diagramma degli spostamenti per il telaio di Figura 24.14, in ipotesi  $EA = \infty$

Anche in questo caso, lo studio della deformata può essere completato determinando l'abbassamento del punto di applicazione della forza, la rotazione relativa nella cerniera, etc.. Ad esempio, l'abbassamento del punto di applicazione della forza è fornito da:

$$u_B^D = \frac{224}{30} \frac{PL^3}{EI} \quad (24.131)$$

mentre l'innalzamento della cerniera sarà pari a:

$$u_D^D = -\frac{64}{15} \frac{PL^3}{EI} \quad (24.132)$$

## 24.5 Una maglia chiusa

Un ulteriore esempio è illustrato in Figura 24.17, in cui una maglia chiusa collegata al suolo tramite un appoggio ed un bipendolo è sollecitata da una coppia. Poiché la continuità della maglia è interrotta da due cerniere e da un pendolo (ad asse verticale), la struttura risulta isostatica.

La solita scelta dei sistemi di riferimento porta a scrivere i momenti flettenti

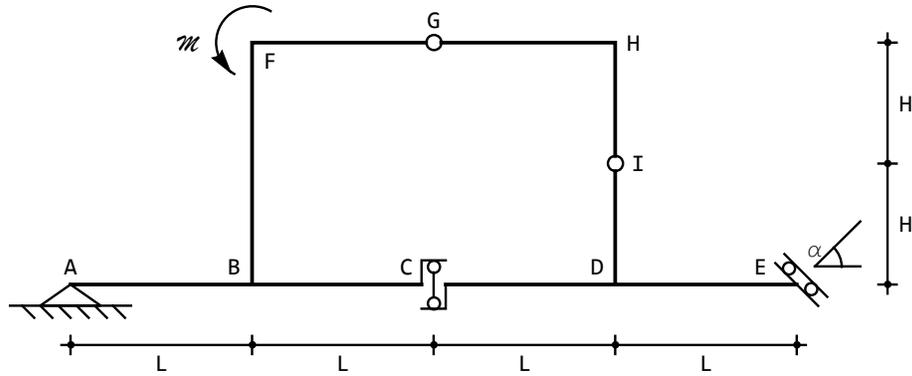


Figura 24.17: Una maglia chiusa

nella forma:

$$\begin{aligned}
 m^{(AB)}(x_3) &= t_1 x_3 + m_1 \\
 m^{(BC)}(x_3) &= t_2 x_3 + m_2 \\
 m^{(CD)}(x_3) &= t_3 x_3 + m_3 \\
 m^{(DE)}(x_3) &= t_4 x_3 + m_4 \\
 m^{(FB)}(x_3) &= t_5 x_3 + m_5 \\
 m^{(FG)}(x_3) &= t_6 x_3 + m_6 \\
 m^{(GH)}(x_3) &= t_7 x_3 + m_7 \\
 m^{(HI)}(x_3) &= t_8 x_3 + m_8 \\
 m^{(ID)}(x_3) &= t_9 x_3 + m_9
 \end{aligned} \tag{24.133}$$

ed gli sforzi normali come:

$$\begin{aligned}
 n^{(AB)}(x_3) &= n_1 \\
 n^{(BC)}(x_3) &= n_2 \\
 n^{(CD)}(x_3) &= n_3 \\
 n^{(DE)}(x_3) &= n_4 \\
 n^{(FB)}(x_3) &= n_5 \\
 n^{(FG)}(x_3) &= n_6 \\
 n^{(GH)}(x_3) &= n_7 \\
 n^{(HI)}(x_3) &= n_8 \\
 n^{(ID)}(x_3) &= n_9
 \end{aligned} \tag{24.134}$$

Le costanti di integrazione si possono determinare imponendo ventisette condizioni di equilibrio, così come segue:

— in corrispondenza dell' appoggio in  $A$  il momento si annulla:

$$m^{(AB)}(x_3 = 0) = 0 \quad (24.135)$$

— in corrispondenza del nodo in  $B$  lo studio del concio permette di scrivere le tre equazioni:

$$\begin{aligned} -n^{(AB)}(x_3 = L) + n^{(BC)}(x_3 = 0) + t^{(FB)}(x_3 = 2H) &= 0 \\ -t^{(AB)}(x_3 = L) + t^{(BC)}(x_3 = 0) - n^{(FB)}(x_3 = 2H) &= 0 \\ -m^{(AB)}(x_3 = L) + m^{(BC)}(x_3 = 0) - m^{(FB)}(x_3 = 2H) &= 0 \end{aligned} \quad (24.136)$$

— in corrispondenza del pendolo verticale in  $C$  gli sforzi normali ed i momenti flettenti si annulleranno, mentre il taglio non subirà discontinuità:

$$\begin{aligned} n^{(BC)}(x_3 = L) &= 0 \\ n^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -t^{(BC)}(x_3 = L) + t^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \\ m^{(BC)}(x_3 = L) &= 0 \\ m^{(CD)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.137)$$

— in corrispondenza del nodo in  $D$  il solito studio del concio porta alle tre equazioni:

$$\begin{aligned} -n^{(CD)}(x_3 = L) + n^{(DE)}(x_3 = 0) + t^{(ID)}(x_3 = H) &= 0 \\ -t^{(CD)}(x_3 = L) + t^{(DE)}(x_3 = 0) - n^{(ID)}(x_3 = H) &= 0 \\ -m^{(CD)}(x_3 = L) + m^{(DE)}(x_3 = 0) - m^{(ID)}(x_3 = H) &= 0 \end{aligned} \quad (24.138)$$

— in corrispondenza del bipendolo in  $E$  lo sforzo di taglio e lo sforzo normale saranno legate dalla relazione geometrica:

$$t^{(DE)}(x_3 = L) = -n^{(DE)}(x_3 = 0) \tan(\alpha) \quad (24.139)$$

dove  $\alpha$  è l'angolo di inclinazione del bipendolo rispetto all'orizzontale. — in corrispondenza del nodo in  $F$ :

$$\begin{aligned} n^{(FB)}(x_3 = 0) + t^{(FG)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -t^{(FB)}(x_3 = 0) + n^{(FG)}(x_3 = 0) &= 0 \\ m^{(FB)}(x_3 = 0) + m^{(FG)}(x_3 = 0) + \mathcal{M} &= 0 \end{aligned} \quad (24.140)$$

— in corrispondenza della cerniera in  $G$ :

$$\begin{aligned} -n^{(FG)}(x_3 = L) + n^{(GH)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -t^{(FG)}(x_3 = L) + t^{(GH)}(x_3 = 0) &= 0 \\ m^{(FG)}(x_3 = L) &= 0 \\ m^{(GH)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.141)$$

— in corrispondenza del nodo in  $H$ :

$$\begin{aligned} -n^{(GH)}(x_3 = L) - t^{(HI)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -t^{(GH)}(x_3 = L) + n^{(HI)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -m^{(GH)}(x_3 = L) + m^{(HI)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.142)$$

— in corrispondenza della cerniera in  $I$ :

$$\begin{aligned} -n^{(HI)}(x_3 = H) + n^{(ID)}(x_3 = 0) &= 0 \\ -t^{(HI)}(x_3 = H) + t^{(ID)}(x_3 = 0) &= 0 \\ m^{(HI)}(x_3 = L) &= 0 \\ m^{(ID)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.143)$$

Svolgendo i calcoli, e risolvendo il sistema di equazioni si ha il quadro flessionale:

$$\begin{aligned} m^{(AB)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3 \tan(\alpha)}{2H - 2L \tan(\alpha)} \\ m^{(BC)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}(H \cos(\alpha) + L \sin(\alpha))(L - x_3)}{2L(-H \cos(\alpha) + L \sin(\alpha))} \\ m^{(CD)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}x_3(H + L \tan(\alpha))}{2L(-H + L \tan(\alpha))} \\ m^{(DE)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}(2H + L \tan(\alpha)) + x_3 \tan(\alpha)}{2L(H - L \tan(\alpha))} \\ m^{(FB)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(-H + 2L \tan(\alpha) + x_3)}{2H - 2L \tan(\alpha)} \\ m^{(FG)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}H(L - x_3)}{2L(H - L \tan(\alpha))} \\ m^{(GH)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}H}{2HL - 2L^2 \tan(\alpha)} x_3 \\ m^{(HI)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(H - x_3)}{2H - 2L \tan(\alpha)} \\ m^{(ID)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3}{2H - 2L \tan(\alpha)} \end{aligned} \quad (24.144)$$

ed il quadro di sforzi assiali:

$$\begin{aligned} n^{(AB)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{2H - 2L \tan(\alpha)} \\ n^{(BC)}(x_3) &= 0 \\ n^{(CD)}(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (24.145)$$

$$\begin{aligned}
 n^{(DE)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{2H - 2L \tan(\alpha)} \\
 n^{(FB)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}H}{2HL - 2L^2 \tan(\alpha)} \\
 n^{(FG)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{2H - 2L \tan(\alpha)} \\
 n^{(GH)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}}{2H - 2L \tan(\alpha)} \\
 n^{(HI)}(x_3) &= n^{(ID)}(x_3) = \frac{\mathcal{M}H}{2HL - 2L^2 \tan(\alpha)}
 \end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui  $H = \frac{2}{3}L$  ed  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , cui per semplicità ci si limiterà nella seconda fase, il diagramma assume l'aspetto di Figura 24.18.

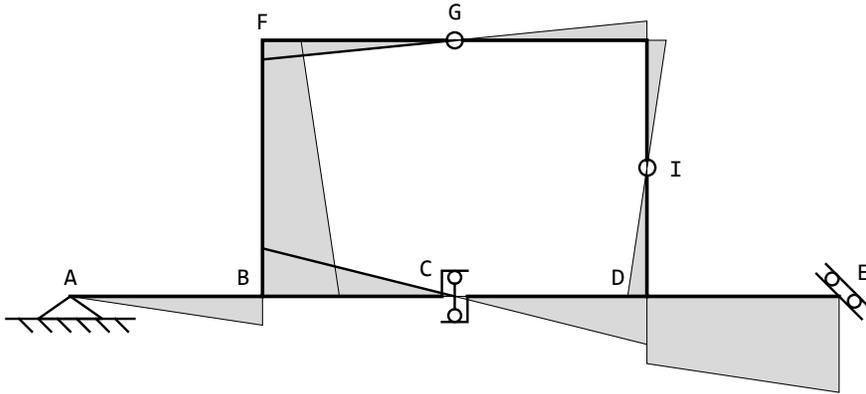


Figura 24.18: Il diagramma dei momenti per il telaio di Figura 24.17

### La verifica grafica

Una verifica grafica dei risultati ottenuti può condursi ricercando le reazioni dei vincoli, come in Figura 24.19. Le tre equazioni simboliche di equilibrio, per i tre tratti rigidi, possono scriversi:

$$\begin{aligned}
 a + c + \mathcal{M} + g &= 0 \\
 g + i &= 0 \\
 c + i + e &= 0
 \end{aligned} \tag{24.146}$$

dove la reazione  $a$  dell'appoggio dovrà passare per  $A$ , la reazione  $c$  del pendolo dovrà essere verticale, e passare per  $C$ , e la reazione  $e$  del bipendolo in  $E$  sarà inclinata dell'angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale. Dalla seconda delle (24.146) si trae che le rette d'azione delle due reazioni  $i$  e  $g$  devono coincidere, identificandosi quindi con la retta passante per le cerniere in  $G$  ed  $I$ . Conosciuta la reazione  $i$

si può identificare la sua intersezione con la reazione  $c$ , ossia il punto  $G$ . Per  $G$  dovrà allora passare — come può dedursi dalla terza delle (24.146) — anche la reazione del bipendolo, che quindi sarà nota. Infine, dalla prima equazione potrà tracciarsi la risultante  $a + c = M + g$ , semplicemente identificando l'intersezione  $L$  tra  $a$  e  $c$ , e da essa tracciando la parallela a  $g$ . Conosciute le reazioni si può

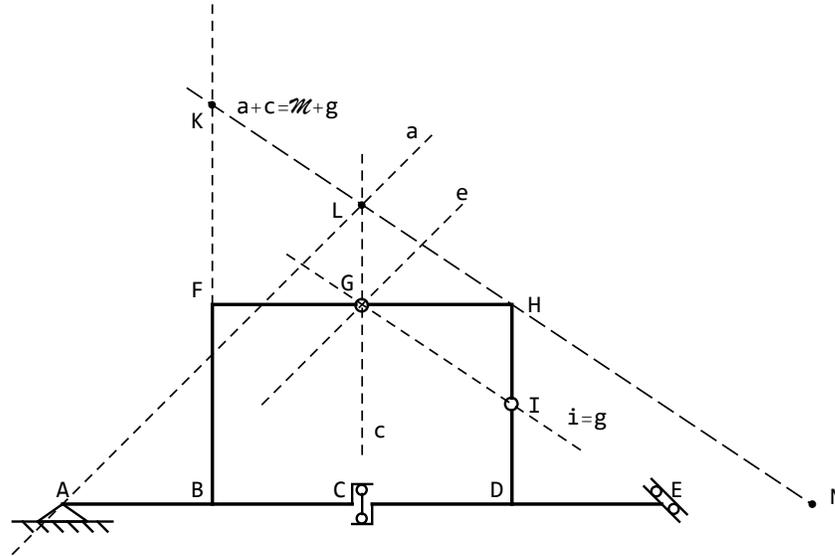


Figura 24.19: La ricerca per via grafica delle reazioni per il telaio di Figura 24.17

tracciare il diagramma del momento, iniziando — ad esempio — dall'appoggio in  $A$ , dove il momento sarà senz'altro nullo, e riportando un primo segmento, inclinato di un angolo arbitrario, fino al nodo triplo  $B$ . Per proseguire lungo  $BC$ , occorre conoscere il momento in due punti: in  $C$  si ha ovviamente un punto di nullo. Per conoscere un altro valore, si osservi che il momento lungo  $AB$  è dovuto all'azione di  $a$ , mentre lungo  $BC$  è dovuto all'azione di  $a$ , di  $g$  e di  $M$ . Laddove, quindi, la retta  $M + g$  interseca (in modo virtuale) il traverso inferiore, il valore del momento sarà dovuto solo ad  $a$ , e quindi si ottiene semplicemente prolungando il diagramma appena tracciato lungo  $AB$ . In  $N$ , quindi, si ha il secondo valore, e può tracciarsi il diagramma lungo  $BC$ .

L'equilibrio del nodo in  $B$  permette di conoscere il valore del momento sul ritto in  $B$ , mentre il momento sarà nullo in  $K$ , dove la retta  $M + g$  interseca il ritto stesso. Ciò permette il tracciamento del diagramma su  $FB$ , in  $F$  si ruota il diagramma e si sottrae il valore della coppia  $M$  (equilibrio del nodo). Poi si prosegue lungo il traverso superiore annullando il diagramma in  $G$ , in  $H$  si ribalta e si prosegue annullando in  $I$ , e quindi si ha il valore del momento in  $D$ , sul ritto. L'equilibrio del nodo in  $D$  permette di conoscere il momento in  $D$  lungo il tratto  $DE$ , ed infine si completa il diagramma considerando che il

punto di nullo, relativo a  $DE$  si ha in corrispondenza dell'intersezione di  $e$  con il traverso inferiore.

### Seconda fase: il calcolo degli spostamenti

Le equazioni da utilizzare sono le (24.53), e quindi sarà, per gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3^3}{4EIL} + c_0x_3 + c_1 \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= \frac{5\mathcal{M}x_3^2}{4EI} - \frac{5\mathcal{M}x_3^3}{12EIL} + c_2x_3 + c_3 \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= -\frac{5\mathcal{M}x_3^3}{12EIL} + c_4x_3 + c_5 \\
 u_2^{(DE)}(x_3) &= -\frac{7\mathcal{M}x_3^2}{4EI} - \frac{\mathcal{M}x_3^3}{4EIL} + c_6x_3 + c_7 \\
 u_2^{(FB)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}x_3^2}{EI} + \frac{\mathcal{M}x_3^3}{4EIL} + c_8x_3 + c_9 \\
 u_2^{(FG)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3^2}{2EI} + \frac{\mathcal{M}x_3^3}{6EIL} + c_{10}x_3 + c_{11} \\
 u_2^{(GH)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}x_3^3}{6EIL} + c_{12}x_3 + c_{13} \\
 u_2^{(HI)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}x_3^2}{2EI} - \frac{\mathcal{M}x_3^3}{4EIL} + c_{14}x_3 + c_{15} \\
 u_2^{(ID)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3^3}{4EIL} + c_{16}x_3 + c_{17}
 \end{aligned} \tag{24.147}$$

e per gli spostamenti assiali:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(AB)}(x_3) &= -\frac{3\mathcal{M}x_3}{2EAL} + d_0 \\
 u_3^{(BC)}(x_3) &= d_1 \\
 u_3^{(CD)}(x_3) &= d_2 \\
 u_3^{(DE)}(x_3) &= \frac{3\mathcal{M}x_3}{2EAL} + d_3 \\
 u_3^{(FB)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}x_3}{EAL} + d_4 \\
 u_3^{(FG)}(x_3) &= -\frac{3\mathcal{M}x_3}{2EAL} + d_5 \\
 u_3^{(GH)}(x_3) &= -\frac{3\mathcal{M}x_3}{2EAL} + d_6 \\
 u_3^{(HI)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3}{EAL} + d_7 \\
 u_3^{(ID)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3}{EAL} + d_8
 \end{aligned} \tag{24.148}$$

Questa volta le condizioni ai limiti dovranno imporre la congruenza degli spostamenti:

— in corrispondenza dell' appoggio in  $A$  dovranno essere nulli gli spostamenti assiali e trasversali

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \\ u_3^{(AB)}(x_3 = 0) &= 0 \end{aligned} \quad (24.149)$$

— in corrispondenza del nodo  $B$  dovrà essere garantita la continuità degli spostamenti e delle rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(x_3 = L) &= u_2^{(BC)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(AB)}(x_3 = L) &= u_3^{(BC)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(AB)}(x_3 = L) &= \phi^{(BC)}(x_3 = 0) \\ u_2^{(AB)}(x_3 = L) &= u_3^{(FB)}(x_3 = 2H) \\ u_3^{(AB)}(x_3 = L) &= -u_2^{(FB)}(x_3 = 2H) \\ \phi^{(AB)}(x_3 = L) &= \phi^{(FB)}(x_3 = 2H) \end{aligned} \quad (24.150)$$

— in corrispondenza del pendolo ad asse verticale, in  $C$ , andrà garantita la continuità degli spostamenti verticali:

$$u_2^{(BC)}(x_3 = L) = u_2^{(CD)}(x_3 = 0) \quad (24.151)$$

— in corrispondenza del nodo  $D$  dovrà essere garantita la continuità degli spostamenti e delle rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}(x_3 = L) &= u_2^{(DE)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(CD)}(x_3 = L) &= u_3^{(DE)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(CD)}(x_3 = L) &= \phi^{(DE)}(x_3 = 0) \\ u_2^{(CD)}(x_3 = L) &= u_3^{(ID)}(x_3 = H) \\ u_3^{(CD)}(x_3 = L) &= -u_2^{(ID)}(x_3 = H) \\ \phi^{(CD)}(x_3 = L) &= \phi^{(ID)}(x_3 = H) \end{aligned} \quad (24.152)$$

— in corrispondenza del bipendolo in  $E$ , inclinato dell'angolo  $\alpha$ , bisognerà annullare la rotazione, ed imporre che lo spostamento avvenga lungo la retta ortogonale all'asse dei pendoli:

$$\begin{aligned} \phi^{(DE)}(x_3 = L) &= 0 \\ u_3^{(DE)}(x_3 = L) \cos(\alpha) &= u_2^{(DE)}(x_3 = L) \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (24.153)$$

— in corrispondenza del nodo  $F$  dovrà essere garantita la continuità degli spostamenti e delle rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(FB)}(x_3 = 0) &= -u_3^{(FG)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(FB)}(x_3 = 0) &= u_2^{(FG)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(FB)}(x_3 = 0) &= \phi^{(FG)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.154)$$

— in corrispondenza della cerniera in  $G$  dovrà essere garantita la continuità dei soli spostamenti:

$$\begin{aligned} u_2^{(FG)}(x_3 = L) &= u_2^{(GH)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(FG)}(x_3 = L) &= u_3^{(GH)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.155)$$

— in corrispondenza del nodo  $H$  dovrà essere garantita la continuità degli spostamenti e delle rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(GH)}(x_3 = L) &= u_3^{(HI)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(GH)}(x_3 = L) &= -u_2^{(HI)}(x_3 = 0) \\ \phi^{(GH)}(x_3 = L) &= \phi^{(HI)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.156)$$

— infine, in corrispondenza della cerniera in  $I$  dovrà essere garantita la continuità dei soli spostamenti:

$$\begin{aligned} u_2^{(HI)}(x_3 = H) &= u_2^{(ID)}(x_3 = 0) \\ u_3^{(HI)}(x_3 = H) &= u_3^{(ID)}(x_3 = 0) \end{aligned} \quad (24.157)$$

Risolvendo il risultante sistema, si ottengono le costanti di integrazione. Portando la rigidezza assiale  $EA$  ad infinito, si ottengono le linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}x_3(1151L^2 + 9x_3^2)}{36EIL} \\ u_2^{(BC)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}(1160L^3 + 1178L^2x_3 - 45Lx_3^2 + 15x_3^3)}{36EIL} \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}(2308L^3 - 198L^2x_3 + 15x_3^3)}{36EIL} \\ u_2^{(DE)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}(2125L^3 - 153L^2x_3 + 63Lx_3^2 + 9x_3^3)}{36EIL} \\ u_2^{(FB)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(5032L^3 - 3966L^2x_3 + 108Lx_3^2 + 27x_3^3)}{108EIL} \end{aligned} \quad (24.158)$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{(FG)}(x_3) &= -\frac{\mathcal{M}(580L^3 + 661L^2x_3 + 9Lx_3^2 - 3x_3^3)}{18EIL} \\
 u_2^{(GH)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(-2494L^3 + 363L^2x_3 + 6x_3^3)}{36EIL} \\
 u_2^{(HI)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(5032L^3 + 1143L^2x_3 + 54Lx_3^2 - 27x_3^3)}{108EIL} \\
 u_2^{(ID)}(x_3) &= \frac{\mathcal{M}(5810L^3 + 495L^2x_3 - 27x_3^3)}{108EIL}
 \end{aligned}$$

per gli spostamenti trasversali, e:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(AB)}(x_3) &= u_3^{(BC)}(x_3) = 0 \\
 u_3^{(CD)}(x_3) &= u_3^{(DE)}(x_3) = -\frac{511\mathcal{M}L^2}{9EI} \\
 u_3^{(FB)}(x_3) &= -\frac{290\mathcal{M}L^2}{9EI} \\
 u_3^{(FG)}(x_3) &= u_3^{(GH)}(x_3) = -\frac{1258\mathcal{M}L^2}{27EI} \\
 u_3^{(HI)}(x_3) &= u_3^{(ID)}(x_3) = -\frac{2125\mathcal{M}L^2}{36EI}
 \end{aligned} \tag{24.159}$$

per gli spostamenti assiali. Ne segue la deformata di Figura 24.20.

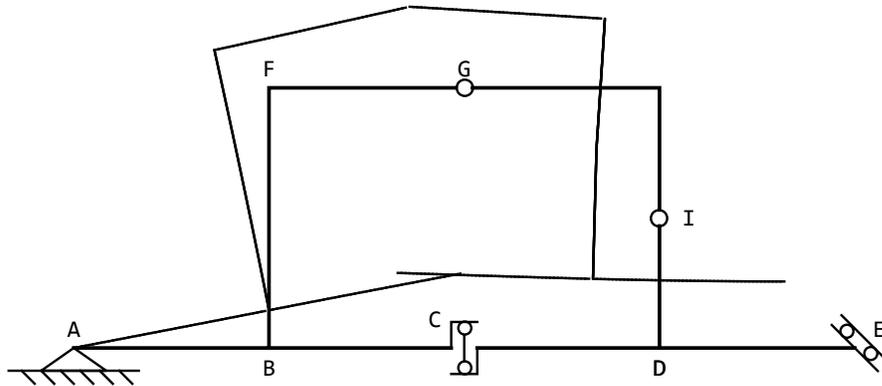


Figura 24.20: Il diagramma degli spostamenti per il telaio di Figura 24.18, in ipotesi  $H = 2/3L$ ,  $\alpha = \pi/4$ ,  $EA = \infty$

Anche in questo caso, lo studio della deformata può essere completato determinando alcuni valori notevoli. La rotazione del nodo  $F$ , in corrispondenza della coppia, può esplicitarsi come:

$$\phi_F = \frac{661}{18} \frac{\mathcal{M}L}{EI} \tag{24.160}$$

mentre l'innalzamento della cerniera in  $G$  sarà pari a:

$$u_2^G = -\frac{1247}{18} \frac{ML^2}{EI} \quad (24.161)$$

e la sua rotazione relativa sarà :

$$\Delta\phi_G = -\frac{1703}{36} \frac{ML}{EI} \quad (24.162)$$

Il pendolo in  $C$  vedrà uno spostamento relativo in senso orizzontale pari a:

$$\Delta u_{3C} = -\frac{511}{9} \frac{ML^2}{EI} \quad (24.163)$$

Ovviamente, infine, il bipendolo subirà uno spostamento lungo la diagonale inclinata di  $\alpha$ , con componenti uguali (in quanto si è assunto  $\alpha = \pi/4$ ):

$$u_{2E} = u_{3E} = -\frac{511}{9} \frac{ML^2}{EI} \quad (24.164)$$



## Capitolo 25

# La linea elastica e le strutture a telaio iperstatiche

In questo Capitolo si estende il metodo della linea elastica alle strutture a telaio iperstatiche, in cui non è possibile applicare il metodo della doppia integrazione, risolvendo in via preventiva le equazioni di equilibrio. La procedura evolve secondo i seguenti passi:

1. si esamina la struttura, e si identificano tutti i punti (d'ora in poi *nodi*) in cui si abbia una discontinuità nello spostamento (assiale o trasversale), nella rotazione o nelle caratteristiche della sollecitazione interna.
2. Per ciascun tratto compreso tra due nodi (d'ora in poi *elemento*) si fissa un sistema di riferimento con origine in uno dei due nodi, l'asse  $X_3$  diretto secondo l'asse dell'elemento, l'asse  $X_2$  tale che la rotazione che porta  $X_2$  in  $X_3$  sia antioraria e pari a  $\pi/2$ .
3. Per il generico elemento  $i$ -mo, che connette il nodo iniziale  $I$  al nodo finale  $J$ , si scrive l'equazione differenziale del quarto ordine nello spostamento trasversale  $u_2^{(IJ)}$  e l'equazione differenziale del second'ordine nello spostamento assiale  $u_3^{(IJ)}$
4. si scrivono le opportune condizioni ai limiti. In particolare, in ciascun estremo si dovranno scrivere tre condizioni, in ciascun nodo interno che connette due elementi (nodo *semplice*) si scrivono sei condizioni, in ciascun nodo che connette  $k$  elementi (nodo di grado  $k$ ) si scrivono  $3(k+1)$  condizioni
5. risolvendo le condizioni ai limiti, si ottengono gli spostamenti assiali e trasversali di ciascun tratto, e quindi per derivazione si ottengono le caratteristiche

6. è spesso opportuno esaminare l'influenza delle deformazioni da sforzo assiale, ed a ciò fare si può facilmente ottenere il caso limite di strutture assialmente rigide, portando la rigidità assiale ad infinito. Ciò permette di semplificare le formule, e di stimare numericamente l'influenza degli sforzi assiali. Ai telai *a priori* assialmente rigidi è dedicato il prossima capitolo.

Si avverte esplicitamente che i sistemi di equazioni algebriche cui si giunge negli esercizi di questa sezione hanno dimensioni tali da escludere una agevole risoluzione manuale. D'altro canto, la capillare diffusione di software di algebra simbolica ha ampliato enormemente le possibilità operative, ed è quindi sembrato opportuno inserire anche alcuni esempi più complessi.

## 25.1 Un semplice telaio zoppo

Si consideri il semplice telaio di Figura 25.1, costituito da un traverso di luce  $L$  soggetto ad un carico  $q$  uniformemente distribuito, ed un ritto di altezza  $H$ . A sinistra il telaio è vincolato con un incastro, al piede si ha una cerniera.

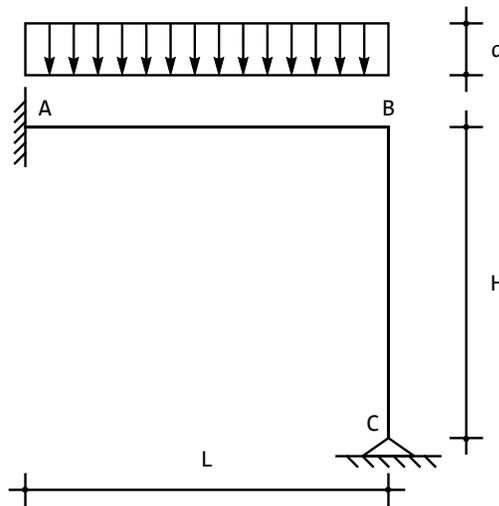


Figura 25.1: Un semplice telaio zoppo

Si identificano subito tre nodi, e due elementi, sicchè si definiscono le linee elastiche  $u_2^{(AB)}(x_3)$  e  $u_3^{(AB)}(x_3)$ , relativamente al traverso, e  $u_2^{(BC)}(x_3)$  e  $u_3^{(BC)}(x_3)$  relativamente al ritto, scegliendo le origini in A ed in B, rispettivamente, e col sistema di assi locali definito in Figura 25.2.

Si potrà scrivere, ipotizzando che le sezioni del ritto e del traverso siano costanti:

$$\begin{aligned}
 EIu_2^{(AB)''''}(x_3) &= q \\
 EAu_3^{(AB)''}(x_3) &= 0 \\
 EIu_2^{(BC)''''}(x_3) &= 0 \\
 EAu_3^{(BC)''}(x_3) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{25.1}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + \frac{qx_3^4}{24EI} \\
 u_3^{(AB)}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_3^{(BC)}(x_3) &= d_0 + d_1x_3
 \end{aligned}
 \tag{25.2}$$

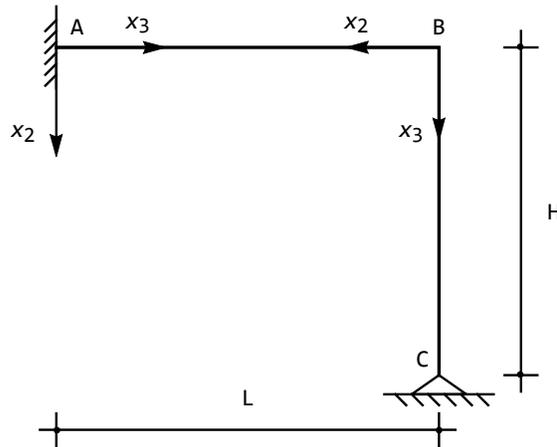


Figura 25.2: I due sistemi di riferimento locale per il traverso ed il ritto

Si sono quindi introdotte 12 costanti di integrazione, che dovranno essere definite attraverso l'imposizione di opportune condizioni ai limiti. Nella fattispecie, si avrà:

— in  $A$  l'incastro detta l'annullarsi di spostamento assiale, spostamento trasversale, e rotazione, ossia le tre equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(0) &= 0 \\
 u_3^{(AB)}(0) &= 0 \\
 \phi^{(AB)}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{25.3}$$

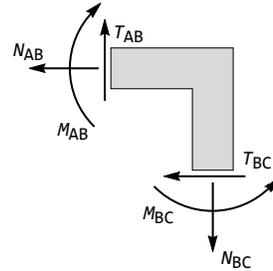
— in  $B$  si deve imporre la congruenza degli spostamenti, e l'equilibrio del nodo. Per la congruenza, si potranno imporre le tre condizioni:

$$\begin{aligned} u_3^{(AB)}(L) &= -u_2^{(BC)}(0) \\ u_2^{(AB)}(L) &= u_3^{(BC)}(0) \\ \phi^{(AB)}(L) &= \phi^{(BC)}(0) \end{aligned} \quad (25.4)$$

La prima impone che lo spostamento assiale del traverso sia uguale e contrario allo spostamento trasversale del ritto, mentre la seconda impone che lo spostamento trasversale del traverso sia pari allo spostamento assiale del ritto. L'ultima condizione impone l'uguaglianza delle rotazioni

Le condizioni di equilibrio possono leggersi dal diagramma delle forze di Figura 25.3:

$$\begin{aligned} -n^{(AB)} - t^{(BC)} &= 0 \\ -t^{(AB)} + n^{(BC)} &= 0 \\ -m^{(AB)} + m^{(BC)} &= 0 \end{aligned} \quad (25.5)$$



— in  $C$  la cerniera detta l'annullarsi di spostamento assiale e spostamento trasversale, mentre la rotazione è libera, e quindi si annulla il momento:

Figura 25.3: Il concio in  $B$  e le forze su di esso agenti

$$\begin{aligned} u_3^{(BC)}(H) &= 0 \\ u_2^{(BC)}(H) &= 0 \\ m^{(BC)}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (25.6)$$

### La soluzione del sistema di equazioni

Le dodici equazioni precedenti, utilizzando le soluzioni (25.2), divengono un sistema algebrico lineare nelle dodici costanti di integrazione:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ b_0 + b_1 L &= -c_0 \\ a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 + \frac{qL^4}{24EI} &= d_0 \\ a_1 + 2a_2 L + 3a_3 L^2 + \frac{qL^3}{6EI} &= c_1 \end{aligned} \quad (25.7)$$

$$\begin{aligned}
 -EAb_1 + 6EIc_3 &= 0 \\
 6EIA_3 + qL + EAd_1 &= 0 \\
 a_2 + 3a_3L + \frac{qL^2}{4EI} - c_2 &= 0 \\
 d_0 + d_1H &= 0 \\
 c_0 + c_1H + c_2H^2 + c_3H^3 &= 0 \\
 2c_2 + 6c_3H &= 0
 \end{aligned}$$

con soluzione:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a_1 = b_0 = 0 \\
 a_2 &= \frac{qL^2}{8EI} \frac{72(EI)^2HL + (EA)^2H^2L^3(2H + L) + 6EAEI(4H^4 + 8H^3L + L^4)}{D} \\
 a_3 &= \frac{qL}{12EI} \left( \frac{3EAL^3(3EIL + EAH^2(H + L))}{D} - 2 \right) \\
 c_0 &= \frac{qL^4}{4} \frac{H(-24EIH + EAL^3)}{D} \\
 c_1 &= \frac{-qL^3}{12EI} \frac{(EAH^3 + 3EIL)(-24EIH + EAL^3)}{D} \\
 c_2 &= \frac{qL^3}{8EI} \frac{EAH^2(-24EIH + EAL^3)}{D} \\
 c_3 &= \frac{-qL^3}{24EI} \frac{EAH(-24EIH + EAL^3)}{D} \\
 b_1 &= \frac{qL^3}{4} \frac{H(24EIH - EAL^3)}{D} \\
 d_0 &= qL^4 \frac{3H(3EIL + EAH^2(H + L))}{2D} \\
 d_1 &= -qL^4 \frac{3(3EIL + EAH^2(H + L))}{2D}
 \end{aligned} \tag{25.8}$$

avendo posto:

$$D = 36(EI)^2HL + (EA)^2H^2L^3(4H + 3L) + 12EAEI(H^4 + 3H^3L + L^4) \tag{25.9}$$

Ne segue, utilizzando le (25.2) l'espressione degli spostamenti trasversali ed assiali. Le caratteristiche della sollecitazione interna si ottengono invece tramite derivazione successiva.

Se si vogliono trascurare le deformazioni assiali, occorre far tendere la rigidità assiale  $EA$  ad infinito, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{q(L - x_3)x_3^2(3L(2H + L) - (4H + 3L)x_3)}{24EI(4H + 3L)} \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= -\frac{qL^3(H - x_3)(2H - x_3)x_3}{24EIH(4H + 3L)}
 \end{aligned} \tag{25.10}$$

$$m^{(AB)}(x_3) = -\frac{q(L^2(2H+L) - 2L(5H+3L)x_3 + (8H+6L)x_3^2)}{4(4H+3L)}$$

$$m^{(BC)}(x_3) = -\frac{qL^3(H-x_3)}{4H(4H+3L)}$$

$$t^{(AB)}(x_3) = \frac{q(L(5H+3L) - 2(4H+3L)x_3)}{8H+6L}$$

$$t^{(BC)}(x_3) = \frac{qL^3}{16H^2+12HL}$$

In Figura 25.4 è riportato il diagramma degli spostamenti trasversali, mentre il diagramma dei momenti è consegnato in Figura 25.5.

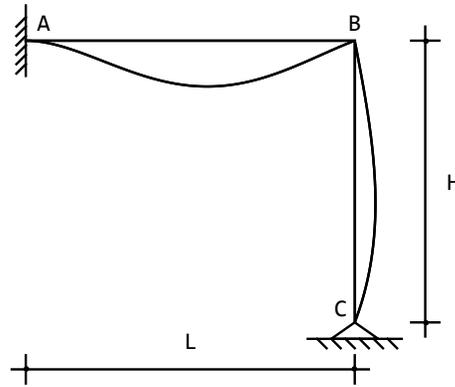


Figura 25.4: Gli spostamenti per il telaio di Figura 25.1

### I valori notevoli

Il massimo valore assoluto del momento si raggiunge in corrispondenza dell'incastrato, e vale:

$$M_A = -\frac{qL^2}{4} \frac{72(EI)^2HL + (EA)^2H^2L^3(2H+L) + 6EAEI(H^4 + 8H^3L + L^4)}{36(EI)^2HL + (EA)^2H^2L^3(4H+3L) + 12EAEI(H^4 + 3H^3L + L^4)} \quad (25.11)$$

o, al limite per  $EA$  che va ad infinito:

$$M_A = -\frac{qL^2}{4} \frac{(2H+L)}{(4H+3L)} \quad (25.12)$$

E' anche interessante il valore del momento nel nodo  $B$ :

$$M_B = -\frac{EAH^2(-24EIH + EAL^3)qL^3}{4(36(EI)^2HL + (EA)^2H^2L^3(4H+3L) + 12EAEI(H^4 + 3H^3L + L^4))} \quad (25.13)$$

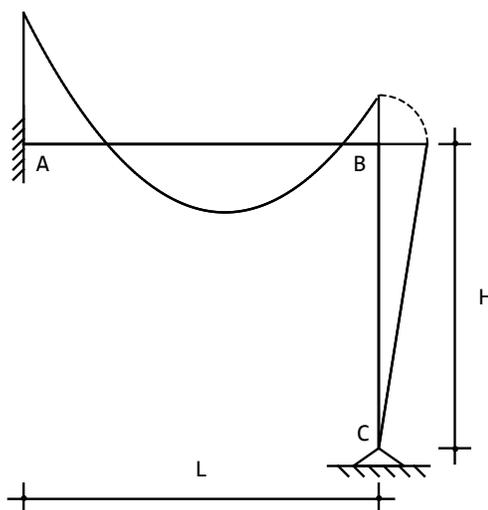


Figura 25.5: I momenti flettenti per il telaio di Figura 25.1

che trascurando le deformazioni assiali diviene:

$$M_B = -\frac{qL^3}{4(4H + 3L)} \quad (25.14)$$

Il momento massimo in campata si attinge laddove il taglio è nullo, ossia per:

$$x_3^* = \frac{L(5H + 3L)}{8H + 6L} \quad (25.15)$$

e vale:

$$M_{maxAB} = q \frac{L^2 (9H^2 + 10HL + 3L^2)}{8(4H + 3L)^2} \quad (25.16)$$

### L'ipotesi di rigidità assiale

E' spesso possibile stabilire *a priori* se la deformabilità assiale delle aste può essere trascurata. Se ciò è possibile, conviene semplificare subito il procedimento, senza passare attraverso la determinazione delle linee elastiche per  $EA$  finito, e successivo limite. Infatti, se la deformabilità assiale è trascurabile, dovrà necessariamente essere:

$$\begin{aligned} u_3^{(AB)}(x_3) &= b_0 \\ u_3^{(BC)}(x_3) &= d_0 \end{aligned} \quad (25.17)$$

e le condizioni ai limiti in corrispondenza dei due incastri permette di affermare che gli spostamenti assiali sono identicamente nulli:

$$\begin{aligned} u_3^{(AB)}(x_3) &= 0 \\ u_3^{(BC)}(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (25.18)$$

Ciò premesso, le condizioni ai limiti si semplificano:

— in  $A$  l'incastro detta l'annullarsi di spostamento trasversale e rotazione, in quanto lo spostamento assiale è stato eliminato *a priori*:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(0) &= 0 \\ \phi^{(AB)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (25.19)$$

— in  $B$  si deve imporre la congruenza degli spostamenti, e l'equilibrio del nodo. Per la congruenza, si potranno imporre le tre condizioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(0) &= 0 \\ u_2^{(AB)}(L) &= 0 \\ \phi^{(AB)}(L) &= \phi^{(BC)}(0) \end{aligned} \quad (25.20)$$

mentre, analizzando l'equilibrio del nodo, si osserva che l'unica condizione da imporre riguarda l'uguaglianza dei momenti:

$$-m^{(AB)}(L) + m^{(BC)}(0) = 0 \quad (25.21)$$

Le altre due condizioni, su tagli e sforzi normali, potranno essere utilizzate *a posteriori* per ricavare gli sforzi normali.

— in  $C$  la cerniera detta l'annullarsi dello spostamento trasversale, mentre la rotazione è libera, e quindi si annulla il momento:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(H) &= 0 \\ m^{(BC)}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (25.22)$$

Si hanno quindi otto condizioni ai limiti, che permettono il calcolo delle otto costanti di integrazione, e quindi permettono di determinare gli spostamenti trasversali, quindi i momenti ed i tagli. Con considerazioni di equilibrio, si possono poi dedurre gli sforzi normali.

## 25.2 Un portale con nodo triplo

Si considera ora il telaio in Figura 25.6, costituito da una traverso di luce  $2L$ , supportato in mezzeria da un ritto di altezza  $H$ . L'estremo sinistro del ritto è vincolato con una cerniera, mentre l'estremo di destra è libero, e caricato da una forza  $F$ . Infine, si suppone che il ritto sia incastrato al piede.

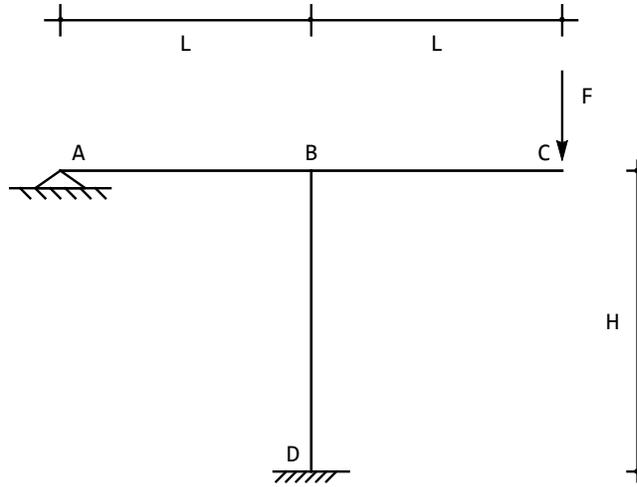


Figura 25.6: Un telaio costituito da tre elementi

Si possono identificare tre elementi, e quindi si scriverà:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\
 u_3^{(AB)}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \\
 u_3^{(BC)}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 \\
 u_2^{(BD)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 u_3^{(BD)}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3
 \end{aligned} \tag{25.23}$$

con origine in  $A$ , in  $B$ , ed ancora in  $B$ , rispettivamente. Occorre imporre 18 condizioni ai limiti, nove in corrispondenza dei tre estremi, ed altre nove in corrispondenza del nodo triplo. Negli estremi si ha, banalmente:

— in  $A$  si annullano le due componenti di spostamento, ed il momento flettente:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(0) &= 0 \\
 u_3^{(AB)}(0) &= 0 \\
 m^{(AB)}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{25.24}$$

— in  $C$  si annullano sia lo sforzo assiale che il momento flettente, mentre il taglio è pari alla forza applicata:

$$\begin{aligned}
 n^{(BC)}(L) &= 0 \\
 m^{(BC)}(L) &= 0 \\
 -t^{(BC)}(L) + F &= 0
 \end{aligned} \tag{25.25}$$

— in  $D$  si annullano le due componenti di spostamento, e la rotazione:

$$\begin{aligned} u_2^{(BD)}(H) &= 0 \\ u_3^{(BD)}(H) &= 0 \\ \phi^{(BD)}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (25.26)$$

— Nel nodo triplo in  $B$ , la congruenza degli spostamenti tra l'asta  $AB$  e l'asta  $BC$  detta le tre condizioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(L) &= u_2^{(BC)}(0) \\ u_3^{(AB)}(L) &= u_3^{(BC)}(0) \\ \phi^{(AB)}(L) &= \phi^{(BC)}(0) \end{aligned} \quad (25.27)$$

mentre la congruenza tra l'asta  $AB$  (o l'asta  $BC$ ) e l'asta  $BD$  permette di scrivere:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(L) &= u_3^{(BD)}(0) \\ u_3^{(AB)}(L) &= -u_2^{(BD)}(0) \\ \phi^{(AB)}(L) &= \phi^{(BD)}(0) \end{aligned} \quad (25.28)$$

Infine, l'equilibrio permette di scrivere le restanti tre equazioni. Dalla Figura 25.7 si trae:

$$\begin{aligned} -n^{(AB)} + n^{(BC)} - t^{(BD)} &= 0 \\ -t^{(AB)} + t^{(BC)} + n^{(BD)} &= 0 \\ -m^{(AB)} + m^{(BC)} + m^{(BD)} &= 0 \end{aligned} \quad (25.29)$$

La soluzione può ottenersi facilmente, ma porta ad espressioni lunghe e poco significative, e di conseguenza non viene riportata. Più interessante è il caso in cui — come usuale — si trascurano le deformazioni da sforzo assiale ( $EA \rightarrow \infty$ ): in questo caso si ha l'annullarsi degli spostamenti assiali, mentre gli spostamenti trasversali sono pari a:

$$\begin{aligned} v_{AB}(x_3) &= \frac{FHx_3(-L^2 + x_3^2)}{EI(6H + 8L)} \\ v_{BC}(x_3) &= \frac{Fx_3(6HL^2 + 3L(3H + 4L)x_3 - (3H + 4L)x_3^2)}{6EI(3H + 4L)} \\ v_{BD}(x_3) &= \frac{FL^2(H - x_3)^2 x_3}{EIH(3H + 4L)} \end{aligned} \quad (25.30)$$

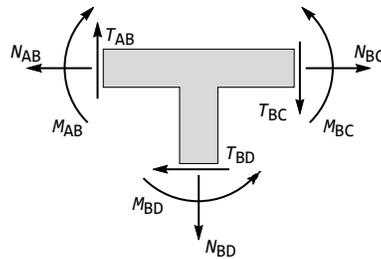


Figura 25.7: Il nodo triplo ed il suo equilibrio

ed i momenti ed i tagli sono ottenibili tramite derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{(AB)}(x_3) &= -\frac{3FHx_3}{3H+4L} \\ m^{(BD)}(x_3) &= \frac{2FL^2(2H-3x_3)}{H(3H+4L)} \\ m^{(BC)}(x_3) &= F(x_3-L) \end{aligned} \quad (25.31)$$

$$\begin{aligned} t^{(AB)}(x_3) &= -\frac{3FH}{3H+4L} \\ t^{(BC)}(x_3) &= F \\ t^{(BD)}(x_3) &= -\frac{6FL^2}{3H^2+4HL} \end{aligned} \quad (25.32)$$

Il diagramma degli spostamenti è riportato in Figura 25.8, mentre il diagramma del momento è consegnato in Figura 25.9

### I valori notevoli

L'abbassamento in corrispondenza della forza può ottenersi valutando la funzione  $u_2^{(BC)}(x_3)$  per  $x_3$  pari ad  $L$ . Trascurando l'effetto dello sforzo assiale si ha:

$$u_{2\max}^{(BC)} = \frac{FL^3}{3EI} \frac{6H+4L}{3H+4L} \quad (25.33)$$

Nel nodo triplo si hanno invece i tre momenti:

$$\begin{aligned} M^{(BA)} &= -FL \frac{3H}{3H+4L} \\ M^{(BC)} &= -FL \\ M^{(BD)} &= FL \frac{4L}{3H+4L} \end{aligned} \quad (25.34)$$

rispettando, ovviamente, l'equilibrio alla rotazione.

## 25.3 Portale con nodo quadruplo

Si riporta un esempio già risolto col metodo del rilassamento in V.Franciosi, *Problemi di Scienza delle Costruzioni*, Vol.II, pagg.172-175. Si tratta di un telaio formato da quattro aste ortogonali tra di loro, concorrenti in un punto, e vincolate come in Figura 25.10. Il carico agisce sulle due aste orizzontali, costante e di valore  $q$ . Si possono identificare quattro elementi, e quindi si

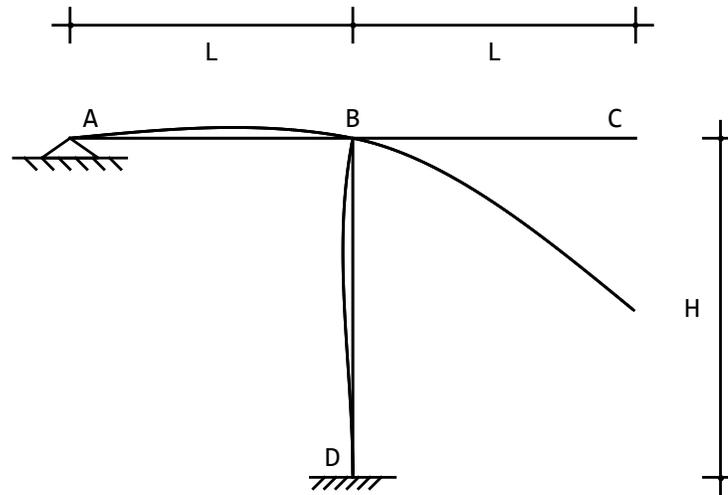


Figura 25.8: Gli spostamenti per il telaio di Figura 25.6

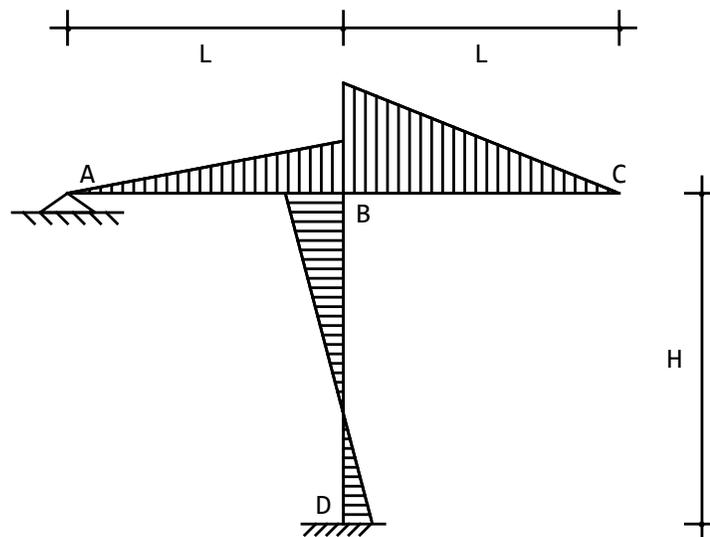


Figura 25.9: I momenti flettenti per il telaio di Figura 25.6

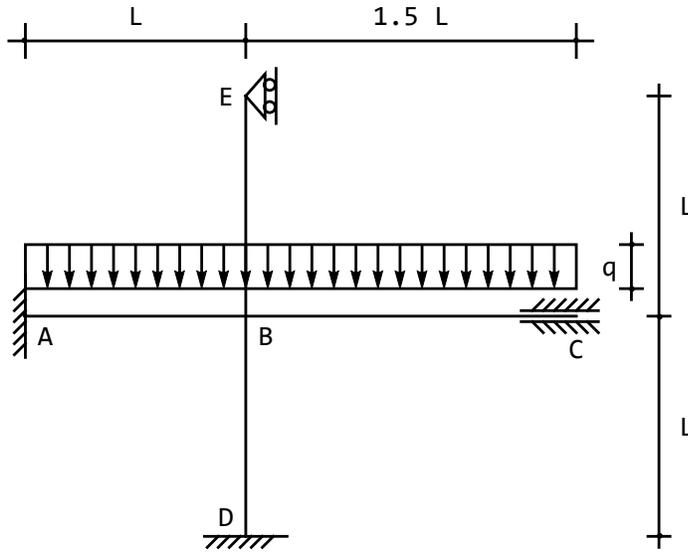


Figura 25.10: Un telaio con un nodo quadruplo

scriverà:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + \frac{q x_3^4}{24EI} \\
 u_3^{(AB)}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 + \frac{q x_3^4}{24EI} \\
 u_3^{(BC)}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3 \\
 u_2^{(EB)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 u_3^{(EB)}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 \\
 u_2^{(BD)}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 + d_2 x_3^2 + d_3 x_3^3 \\
 u_3^{(BD)}(x_3) &= h_0 + h_1 x_3
 \end{aligned} \tag{25.35}$$

Occorre imporre quindi 24 condizioni ai limiti, 12 in corrispondenza dei tre estremi, ed altre 12 in corrispondenza del nodo quadruplo:

— in  $A$  si ha un incastro, e quindi si scrivono le tre condizioni di congruenza, che annullano le tre componenti di spostamento:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(0) &= 0 \\
 u_3^{(AB)}(0) &= 0 \\
 \phi^{(AB)}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{25.36}$$

— in  $C$  si ha un incastro assialmente scorrevole, in cui si annullano gli spostamenti trasversali, e la rotazione. Inoltre, per l'equilibrio del vincolo alla traslazione orizzontale dovrà annullarsi lo sforzo normale:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}\left(\frac{3}{2}L\right) &= 0 \\ \phi^{(BC)}\left(\frac{3}{2}L\right) &= 0 \\ n^{(BC)}\left(\frac{3}{2}L\right) &= 0 \end{aligned} \quad (25.37)$$

— in  $D$  si ha un incastro, come in  $A$ :

$$\begin{aligned} u_2^{(BD)}(L) &= 0 \\ u_3^{(BD)}(L) &= 0 \\ \phi^{(BD)}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (25.38)$$

— in  $E$  si ha un carrello a piano di scorrimento verticale, sicchè l'unica condizione di congruenza da imporre proibisce lo spostamento trasversale dell'asta  $BE$ , mentre per l'equilibrio dovranno essere nulli sia lo sforzo normale che il momento flettente:

$$\begin{aligned} u_2^{(EB)}(0) &= 0 \\ n^{(EB)}(0) &= 0 \\ m^{(EB)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (25.39)$$

— nel nodo quadruplo, in  $B$ , la congruenza degli spostamenti tra le due aste orizzontali  $AB$  e  $BC$  detta le tre condizioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(L) &= u_2^{(BC)}(0) \\ u_3^{(AB)}(L) &= u_3^{(BC)}(0) \\ \phi^{(AB)}(L) &= \phi^{(BC)}(0) \end{aligned} \quad (25.40)$$

così come la congruenza tra l'asta orizzontale  $AB$  e l'asta verticale  $EB$  permette di scrivere:

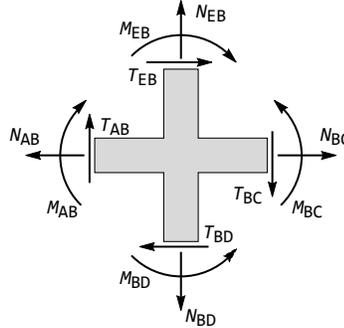
$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(L) &= u_3^{(EB)}(L) \\ u_3^{(AB)}(L) &= -u_2^{(EB)}(L) \\ \phi^{(AB)}(L) &= \phi^{(EB)}(L) \end{aligned} \quad (25.41)$$

Infine, dovranno anche imporsi le condizioni di congruenza tra l'asta  $AB$  e l'altra asta verticale  $BD$ :

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(L) &= u_3^{(BD)}(0) \\ u_3^{(AB)}(L) &= -u_2^{(BD)}(0) \\ \phi^{(AB)}(L) &= \phi^{(BD)}(0) \end{aligned} \quad (25.42)$$

L'equilibrio del nodo quadruplo in  $B$  permette di scrivere le restanti tre equazioni di equilibrio. Come può leggersi dalla Figura 25.11 si ha:

$$\begin{aligned} -n^{(BA)} + n^{(BC)} - t^{(BD)} + t^{(BE)} &= 0 \\ -t^{(BA)} + t^{(BC)} + n^{(BD)} - n^{(BE)} &= 0 \\ -m^{(BA)} + m^{(BC)} + m^{(BD)} - m^{(BE)} &= 0 \end{aligned} \quad (25.43)$$



La soluzione del risultante sistema di equazioni fornisce le costanti di integrazione, e quindi le linee elastiche. In ipotesi di inestensibilità assiale, si hanno solo gli spostamenti flessionali:

Figura 25.11: Il nodo quadruplo ed il suo equilibrio

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{qx_3^2(67L^2 - 149Lx_3 + 82x_3^2)}{1968EI} \\ u_2^{(BC)}(x_3) &= \frac{q(3L - 2x_3)^2x_3(10L + 123x_3)}{11808EI} \\ u_2^{(EB)}(x_3) &= -\frac{5Lqx_3(L^2 - x_3^2)}{1312EI} \\ u_2^{(BD)}(x_3) &= \frac{5Lq(L - x_3)^2x_3}{656EI} \end{aligned} \quad (25.44)$$

mentre si annullano le quattro linee elastiche assiali. I momenti ed i tagli si possono dedurre come:

$$\begin{aligned} m^{(AB)}(x_3) &= -\frac{1}{984}q(67L^2 - 447Lx_3 + 492x_3^2) \\ m^{(BC)}(x_3) &= -\frac{q(329L^2 - 1436Lx_3 + 984x_3^2)}{1968} \\ m^{(EB)}(x_3) &= -\frac{15}{656}qLx_3 \\ m^{(BD)}(x_3) &= \frac{5}{328}qL(2L - 3x_3) \end{aligned} \quad (25.45)$$

$$\begin{aligned} t^{(AB)}(x_3) &= \frac{149qL}{328} - qx_3 \\ t^{(BC)}(x_3) &= \frac{359qL}{492} - qx_3 \\ t^{(EB)}(x_3) &= -\frac{15qL}{656} \\ t^{(BD)}(x_3) &= -\frac{15qL}{328} \end{aligned} \quad (25.46)$$

Infine, gli sforzi normali sono nulli lungo  $EB$  e  $BC$ , l'asta  $AB$  è tesa, ed il ritto  $BD$  è compresso:

$$\begin{aligned} n^{(AB)}(x_3) &= \frac{15}{656}qL \\ n^{(BD)}(x_3) &= -\frac{1255}{984}qL \end{aligned} \quad (25.47)$$

Gli spostamenti sono riportati in Figura 25.12. Si noti che il nodo centrale ruota, ma non si sposta, permettendo l'implementazione dei metodi caratteristici dei cosiddetti *telai a nodi fissi*. I valori significativi vengono attinti sul tratto  $BC$ , sia per gli spostamenti che per i momenti. A partire dall'espressione della linea elastica  $u_2^{(BC)}$ , derivando ed uguagliando a zero, si ricava l'ascissa di massimo abbassamento:

$$x_{3max} = \frac{1}{328}(113 + \sqrt{16049})L \approx 0.7307L \quad (25.48)$$

in corrispondenza della quale si ha un abbassamento pari a:

$$u_{2max}^{(BC)} \approx 0.0146 \frac{qL^4}{EI} \quad (25.49)$$

Del tutto analogamente, il taglio nel tratto  $BC$  si annulla in:

$$x_{3max} = \frac{359}{492}L \approx 0.7297L \quad (25.50)$$

ed il momento corrispondente vale:

$$M_{2max}^{(BC)} \approx 0.098qL^2 \quad (25.51)$$

Il momento minimo viene invece attinto in corrispondenza del bipendolo, e vale:

$$M_{2min}^{(BC)} \approx -0.198qL^2 \quad (25.52)$$

Il diagramma dei momenti è riportato in Figura 25.13. Si noti la corrispondenza tra i punti di flesso del diagramma degli spostamenti ed i punti di nullo del diagramma dei momenti.

## I valori notevoli

Limitandosi al caso di rigidezza assiale infinita si ha:

$$\begin{aligned} M_A &= -\frac{67}{984}qL^2 \\ M^{BA} &= -\frac{14}{123}qL^2 \\ M^{BC} &= -\frac{329}{1968}qL^2 \end{aligned} \quad (25.53)$$

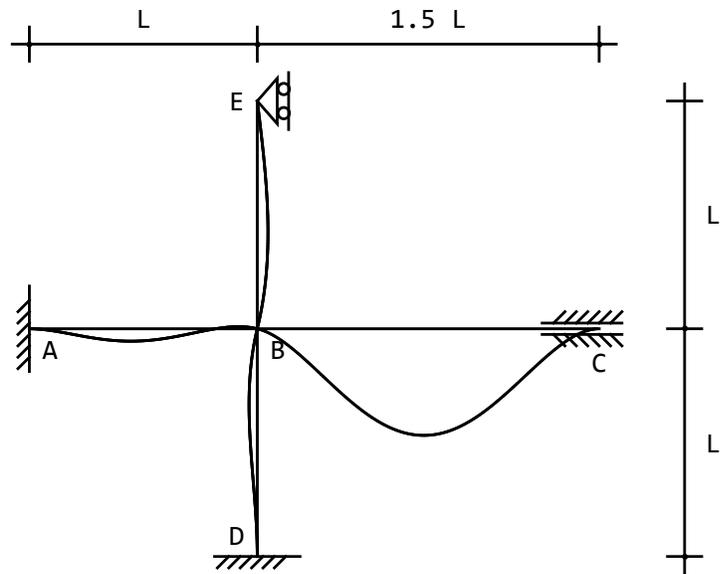


Figura 25.12: Gli spostamenti per il telaio con nodo quadruplo

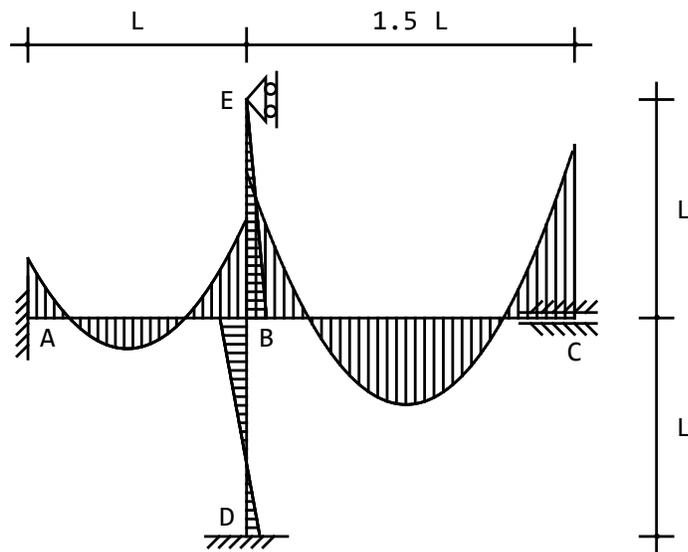


Figura 25.13: I momenti flettenti per il telaio con nodo quadruplo

$$\begin{aligned}
 M^{BE} &= \frac{5}{164}qL^2 \\
 M^{BD} &= -\frac{15}{656}qL^2 \\
 M_D &= -\frac{5}{328}qL^2 \\
 M_C &= -\frac{389}{1968}qL^2
 \end{aligned}
 \tag{25.54}$$

confermando i risultati ottenuti nel libro citato in precedenza.

## 25.4 Un telaio a due piani

Si consideri ora il telaio a due piani di Figura 25.14, incastrato al piede in corrispondenza dei tre ritti inferiori, e soggetto ai carichi di Figura.

I momenti di inerzia dei due ritti superiori  $GE$  ed  $HF$  sono pari ad  $I$ , i momenti d'inerzia dei tre ritti inferiori  $DA$ ,  $EB$  ed  $FC$  sono pari a  $2I$ , mentre per i traversi  $DE$ ,  $EF$  e  $GH$  si è assunto un momento di inerzia pari a  $5I$ . L'area di ciascun elemento è invece genericamente indicata con  $A$ , in quanto si vogliono evidenziare i risultati per rigidzze assiali infinite.

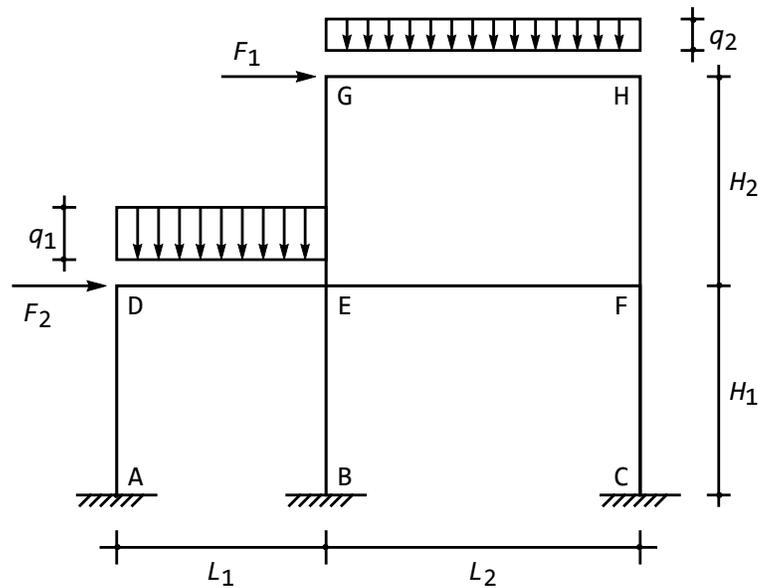


Figura 25.14: Un telaio a due piani

Si hanno quindi otto elementi, e si adottano otto sistemi di riferimento con origine nell'estremo di sinistra — per ciascun traverso — e nell'estremo superiore

— per ciascun ritto. Sarà allora, per le deformate flessionali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(DA)}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\
 u_2^{(EB)}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 + b_2x_3^2 + b_3x_3^3 \\
 u_2^{(FC)}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\
 u_2^{(DE)}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 + d_2x_3^2 + d_3x_3^3 + q_1 \frac{x_3^4}{24EI} \\
 u_2^{(EF)}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\
 u_2^{(GE)}(x_3) &= f_0 + f_1x_3 + f_2x_3^2 + f_3x_3^3 \\
 u_2^{(HF)}(x_3) &= g_0 + g_1x_3 + g_2x_3^2 + g_3x_3^3 \\
 u_2^{(GH)}(x_3) &= h_0 + h_1x_3 + h_2x_3^2 + h_3x_3^3 + q_2 \frac{x_3^4}{24EI}
 \end{aligned} \tag{25.55}$$

mentre per la deformate assiali potrà porsi:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(DA)}(x_3) &= m_0 + m_1x_3 \\
 u_3^{(EB)}(x_3) &= n_0 + n_1x_3 \\
 u_3^{(FC)}(x_3) &= o_0 + o_1x_3 \\
 u_3^{(DE)}(x_3) &= p_0 + p_1x_3 \\
 u_3^{(EF)}(x_3) &= q_0 + q_1x_3 \\
 u_3^{(GE)}(x_3) &= r_0 + r_1x_3 \\
 u_3^{(HF)}(x_3) &= s_0 + s_1x_3 \\
 u_3^{(GH)}(x_3) &= t_0 + t_1x_3
 \end{aligned} \tag{25.56}$$

Le 48 costanti di integrazione si ottengono scrivendo 48 condizioni ai limiti, tre per ogni incastro, sei in ciascuno dei nodi  $D$ ,  $G$  ed  $H$ , nove nel nodo triplo in  $F$ , e 12 nel nodo quadruplo in  $E$ . Più in dettaglio, sarà quindi:

— nei tre incastri in  $A$ ,  $B$  e  $C$  dovranno annullarsi gli spostamenti assiali e trasversali, insieme alla rotazione:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(DA)}(H_1) &= 0 \\
 \phi^{(DA)}(H_1) &= 0 \\
 u_3^{(DA)}(H_1) &= 0 \\
 u_2^{(EB)}(H_1) &= 0 \\
 \phi^{(EB)}(H_1) &= 0 \\
 u_3^{(EB)}(H_1) &= 0
 \end{aligned} \tag{25.57}$$

$$\begin{aligned}u_2^{(FC)}(H_1) &= 0 \\ \phi^{(FC)}(H_1) &= 0 \\ u_3^{(FC)}(H_1) &= 0\end{aligned}$$

— nel nodo  $D$  la congruenza impone che lo spostamento trasversale del ritto — positivo se verso sinistra — sia uguale e contrario allo spostamento del traverso, positivo verso destra. Viceversa, lo spostamento assiale del ritto è uguale allo spostamento del traverso, in quanto ambedue positivi se verso il basso. Infine, le rotazioni devono essere uguali:

$$\begin{aligned}u_2^{(DA)}(0) &= -u_3^{(DE)}(0) \\ u_3^{(DA)}(0) &= u_2^{(DE)}(0) \\ \phi^{(DA)}(0) &= \phi^{(DE)}(0)\end{aligned}\tag{25.58}$$

Nel nodo  $D$  occorre poi garantire l'equilibrio, e quindi lo sforzo di taglio nel ritto, positivo se verso sinistra, deve essere uguale alla somma dello sforzo normale nel traverso e della forza applicata  $F$ , ambedue positivi se verso destra, la somma dello sforzo normale nel ritto e dello sforzo di taglio nel traverso deve essere nulla, in quanto ambedue positivi se verso il basso. Infine, l'equilibrio alla rotazione impone che la somma dei momenti flettenti deve essere nulla, in quanto ambedue antiorari:

$$\begin{aligned}-t^{(DA)}(0) + n^{(DE)}(0) + F_1 &= 0 \\ n^{(DA)}(0) + t^{(DE)}(0) &= 0 \\ m^{(DA)}(0) + m^{(DE)}(0) &= 0\end{aligned}\tag{25.59}$$

— nel nodo  $G$ , la situazione è totalmente analoga a quella in  $D$ , e quindi possono immediatamente scriversi le sei condizioni:

$$\begin{aligned}u_2^{(GE)}(0) &= -u_3^{(GH)}(0) \\ u_3^{(GE)}(0) &= u_2^{(GH)}(0) \\ \phi^{(GE)}(0) &= \phi^{(GH)}(0)\end{aligned}\tag{25.60}$$

$$\begin{aligned}-t^{(GE)}(0) + n^{(GH)}(0) + F_2 &= 0 \\ n^{(GE)}(0) + t^{(GH)}(0) &= 0 \\ m^{(GE)}(0) + m^{(GH)}(0) &= 0\end{aligned}\tag{25.61}$$

— nel nodo  $H$  occorre considerare che le caratteristiche sul traverso cambiano di segno, e quindi le equazioni di equilibrio andranno modificate:

$$\begin{aligned}u_2^{(HF)}(0) &= u_3^{(GH)}(L_2) \\ u_3^{(HF)}(0) &= u_2^{(GH)}(L_2) \\ \phi^{(HF)}(0) &= \phi^{(GH)}(L_2)\end{aligned}\tag{25.62}$$

$$\begin{aligned}
 -n^{(GH)}(L_2) - t^{(HF)}(0) &= 0 \\
 -t^{(GH)}(L_2) + n^{(HF)}(0) &= 0 \\
 -m^{(GH)}(L_2) + m^{(HF)}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{25.63}$$

— nel nodo triplo  $F$  la congruenza degli spostamenti tra i due ritti  $HF$  ed  $FC$  impone che gli spostamenti trasversali, gli spostamenti assiali e le rotazioni siano gli stessi:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(FC)}(0) &= u_3^{(HF)}(H_2) \\
 u_2^{(FC)}(0) &= u_2^{(HF)}(H_2) \\
 \phi^{(FC)}(0) &= \phi^{(HF)}(H_2)
 \end{aligned} \tag{25.64}$$

mentre la congruenza degli spostamenti tra il traverso  $EF$  ed il ritto  $FC$  impone che lo spostamento trasversale del traverso sia uguale allo spostamento assiale del ritto, che lo spostamento assiale del traverso sia uguale e contrario allo spostamento trasversale del ritto, e che le rotazioni siano uguali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(EF)}(L_2) &= u_3^{(FC)}(0) \\
 u_3^{(EF)}(L_2) &= -u_2^{(FC)}(0) \\
 \phi^{(EF)}(L_2) &= \phi^{(FC)}(0)
 \end{aligned} \tag{25.65}$$

Ovviamente, la congruenza tra gli spostamenti del traverso  $EF$  e del ritto  $HF$  risulta automaticamente soddisfatta. Nel nodo  $F$ , poi, l'equilibrio del nodo detta le tre condizioni:

$$\begin{aligned}
 -n^{(EF)}(L_2) - t^{(FC)}(0) + t^{(HF)}(H_2) &= 0 \\
 -t^{(EF)}(L_2) - n^{(HF)}(H_2) + n^{(FC)}(0) &= 0 \\
 -m^{(EF)}(L_2) - m^{(HF)}(H_2) + m^{(FC)}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{25.66}$$

Risulta comodo considerare che i tagli positivi tendono a far ruotare il concio in senso orario, gli sforzi normali sono positivi quando di trazione, e che i momenti sono antiorari se il nodo in esame è di partenza, orari se il nodo in esame è di arrivo.

— nel nodo quadruplo  $E$  si uguagliano gli spostamenti dei due traversi  $DE$  ed  $EF$ :

$$\begin{aligned}
 u_2^{(DE)}(L_1) &= u_2^{(EF)}(0) \\
 u_3^{(DE)}(L_1) &= u_3^{(EF)}(0) \\
 \phi^{(DE)}(L_1) &= \phi^{(EF)}(0)
 \end{aligned} \tag{25.67}$$

si uguagliano gli spostamenti dei due ritti  $GE$  ed  $EB$ :

$$\begin{aligned}
 u_2^{(GE)}(H_2) &= u_2^{(EB)}(0) \\
 u_3^{(GE)}(H_2) &= u_3^{(EB)}(0) \\
 \phi^{(GE)}(H_2) &= \phi^{(EB)}(0)
 \end{aligned} \tag{25.68}$$

ed infine si esamina la congruenza tra gli spostamenti del traverso  $DE$  e del ritto  $EB$ :

$$\begin{aligned} u_2^{(DE)}(L_1) &= u_3^{(EB)}(0) \\ u_3^{(DE)}(L_1) &= -u_2^{(EB)}(0) \\ \phi^{(DE)}(L_1) &= \phi^{(EB)}(0) \end{aligned} \quad (25.69)$$

Tutte le altre equazioni di congruenza sono automaticamente soddisfatte. Infine, le tre equazioni di equilibrio si scrivono facilmente, tenendo conto di quanto osservato per il nodo triplo  $F$ :

$$\begin{aligned} -n^{(DE)}(L_1) - t^{(EB)}(0) + t^{(GE)}(H_1) + n^{(EF)}(0) &= 0 \\ -t^{(DE)}(L_1) - n^{(HF)}(H_2) + t^{(EF)}(0) + n^{(FC)}(0) &= 0 \\ -m^{(DE)}(L_1) - m^{(GE)}(H_2) + m^{(EF)}(0) + m^{(FC)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (25.70)$$

Si giunge ad un sistema di 48 equazioni in altrettante incognite, che può essere risolto con un qualsiasi programma di calcolo simbolico. Tuttavia, piuttosto che riportare le relative formule, molto lunghe e poco significative, si preferisce illustrare il comportamento del telaio in ipotesi di rigidezza assiale infinita.

La deformata è riportata in Figura 25.15, nelle ipotesi  $H_1 = H_2 = H$ ,  $L_1 = L_2 = 1.5H$ ,  $q_2 = q$ ,  $q_1 = 2q$ ,  $F_1 = F_2 = qH$ . L'infinita rigidezza assiale delle aste impedisce ai nodi di subire spostamenti verticali, ed impone che gli spostamenti orizzontali dei nodi del primo livello,  $D, E, F$ , dovranno essere uguali, così come gli spostamenti orizzontali dei nodi  $G$  ed  $H$  del secondo livello.

Per la particolare geometria, e per i particolari carichi, di Figura, si ha uno spostamento orizzontale pari a:

$$\delta_1 = \frac{73624453}{1494152064} \frac{qH^4}{EI} \approx 0.0492 \frac{qH^4}{EI} \quad (25.71)$$

per i nodi del primo piano, e:

$$\delta_2 = \frac{35504137}{373538016} \frac{qH^4}{EI} \approx 0.0950 \frac{qH^4}{EI} \quad (25.72)$$

per quelli del secondo piano.

Il diagramma dei momenti è riportato in Figura 25.16.

## 25.5 Un telaio zoppo con bipendolo

Si consideri il telaio di Figura 25.17, già studiato in precedenza attraverso la scrittura diretta delle equazioni di congruenza.

Si definiscono le linee elastiche  $u_2^{(AB)}(x_3)$  e  $u_3^{(AB)}(x_3)$ , relativamente al ritto  $AB$ ,  $u_2^{(BC)}(x_3)$  e  $u_3^{(BC)}(x_3)$  relativamente al tratto  $BC$ , e  $u_2^{(CD)}(x_3)$  e  $u_3^{(CD)}(x_3)$  relativamente al tratto  $CD$ , scegliendo le origini in  $A$ ,  $B$  e  $C$ , rispettivamente, e col solito sistema di assi locali.

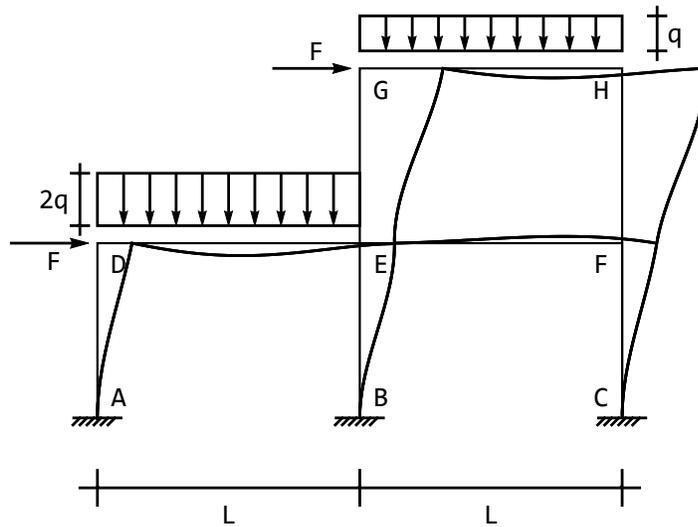


Figura 25.15: Gli spostamenti per il telaio a due piani di Figura 25.14

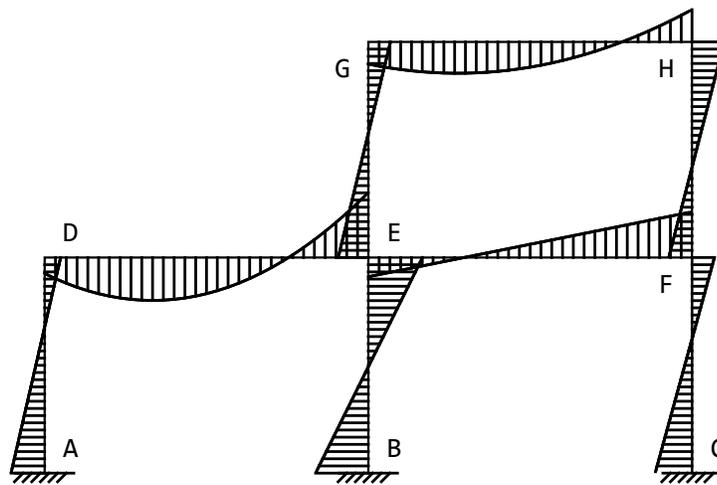


Figura 25.16: I momenti flettenti per il telaio a due piani di Figura 25.14

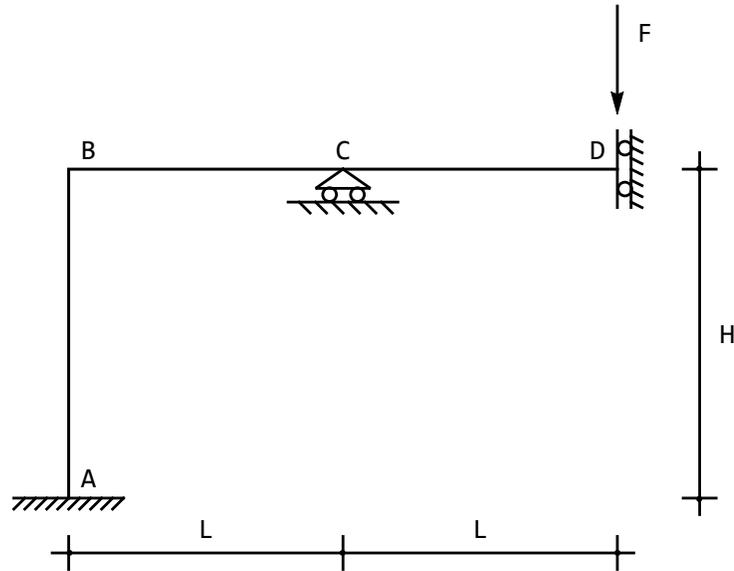


Figura 25.17: Un telaio zoppo

Si potrà scrivere, ipotizzando che le sezioni del ritto e del traverso siano costanti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\
 u_3^{(AB)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 u_3^{(BC)}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 \\
 u_3^{(CD)}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3
 \end{aligned} \tag{25.73}$$

Si sono quindi introdotte 18 costanti di integrazione, che dovranno essere definite attraverso l'imposizione di opportune condizioni ai limiti. Nella fattispecie, si avrà:

— in  $A$  l'incastro detta l'annullarsi di spostamento assiale, spostamento trasversale, e rotazione, ossia le tre equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(AB)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(AB)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(AB)'}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{25.74}$$

— in  $B$  si deve imporre la congruenza degli spostamenti, e l'equilibrio del nodo. Per la congruenza, si potranno imporre le tre condizioni:

$$\begin{aligned} u_3^{(AB)}(H) &= -u_2^{(BC)}(0) \\ u_2^{(AB)}(H) &= u_3^{(BC)}(0) \\ \phi^{(AB)}(H) &= \phi^{(BC)}(0) \end{aligned} \quad (25.75)$$

La prima impone che lo spostamento assiale del traverso — positivo se verso l'alto — sia uguale e contrario allo spostamento trasversale del ritto, mentre la seconda impone che lo spostamento trasversale del traverso sia pari allo spostamento assiale del ritto (ambedue positive se verso destra). L'ultima condizione impone l'uguaglianza delle rotazioni.

Le condizioni di equilibrio del nodo in  $B$  dettano, come si legge dalla Figura 25.18:

$$\begin{aligned} n^{(AB)} + t^{(BC)} &= 0 \\ -t^{(AB)} + n^{(BC)} &= 0 \\ -m^{(AB)} + m^{(BC)} &= 0 \end{aligned} \quad (25.76)$$

— in  $C$  la presenza dell'appoggio garantisce che gli spostamenti trasversali si annullano, mentre gli spostamenti assiali e le rotazioni sono continue. Si hanno quindi le quattro condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(L) &= 0 \\ u_2^{(CD)}(0) &= 0 \\ u_3^{(BC)}(L) &= u_3^{(CD)}(0) \\ \phi^{(BC)}(L) &= \phi^{(CD)}(0) \end{aligned} \quad (25.77)$$

Poichè il carrello introduce una reazione verticale incognita, potranno utilizzarsi solo due equazioni di equilibrio, che garantiscono la continuità di sforzi normali e momenti flettenti:

$$\begin{aligned} m^{(BC)}(L) &= m^{(CD)}(0) \\ n^{(BC)}(L) &= n^{(CD)}(0) \end{aligned} \quad (25.78)$$

— in  $D$ , infine, il bipendolo impone che siano nulle le rotazioni e gli spostamenti orizzontali, mentre lo spostamento trasversale è libero, permettendo di scrivere le due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_3^{(CD)}(L) &= 0 \\ \phi^{(CD)}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (25.79)$$

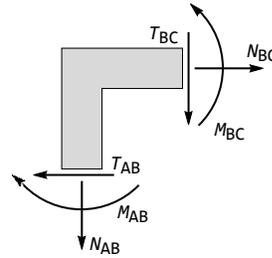


Figura 25.18: Il concio in  $B$  e le forze su di esso agenti

L'equilibrio del concio impone infine l'uguaglianza tra il taglio e la forza applicata:

$$-t^{(CD)}(L) + F = 0 \quad (25.80)$$

Le diciotto condizioni ai limiti si traducono, utilizzando le (25.73), in un sistema di diciotto equazioni, che si risolve agevolmente a fornire gli spostamenti e le caratteristiche.

Limitandosi ancora una volta al caso di inestensibilità assiale, si opera il limite per  $EA$  che tende ad infinito, ottenendo l'annullarsi delle linee elastiche assiali (telaio a nodi fissi), e gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{FL^2(H-x_3)x_3^2}{4EIH(4H+5L)} \\ u_2^{(BC)}(x_3) &= -\frac{F(L-x_3)x_3(HL+(H+2L)x_3)}{4EIH(4H+5L)} \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= \frac{Fx_3(6L^2(H+L)+3L(3H+4L)x_3)}{12EIH(4H+5L)} - \frac{Fx_3^3}{6EI} \end{aligned} \quad (25.81)$$

I momenti ed i tagli sono forniti da:

$$\begin{aligned} m^{(AB)}(x_3) &= -\frac{FL^2(H-3x_3)}{2H(4H+5L)} \\ m^{(BC)}(x_3) &= -\frac{F(2L^2-3(H+2L)x_3)}{8H+10L} \\ m^{(CD)}(x_3) &= -\frac{FL(3H+4L)}{8H+10L} - Fx_3 \end{aligned} \quad (25.82)$$

$$\begin{aligned} t^{(AB)}(x_3) &= \frac{3FL^2}{8H^2+10HL} \\ t^{(BC)}(x_3) &= -\frac{3F(H+2L)}{8H+10L} \\ t^{(CD)}(x_3) &= F \end{aligned} \quad (25.83)$$

Gli sforzi assiali sono di trazione, e valgono:

$$\begin{aligned} n^{(AB)}(x_3) &= \frac{3F(H+2L)}{8H+10L} \\ n^{(BC)}(x_3) &= n^{(CD)}(x_3) = \frac{3FL^2}{8H^2+10HL} \end{aligned} \quad (25.84)$$

In Figura 25.19 è riportato il diagramma degli spostamenti trasversali, mentre il diagramma dei momenti è identico a quello ottenuto in precedenza, attraverso l'utilizzo delle equazioni di congruenza.

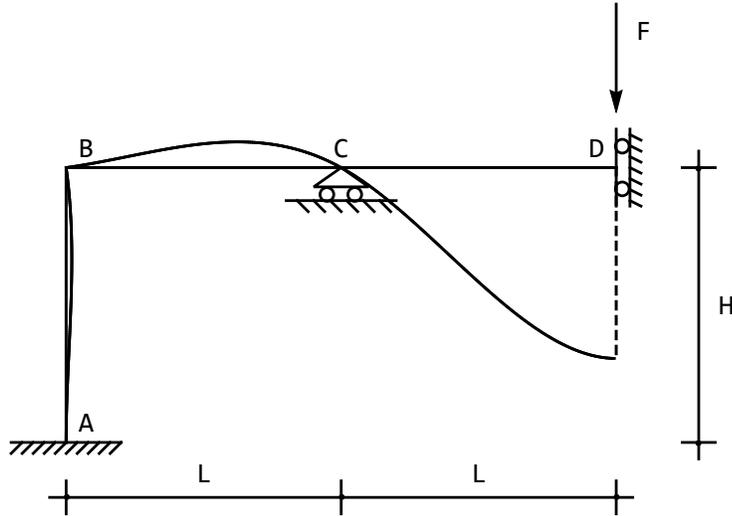


Figura 25.19: Gli spostamenti per il telaio di Figura 25.17

### I valori notevoli

L'abbassamento al di sotto della forza vale:

$$v_D = \frac{5FL^3}{36EI} \quad (25.85)$$

## 25.6 Telaio zoppo con incastro e carrello

Si consideri il semplice telaio di Figura 25.20, già studiato in precedenza attraverso la scrittura diretta delle equazioni di congruenza con il metodo misto.

Si definiscono le linee elastiche  $u_2^{(BA)}(x_3)$  e  $u_3^{(BA)}(x_3)$ , relativamente al ritto  $AB$ , e  $u_2^{(BC)}(x_3)$  e  $u_3^{(BC)}(x_3)$  relativamente al tratto  $BC$ , rispettivamente, e col solito sistema di assi locali.

Si potrà scrivere, ipotizzando che le sezioni del ritto e del traverso siano costanti:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\ u_3^{(BA)}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\ u_2^{(BC)}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\ u_3^{(BC)}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 \end{aligned} \quad (25.86)$$

Si sono introdotte dodici costanti di integrazione, che dovranno essere definite attraverso l'imposizione di opportune condizioni ai limiti. Nella fattispecie, si avrà:

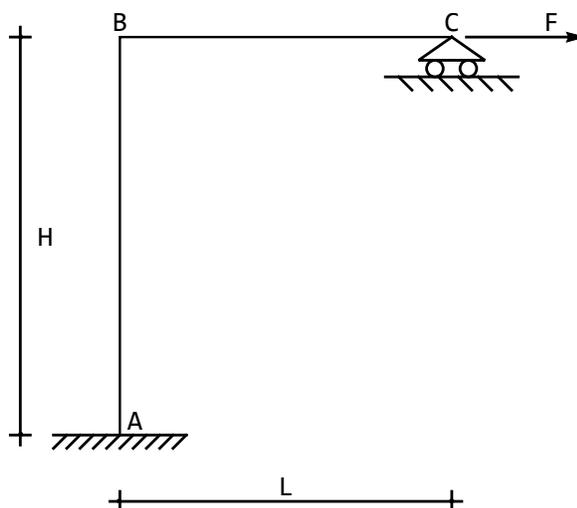
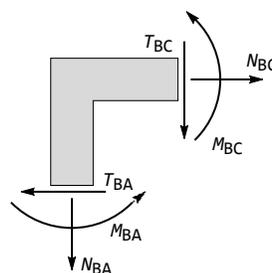


Figura 25.20: Un telaio zoppo con forza orizzontale sul traverso

— in  $A$  l'incastro detta l'annullarsi di spostamento assiale, spostamento trasversale, e rotazione, ossia le tre equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_3^{(BA)}(H) &= 0 \\ u_2^{(BA)}(H) &= 0 \\ \phi^{(BA)}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (25.87)$$

— in  $B$  si deve imporre la congruenza degli spostamenti, e l'equilibrio del nodo. Per la congruenza, si consideri che la scelta del sistema di riferimento implica che lo spostamento assiale del ritto è uguale allo spostamento trasversale del traverso (ambidue positivi verso il basso), mentre lo spostamento trasversale del ritto — positivo verso sinistra — risulta uguale e contrario allo spostamento assiale del traverso, positivo verso destra:

Figura 25.21: Il concio in  $B$  e le forze su di esso agenti

$$\begin{aligned} u_3^{(BA)}(0) &= u_2^{(BC)}(0) \\ u_2^{(BA)}(0) &= -u_3^{(BC)}(0) \\ \phi^{(BA)}(0) &= \phi^{(BC)}(0) \end{aligned} \quad (25.88)$$

Le condizioni di equilibrio del nodo in  $B$  dettano, come si evince dalla Figura 25.21:

$$\begin{aligned} n^{(BA)} + t^{(BC)} &= 0 \\ -t^{(BA)} + n^{(BC)} &= 0 \\ m^{(BA)} + m^{(BC)} &= 0 \end{aligned} \quad (25.89)$$

— in  $C$  la presenza dell'appoggio impone che lo spostamento trasversale sia nullo, di conseguenza sarà nullo il momento flettente, mentre lo sforzo normale dovrà essere pari alla forza applicata  $F$ :

$$\begin{aligned} u^{(BC)}(L) &= 0 \\ -n^{(BC)}(L) + F &= 0 \\ m^{(BC)}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (25.90)$$

### La soluzione del sistema di equazioni

Le dodici condizioni ai limiti si traducono, tramite le (25.86), in un sistema di dodici equazioni, di facile soluzione. Si hanno quindi gli spostamenti trasversali sul ritto:

$$u_2^{(BA)}(x_3) = -\frac{F(H-x_3)^2}{12EID} (H(12EIH + EAL^2(3H+4L)) + 2(3EIH + EAL^2(3H+L))x_3) \quad (25.91)$$

e sul trasverso:

$$u_2^{(BC)}(x_3) = -\frac{F}{4EID} (H^2(L-x_3)(6EIH - 2EAL^2x_3 + EALx_3^2)) \quad (25.92)$$

con:

$$D = 3EIH + EAL^2(3H+L) \quad (25.93)$$

Gli spostamenti assiali sono invece forniti da:

$$\begin{aligned} u_3^{(BA)}(x_3) &= -\frac{3FH^2L(H-x_3)}{2D} \\ u_3^{(BC)}(x_3) &= \frac{FH^3}{12EID} (12EIH + EAL^2(3H+4L)) + \frac{Fx_3}{EA} \end{aligned} \quad (25.94)$$

Le caratteristiche della sollecitazione interna si ottengono tramite derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{(BA)}(x_3) &= F \left( -\frac{3EAH^2L^2}{6EIH + 2EAL^2(3H+L)} + x_3 \right) \\ m^{(BC)}(x_3) &= \frac{3EAFH^2L(L-x_3)}{6EIH + 2EAL^2(3H+L)} \end{aligned} \quad (25.95)$$

$$t^{(BA)}(x_3) = F$$

$$t^{(BC)}(x_3) = -\frac{3EAFH^2L}{6EIH + 2EAL^2(3H + L)} \quad (25.96)$$

$$n^{(BA)}(x_3) = \frac{3EAFH^2L}{6EIH + 2EAL^2(3H + L)} \quad (25.97)$$

$$n^{(BC)}(x_3) = F$$

Se si vogliono trascurare le deformazioni assiali, occorre far tendere la rigidità assiale  $EA$  ad infinito, ottenendo le linee elastiche flessionali:

$$u_2^{(BA)}(x_3) = -\frac{F(H - x_3)^2(H(3H + 4L) + 2(3H + L)x_3)}{12EI(3H + L)} \quad (25.98)$$

$$u_2^{(BC)}(x_3) = \frac{FH^2(L - x_3)(2L - x_3)x_3}{4EIL(3H + L)}$$

insieme ai momenti ed ai tagli:

$$m^{(BA)}(x_3) = \frac{F(-3H^2 + 2(3H + L)x_3)}{2(3H + L)}$$

$$m^{(BC)}(x_3) = \frac{3FH^2(L - x_3)}{2L(3H + L)} \quad (25.99)$$

$$t^{(BA)}(x_3) = F$$

$$t^{(BC)}(x_3) = -\frac{3FH^2}{6HL + 2L^2}$$

La linea elastica assiale del ritto è ovviamente identicamente nulla, mentre il traverso trasla di una quantità costante (telaio a nodi spostabili):

$$u_3^{(AB)} = 0$$

$$u_3^{(BC)} = \frac{FH^3(3H + 4L)}{12EI(3H + L)} \quad (25.100)$$

Infine, gli sforzi normali sono positivi, e pari a:

$$n^{(BA)}(x_3) = \frac{3FH^2}{6HL + 2L^2} \quad (25.101)$$

$$n^{(BC)}(x_3) = F$$

In Figura 25.22 è riportato il diagramma degli spostamenti trasversali, mentre il diagramma dei momenti è identico a quello ottenuto in precedenza col metodo misto.

## I valori notevoli

Lo spostamento orizzontale del carrello è pari a:

$$w_C = \frac{FL}{EA} + \frac{FH^3(12EIH + EAL^2(3H + 4L))}{12EI(3EIH + EAL^2(3H + L))} \quad (25.102)$$

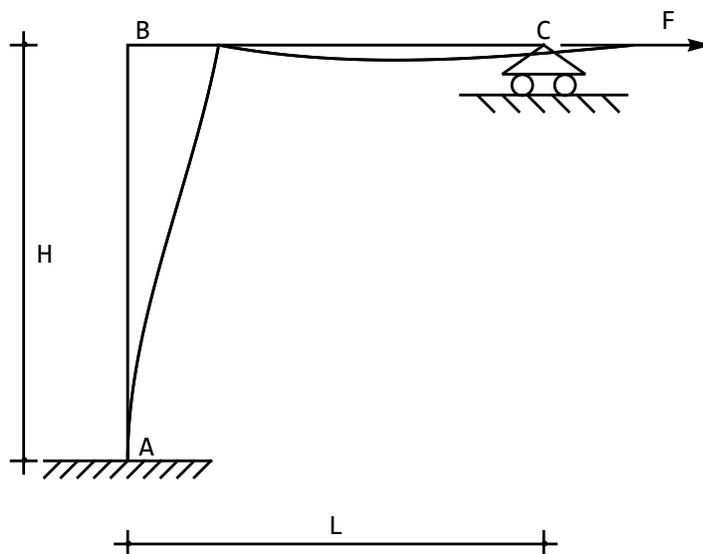


Figura 25.22: Gli spostamenti per il telaio di Figura 25.20

o, al limite per  $EA$  che va ad infinito:

$$w_C = \frac{FH^3(3H + 4L)}{12EI(3H + L)} \quad (25.103)$$

e per  $H = L$ :

$$w_C = \frac{7}{48} \frac{FL^3}{EI} \quad (25.104)$$

## 25.7 Una trave doppia collegata da un pendolo

Si vuole ora studiare il telaio di Figura 25.23, costituito da due travi collegate da un pendolo. Per le travi si potrà scrivere, ipotizzando che le rigidezze flessionali siano costanti e pari ad  $EI$ :

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\ u_3^{(AB)}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \\ u_2^{(BC)}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\ u_3^{(BC)}(x_3) &= d_0 + d_1x_3 \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \\ u_3^{(CD)}(x_3) &= f_0 + f_1x_3 \end{aligned} \quad (25.105)$$

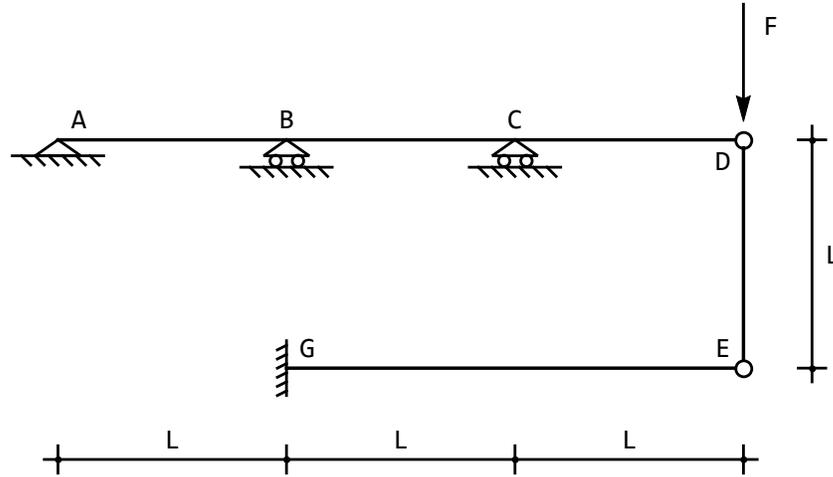


Figura 25.23: Una trave doppia

$$u_2^{(DE)}(x_3) = g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3$$

$$u_3^{(DE)}(x_3) = h_0 + h_1 x_3$$

Per il pendolo, invece, può supporre *a priori* che esso sia soggetto al solo sforzo normale, e quindi anche gli spostamenti trasversali saranno lineari:

$$u_2^{(GE)}(x_3) = m_0 + m_1 x_3 + m_2 x_3^2 + m_3 x_3^3 \quad (25.106)$$

$$u_3^{(GE)}(x_3) = n_0 + n_1 x_3$$

Si sono quindi introdotte ventotto costanti di integrazione, che dovranno essere definite attraverso l'imposizione di opportune condizioni ai limiti. Nella fattispecie, si avrà:

— in  $A$  l'appoggio detta l'annullarsi di spostamento assiale e spostamento trasversale, mentre il momento sarà nullo:

$$u_3^{(AB)}(0) = 0$$

$$u_2^{(AB)}(0) = 0 \quad (25.107)$$

$$m^{(AB)}(0) = 0$$

— in  $B$  il carrello impedisce lo spostamento verticale, mentre si avrà continuità di rotazioni e spostamenti assiali:

$$u_3^{(AB)}(L) = u_3^{(BC)}(0)$$

$$u_2^{(AB)}(L) = 0$$

$$u_2^{(BC)}(0) = 0$$

$$\phi^{(AB)}(L) = \phi^{(BC)}(0) \quad (25.108)$$

mentre momenti e sforzi assiali dovranno essere continui, ed il taglio subisce una discontinuità pari alla reazione del carrello:

$$\begin{aligned} m^{(AB)}(L) &= m^{(BC)}(0) \\ n^{(AB)}(L) &= n^{(BC)}(0) \end{aligned} \quad (25.109)$$

— in  $C$ , del tutto analogamente a quanto accade in  $B$ , si ha:

$$\begin{aligned} u_3^{(BC)}(L) &= u_3^{(CD)}(0) \\ u_2^{(BC)}(L) &= 0 \\ u_2^{(CD)}(0) &= 0 \\ \phi^{(BC)}(L) &= \phi^{(CD)}(0) \\ m^{(BC)}(L) &= m^{(CD)}(0) \\ n^{(BC)}(L) &= n^{(CD)}(0) \end{aligned} \quad (25.110)$$

— in  $D$ , la congruenza impone che lo spostamento trasversale dell'asta  $CD$  sia uguale allo spostamento assiale del pendolo, mentre lo spostamento assiale dell'asta  $CD$  risulta uguale e contrario allo spostamento trasversale del pendolo:

$$\begin{aligned} u_3^{(CD)}(L) &= -u_2^{(DE)}(0) \\ u_2^{(CD)}(L) &= u_3^{(DE)}(0) \end{aligned} \quad (25.111)$$

mentre nulla può dirsi sulle rotazioni. Inoltre, l'equilibrio del nodo impone le tre condizioni:

$$\begin{aligned} m^{(DC)}(L) &= 0 \\ n^{(DC)}(L) &= 0 \\ -t^{(DC)}(L) + n^{(DE)}(0) + F &= 0 \end{aligned} \quad (25.112)$$

— in  $E$ , analogamente a quanto osservato in  $D$ , si hanno le condizioni di congruenza;

$$\begin{aligned} u_3^{(DE)}(L) &= u_2^{(GE)}(2L) \\ u_2^{(DE)}(L) &= -u_3^{(GE)}(2L) \end{aligned} \quad (25.113)$$

Le condizioni di equilibrio devono imporre l'annullarsi del momento flettente e dello sforzo normale nella trave  $GE$ , l'uguaglianza tra il taglio nella trave e lo sforzo normale nel pendolo:

$$\begin{aligned} m^{(GE)}(2L) &= 0 \\ n^{(GE)}(2L) &= 0 \\ -t^{(GE)}(2L) - n^{(DE)}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (25.114)$$

— Infine, nell'incastro  $G$  bisognerà soddisfare le tre condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_3^{(GE)}(0) &= 0 \\ u_2^{(GE)}(0) &= 0 \\ \phi^{(GE)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (25.115)$$

Gli spostamenti assiali sono diversi da zero solo sul pendolo, laddove sono nulli gli spostamenti trasversali. Le linee elastiche sono fornite da:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{F(3EI + 8EAL^2)x_3(L^2 - x_3^2)}{3EI(24EI + 79EAL^2)} \\ u_2^{(BC)}(x_3) &= -\frac{F(3EI + 8EAL^2)x_3(2L^2 + 3Lx_3 - 5x_3^2)}{3EI(24EI + 79EAL^2)} \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= \frac{F(3EI + 8EAL^2)x_3(7L^2 + 12Lx_3 - 4x_3^2)}{3EI(24EI + 79EAL^2)} \\ u_2^{(GE)}(x_3) &= \frac{5EAF L^2(6L - x_3)x_3^2}{2EI(24EI + 79EAL^2)} \\ u_3^{(DE)}(x_3) &= \frac{5FL^2(3EIL + 8EAL^3 - 3EIx_3)}{EI(24EI + 79EAL^2)} \end{aligned} \quad (25.116)$$

e le caratteristiche della sollecitazione interna, per successive derivazioni, sono:

$$\begin{aligned} m^{(AB)}(x_3) &= \frac{2F(3EI + 8EAL^2)x_3}{24EI + 79EAL^2} \\ m^{(BC)}(x_3) &= \frac{2F(3EI + 8EAL^2)(L - 5x_3)}{24EI + 79EAL^2} \\ m^{(CD)}(x_3) &= -\frac{8F(3EI + 8EAL^2)(L - x_3)}{24EI + 79EAL^2} \\ m^{(GE)}(x_3) &= \frac{15EAF L^2(-2L + x_3)}{24EI + 79EAL^2} \\ t^{(AB)}(x_3) &= \frac{2F(3EI + 8EAL^2)}{24EI + 79EAL^2} \\ t^{(BC)}(x_3) &= -\frac{10F(3EI + 8EAL^2)}{24EI + 79EAL^2} \\ t^{(CD)}(x_3) &= \frac{8F(3EI + 8EAL^2)}{24EI + 79EAL^2} \\ t^{(GE)}(x_3) &= \frac{15EAF L^2}{24EI + 79EAL^2} \\ n^{(DE)}(x_3) &= -\frac{15EAF L^2}{24EI + 79EAL^2} \end{aligned} \quad (25.117)$$

Se si vuol trascurare la deformabilità assiale, non resta che far tendere  $EA$  all'infinito, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{8Fx_3(L^2 - x_3^2)}{237EI} \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= \frac{8Fx_3(-2L^2 - 3Lx_3 + 5x_3^2)}{237EI} \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= \frac{8Fx_3(7L^2 + 12Lx_3 - 4x_3^2)}{237EI} \\
 u_2^{(GE)}(x_3) &= \frac{5F(6L - x_3)x_3^2}{158EI} \\
 u_3^{(DE)}(x_3) &= \frac{40FL^3}{79EI}
 \end{aligned} \tag{25.118}$$

per quanto riguarda le linee elastiche, mentre i momenti si semplificano in:

$$\begin{aligned}
 m^{(AB)}(x_3) &= \frac{16Fx_3}{79} \\
 m^{(BC)}(x_3) &= \frac{16}{79}F(L - 5x_3) \\
 m^{(CD)}(x_3) &= -\frac{64}{79}F(L - x_3) \\
 m^{(GE)}(x_3) &= -\frac{15}{79}F(2L - x_3)
 \end{aligned} \tag{25.119}$$

Infine, il pendolo risulta compresso, con sforzo normale pari a:

$$n^{(DE)}(x_3) = -\frac{15F}{79} \tag{25.120}$$

Il diagramma degli spostamenti è riportato in Figura 25.24. L'abbassamento del pendolo è valutabile come:

$$\delta_{DE} = \frac{40}{79} \frac{FL^3}{EI} \tag{25.121}$$

mentre le reazioni degli appoggi sono fornite da:

$$\begin{aligned}
 R_A &= -t^{(AB)}(x_3 = 0) = -\frac{16F}{79} \\
 R_B &= t^{(AB)}(x_3 = L) - t^{(BC)}(x_3 = 0) = \frac{96F}{79} \\
 R_C &= t^{(BC)}(x_3 = L) - t^{(CD)}(x_3 = 0) = -\frac{144F}{79}
 \end{aligned} \tag{25.122}$$

e nell'incastro:

$$\begin{aligned}
 R_{Gv} &= -t^{(GE)}(x_3 = 0) = -\frac{15F}{79} \\
 R_{Gh} &= 0 \\
 \mathcal{M}_G &= -m^{(GE)}(x_3 = 0) = \frac{30FL}{79}
 \end{aligned} \tag{25.123}$$

Si verifichi che sono soddisfatte le equazioni di equilibrio alla traslazione verticale ed alla rotazione (ad esempio intorno all'incastro  $G$ ).

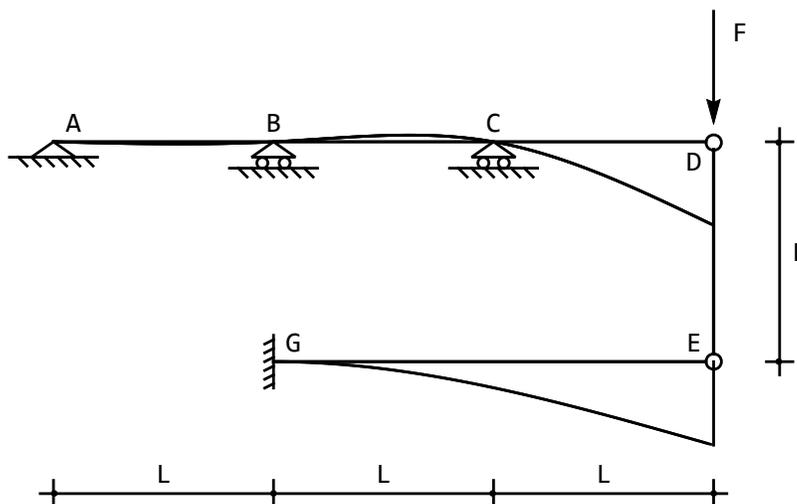


Figura 25.24: Gli spostamenti per il telaio di Figura 25.23

## 25.8 Un telaio chiuso

Si vuole ora studiare la maglia chiusa di Figura 25.25, ottenuta per riduzione da un sistema simmetrico, antisimmetricamente caricato.

Si introducono cinque sistemi di riferimento, e quindi, in assenza di carichi distribuiti, si hanno le linee elastiche:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\
 u_3^{(AB)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\
 u_2^{(CA)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 u_3^{(CA)}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 \\
 u_3^{(CD)}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3 \\
 u_2^{(DE)}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 \\
 u_3^{(DE)}(x_3) &= h_0 + h_1 x_3 \\
 u_2^{(EB)}(x_3) &= m_0 + m_1 x_3 + m_2 x_3^2 + m_3 x_3^3 \\
 u_3^{(EB)}(x_3) &= n_0 + n_1 x_3
 \end{aligned} \tag{25.124}$$

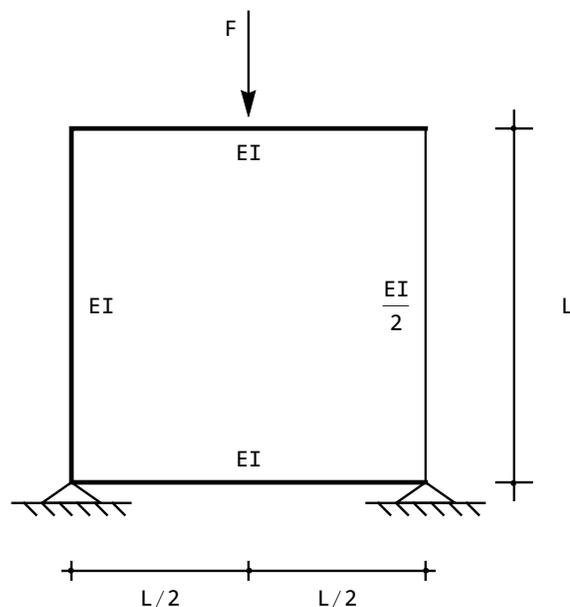


Figura 25.25: Una maglia chiusa con il ritto di destra a rigidezza flessionale (ed assiale) dimezzata

Si impongono ora le opportune condizioni di congruenza ed equilibrio nei quattro vertici del quadrato, e nella sezione di applicazione della forza:

— in corrispondenza dell'appoggio in  $A$ , si hanno cinque condizioni di congruenza, che esprimono l'annullarsi delle componenti di spostamento (sia per l'asta  $AB$  che per l'asta  $CA$ ) e l'uguaglianza delle rotazioni, ed una sola condizione di equilibrio, che impone l'uguaglianza dei momenti flettenti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(0) &= 0 \\
 u_3^{(AB)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(CA)}(L) &= 0 \\
 u_3^{(CA)}(L) &= 0 \\
 \phi^{(AB)}(0) &= \phi^{(CA)}(L) \\
 m^{(AB)}(0) - m^{(CA)}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{25.125}$$

— nel nodo  $C$ , come usuale, si impongono le tre condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(CA)}(0) &= u_2^{(CD)}(0) \\
 u_2^{(CA)}(0) &= -u_3^{(CD)}(0) \\
 \phi^{(CA)}(0) &= \phi^{(CD)}(0)
 \end{aligned} \tag{25.126}$$

e le tre condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} n^{(CA)}(0) + t^{(CD)}(0) &= 0 \\ -t^{(CA)}(0) + n^{(CD)}(0) &= 0 \\ m^{(CA)}(0) + m^{(CD)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (25.127)$$

— in corrispondenza della forza si dovrà imporre la continuità degli spostamenti e delle rotazioni, degli sforzi normali e dei momenti flettenti, mentre nell'equilibrio dei tagli entrerà in gioco la forza esterna  $F$ :

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}\left(\frac{L}{2}\right) &= u_2^{(DE)}(0) \\ u_3^{(CD)}\left(\frac{L}{2}\right) &= u_3^{(DE)}(0) \\ \phi^{(CD)}\left(\frac{L}{2}\right) &= \phi^{(DE)}(0) \\ -n^{(CD)}\left(\frac{L}{2}\right) + n^{(DE)}(0) &= 0 \\ -m^{(CD)}\left(\frac{L}{2}\right) + m^{(DE)}(0) &= 0 \\ -t^{(CD)}\left(\frac{L}{2}\right) + t^{(DE)}(0) + F &= 0 \end{aligned} \quad (25.128)$$

— nel nodo  $E$ , si impongono le tre condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_3^{(DE)}\left(\frac{L}{2}\right) &= -u_2^{(EB)}(0) \\ u_2^{(DE)}\left(\frac{L}{2}\right) &= u_3^{(EB)}(0) \\ \phi^{(DE)}\left(\frac{L}{2}\right) &= \phi^{(EB)}(0) \end{aligned} \quad (25.129)$$

e le tre condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} -n^{(DE)}\left(\frac{L}{2}\right) - t^{(EB)}(0) &= 0 \\ -t^{(DE)}\left(\frac{L}{2}\right) + n^{(EB)}(0) &= 0 \\ -m^{(DE)}\left(\frac{L}{2}\right) + m^{(EB)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (25.130)$$

— infine, nel nodo  $B$  si hanno condizioni simile a quelle già scritte nell'altro appoggio, ossia cinque equazioni di congruenza ed una di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(L) &= 0 \\
 u_3^{(AB)}(L) &= 0 \\
 u_2^{(EB)}(L) &= 0 \\
 u_3^{(EB)}(L) &= 0 \\
 \phi^{(AB)}(L) &= \phi^{(EB)}(L) \\
 -m^{(AB)}(L) - m^{(EB)}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{25.131}$$

Trasformando queste trenta condizioni in altrettante equazioni nelle costanti di integrazione, risolvendo il sistema e ricavando gli spostamenti trasversali si ottiene, portando per semplicità la rigidezza assiale ad infinito:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= -\frac{F}{1248EI} (L - x_3) x_3 (8L + 3x_3) \\
 u_2^{(CA)}(x_3) &= -\frac{F}{3744EI} (L - x_3) (13L^2 - 89Lx_3 + 52x_3^2) \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= \frac{F}{1248EI} x_3 (34L^2 + 47Lx_3 - 107x_3^2) \\
 u_2^{(DE)}(x_3) &= \frac{F}{9984EI} (123L^3 + 6L^2x_3 - 908Lx_3^2 + 808x_3^3) \\
 u_2^{(EB)}(x_3) &= -\frac{F}{3744EI} (L - x_3) (13L^2 + 124Lx_3 - 104x_3^2)
 \end{aligned} \tag{25.132}$$

mentre gli spostamenti assiali sono limitati al traverso superiore, dove sono costanti e pari a:

$$u_3^{(CD)}(x_3) = u_2^{(DE)}(x_3) = \frac{FL^3}{288EI} \tag{25.133}$$

Il diagramma degli spostamenti si presenta quindi come in Figura 25.27. Si noti che lo spostamento massimo non si ottiene in corrispondenza della forza, ma — a causa della mancanza di simmetria — leggermente più a destra. Ed infatti annullando la rotazione del tratto  $DE$  si nota che l'ascissa di nullo è spostata di  $0.0033L$  rispetto alla mezzeria. Comunque, la discrepanza tra l'abbassamento in mezzeria e l'abbassamento massimo è trascurabile, e può assumersi:

$$u_{2\max} \approx u_{2F} = \frac{41}{3328} \frac{FL^3}{EI} \approx 0.0123197 \frac{FL^3}{EI} \tag{25.134}$$

Tramite derivazioni successive si possono ricavare agevolmente le rotazioni e le caratteristiche flessionali. I momenti flettenti variano linearmente, secondo

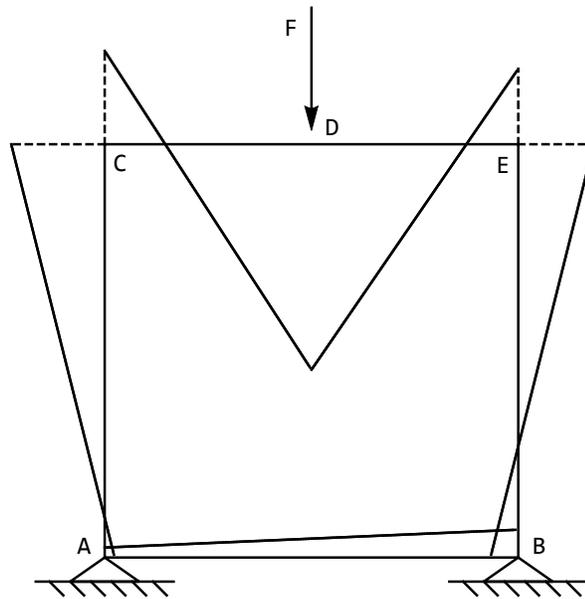


Figura 25.26: Il diagramma dei momenti per la maglia chiusa di Figura 25.25

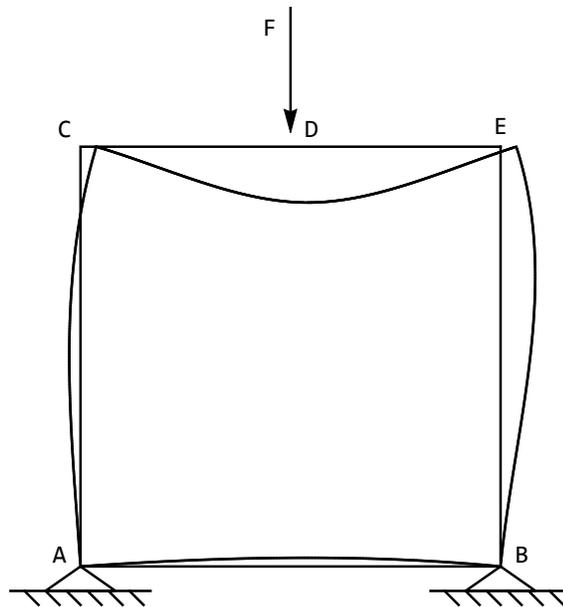


Figura 25.27: Gli spostamenti per la maglia chiusa di Figura 25.25

le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
 m^{(AB)}(x_3) &= -\frac{F}{624}(5L + 9x_3) \\
 m^{(CA)}(x_3) &= \frac{F}{624}(47L - 52x_3) \\
 m^{(CD)}(x_3) &= -\frac{F}{624}(47L - 321x_3) \\
 m^{(DE)}(x_3) &= \frac{F}{1248}(227L - 606x_3) \\
 m^{(EB)}(x_3) &= -\frac{F}{312}(19L - 26x_3)
 \end{aligned}
 \tag{25.135}$$

ed il diagramma si presenta come in Figura 25.26.

Il valore più significativo è attinto al di sotto della forza, ove si avrà

$$M_F = \frac{227}{1248}FL \approx 0.1819FL \tag{25.136}$$

Lo sforzo di taglio in  $AB$  è diverso da zero, a causa della mancanza di simmetria:

$$t^{(AB)}(x_3) = -\frac{3}{208}F \tag{25.137}$$

mentre sui ritti sarà:

$$\begin{aligned}
 t^{(CA)}(x_3) &= -\frac{F}{12} \\
 t^{(EB)}(x_3) &= \frac{F}{12}
 \end{aligned}
 \tag{25.138}$$

Sul traverso superiore, infine, sarà:

$$\begin{aligned}
 t^{(CD)}(x_3) &= \frac{107}{208}F \\
 t^{(DE)}(x_3) &= -\frac{101}{208}F
 \end{aligned}
 \tag{25.139}$$

Lo sforzo normale in  $AB$  è nullo, mentre nei due tratti verticali si ha una leggera dissimmetria, dovuta alla diversità di rigidezza flessionale. La forza  $F$ , invece di suddividersi equamente, conduce a:

$$\begin{aligned}
 n^{(CA)}(x_3) &= -\frac{107F}{208} \\
 n^{(EB)}(x_3) &= -\frac{101F}{208}
 \end{aligned}
 \tag{25.140}$$

Sul tratto superiore lo sforzo normale è costante, e pari a:

$$n^{(CD)}(x_3) = n^{(DE)}(x_3) = -\frac{F}{12} \tag{25.141}$$

Infine, le reazioni vincolari possono calcolarsi dall'equilibrio dei conci in  $A$  ed in  $B$ :

$$\begin{aligned}
 R_{Av} &= n^{(CA)}(L) - t^{(AB)}(0) = -\frac{F}{2} \\
 R_{Bv} &= n^{(EB)}(L) + t^{(AB)}(L) = -\frac{F}{2} \\
 R_{Ah} &= -t^{(CA)}(L) - n^{(AB)}(0) = \frac{F}{12} \\
 R_{Bh} &= -t^{(EB)}(L) + n^{(AB)}(L) = -\frac{F}{12}
 \end{aligned}
 \tag{25.142}$$

## 25.9 Portale a quattro cerniere e pendolo

Si vuole ora studiare il portale a quattro cerniere con pendolo di Figura 25.28, e pur essendo esso isostatico, si vuole applicare il metodo della linea elastica al fine di ottenere la deformata e le caratteristiche della sollecitazione interna. In un primo momento si tien conto delle deformabilità assiali, scrivendo quindi le otto linee elastiche flessionali ed assiali:

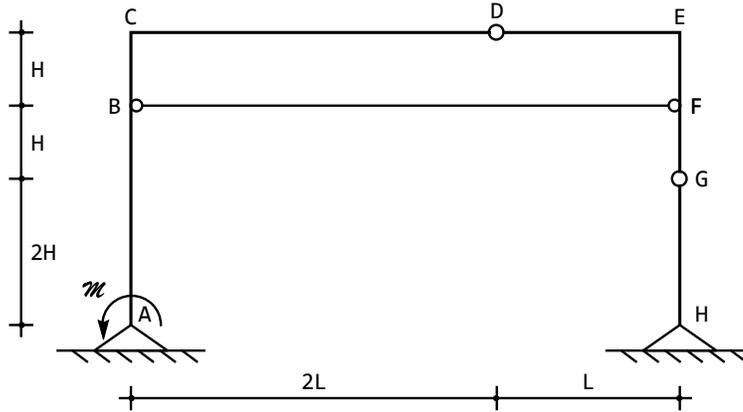


Figura 25.28: Un telaio a quattro cerniere e pendolo

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\
 u_3^{(AB)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 u_3^{(BC)}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 \\
 u_3^{(CD)}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3
 \end{aligned}
 \tag{25.143}$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{(DE)}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 \\
 u_3^{(DE)}(x_3) &= h_0 + h_1 x_3 \\
 u_2^{(FE)}(x_3) &= m_0 + m_1 x_3 + m_2 x_3^2 + m_3 x_3^3 \\
 u_3^{(FE)}(x_3) &= n_0 + n_1 x_3 \\
 u_2^{(GF)}(x_3) &= p_0 + p_1 x_3 + p_2 x_3^2 + p_3 x_3^3 \\
 u_3^{(GF)}(x_3) &= q_0 + q_1 x_3 \\
 u_2^{(HG)}(x_3) &= r_0 + r_1 x_3 + r_2 x_3^2 + r_3 x_3^3 \\
 u_3^{(HG)}(x_3) &= s_0 + s_1 x_3 \\
 u_2^{(BF)}(x_3) &= r_0 + r_1 x_3 \\
 u_3^{(BF)}(x_3) &= s_0 + s_1 x_3
 \end{aligned} \tag{25.144}$$

Si noti che per il pendolo si sono scritte due linee elastiche lineari, ipotizzando *a priori* che momenti flettenti e tagli siano nulli.

Si impongono ora le opportune condizioni di congruenza ed equilibrio:

— in corrispondenza dell'appoggio in  $A$ , si hanno due condizioni di congruenza, che esprimono l'annullarsi delle componenti di spostamento, e la condizione di equilibrio, che impone che il momento flettente sia uguale (e contrario in segno) alla coppia applicata:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(0) &= 0 \\
 u_3^{(AB)}(0) &= 0 \\
 m^{(AB)}(0) + \mathcal{M} &= 0
 \end{aligned} \tag{25.145}$$

— nel nodo  $B$ , si impongono le tre condizioni di congruenza tra gli spostamenti e le rotazioni dei due tratti di ritto:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(AB)}(3H) &= u_3^{(BC)}(0) \\
 u_2^{(AB)}(3H) &= u_2^{(BC)}(0) \\
 \phi^{(AB)}(3H) &= \phi^{(BC)}(0)
 \end{aligned} \tag{25.146}$$

nonchè le due condizioni di congruenza tra gli spostamenti del ritto e del pendolo:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(AB)}(3H) &= -u_2^{(BF)}(0) \\
 u_2^{(AB)}(3H) &= u_3^{(BF)}(0)
 \end{aligned} \tag{25.147}$$

Dovranno poi imporsi le tre condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 n^{(AB)}(3H) - n^{(BC)}(0) &= 0 \\
 -t^{(AB)}(3H) + t^{(BC)}(0) + n^{(BF)}(0) &= 0 \\
 -m^{(AB)}(3H) + m^{(BC)}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{25.148}$$

— in corrispondenza del nodo  $C$  si hanno le usuali condizioni di congruenza, per cui lo spostamento trasversale del ritto  $BC$  — positivo se verso destra — dovrà essere uguale allo spostamento assiale del traverso  $CD$ , mentre lo spostamento assiale del ritto è positivo se verso l'alto, e quindi uguale e contrario allo spostamento trasversale del traverso — che è positivo se verso il basso. Le rotazioni dovranno essere uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(H) &= u_3^{(CD)}(0) \\ u_3^{(BC)}(H) &= -u_2^{(CD)}(0) \\ \phi^{(BC)}(H) &= \phi^{(CD)}(0) \end{aligned} \quad (25.149)$$

Le tre equazioni di equilibrio si scrivono tenendo conto che il nodo  $C$  è nodo di arrivo per il ritto, e nodo di partenza per il traverso:

$$\begin{aligned} n^{(BC)}(H) + t^{(CD)}(0) &= 0 \\ -t^{(BC)}(H) + n^{(CD)}(0) &= 0 \\ -m^{(BC)}(H) + m^{(CD)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (25.150)$$

— in corrispondenza della cerniera in  $D$ , la congruenza detta che gli spostamenti assiali e trasversali devono essere continui, mentre le rotazioni saranno discontinue:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}(2L) &= u_2^{(DE)}(0) \\ u_3^{(CD)}(2L) &= u_3^{(DE)}(0) \end{aligned} \quad (25.151)$$

Per l'equilibrio, i momenti dovranno annullarsi, mentre sforzi normali e tagli saranno continui:

$$\begin{aligned} m^{(CD)}(2L) &= 0 \\ m^{(DE)}(0) &= 0 \\ n^{(BC)}(2L) &= N^{(CD)}(0) \\ t^{(BC)}(2L) &= T^{(CD)}(0) \end{aligned} \quad (25.152)$$

— in corrispondenza del nodo  $E$  si hanno condizioni simili a quelle già scritte in  $C$ : lo spostamento trasversale del tratto  $DE$  è positivo se verso il basso, e deve essere uguale e contrario allo spostamento assiale del ritto  $FE$  — positivo se verso l'alto. Analogamente, lo spostamento assiale del tratto  $DE$  è positivo se verso destra, e deve quindi essere uguale allo spostamento trasversale del tratto  $FE$ :

$$\begin{aligned} u_2^{(DE)}(L) &= -u_3^{(FE)}(H) \\ u_3^{(DE)}(L) &= u_2^{(FE)}(H) \\ \phi^{(DE)}(L) &= \phi^{(FE)}(H) \end{aligned} \quad (25.153)$$

Le equazioni di equilibrio sono immediate, considerando che il nodo  $E$  è di arrivo per ambedue i tratti:

$$\begin{aligned}
 -n^{(DE)}(L) - t^{(FE)}(H) &= 0 \\
 -t^{(DE)}(L) + n^{(FE)}(H) &= 0 \\
 -m^{(DE)}(L) - m^{(FE)}(H) &= 0
 \end{aligned} \tag{25.154}$$

— in  $F$  si ha una situazione analoga a  $B$ . La congruenza va imposta tra gli spostamenti e le rotazioni dei due tratti verticali:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(FE)}(0) &= u_3^{(GF)}(H) \\
 u_2^{(FE)}(0) &= u_2^{(GF)}(H) \\
 \phi^{(FE)}(0) &= \phi^{(GF)}(H)
 \end{aligned} \tag{25.155}$$

nonchè tra gli spostamenti del ritto e del pendolo:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(FE)}(0) &= -u_2^{(BF)}(3L) \\
 u_2^{(FE)}(0) &= u_3^{(BF)}(3L)
 \end{aligned} \tag{25.156}$$

L'equilibrio alla traslazione orizzontale deve tener conto dello sforzo normale nel pendolo  $BF$ , positivo se verso sinistra:

$$\begin{aligned}
 n^{(FE)}(0) - n^{(GF)}(H) &= 0 \\
 t^{(FE)}(0) - t^{(GF)}(H) - n^{(BF)}(3L) &= 0 \\
 -m^{(FE)}(0) + m^{(GF)}(H) &= 0
 \end{aligned} \tag{25.157}$$

— in corrispondenza della cerniera in  $G$  si avrà, come in  $D$ :

$$\begin{aligned}
 u_2^{(GF)}(0) &= u_2^{(HG)}(2H) \\
 u_3^{(GF)}(0) &= u_3^{(HG)}(2H) \\
 m^{(GF)}(0) &= 0 \\
 m^{(HG)}(2H) &= 0 \\
 n^{(GF)}(0) &= n^{(HG)}(2H) \\
 t^{(GF)}(0) &= t^{(HG)}(2H)
 \end{aligned} \tag{25.158}$$

— infine, nell'appoggio in  $H$  si ha l'annullarsi degli spostamenti e del momento flettente:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(HG)}(0) &= 0 \\
 u_3^{(HG)}(0) &= 0 \\
 m^{(HG)}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{25.159}$$

Si è giunti quindi ad un sistema di quarant'equazioni in altrettante incognite, che può essere risolto, a fornire le richieste linee elastiche flessionali ed assiali. Si riporta solo il caso limite di rigidità assiale infinita, caratterizzato da spostamenti trasversali pari a:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)} &= -\frac{\mathcal{M}(202H + 18L - 27x_3)x_3}{54EI} \\
 u_2^{(BC)} &= -\frac{\mathcal{M}(3H^2(121H + 18L) + 2H(20H + 9L)x_3 - 27Hx_3^2 + 3x_3^3)}{54EIH} \\
 u_2^{(CD)} &= \frac{\mathcal{M}x_3(L(5H - 18L) + 18Lx_3 - 3x_3^2)}{54EIL} \\
 u_2^{(DE)} &= \frac{\mathcal{M}(L - x_3)(2L(5H + 6L) + 3Lx_3 + 3x_3^2)}{54EIL} \\
 u_2^{(FE)} &= -\frac{\mathcal{M}(3H^2(121H + 18L) + H(19H + 18L)x_3 - 3x_3^3)}{54EIH} \\
 u_2^{(GF)} &= -\frac{\mathcal{M}(4H(86H + 9L) + (19H + 18L)x_3)}{54EI} \\
 u_2^{(HG)} &= -\frac{(86H + 9L)\mathcal{M}x_3}{27EI} \\
 u_2^{(BF)} &= 0
 \end{aligned} \tag{25.160}$$

Le linee elastiche assiali relative ai tratti verticali si annullano, il traverso subisce lo spostamento:

$$\delta = u_3^{(CD)} = u_3^{(DE)} = -\frac{H(379H + 72L)\mathcal{M}}{54EI} \tag{25.161}$$

ed il pendolo si sposta verso sinistra di:

$$\delta = u_3^{(BF)} = -\frac{H(121H + 18L)\mathcal{M}}{18EI} \tag{25.162}$$

La deformata si presenta come in Figura 25.29

I momenti si ottengono dagli spostamenti tramite doppia derivazione, e sono forniti da:

$$\begin{aligned}
 m^{(AB)} &= -\mathcal{M} \\
 m^{(BC)} &= -\mathcal{M} + \frac{\mathcal{M}x_3}{3H} \\
 m^{(CD)} &= \frac{\mathcal{M}(2L - x_3)}{3L} \\
 m^{(DE)} &= \frac{\mathcal{M}x_3}{3L} \\
 m^{(FE)} &= -\frac{\mathcal{M}x_3}{3L} \\
 m^{(GF)} &= M^{(HG)} = 0
 \end{aligned} \tag{25.163}$$

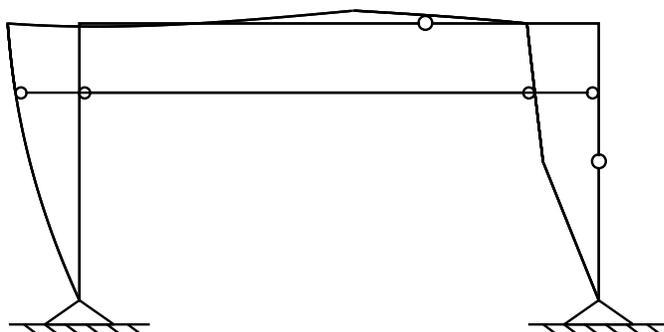


Figura 25.29: La deformata per il telaio di Figura 25.28

Il relativo diagramma è riportato in Figura 25.30, ed il suo tracciamento col metodo grafico viene lasciato come esercizio.

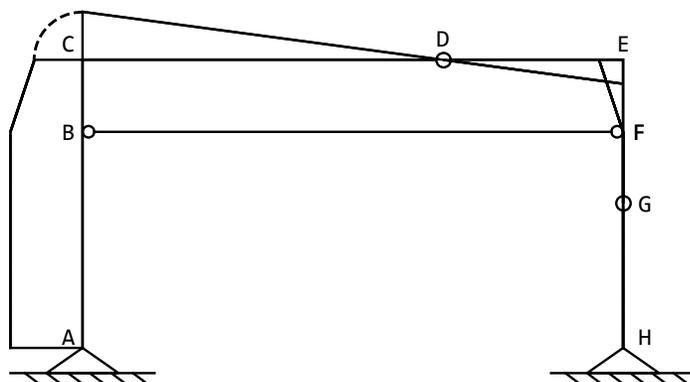


Figura 25.30: Il diagramma dei momenti per il telaio di Figura 25.28

## 25.10 Una struttura triangolare

Si consideri ora la maglia triangolare di Figura 25.31, vincolata con due appoggi nei due estremi inferiori  $A$  e  $B$ , e soggetta ad una forza concentrata  $F$  in sommità

Si identificano due tratti, e per ciascuno di essi si sceglie un'origine ed un sistema di assi, definendo quindi le linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2^{(AC)}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\ u_3^{(AC)}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 \end{aligned} \quad (25.164)$$

$$u_2^{(CB)}(x_3) = c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3$$

$$u_3^{(CB)}(x_3) = d_0 + d_1 x_3$$

In corrispondenza dell'appoggio  $A$  si avranno le condizioni di congruenza det-

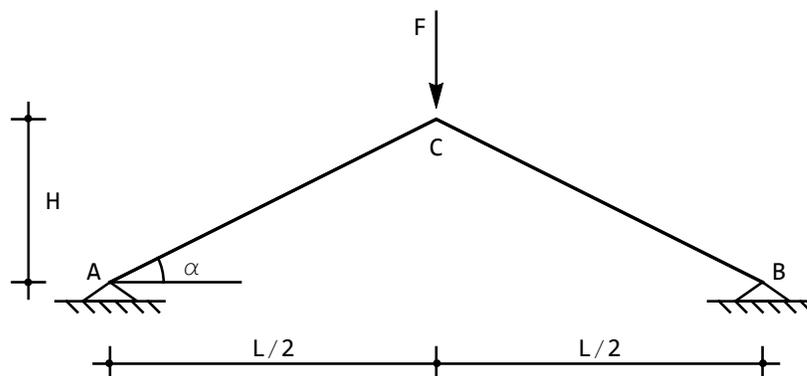


Figura 25.31: Una maglia chiusa triangolare

tate dai vincoli:

$$\begin{aligned} u_2^{(AC)}(0) &= 0 \\ u_3^{(AC)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (25.165)$$

e, per l'equilibrio del concio in  $A$  si dovrà imporre:

$$m^{(AC)}(0) = 0 \quad (25.166)$$

Nel punto  $C$  si avranno tre condizioni di congruenza e tre equazioni di equilibrio.

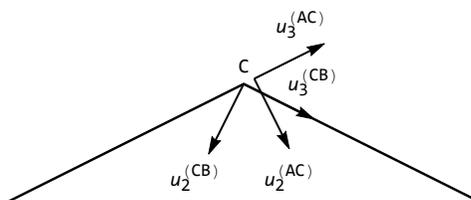


Figura 25.32: Lo schema per le equazioni di congruenza in  $C$

Ed infatti occorrerà scrivere, come può dedursi dalla Figura 25.32:

$$\begin{aligned} u_3^{(AC)}(S) \cos(\alpha) + u_2^{(AC)}(S) \sin(\alpha) &= u_3^{(CB)}(0) \cos(\alpha) - u_2^{(CB)}(0) \sin(\alpha) \\ -u_3^{(AC)}(S) \sin(\alpha) + u_2^{(AC)}(S) \cos(\alpha) &= u_2^{(CB)}(0) \cos(\alpha) + u_3^{(CB)}(0) \sin(\alpha) \\ \phi^{(AC)}(S) &= \phi^{(CB)}(0) \end{aligned} \quad (25.167)$$

dove  $S$  è la lunghezza dell'asta:

$$S = \frac{L}{2 \cos(\alpha)} = \frac{H}{\sin(\alpha)} \quad (25.168)$$

Per l'equilibrio, invece, si trae, a partire dalla Figura 25.33:

$$\begin{aligned} -t^{(AC)}(S) \sin(\alpha) - n^{(AC)}(S) \cos(\alpha) - t^{(CB)}(0) \sin(\alpha) + n^{(CB)}(0) \cos(\alpha) &= 0 \\ -t^{(AC)}(S) \cos(\alpha) + n^{(AC)}(S) \sin(\alpha) + t^{(CB)}(0) \cos(\alpha) + n^{(CB)}(0) \sin(\alpha) + F &= 0 \\ -m^{(AC)}(S) + m^{(CB)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (25.169)$$

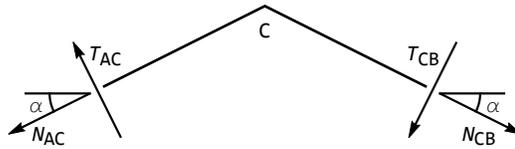


Figura 25.33: Lo schema per la scrittura delle equazioni di equilibrio in  $C$

In corrispondenza dell'appoggio  $B$ , come in  $A$ , si avranno le condizioni di congruenza dettate dai vincoli:

$$\begin{aligned} u_3^{(CB)}(S) &= 0 \\ u_2^{(CB)}(S) &= 0 \end{aligned} \quad (25.170)$$

e la singola condizione di equilibrio:

$$m^{(CB)}(S) = 0 \quad (25.171)$$

Utilizzando le (25.164), insieme alle relative derivate, si giunge al sistema di dodici equazioni nelle dodici costanti di integrazione, e risolvendo si giunge a definire le due linee flessionali:

$$\begin{aligned} u_2^{(AC)} &= -\frac{F \cos(\alpha) x_3 (-3S^2 + x_3^2)}{4(3EI \cos(\alpha)^2 + EAS^2 \sin(\alpha)^2)} \\ u_2^{(CB)} &= \frac{F \cos(\alpha) (2S^3 - 3Sx_3^2 + x_3^3)}{4(3EI \cos(\alpha)^2 + EAS^2 \sin(\alpha)^2)} \end{aligned} \quad (25.172)$$

e le due linee elastiche assiali:

$$\begin{aligned} u_3^{(AC)} &= -\frac{FS^2 \sin(\alpha)}{6EI \cos(\alpha)^2 + 2EAS^2 \sin(\alpha)^2} x_3 \\ u_3^{(CB)} &= \frac{FS^2 \sin(\alpha)}{6EI \cos(\alpha)^2 + 2EAS^2 \sin(\alpha)^2} (S - x_3) \end{aligned} \quad (25.173)$$

I momenti flettenti sono forniti dalle due funzioni lineari:

$$\begin{aligned} m^{(AC)} &= \frac{3EIF \cos(\alpha)}{6EI \cos(\alpha)^2 + 2EAS^2 \sin(\alpha)^2} x_3 \\ m^{(CB)} &= \frac{3EIF \cos(\alpha)}{6EI \cos(\alpha)^2 + 2EAS^2 \sin(\alpha)^2} (S - x_3) \end{aligned} \quad (25.174)$$

Infine, gli sforzi assiali sono costanti, e pari a:

$$n^{(AC)} = N^{(CB)} = -\frac{EAFS^2 \sin(\alpha)}{6EI \cos(\alpha)^2 + 2EAS^2 \sin(\alpha)^2} \quad (25.175)$$

### L'annullarsi delle deformazioni da sforzo assiale

Portando ad infinito la rigidezza assiale, le linee elastiche si annullano identicamente, così come nulli risultano i momenti. Gli sforzi assiali sono invece, forniti da:

$$n^{(AC)} = n^{(CB)} = -\frac{F}{2 \sin(\alpha)} \quad (25.176)$$

## 25.11 Una maglia chiusa

Si consideri ora la maglia triangolare chiusa di Figura 25.34, vincolata con due appoggi nei due estremi inferiori  $A$  e  $B$ , e soggetta ad una forza concentrata  $F$  in mezzeria dell'asta inferiore  $AB$ .

Si identificano quattro tratti, e per ciascuno di essi si sceglie un'origine ed un sistema di assi, definendo quindi le linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2^{(AD)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ u_3^{(AD)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\ u_2^{(DB)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\ u_3^{(DB)}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\ u_2^{(AC)}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 \\ u_3^{(AC)}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3 \\ u_2^{(CB)}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 \\ u_3^{(CB)}(x_3) &= h_0 + h_1 x_3 \end{aligned} \quad (25.177)$$

Le costanti di integrazione si ottengono imponendo le condizioni di congruenza degli spostamenti, e le condizioni di equilibrio delle forze agenti nei quattro nodi individuati.

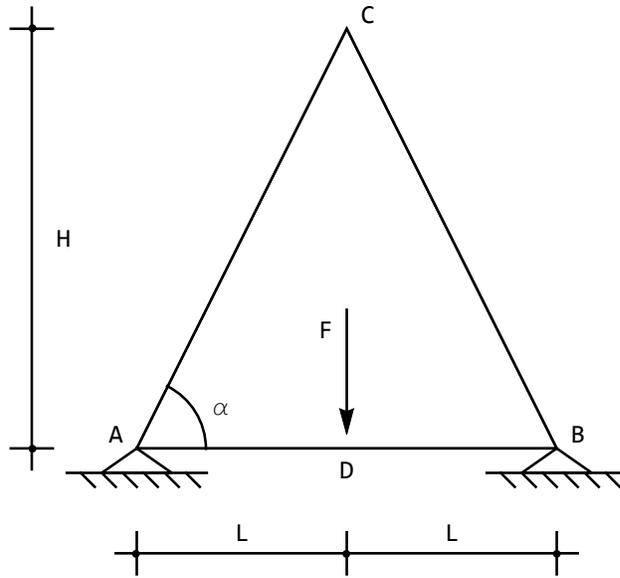


Figura 25.34: Una maglia chiusa triangolare

In corrispondenza dell'appoggio  $A$  si avranno le condizioni di congruenza dettate dai vincoli:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(AD)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(AD)}(0) &= 0 \\
 u_3^{(AC)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(AC)}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{25.178}$$

Si ha poi la condizione di congruenza dettata dalla continuità delle rotazioni:

$$\phi^{(AD)}(0) = \phi^{(AC)}(0)
 \tag{25.179}$$

Infine, per l'equilibrio del concio in  $A$  si dovrà imporre:

$$m^{(AD)}(0) + m^{(AC)}(0) = 0
 \tag{25.180}$$

Nel punto  $C$  si avranno tre condizioni di congruenza e tre equazioni di equilibrio, uguali a quelle scritte per l'esempio precedente:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(AC)}(S) \cos(\alpha) + u_2^{(AC)}(S) \sin(\alpha) &= u_3^{(CB)}(0) \cos(\alpha) - u_2^{(CB)}(0) \sin(\alpha) \\
 -u_3^{(AC)}(S) \sin(\alpha) + u_2^{(AC)}(S) \cos(\alpha) &= u_2^{(CB)}(0) \cos(\alpha) + u_3^{(AC)}(0) \sin(\alpha) \\
 \phi^{(AC)}(S) &= \phi^{(CB)}(0)
 \end{aligned}
 \tag{25.181}$$

dove ora  $S = \frac{L}{\cos(\alpha)}$  è la lunghezza del tratto  $AC$ .

Per l'equilibrio, invece, poichè ora il nodo  $C$  è scarico si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} -t^{(AC)}(S) \sin(\alpha) - n^{(AC)}(S) \cos(\alpha) - t^{(CB)}(0) \sin(\alpha) + n^{(CB)}(0) \cos(\alpha) &= 0 \\ -t^{(AC)}(S) \cos(\alpha) + n^{(AC)}(S) \sin(\alpha) + t^{(CB)}(0) \cos(\alpha) + n^{(CB)}(0) \sin(\alpha) &= 0 \\ -m^{(AC)}(S) + m^{(CB)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (25.182)$$

In corrispondenza dell'appoggio  $B$  si avranno le condizioni di congruenza dettate dai vincoli:

$$\begin{aligned} u_3^{(CB)}(S) &= 0 \\ u_2^{(CB)}(S) &= 0 \\ u_3^{(DB)}(L) &= 0 \\ u_2^{(DB)}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (25.183)$$

la condizione di congruenza dettata dalla continuità delle rotazioni:

$$\phi^{(CB)}(S) = \phi^{(DB)}(L) \quad (25.184)$$

e la singola condizione di equilibrio del concio:

$$-m^{(DB)}(L) - m^{(CB)}(S) = 0 \quad (25.185)$$

Infine, sotto la forza bisognerà scrivere le tre condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_3^{(AD)}(L) &= u_3^{(DB)}(0) \\ u_2^{(AD)}(L) &= u_2^{(DB)}(0) \\ \phi^{(AD)}(L) &= \phi^{(DB)}(0) \end{aligned} \quad (25.186)$$

e le tre condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} -n^{(AD)}(L) + n^{(DB)}(0) &= 0 \\ -t^{(AD)}(L) + t^{(DB)}(0) + F &= 0 \\ -m^{(AD)}(L) + m^{(DB)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (25.187)$$

Utilizzando le (25.177), insieme alle relative derivate, si giunge ad un sistema di ventiquattro equazioni nelle ventiquattro costanti di integrazione. Trascurando le deformabilità assiali, le linee elastiche assiali si annullano identicamente,

mentre le quattro linee elastiche flessionali si scrivono:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AD)} &= \frac{Fx_3(3L^2S + 6L^2x_3 - (4L + S)x_3^2)}{12EI(4L + S)} \\
 u_2^{(DB)} &= \frac{F(2L^3(L + S) - 3L(2L + S)x_3^2 + (4L + S)x_3^3)}{12EI(4L + S)} \\
 u_2^{(CA)} &= \frac{FL^2(S - x_3)^2 x_3}{4EIS(4L + S)} \\
 u_2^{(CB)} &= \frac{FL^2(S - x_3)x_3^2}{4EIS(4L + S)}
 \end{aligned} \tag{25.188}$$

così come i momenti flettenti:

$$\begin{aligned}
 m^{(AD)} &= \frac{F(-2L^2 + (4L + S)x_3)}{2(4L + S)} \\
 m^{(DB)} &= \frac{F(L(2L + S) - (4L + S)x_3)}{2(4L + S)} \\
 m^{(CA)} &= \frac{FL^2(2S - 3x_3)}{2S(4L + S)} \\
 m^{(CB)} &= -\frac{FL^2(S - 3x_3)}{2S(4L + S)}
 \end{aligned} \tag{25.189}$$

ed i tagli:

$$\begin{aligned}
 t^{(AD)} &= \frac{F}{2} \\
 t^{(DB)} &= -\frac{F}{2} \\
 t^{(AC)} &= -t^{(CB)} = -\frac{3FL^2}{8LS + 2S^2}
 \end{aligned} \tag{25.190}$$

Infine, gli sforzi assiali sono nulli lungo il traverso inferiore, mentre lungo le aste inclinate si ha:

$$n^{(AC)} = n^{(CB)} = -\frac{3FL^2}{8LS + 2S^2} \cot(\alpha) \tag{25.191}$$

La struttura deformata si presenta come in Figura 25.35. L'abbassamento massimo, in corrispondenza del punto di applicazione della forza, vale:

$$v_{\max} = \frac{FL^3}{6EI} \frac{L + S}{4L + S} \tag{25.192}$$

Il diagramma del momento, costituito da tratti rettilinei, è immediatamente tracciabile, e si presenta come in Figura 25.36. Il valore del massimo momento è pari a:

$$M_{\max} = \frac{FL}{2} \frac{2L + S}{4L + S} \tag{25.193}$$

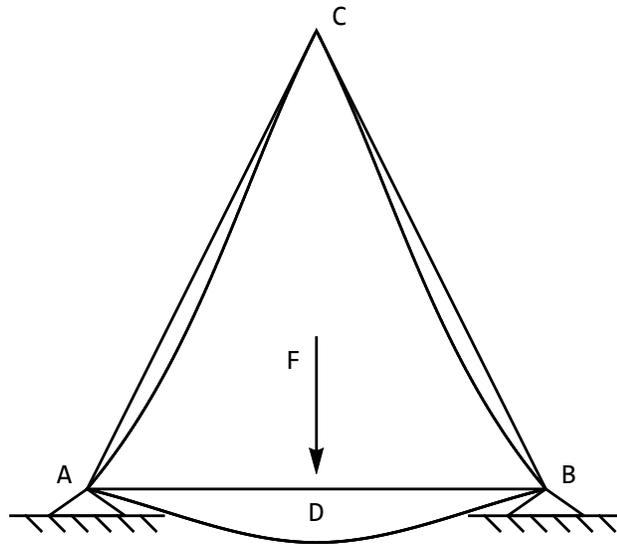


Figura 25.35: Gli spostamenti per la maglia chiusa di Figura 25.34

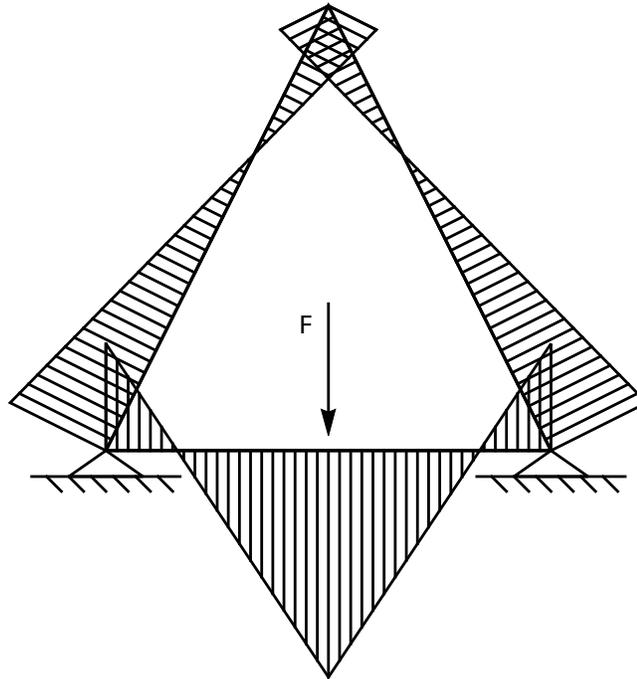


Figura 25.36: I momenti flettenti per la maglia chiusa di Figura 25.34

## 25.12 Una maglia chiusa con cerniere nei nodi

Si consideri la stessa maglia triangolare chiusa di Figura 25.34, vincolata con due appoggi nei due estremi inferiori  $A$  e  $B$ , ipotizzando però che i nodi  $A$ ,  $B$  e  $C$  siano cerniere. Inoltre, la maglia sia soggetta ad una forza orizzontale  $F$  in corrispondenza della cerniera  $C$  (cfr. Figura 25.37).

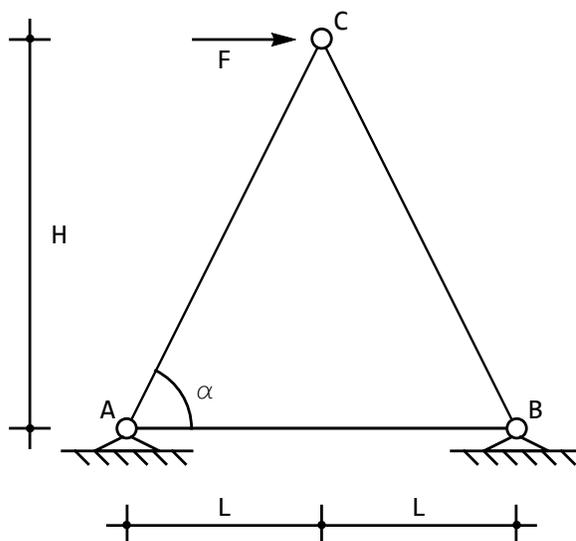


Figura 25.37: Una maglia chiusa triangolare

Si identificano tre tratti, e per ciascuno di essi si sceglie un'origine ed un sistema di assi, definendo quindi le tre linee elastiche:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 \\
 u_3^{(AB)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\
 u_2^{(CA)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 \\
 u_3^{(CA)}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\
 u_2^{(CB)}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 \\
 u_3^{(CB)}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3
 \end{aligned} \tag{25.194}$$

in cui si sono ovviamente già supposti nulli momenti e tagli.

Per definire le costanti di integrazione si esaminano i tre nodi, imponendo la congruenza degli spostamenti e l'equilibrio delle forze agenti su di essi:

— In corrispondenza dell'appoggio  $A$  si avranno le condizioni di congruenza

dettate dai vincoli esterni:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(AD)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(AD)}(0) &= 0 \\
 u_3^{(CA)}(S) &= 0 \\
 u_2^{(CA)}(S) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{25.195}$$

— nel punto  $C$  si avranno due condizioni di congruenza e due equazioni di equilibrio. Ed infatti si potranno scrivere le due condizioni di congruenza per le componenti di spostamento orizzontale e verticale:

$$\begin{aligned}
 -u_2^{(CA)}(0) \sin(\alpha) - u_3^{(CA)}(0) \cos(\alpha) &= -u_2^{(CB)}(0) \sin(\alpha) + \\
 &+ u_3^{(CB)}(0) \cos(\alpha) \\
 -u_2^{(CA)}(0) \cos(\alpha) + u_3^{(CA)}(0) \sin(\alpha) &= u_2^{(CB)}(0) \cos(\alpha) + u_3^{(CB)}(0) \sin(\alpha)
 \end{aligned}
 \tag{25.196}$$

insieme alle due condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 -n^{(CA)}(0) \cos(\alpha) + n^{(CB)}(0) \cos(\alpha) + F &= 0 \\
 n^{(CA)}(0) \sin(\alpha) + n^{(CB)}(0) \sin(\alpha) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{25.197}$$

— in corrispondenza dell'appoggio  $B$  si avranno le condizioni di congruenza dettate dai vincoli:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(CB)}(S) &= 0 \\
 u_2^{(CB)}(S) &= 0 \\
 u_3^{(AB)}(L) &= 0 \\
 u_2^{(AB)}(L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{25.198}$$

Utilizzando le (25.194), insieme alle relative derivate, si giunge al sistema di dodici equazioni nelle dodici costanti di integrazione, che risolto fornisce le linee elastiche:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(CA)} &= \frac{F \sec(\alpha) (-S + x_3) \tan(\alpha)}{2EA} \\
 u_2^{(CB)} &= \frac{F \sec(\alpha) (-S + x_3) \tan(\alpha)}{2EA} \\
 u_3^{(CA)} &= \frac{F \sec(\alpha) (-S + x_3)}{2EA} \\
 u_3^{(CB)} &= \frac{F \sec(\alpha) (S - x_3)}{2EA}
 \end{aligned}
 \tag{25.199}$$

Come già detto, gli spostamenti sono funzioni lineari, e si presentano come in Figura 25.38. Lo spostamento della cerniera  $C$  ha componenti orizzontali e verticali pari a:

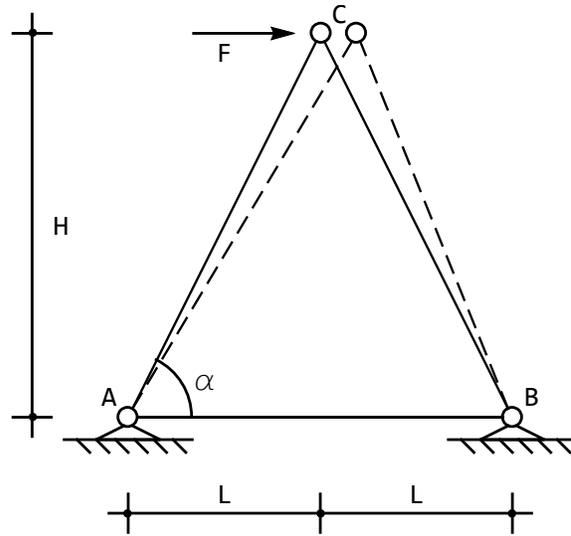


Figura 25.38: Gli spostamenti per la maglia chiusa triangolare di Figura 25.37

$$u_{2C}^{vert} = u_3^{(CB)}(0) \sin(\alpha) + u_2^{(CB)}(0) \cos(\alpha) = 0 \quad (25.200)$$

$$v_{2C}^{hor} = u_3^{(CB)}(0) \cos(\alpha) - u_2^{(CB)}(0) \sin(\alpha) = \frac{FS}{2EA \cos(\alpha)^2} \quad (25.201)$$

Come era prevedibile, l'asta  $AB$  non subisce spostamenti (e quindi non è soggetta a sforzi assiali). Le uniche due caratteristiche non nulle saranno gli sforzi assiali nelle due aste inclinate:

$$N^{(CA)} = -N^{(CB)} = \frac{1}{2}F \sec(\alpha) = \frac{F}{2 \cos(\alpha)} \quad (25.202)$$

come un banale triangolo di equilibrio può confermare.

Le reazioni dei due appoggi possono calcolarsi tramite considerazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_{Av} &= n^{CA}(S) \sin(\alpha) = \frac{F}{2} \tan(\alpha) \\ R_{Ah} &= -n^{CA}(S) \cos(\alpha) = -\frac{F}{2} \\ R_{Bv} &= n^{CB}(S) \sin(\alpha) = -\frac{F}{2} \tan(\alpha) \\ R_{Bh} &= n^{CB}(S) \cos(\alpha) = -\frac{F}{2} \end{aligned} \quad (25.203)$$

### 25.13 Maglia chiusa con pendolo interno

Si consideri ora la maglia triangolare chiusa con pendolo interno di Figura 25.39, vincolata con due appoggi nei due estremi inferiori  $A$  e  $B$ , e soggetta ad un carico distribuito di intensità  $q$  lungo tutto il tratto inferiore  $AB$ .

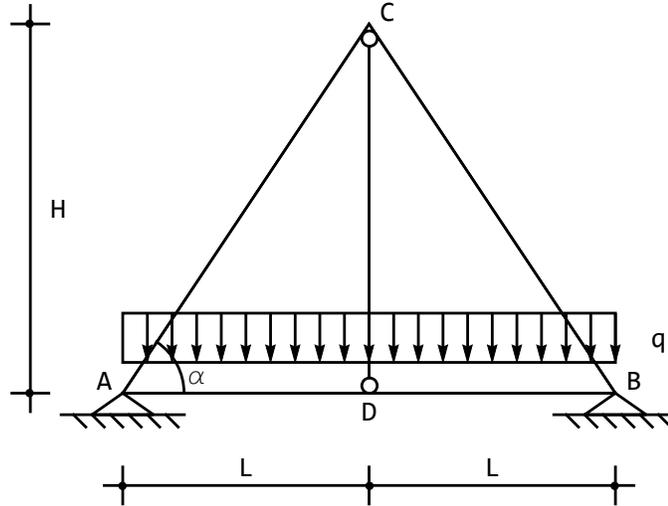


Figura 25.39: Una maglia chiusa triangolare con pendolo interno

Si identificano cinque tratti, e per ciascuno di essi si sceglie un'origine ed un sistema di assi, definendo quindi le quattro linee elastiche:

$$u_2^{(AD)}(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + q \frac{x_3^4}{24EI}$$

$$u_3^{(AD)}(x_3) = b_0 + b_1 x_3$$

$$u_2^{(DB)}(x_3) = c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 + q \frac{x_3^4}{24EI}$$

$$u_3^{(DB)}(x_3) = d_0 + d_1 x_3$$

$$u_2^{(CA)}(x_3) = e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3$$

$$u_3^{(CA)}(x_3) = f_0 + f_1 x_3$$

$$u_2^{(CB)}(x_3) = g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3$$

$$u_3^{(CB)}(x_3) = h_0 + h_1 x_3$$

(25.204)

Il pendolo è invece soggetto al solo sforzo assiale, mentre momento flettente e taglio sono identicamente nulli. Per esso può scriversi quindi una linea elastica

flessionale in cui sono assenti sia il termine quadratico che quello cubico:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}(x_3) &= m_0 + m_1 x_3 \\ u_3^{(CD)}(x_3) &= n_0 + n_1 x_3 \end{aligned} \quad (25.205)$$

L'imposizione delle condizioni di congruenza ed equilibrio porta a scrivere:

— In corrispondenza dell'appoggio  $A$  si avranno le condizioni di congruenza dettate dai vincoli:

$$\begin{aligned} u_3^{(AD)}(0) &= 0 \\ u_2^{(AD)}(0) &= 0 \\ u_3^{(CA)}(S) &= 0 \\ u_2^{(CA)}(S) &= 0 \end{aligned} \quad (25.206)$$

dove  $S = \frac{L}{\cos(\alpha)}$  è la lunghezza del tratto  $AC$ . Si ha poi la condizione di congruenza dettata dalla continuità delle rotazioni:

$$\phi^{(AD)}(0) = \phi^{(CA)}(S) \quad (25.207)$$

Infine, per l'equilibrio del concio in  $A$  si dovrà imporre:

$$m^{(AD)}(0) - m^{(CA)}(S) = 0 \quad (25.208)$$

— Nel punto  $C$  si avranno ora cinque condizioni di congruenza e tre equazioni di equilibrio. Ed infatti occorrerà scrivere le condizioni di congruenza tra gli spostamenti delle aste inclinate  $CA$  e  $CB$ :

$$\begin{aligned} -u_2^{(CA)}(0) \sin(\alpha) - u_3^{(CA)}(0) \cos(\alpha) &= -u_2^{(CB)}(0) \sin(\alpha) + u_3^{(CB)}(0) \cos(\alpha) \\ -u_2^{(CA)}(0) \cos(\alpha) + u_3^{(CA)}(0) \sin(\alpha) &= u_2^{(CB)}(0) \cos(\alpha) + u_3^{(CB)}(0) \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (25.209)$$

Le condizioni di congruenza tra gli spostamenti di una delle aste inclinate (ad esempio  $CB$ ) ed il pendolo si scriveranno:

$$\begin{aligned} u_2^{(CB)}(0) \sin(\alpha) - u_3^{(CB)}(0) \cos(\alpha) &= u_2^{(CD)}(0) \\ u_2^{(CB)}(0) \cos(\alpha) + u_3^{(CB)}(0) \sin(\alpha) &= u_3^{(CD)}(0) \end{aligned} \quad (25.210)$$

Infine, la congruenza della rotazione riguarda solo le due aste inclinate:

$$\phi^{(CA)}(0) = \phi^{(CB)}(0) \quad (25.211)$$

L'equilibrio invece detta:

$$\begin{aligned} -t^{(CA)}(0) \sin(\alpha) - n^{(CA)}(0) \cos(\alpha) - t^{(CB)}(0) \sin(\alpha) + n^{(CB)}(0) \cos(\alpha) &= 0 \\ -t^{(CA)}(0) \sin(\beta) + n^{(CA)}(0) \sin(\alpha) + t^{(CB)}(0) \cos(\alpha) + \\ n^{(CB)}(0) \sin(\alpha) + n^{(CD)}(0) &= 0 \\ m^{(CA)}(0) + m^{(CB)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (25.212)$$

— In corrispondenza dell'appoggio  $B$  si avranno le condizioni di congruenza dettate dai vincoli:

$$\begin{aligned} u_3^{(CB)}(S) &= 0 \\ u_2^{(CB)}(S) &= 0 \\ u_3^{(DB)}(L) &= 0 \\ u_2^{(DB)}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (25.213)$$

la condizione di congruenza dettata dalla continuità delle rotazioni:

$$\phi^{(CB)}(S) = \phi^{(DB)}(L) \quad (25.214)$$

e la singola condizione di equilibrio del concio:

$$-m^{(DB)}(L) - m^{(CB)}(S) = 0 \quad (25.215)$$

— Infine, nel punto  $D$  bisognerà scrivere le condizioni di congruenza sugli spostamenti assiali e trasversali, e sulle rotazioni delle due aste orizzontali:

$$\begin{aligned} u_3^{(AD)}(L) &= u_3^{(DB)}(0) \\ u_2^{(AD)}(L) &= u_2^{(DB)}(0) \\ \phi^{(AD)}(L) &= \phi^{(DB)}(0) \end{aligned} \quad (25.216)$$

le condizioni di congruenza sugli spostamenti assiali e trasversali di una delle due aste orizzontali e del pendolo:

$$\begin{aligned} u_3^{(DB)}(0) &= -u_2^{(CD)}(L) \\ u_2^{(DB)}(0) &= u_3^{(CD)}(L) \end{aligned} \quad (25.217)$$

e le tre condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} -n^{(AD)}(L) + n^{(DB)}(0) &= 0 \\ -t^{(AD)}(L) + t^{(DB)}(0) + n^{(CD)}(L) &= 0 \\ -m^{(AD)}(L) + m^{(DB)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (25.218)$$

Utilizzando le (25.204), insieme alle relative derivate, si giunge ad un sistema di ventotto equazioni, che si risolve a fornire le linee elastiche. Trascurando le deformazioni assiali delle aste e del pendolo, si hanno gli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} u_2^{(AD)} &= \frac{p(L-x_3)^2 x_3 (LS + 2(L+S)x_3)}{48EI(L+S)} \\ u_2^{(DB)} &= \frac{p(L-x_3)x_3^2 (L(2L+3S) - 2(L+S)x_3)}{48EI(L+S)} \\ u_2^{(CB)} &= -u_2^{(CA)} = \frac{L^3 p(S-x_3)x_3^2}{48EIS(L+S)} \end{aligned} \quad (25.219)$$

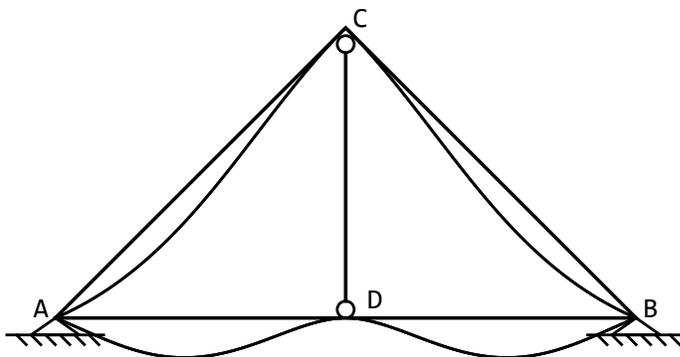


Figura 25.40: Gli spostamenti per la maglia chiusa triangolare di Figura 25.39

mentre, per la simmetria dello schema, gli spostamenti  $u_2^{(CD)}$  sono nulli. Le linee elastiche assiali sono invece nulle.

Una possibile deformata è riportata in Figura 25.40

Lo sforzo normale nei due tratti inclinati sarà fornito da:

$$n^{(CA)} = n^{(CB)} = -\frac{pL \csc(\alpha) (S(4L + 5S) + L^2 \sin(\alpha))}{8S(L + S)} \quad (25.220)$$

mentre nel pendolo si avrà sforzo normale nullo. Infine, i momenti flettenti sono

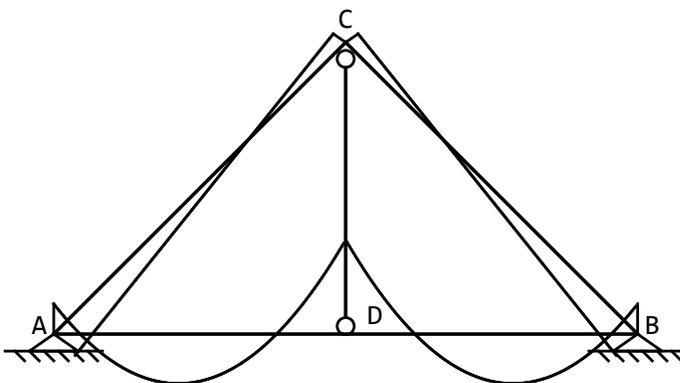


Figura 25.41: I momenti flettenti per la maglia chiusa triangolare di Figura 25.39

forniti da:

$$\begin{aligned}
 m^{(AC)} &= -M^{(CB)} = \frac{pL^3(S - 3x_3)}{24S(L + S)} \\
 m^{(AD)} &= \frac{p(-2L^3 + 3L(4L + 3S)x_3 - 12(L + S)x_3^2)}{24(L + S)} \\
 m^{(DB)} &= -\frac{p(L^2(2L + 3S) - 3L(4L + 5S)x_3 + 12(L + S)x_3^2)}{24(L + S)}
 \end{aligned} \tag{25.221}$$

e sono riportati in Figura 25.41, mentre i tagli sono calcolabili come:

$$\begin{aligned}
 t^{(AC)} &= -T^{(CB)} = -\frac{pL^3}{8S(L + S)} \\
 t^{(AD)} &= \frac{p(L(4L + 3S) - 8(L + S)x_3)}{8(L + S)} \\
 t^{(DB)} &= \frac{p(L(4L + 5S) - 8(L + S)x_3)}{8(L + S)}
 \end{aligned} \tag{25.222}$$

## Capitolo 26

# I telai assialmente rigidi

Come si è visto nei Capitoli precedenti, il metodo della linea elastica applicato alle strutture a telaio può essere utilizzato con l'ausilio di un programma di calcolo, in quanto il numero di equazioni da risolvere è comunque abbastanza elevato.

D'altro canto, molto spesso la deformabilità assiale degli elementi del telaio è estremamente bassa, e gli spostamenti assiali possono trascurarsi rispetto agli spostamenti trasversali. Nel Capitolo precedente ciò si è ottenuto portando al limite il valore della rigidezza assiale  $EA$ , e per  $EA \rightarrow \infty$  si semplificavano in modo significativo gli altri valori.

In questo Capitolo si vuole invece *partire* dal presupposto che la rigidezza assiale sia tanto elevata da poter assumere nulle o costanti le linee elastiche assiali, senza peraltro trascurare gli sforzi assiali.

### 26.1 Telaio a nodi fissi

Si consideri il semplice telaio di Figura 26.1, costituito da un traverso di luce  $L$  soggetto ad un carico  $q$  uniformemente distribuito, ed un ritto di altezza  $H$ . A sinistra il telaio è vincolato con un incastro, al piede si ha una cerniera.

Si identificano subito tre nodi, e due elementi, sicchè si definiscono le linee elastiche  $u_2^{(AB)}(x_3)$ , relativamente al traverso, e  $u_2^{(BC)}(x_3)$  relativamente al ritto, scegliendo le origini in  $A$  ed in  $B$ , rispettivamente.

Si potrà scrivere, ipotizzando che le sezioni del ritto e del traverso siano costanti:

$$\begin{aligned} EI u_2^{(AB)''''}(x_3) &= q \\ EI u_2^{(BC)''''}(x_3) &= 0 \end{aligned} \tag{26.1}$$

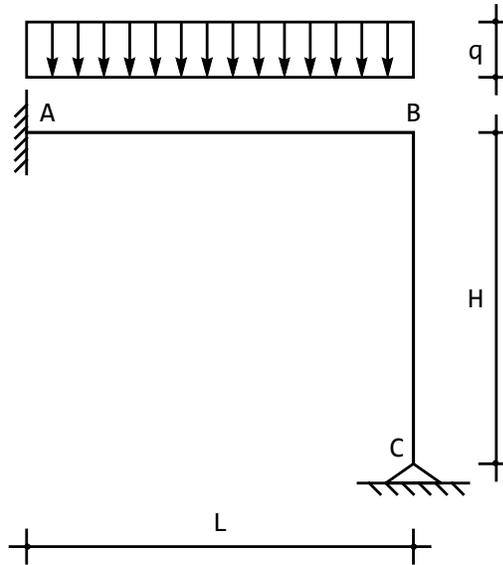


Figura 26.1: Un semplice telaio zoppo

e quindi si hanno le linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + \frac{q x_3^4}{24EI} \\ u_2^{(BC)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (26.2)$$

Se si ipotizza che le deformabilità assiali siano nulle, le corrispondenti linee elastiche assiali saranno costanti:

$$\begin{aligned} u_3^{(AB)}(x_3) &= c_0 \\ u_3^{(BC)}(x_3) &= d_0 \end{aligned} \quad (26.3)$$

ma poichè le condizioni ai limiti in  $A$  e  $C$  proibiscono gli spostamenti assiali, le linee elastiche saranno identicamente nulle.

I nodi del telaio, quindi, potranno solo ruotare, (tranne  $A$ , che è incastrato), ma non subiranno traslazioni. Quando ciò accade, il telaio viene detto “telaio a nodi fissi”.

In definitiva, si sono introdotte otto costanti di integrazione, che dovranno essere definite attraverso l'imposizione di opportune condizioni ai limiti, riguardanti solo gli spostamenti trasversali e le derivate successive. Nella fattispecie, si avrà:

— in  $A$  l'incastro detta l'annullarsi di spostamento assiale, spostamento trasversale, e rotazione, ma lo spostamento assiale è nullo per ipotesi, e quindi

si devono imporre le due equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(0) &= 0 \\ \phi^{(AB)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (26.4)$$

— in  $B$  si deve imporre la congruenza degli spostamenti, e l'equilibrio del nodo. Per la congruenza, si potranno imporre le tre condizioni:

$$\begin{aligned} -u_2^{(BC)}(0) &= 0 \\ u_2^{(AB)}(L) &= 0 \\ \phi^{(AB)}(L) &= \phi^{(BC)}(0) \end{aligned} \quad (26.5)$$

La prima impone che lo spostamento trasversale del ritto sia pari allo spostamento assiale del traverso, ossia sia nullo, mentre la seconda impone che lo spostamento trasversale del traverso sia pari allo spostamento assiale del ritto, ossia sia nullo. L'ultima condizione impone l'uguaglianza delle rotazioni.

Le condizioni di equilibrio possono leggersi dal diagramma delle forze di Figura 26.2:

$$\begin{aligned} -n^{(AB)}(L) - t^{(BC)}(0) &= 0 \\ -t^{(AB)}(L) + n^{(BC)}(0) &= 0 \\ -m^{(AB)}(L) + m^{(BC)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (26.6)$$

e le prime due dovranno essere utilizzate *a posteriori*, per ricavare gli sforzi normali

— in  $C$  la cerniera detta l'annullarsi di spostamento assiale (ora nullo per ipotesi) e spostamento trasversale, mentre la rotazione è libera, e quindi si annulla il momento:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(H) &= 0 \\ m^{(BC)}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (26.7)$$

Queste otto condizioni ai limiti si risolvono facilmente, giungendo agli spostamenti trasversali sul traverso:

$$u_2^{(AB)}(x_3) = \frac{q(L-x_3)x_3^2(3L(2H+L) - (4H+3L)x_3)}{24EI(4H+3L)} \quad (26.8)$$

e sul ritto:

$$u_2^{(BC)}(x_3) = -\frac{qL^3x_3(2H^2 - 3Hx_3 + x_3^2)}{24EIH(4H+3L)} \quad (26.9)$$

In Figura 26.3 è riportato il diagramma degli spostamenti trasversali.

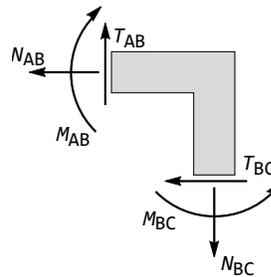


Figura 26.2: Il conio in  $B$  e le forze su di esso agenti

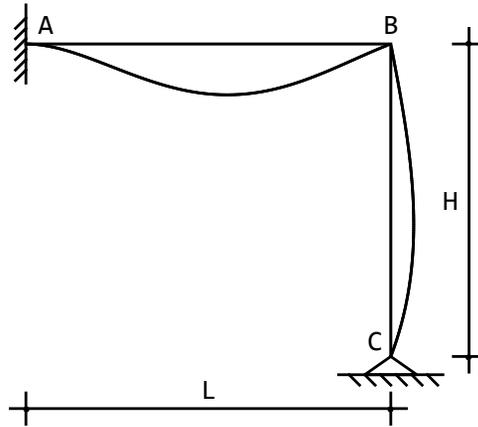


Figura 26.3: Gli spostamenti per il telaio di Figura 26.1

Momenti e tagli si ottengono tramite derivazione successiva:

$$m^{(AB)}(x_3) = -\frac{q(L^2(2H+L) - 2L(5H+3L)x_3 + (8H+6L)x_3^2)}{4(4H+3L)} \quad (26.10)$$

$$m^{(BC)}(x_3) = -\frac{qL^3(H-x_3)}{4H(4H+3L)} \quad (26.11)$$

$$t^{(AB)}(x_3) = \frac{q(L(5H+3L) - 2(4H+3L)x_3)}{8H+6L} \quad (26.12)$$

$$t^{(BC)}(x_3) = \frac{qL^3}{16H^2+12HL} \quad (26.13)$$

ed il relativo diagramma si presenta come in Figura 26.4.

Infine, le prime due delle (26.6) permettono la deduzione degli sforzi assiali.

$$n^{(AB)} = -t^{(BC)} = -\frac{qL^3}{16H^2+12HL} \quad (26.14)$$

$$n^{(BC)} = t^{(AB)}(x_3=L) = -\frac{3L(H+L)q}{8H+6L}$$

### I valori notevoli

Il massimo valore assoluto del momento si raggiunge in corrispondenza dell'incastro, e vale:

$$M_A = -\frac{qL^2}{4} \frac{(2H+L)}{(4H+3L)} \quad (26.15)$$

E' anche interessante il valore del momento nel nodo B:

$$M_B = -\frac{qL^3}{4(4H+3L)} \quad (26.16)$$

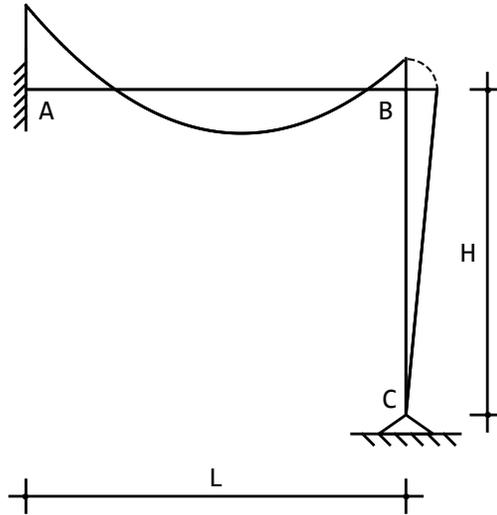


Figura 26.4: I momenti flettenti per il telaio di Figura 26.1

## 26.2 Telaio a nodi spostabili

Si consideri il telaio zoppo di Figura 26.5, costituito da un traverso di luce  $L$  ed un ritto di altezza  $H$ , soggetto ad una forza orizzontale nel nodo  $B$ . Al piede il telaio è vincolato con un incastro, mentre all'estremo destro del traverso si ipotizza l'esistenza di un carrello a piano di scorrimento orizzontale.

Si identificano subito tre nodi, e due elementi, sicchè si definiscono le linee elastiche  $u_2^{(BA)}(x_3)$ , relativamente al ritto, e  $u_2^{(BC)}(x_3)$  relativamente al traverso, scegliendo le origini di ambedue i sistemi di riferimento in  $B$ .

Si ipotizza che le deformabilità assiali siano nulle, e quindi gli spostamenti  $u_3^{(BA)}(x_3)$  saranno identicamente nulli, mentre  $u_3^{(BC)}(x_3)$  sarà costante, e pari all'incognita  $\delta$ . Il nodo  $B$ , quindi, subisce uno spostamento, ed il telaio viene talvolta detto "a nodi spostabili":

$$\begin{aligned} u_3^{(BA)}(x_3) &= 0 \\ u_3^{(BC)}(x_3) &= \delta \end{aligned} \quad (26.17)$$

Ovviamente non sarà possibile dedurre gli sforzi normali attraverso l'usuale relazione differenziale:

$$n(x_3) = EAu_3'(x_3) \quad (26.18)$$

e di conseguenza si ipotizzerà che i due sforzi normali  $n^{(BA)}$  ed  $n^{(BC)}$  siano costanti, e li si trarrà da considerazioni di equilibrio.

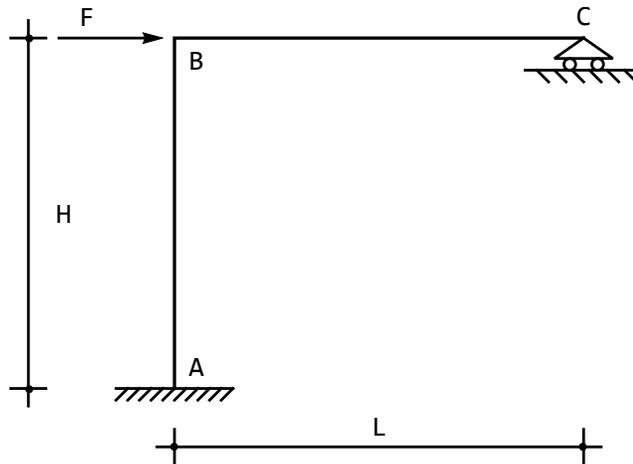


Figura 26.5: Un semplice telaio zoppo a nodi spostabili

Per gli spostamenti trasversali, si potrà scrivere, ipotizzando che le sezioni del ritto e del traverso siano costanti:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ u_2^{(BC)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (26.19)$$

Si sono quindi introdotte otto costanti di integrazione, che insieme allo spostamento  $\delta$  ed ai due sforzi normali  $n^{(BA)}$  ed  $n^{(BC)}$  dovranno essere definite attraverso l'imposizione di opportune condizioni ai limiti. Nella fattispecie, si avrà:

— in  $A$  l'incastro detta l'annullarsi di spostamento assiale, spostamento trasversale, e rotazione, ma lo spostamento assiale è nullo per ipotesi, e quindi si hanno le due equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(H) &= 0 \\ \phi^{(BA)}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (26.20)$$

— in  $B$  si deve imporre la congruenza degli spostamenti, e l'equilibrio del nodo. Per la congruenza, si potranno imporre le tre condizioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(0) &= 0 \\ u_2^{(BA)}(0) &= -\delta \\ \phi^{(BA)}(0) &= \phi^{(BC)}(0) \end{aligned} \quad (26.21)$$

La prima impone che lo spostamento trasversale del traverso sia pari allo spostamento assiale del ritto, ossia sia nullo, mentre la seconda impone che lo

spostamento trasversale del ritto sia pari allo spostamento assiale del traverso, ossia sia pari all'incognita  $\delta$ . L'ultima condizione impone l'uguaglianza delle rotazioni.

Le condizioni di equilibrio possono leggersi dal diagramma delle forze di Figura 26.6:

$$\begin{aligned} n^{(BA)} + t^{(BC)}(0) &= 0 \\ -t^{(BA)}(0) + n^{(BC)} + F &= 0 \quad (26.22) \\ m^{(BA)}(0) + m^{(BC)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

— in  $C$  il carrello detta l'annullarsi di spostamento trasversale, sforzo normale e momento:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(L) &= 0 \\ m^{(BC)}(L) &= 0 \quad (26.23) \\ n^{(BC)} &= 0 \end{aligned}$$

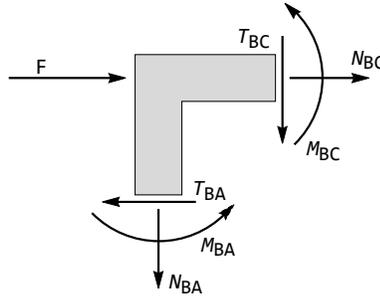


Figura 26.6: Il conio in  $B$  e le forze su di esso agenti

Risolvendo queste undici equazioni nelle undici summenzionate incognite si hanno gli spostamenti trasversali sul ritto:

$$u_2^{(BA)}(x_3) = -\frac{FH^3(3H+4L)}{12EI(3H+L)} + \frac{FH^2L}{6EIH+2EIL}x_3 + \frac{3FH^2}{12EIH+4EIL}x_3^2 - \frac{Fx_3^3}{6EI} \quad (26.24)$$

e lungo il traverso:

$$u_2^{(BC)}(x_3) = \frac{FH^2L}{6EIH+2EIL}x_3 - \frac{3FH^2}{12EIH+4EIL}x_3^2 + \frac{FH^2}{12EIH+4EIL}x_3^3 \quad (26.25)$$

nonchè lo spostamento assiale del traverso:

$$\delta = \frac{FH^3(3H+4L)}{12EI(3H+L)} \quad (26.26)$$

e gli sforzi normali:

$$\begin{aligned} n^{(BA)} &= \frac{3FH^2}{6HL+2L^2} \\ n^{(BC)} &= 0 \end{aligned} \quad (26.27)$$

Momenti e tagli si ottengono tramite derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{(BA)}(x_3) &= -\frac{6FH^2}{12H+4L} + Fx_3 \\ m^{(BC)}(x_3) &= \frac{6FH^2}{12H+4L} - \frac{6FH^2x_3}{12HL+4L^2} \\ t^{(BA)}(x_3) &= F \\ t^{(BC)}(x_3) &= -\frac{3FH^2}{6HL+2L^2} \end{aligned} \quad (26.28)$$

In Figura 26.7 è riportato il diagramma degli spostamenti

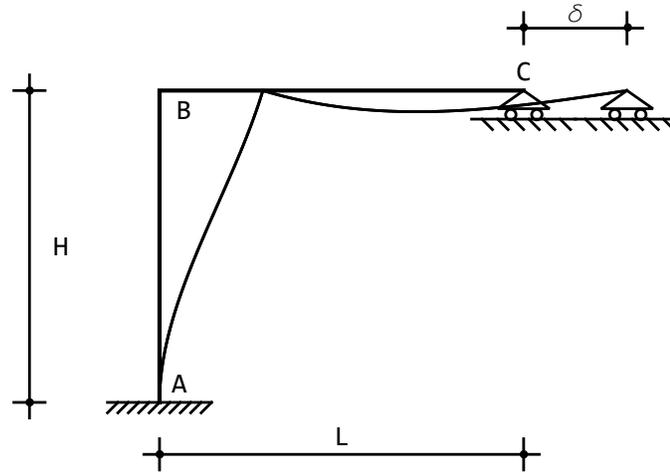


Figura 26.7: Gli spostamenti per il telaio di Figura 26.5

### Una verifica

Lo spostamento  $\delta$  del travesso può, in questo semplice caso, calcolarsi attraverso una doppia applicazione del metodo di composizione degli spostamenti. Ed infatti si può calcolare la reazione del carrello imponendo che il corrispondente spostamento sia nullo:

$$u_{2C}^0 + Xu'_{2C} = 0 \longrightarrow F \frac{H^2}{2EI} L + X \frac{L^3}{3EI} + XL \frac{H}{EI} L = 0 \quad (26.29)$$

ottenendo:

$$X = R_C = -\frac{3FH^2}{2L(3H+L)} \quad (26.30)$$

Lo spostamento orizzontale del travesso si ottiene ora ragionando sul sistema isostatico equivalente, e vale:

$$\delta = F \frac{H^3}{3EI} + XL \frac{H^2}{2EI} = F \frac{H^3}{3EI} - 3F \frac{H^2}{2L(3H+L)} \frac{LH^2}{2EI} = \frac{FH^3(3H+4L)}{12EI(3H+L)} \quad (26.31)$$

Si può anche procedere attraverso una doppia applicazione del principio dei lavori virtuali

## 26.3 Un Telaio zoppo a nodi fissi

Si consideri il semplice telaio di Figura 26.8, già studiato in precedenza attraverso la scrittura diretta delle equazioni di congruenza. In questa sede si vuole

affrontare il problema con il metodo della linea elastica, trascurando la deformabilità assiale. Ne segue che le tre linee elastiche assiali sono costanti, ed in più — utilizzando le condizioni ai limiti — sono identicamente nulle (telaio a nodi fissi).

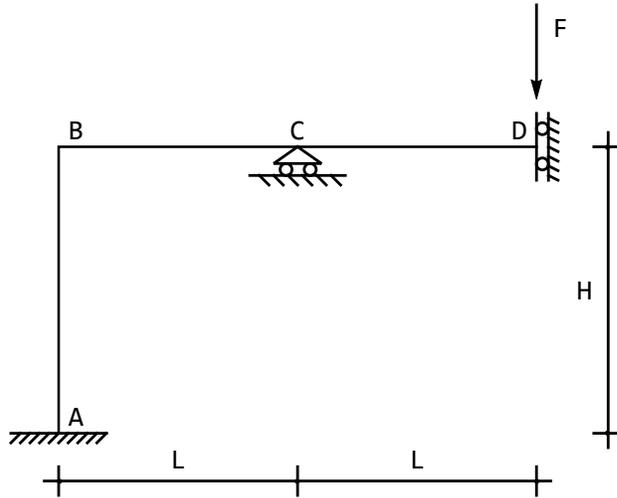


Figura 26.8: Un semplice telaio zoppo

Si definiscono quindi le linee elastiche flessionali  $u_2^{(AB)}(x_3)$ , relativamente al tratto  $AB$ ,  $u_2^{(BC)}(x_3)$  relativamente al tratto  $BC$ , e  $u_2^{(CD)}(x_3)$  relativamente al tratto  $CD$ , scegliendo quindi le origini in  $A$ ,  $B$  e  $C$ , rispettivamente, e col solito sistema di assi locali.

Si potrà scrivere, ipotizzando che le sezioni del ritto e del traverso siano costanti:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ u_2^{(BC)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (26.32)$$

Le dodici costanti di integrazione devono essere determinate quindi a partire da condizioni su spostamenti trasversali, rotazioni, momenti e tagli. Si avrà:

— in  $A$  l'incastro detta le due equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(0) &= 0 \\ \phi^{(AB)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (26.33)$$

— in  $B$  si deve imporre la congruenza degli spostamenti, e l'equilibrio del nodo. Per la congruenza, lo spostamento trasversale del traverso dovrà essere pari

allo spostamento assiale del ritto, ossia sia nullo. Ancora, lo spostamento trasversale del ritto deve essere pari allo spostamento assiale del traverso, anch'esso nullo per ipotesi. L'ultima condizione impone l'uguaglianza delle rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(0) &= 0 \\ u_2^{(AB)}(H) &= 0 \\ \phi^{(AB)}(H) &= \phi^{(BC)}(0) \end{aligned} \quad (26.34)$$

Le condizioni di equilibrio del nodo in  $B$  dettano, come può leggersi dalla Figura 26.9:

$$\begin{aligned} n^{(AB)}(H) + t^{(BC)}(0) &= 0 \\ -t^{(AB)}(H) + n^{(BC)}(0) &= 0 \\ -m^{(AB)}(H) + m^{(BC)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (26.35)$$

e l'unica utilizzabile, in termini di spostamenti e successive derivate è l'ultima.

— in  $C$  la presenza dell'appoggio impone l'annullarsi degli spostamenti trasversali, e la continuità delle rotazioni. L'equilibrio del concio implica poi la continuità dei momenti flettenti:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(L) &= 0 \\ u_2^{(CD)}(0) &= 0 \\ \phi^{(BC)}(L) &= \phi^{(CD)}(0) \\ m^{(BC)}(L) &= m^{(CD)}(0) \end{aligned} \quad (26.36)$$

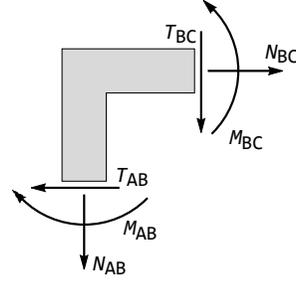


Figura 26.9: L'equilibrio del concio in  $B$

— in  $D$ , infine, il bipendolo impone che siano nulle le rotazioni (e gli spostamenti orizzontali), mentre lo spostamento trasversale è libero. L'equilibrio del concio impone infine l'uguaglianza tra il taglio e la forza applicata:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)'}(L) &= 0 \\ -t^{(CD)}(L) + F &= 0 \end{aligned} \quad (26.37)$$

Le dodici equazioni si risolvono facilmente, a fornire le linee elastiche sul ritto:

$$u_2^{(AB)}(x_3) = \frac{FL^2(H - x_3)x_3^2}{4EIH(4H + 5L)} \quad (26.38)$$

e sul traverso:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(x_3) &= -\frac{F(L - x_3)x_3(HL + (H + 2L)x_3)}{4EIH(4H + 5L)} \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= \frac{Fx_3(6L^2(H + L) + 3L(3H + 4L)x_3 - 2(4H + 5L)x_3^2)}{12EIH(4H + 5L)} \end{aligned} \quad (26.39)$$

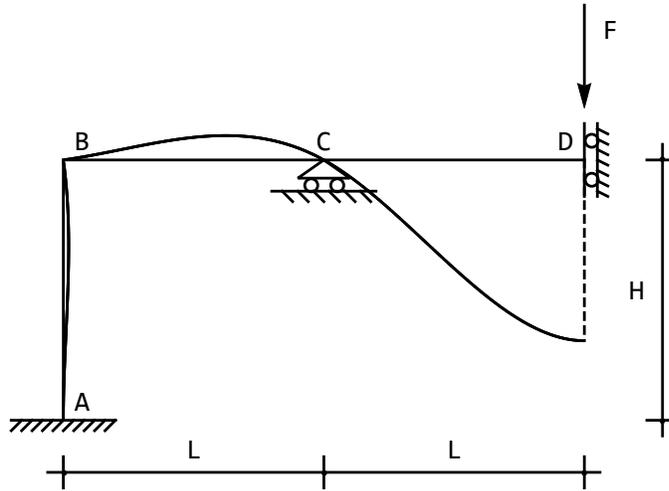


Figura 26.10: Gli spostamenti per il telaio di Figura 26.8

Il diagramma degli spostamenti si presenta quindi come in Figura 26.10

Momenti e tagli si ottengono invece tramite derivazione successiva:

$$\begin{aligned}
 m^{(AB)}(x_3) &= -\frac{FL^2(H - 3x_3)}{2H(4H + 5L)} \\
 m^{(BC)}(x_3) &= \frac{F(2L^2 - 3(H + 2L)x_3)}{8H + 10L} \\
 m^{(CD)}(x_3) &= \frac{F(-L(3H + 4L) + 2(4H + 5L)x_3)}{8H + 10L} \\
 t^{(AB)}(x_3) &= \frac{3FL^2}{8H^2 + 10HL} \\
 t^{(BC)}(x_3) &= -\frac{3F(H + 2L)}{8H + 10L} \\
 t^{(CD)}(x_3) &= F
 \end{aligned} \tag{26.40}$$

Gli sforzi normali si ottengono da banali condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 n^{(AB)}(x_3) &= -t^{(BC)}(x_3) = \frac{3F(H + 2L)}{8H + 10L} \\
 n^{(BC)}(x_3) &= n^{(CD)}(x_3) = t^{(AB)}(x_3) = \frac{3FL^2}{8H^2 + 10HL}
 \end{aligned} \tag{26.41}$$

### I valori notevoli

L'abbassamento in corrispondenza della forza vale:

$$v_D = \frac{FL^3}{12EI} \frac{7H + 8L}{4H + 5L} \quad (26.42)$$

e, per  $H = L$ :

$$v_D = \frac{5FL^3}{36EI} \quad (26.43)$$

## 26.4 Una forza con due carrelli

Si consideri il telaio di Figura 26.11, vincolato con un incastro al piede e due carrelli in  $D$  ed  $E$ , soggetto ad una forza concentrata  $F$  in  $C$ . Si identificano

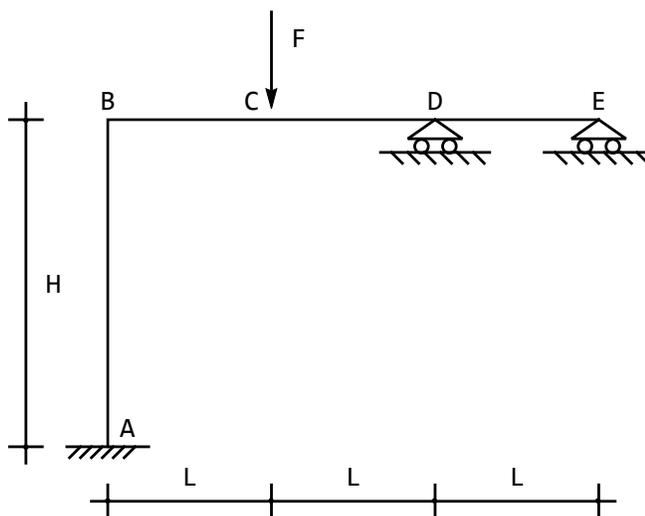


Figura 26.11: Un telaio a nodi spostabili

quattro tratti, e per ciascuno di essi si sceglie un'origine ed un sistema di assi, definendo quindi le linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ u_2^{(BC)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 \\ u_2^{(DE)}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (26.44)$$

Se si vogliono trascurare le deformabilità assiali, i corrispondenti spostamenti saranno costanti, e tenendo conto delle condizioni di congruenza all'incastro,

potrà scriversi:

$$\begin{aligned} u_3^{(BA)}(x_3) &= 0 \\ u_3^{(BC)}(x_3) &= u_3^{(CD)}(x_3) = u_3^{(DE)}(x_3) = \delta \end{aligned} \quad (26.45)$$

e quindi il telaio è a nodi spostabili. Le condizioni di equilibrio riguardanti gli sforzi normali permettono di affermare che lo sforzo normale in  $E$  è nullo, e quindi nulli sono gli sforzi normali in  $D$ ,  $C$  e  $B$ . Resta quindi solo lo sforzo normale lungo il ritto, che andrà calcolato *a posteriori*, con considerazioni di equilibrio.

Si hanno quindi diciassette incognite, che devono essere individuate imponendo le condizioni di congruenza ed equilibrio nei punti  $A$ ,  $B, C, D$  ed  $E$ . Si tenga presente che in questa fase le equazioni di congruenza dovranno riguardare solo gli spostamenti trasversali, le rotazioni, i momenti ed i tagli.

— In corrispondenza dell'incastro  $A$  si avranno le due condizioni di congruenza dettate dai vincoli:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(H) &= 0 \\ \phi^{(BA)}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (26.46)$$

— Nel punto  $B$  si avranno tre condizioni di congruenza, secondo cui lo spostamento trasversale del ritto dovrà essere uguale a contrario allo spostamento  $\delta$  del traverso, lo spostamento trasversale del traverso dovrà annullarsi, e le rotazioni dovranno essere uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(0) &= -\delta \\ u_2^{(BC)}(0) &= 0 \\ \phi^{(BA)}(0) &= \phi^{(BC)}(0) \end{aligned} \quad (26.47)$$

Per l'equilibrio, i momenti flettenti dovranno essere uguali e contrari, in quanto  $B$  è nodo di partenza per ambedue i tratti:

$$m^{(BA)}(0) + m^{(BC)}(0) = 0 \quad (26.48)$$

— In corrispondenza del punto di applicazione della forza si avranno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(L) &= u_2^{(CD)}(0) \\ \phi^{(BC)}(L) &= \phi^{(CD)}(0) \end{aligned} \quad (26.49)$$

e le condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} -t^{(BC)}(L) + t^{(CD)}(0) + F \\ -m^{(BC)}(L) + m^{(CD)}(0) \end{aligned} \quad (26.50)$$

— In corrispondenza del carrello in  $D$  si avrà l'annullarsi dello spostamento trasversale e l'uguaglianza delle rotazioni, mentre l'unica condizione di equilibrio utilizzabile impone l'uguaglianza dei momenti:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}(L) &= 0 \\ u_2^{(DE)}(0) &= 0 \\ \phi^{(CD)}(L) &= \phi^{(DE)}(0) \\ -m^{(CD)}(L) + m^{(DE)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (26.51)$$

— Infine, nel carrello in  $E$  si avrà — come usuale — l'annullarsi di spostamento trasversale e momento flettente:

$$\begin{aligned} u_2^{(DE)}(L) &= 0 \\ m^{(DE)}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (26.52)$$

Infine, si potrà scrivere una *equazione di piano*, imponendo l'equilibrio dell'intero traverso:

$$t^{(BA)}(0) = 0 \quad (26.53)$$

Utilizzando le (26.44), insieme alle relative derivate, si giunge ad un sistema di diciassette equazioni nelle diciassette costanti di integrazione, che può essere risolto a fornire le linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)} &= -\frac{3FL^2(H-x_3)^2}{4EI(9H+5L)} \\ u_2^{(BC)} &= \frac{Fx_3(72HL^2+36L^2x_3-(27H+23L)x_3^2)}{48EI(9H+5L)} \\ u_2^{(CD)} &= \frac{F(L-x_3)(L^2(45H+13L)+4L(9H+4L)x_3-(45H+17L)x_3^2)}{48EI(9H+5L)} \\ u_2^{(DE)} &= -\frac{F(3H+L)x_3(2L^2-3Lx_3+x_3^2)}{8EI(9H+5L)} \end{aligned} \quad (26.54)$$

mentre il traverso trasla della quantità:

$$\delta = \frac{3FH^2L^2}{36EIH+20EIL} \quad (26.55)$$

Gli spostamenti si presentano come in Figura 26.12:

I momenti ed i tagli si calcolano tramite derivazione successiva:

$$\begin{aligned} m^{(BA)} &= \frac{3FL^2}{2(9H+5L)} \\ m^{(BC)} &= \frac{F(-12L^2+(27H+23L)x_3)}{8(9H+5L)} \end{aligned} \quad (26.56)$$

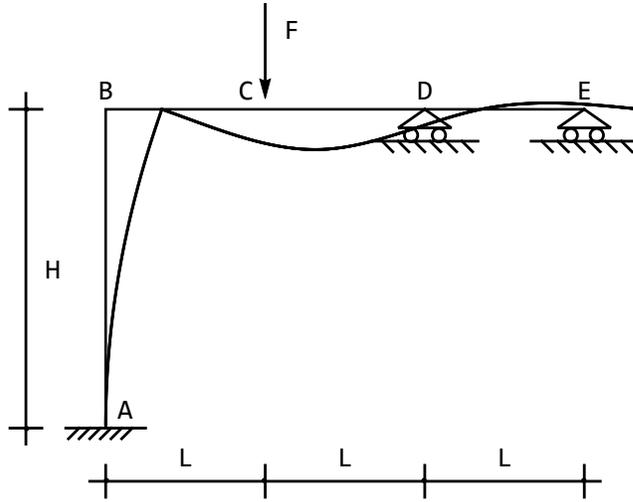


Figura 26.12: Un telaio di esempio a nodi spostabili: diagramma degli spostamenti

$$\begin{aligned}
 m^{(CD)} &= \frac{F(L(27H + 11L) - (45H + 17L)x_3)}{8(9H + 5L)} \\
 m^{(DE)} &= -\frac{3F(3H + L)(L - x_3)}{4(9H + 5L)} \\
 t^{(BC)} &= \frac{F(27H + 23L)}{8(9H + 5L)} \\
 t^{(CD)} &= -\frac{F(45H + 17L)}{8(9H + 5L)} \\
 t^{(DE)} &= \frac{3F(3H + L)}{4(9H + 5L)}
 \end{aligned} \tag{26.57}$$

Il corrispondente diagramma dei momenti flettenti è riportato in Figura 26.13

Infine, l'unico sforzo assiale deve essere calcolato imponendo l'ultimo equilibrio del nodo  $B$ :

$$n^{(BA)} = -t^{(BC)} = -\frac{F(27H + 23L)}{8(9H + 5L)} \tag{26.58}$$

## 26.5 Una forza con carrello ed appoggio

Si consideri lo stesso telaio dell'esercizio precedente, con il carrello in  $D$  trasformato in un appoggio, proibendo quindi gli spostamenti assiali in  $D$ , e di conseguenza lungo tutto il traverso (cfr. Figura 26.14). Ne segue che ora gli spostamenti assiali sono identicamente nulli (telaio a nodi fissi). Le uniche condizioni

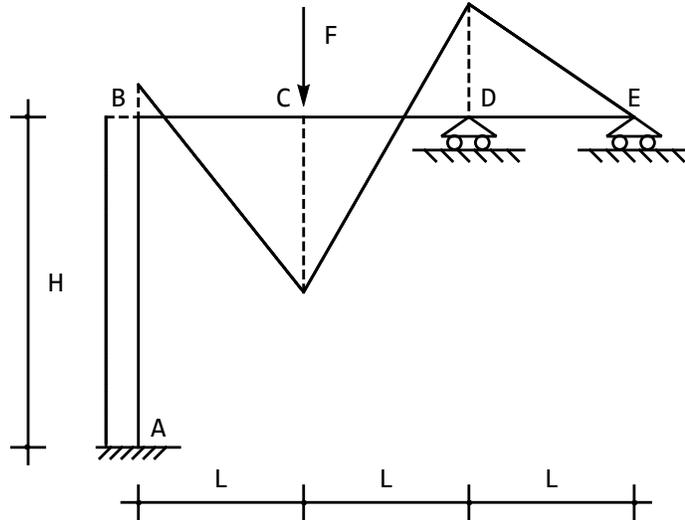


Figura 26.13: Un telaio di esempio a nodi spostabili: diagramma dei momenti

da modificare sono relative al punto  $B$ , dove la congruenza imporrà:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(0) &= 0 \\ u_2^{(BC)}(0) &= 0 \\ \phi^{(BA)}(0) &= \phi^{(BC)}(0) \end{aligned} \quad (26.59)$$

Scompare quindi l'incognita  $\delta$ , e scompare anche l'equazione di piano, che ora dovrebbe coinvolgere anche la reazione orizzontale incognita in  $D$ .

Le quattro linee elastiche flessionali sono ora date da:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)} &= \frac{3FL^2(H-x_3)^2x_3}{2EIH(9H+20L)} \\ u_2^{(BC)} &= \frac{Fx_3(72HL^2+144L^2x_3-(27H+92L)x_3^2)}{48EI(9H+20L)} \\ u_2^{(CD)} &= \frac{F(L-x_3)(L^2(45H+52L)+4L(9H+16L)x_3-(45H+68L)x_3^2)}{48EI(9H+20L)} \\ u_2^{(DE)} &= -\frac{F(3H+4L)x_3(2L^2-3Lx_3+x_3^2)}{8EI(9H+20L)} \end{aligned} \quad (26.60)$$

e la deformata si presenta come in Figura 26.15.

Lungo il ritto il momento flettente non è più costante, ma varia linearmente:

$$m^{(BA)} = \frac{3FL^2(2H-3x_3)}{H(9H+20L)} \quad (26.61)$$

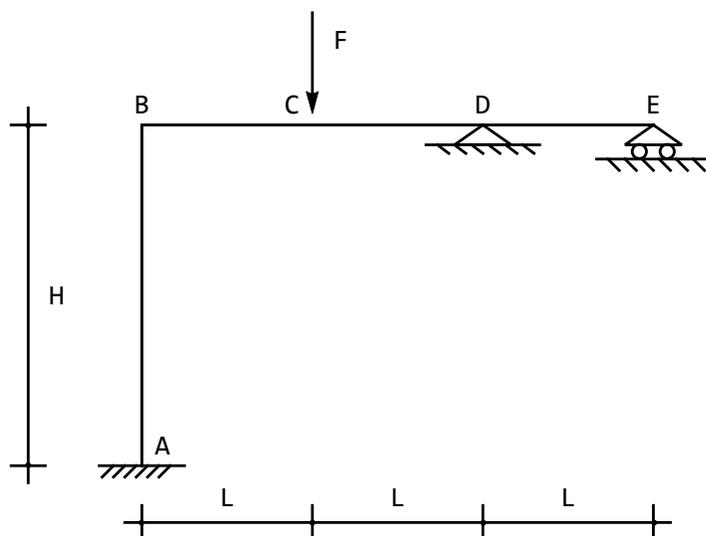


Figura 26.14: Un telaio di esempio a nodi fissi

ed ancora:

$$\begin{aligned}
 m^{(BC)} &= \frac{F(-48L^2 + (27H + 92L)x_3)}{8(9H + 20L)} \\
 m^{(CD)} &= \frac{F(L(27H + 44L) - (45H + 68L)x_3)}{8(9H + 20L)} \\
 m^{(DE)} &= -\frac{3F(3H + 4L)(L - x_3)}{36H + 80L}
 \end{aligned} \tag{26.62}$$

I tagli sono quindi costanti a tratti, e si ottiene subito:

$$\begin{aligned}
 t^{(BA)} &= -\frac{9FL^2}{9H^2 + 20HL} \\
 t^{(BC)} &= \frac{27FH + 92FL}{72H + 160L} \\
 t^{(CD)} &= -\frac{F(45H + 68L)}{8(9H + 20L)} \\
 t^{(DE)} &= \frac{3F(3H + 4L)}{36H + 80L}
 \end{aligned} \tag{26.63}$$

Il diagramma dei momenti si presenta come in Figura 26.16: Gli sforzi assiali sul ritto sono forniti da:

$$n^{(BA)} = -\frac{F(27H + 92L)}{8(9H + 20L)} \tag{26.64}$$

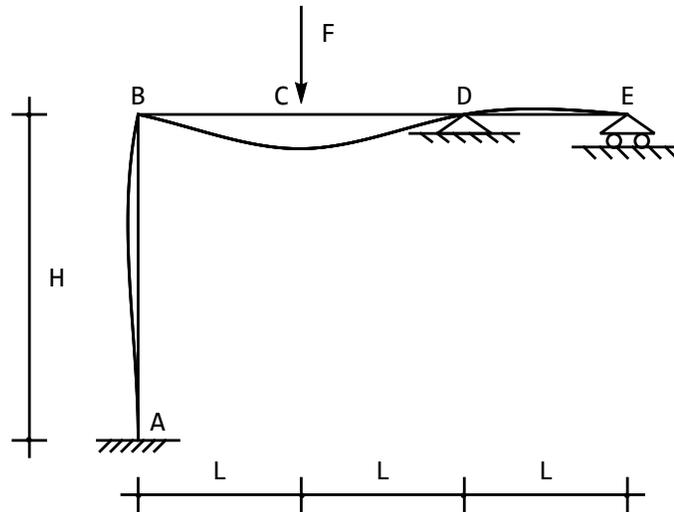


Figura 26.15: Un telaio a nodi fissi: il diagramma degli spostamenti

mentre il traverso è ora soggetto, nel tratto  $BD$ , ad una forza di compressione pari a:

$$n^{(BC)} = n^{(CD)} = -\frac{9FL^2}{9H^2 + 20HL} \quad (26.65)$$

Le reazioni dei vincoli sono deducibili da considerazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} R_{Ah} &= -t^{(BA)} = \frac{9FL^2}{9H^2 + 20HL} \\ R_{Av} &= n^{(BA)} = -\frac{F(27H + 92L)}{8(9H + 20L)} \\ R_{Dh} &= t^{(BA)} = -\frac{9FL^2}{9H^2 + 20HL} \\ R_{Dv} &= t^{(CD)} - t^{(DE)} = -\frac{F(63H + 92L)}{8(9H + 20L)} \\ R_{Ev} &= t^{(DE)} = \frac{3F(3H + 4L)}{36H + 80L} \\ \mathcal{M}_{rA} &= m^{(BA)}(x_3 = H) = -\frac{3FL^2}{(9H + 20L)} \end{aligned} \quad (26.66)$$

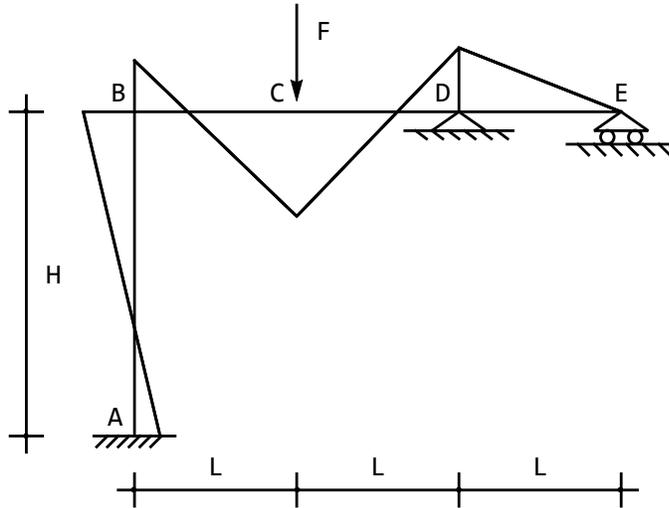


Figura 26.16: Un telaio a nodi fissi: il diagramma dei momenti

## 26.6 Un telaio simmetrico con carico antisimmetrico

Si consideri il telaio di Figura 26.17, vincolato con due appoggi in  $A$  ed  $F$ , soggetto a due coppie concentrate in mezzera dei due ritti.

Si identificano cinque tratti, e per ciascuno di essi si sceglie un'origine ed un sistema di assi, definendo quindi le linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(BA)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\
 u_2^{(CB)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 u_2^{(DE)}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 + d_2 x_3^2 + d_3 x_3^3 \\
 u_2^{(EF)}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3
 \end{aligned} \tag{26.67}$$

Ipotizzando che le deformabilità assiali siano trascurabili, e tenendo in conto le condizioni ai limiti nei due appoggi, può subito dedursi che le linee elastiche assiali si annulleranno identicamente sui due ritti, mentre potrà porsi:

$$u_3^{(CD)}(x_3) = \delta \tag{26.68}$$

e quindi il telaio risulta ad un nodo spostabile.

Occorre ora imporre le condizioni di congruenza ed equilibrio nei nodi:

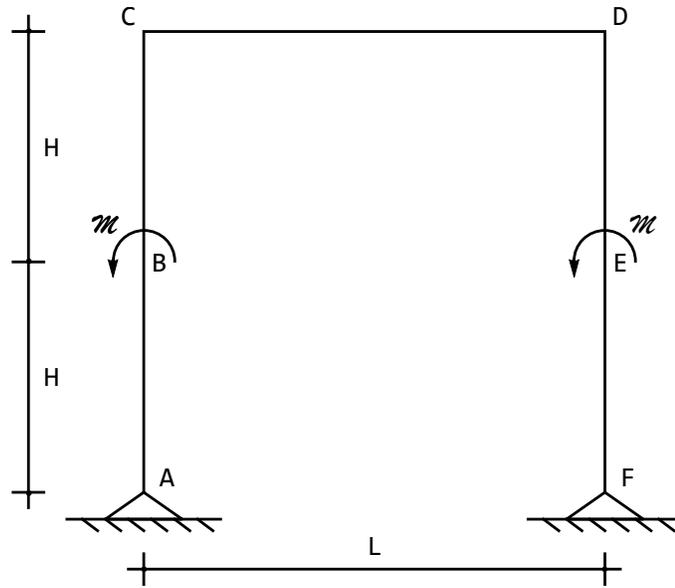


Figura 26.17: Un telaio simmetrico con carico antisimmetrico

— In corrispondenza dell'appoggio  $A$  si avranno le due usuali condizioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(H) &= 0 \\ m^{(BA)}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (26.69)$$

— Nel punto  $B$  si avranno due condizioni di congruenza e due equazioni di equilibrio. Ed infatti occorrerà scrivere:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(0) &= u_2^{(CB)}(H) \\ \phi^{(BA)}(0) &= \phi^{(CB)}(H) \\ -t^{(BA)}(0) + t^{(CB)}(H) &= 0 \\ m^{(BA)}(0) - m^{(CB)}(H) + \mathcal{M} &= 0 \end{aligned} \quad (26.70)$$

— In corrispondenza del nodo  $C$  la congruenza impone che lo spostamento trasversale del ritto sia uguale e contrario alla traslazione del traverso, che lo spostamento trasversale del traverso sia nullo, e che le rotazioni siano uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{(CB)}(0) &= -\delta \\ u_2^{(CD)}(0) &= 0 \\ \phi^{(CB)}(0) &= \phi^{(CD)}(0) \end{aligned} \quad (26.71)$$

mentre l'equilibrio del concio impone che la somma dei momenti debba annullarsi, in quanto il nodo  $C$  è nodo iniziale per ambedue i tratti in esso

concorrenti:

$$m^{(CB)}(0) + m^{(CD)}(0) = 0 \quad (26.72)$$

— In corrispondenza del nodo  $D$  si avrà, analogamente:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}(L) &= 0 \\ u_2^{(DE)}(0) &= -\delta \\ \phi^{(DE)}(0) &= \phi^{(CD)}(L) \\ m^{(DE)}(0) - m^{(CD)}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (26.73)$$

— Nel punto  $E$  si avranno due condizioni di congruenza e due equazioni di equilibrio analoghe a quelle scritte in  $B$ :

$$\begin{aligned} u_2^{(EF)}(0) &= u_2^{(DE)}(H) \\ \phi^{(EF)}(0) &= \phi^{(DE)}(0) \\ -t^{(EF)}(0) + t^{(DE)}(H) &= 0 \\ m^{(EF)}(0) - m^{(DE)}(H) + \mathcal{M} &= 0 \end{aligned} \quad (26.74)$$

— Nell'appoggio in  $F$  si avrà:

$$\begin{aligned} u_2^{(EF)}(H) &= 0 \\ m^{(EF)}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (26.75)$$

— ed infine l'equazione di piano esprimerà l'equilibrio del traverso  $CD$  alla traslazione orizzontale:

$$-t^{(CB)}(0) - t^{(DE)}(0) = 0 \quad (26.76)$$

La soluzione delle ventuno equazioni non pone difficoltà, e si giunge agli spostamenti trasversali:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)} &= \frac{(6H + L)\mathcal{M}(H - x_3)}{6EI} \\ u_2^{(CB)} &= \frac{\mathcal{M}(H(9H + 2L) - Lx_3 - 3x_3^2)}{6EI} \\ u_2^{(CD)} &= -\frac{\mathcal{M}(L - 2x_3)(L - x_3)x_3}{6EIL} \\ u_2^{(DE)} &= \frac{\mathcal{M}(H(9H + 2L) - Lx_3 - 3x_3^2)}{6EI} \\ u_2^{(EF)} &= \frac{(6H + L)\mathcal{M}(H - x_3)}{6EI} \end{aligned} \quad (26.77)$$

mentre lo spostamento assiale del traverso è pari a:

$$\delta = u_3^{(CD)} = -\frac{H(9H + 2L)\mathcal{M}}{6EI} \quad (26.78)$$

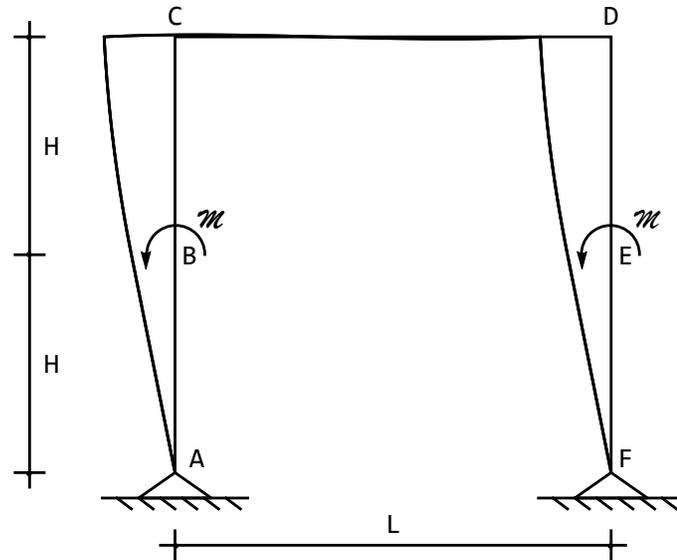


Figura 26.18: Un telaio simmetrico con carico antisimmetrico: diagramma degli spostamenti

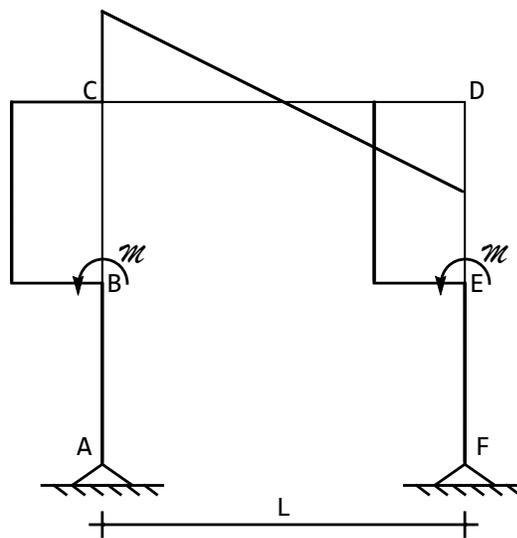


Figura 26.19: Un telaio simmetrico con carico antisimmetrico: diagramma dei momenti

La deformata si presenterà quindi come in Figura 26.18. I momenti sono forniti da:

$$\begin{aligned} m^{(BA)} &= m^{(EF)} = 0 \\ m^{(CB)} &= m^{(DE)} = \mathcal{M} \\ m^{(CD)} &= \mathcal{M} \left( -1 + \frac{2x_3}{L} \right) \end{aligned} \quad (26.79)$$

ed il loro andamento si presenta come in Figura 26.19.

I tagli si ottengono immediatamente, e valgono

$$t^{(CD)} = \frac{2\mathcal{M}}{L} \quad (26.80)$$

lungo il trasverso.

Infine, considerazioni di equilibrio permettono di dedurre gli sforzi normali:

$$\begin{aligned} n^{(BA)} &= n^{(CB)} = -\frac{2\mathcal{M}}{L} \\ n^{(DE)} &= n^{(EF)} = \frac{2\mathcal{M}}{L} \end{aligned} \quad (26.81)$$

### 26.6.1 L'utilizzo delle proprietà di simmetria

Lo stesso schema dell'esercizio precedente può notevolmente semplificarsi notando che la simmetria geometrica e di carico permette di affermare che sia gli abbassamenti che i momenti saranno antisimmetrici rispetto all'asse di simmetria, e quindi nulli in corrispondenza della mezzeria. Ci si può quindi limitare a studiare lo schema ridotto di Figura 26.20. Le condizioni ai limiti saranno uguali a quelle dell'esercizio precedente, sia in  $A$  che in  $B$  che in  $C$ , mentre in  $D$  si avrà ora:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}(L/2) &= 0 \\ m^{(CD)}(L/2) &= 0 \end{aligned} \quad (26.82)$$

ritrovando i risultati ottenuti in precedenza. Si noti anche che, trattandosi di schema isostatico, esso è banalmente risolvibile con gli usuali metodi della doppia integrazione

## 26.7 Un telaio simmetrico con carico simmetrico

Si consideri lo stesso telaio dell'esempio precedente, ma con due coppie di valore uguale e contrario, come illustrato in Figura 26.21. E' evidente che le condizioni scritte per l'esercizio 26.6 restano inalterate, tranne la condizione di equilibrio sul momento in  $E$ , che diviene:

$$m^{(EF)}(0) - m^{(DE)}(H) - \mathcal{M} = 0 \quad (26.83)$$

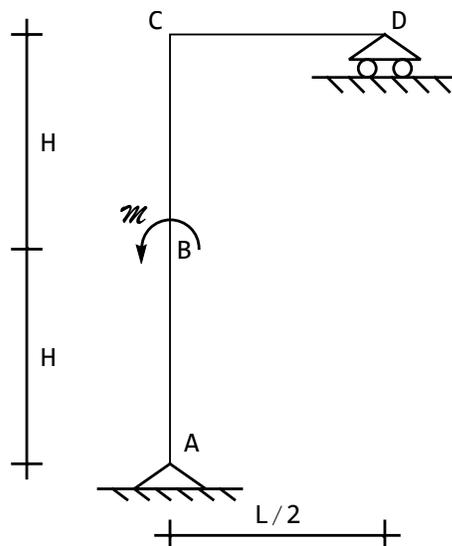


Figura 26.20: Lo schema ridotto per il telaio simmetrico con carico antisimmetrico

Si giunge alle linee elastiche:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(BA)} = -u_2^{(EF)} &= -\frac{\mathcal{M}(H-x_3)(H^3+2H(3H+2L)x_3-(3H+2L)x_3^2)}{8EIH(4H+3L)} \\
 u_2^{(CB)} = -u_2^{(DE)} &= \frac{\mathcal{M}x_3(2H^2L+2H^2x_3-(3H+2L)x_3^2)}{8EIH(4H+3L)} \\
 u_2^{(CD)} &= \frac{\mathcal{M}H(L-x_3)x_3}{4EI(4H+3L)}
 \end{aligned}
 \tag{26.84}$$

mentre questa volta, come prevedibile in base a considerazioni di simmetria, lo spostamento assiale  $\delta$  del traverso risulta nullo. Di conseguenza, il telaio può considerarsi a nodi fissi, e la deformata si presenta come in Figura 26.22. I momenti sono forniti da:

$$\begin{aligned}
 m^{(BA)} = -m^{(EF)} &= -\frac{3(3H+2L)\mathcal{M}(H-x_3)}{4H(4H+3L)} \\
 m^{(CB)} = -m^{(DE)} &= \frac{\mathcal{M}(-2H^2+(9H+6L)x_3)}{4H(4H+3L)} \\
 m^{(CD)} &= \frac{H\mathcal{M}}{8H+6L}
 \end{aligned}
 \tag{26.85}$$

I tagli sono quindi nulli lungo il traverso, mentre nel ritto di sinistra valgono:

$$t^{(CB)} = t^{(BA)} = \frac{9H\mathcal{M}+6L\mathcal{M}}{16H^2+12HL}
 \tag{26.86}$$

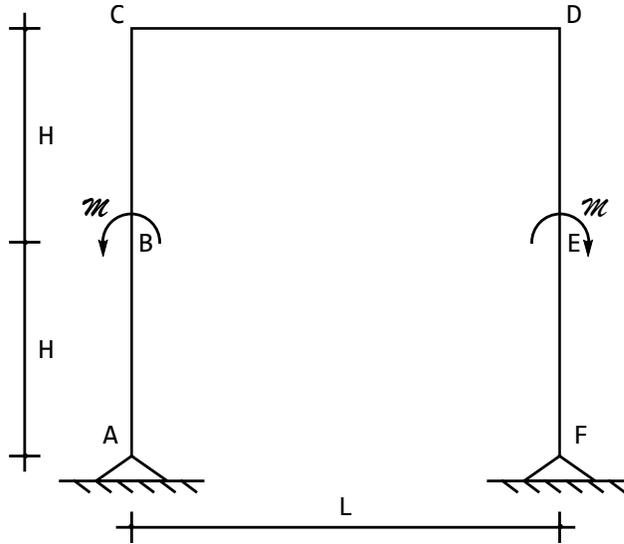


Figura 26.21: Un telaio simmetrico con carico simmetrico

e nel ritto di destra sono uguali e contrari:

$$t^{(DE)} = t^{(EF)} = -\frac{9HM + 6LM}{16H^2 + 12HL} \quad (26.87)$$

Il diagramma dei momenti si presenta come in Figura 26.23 Infine, gli sforzi assiali sul traverso sono calcolabili con banali considerazioni di equilibrio:

$$n^{(CD)} = \frac{9HM + 6LM}{16H^2 + 12HL} \quad (26.88)$$

### 26.7.1 L'utilizzo delle proprietà di simmetria

Si consideri lo stesso telaio dell'esempio precedente, che si vuole ora studiare sfruttando la simmetria geometrica ed ipotizzando una rigidezza assiale infinita. E' immediato riconoscere ora che in mezzeria dovranno annullarsi tagli e rotazioni, sicchè lo schema da studiare è quello di Figura 26.24. Possono calcolarsi le sole linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\ u_2^{(CB)}(x_3) &= c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= e_0 + e_1x_3 + e_2x_3^2 + e_3x_3^3 \end{aligned} \quad (26.89)$$

imponendo le condizioni ai limiti:

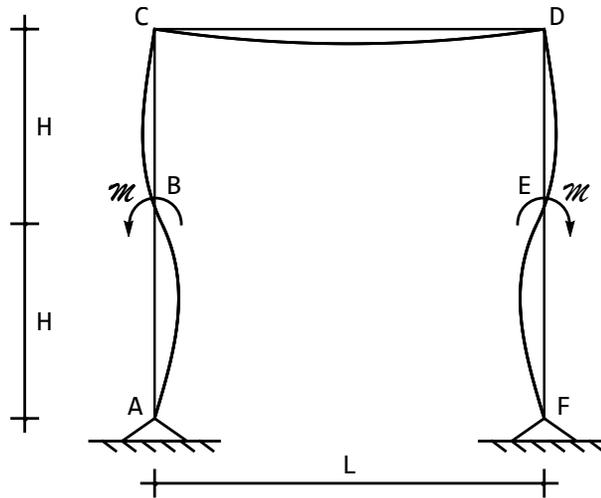


Figura 26.22: Un telaio simmetrico con carico simmetrico: diagramma degli spostamenti

— in  $A$ , come usuale, deve annullarsi lo spostamento trasversale ed il momento flettente:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(H) &= 0 \\ m^{(BA)}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (26.90)$$

— in  $B$  le condizioni sono identiche a quelle scritte sul telaio completo:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(0) &= u_2^{(CB)}(H) \\ \phi^{(BA)}(0) &= \phi^{(CB)}(H) \\ -t^{(BA)}(0) + t^{(CB)}(H) &= 0 \\ m^{(BA)}(0) - m^{(CB)}(H) + \mathcal{M} &= 0 \end{aligned} \quad (26.91)$$

— anche in  $C$  nulla muta, rispetto al telaio completo:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}(0) &= 0 \\ u_2^{(CB)}(0) &= 0 \\ \phi^{(CB)}(0) &= \phi^{(CD)}(0) \\ m^{(CB)}(0) + m^{(CD)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (26.92)$$

— nel bipendolo in  $D$  la congruenza impone che sia nulla la rotazione, mentre per l'equilibrio del conio si annulla il taglio:

$$\begin{aligned} \phi^{(CD)}(L/2) &= 0 \\ t^{(CD)}(L/2) &= 0 \end{aligned} \quad (26.93)$$

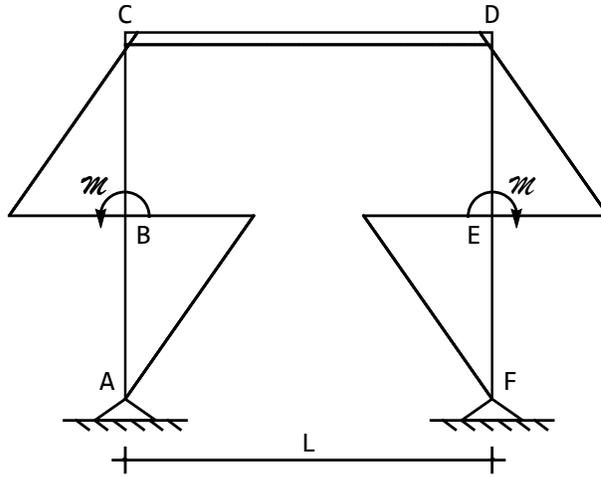


Figura 26.23: Un telaio simmetrico con carico simmetrico: diagramma dei momenti

Risolvendo il sistema di dodici equazioni si ritrovano i risultati dello schema completo.

## 26.8 Un telaio a tre campate

Si consideri ora il telaio di Figura 26.25, in cui l'asta  $BC$  è soggetta ad un carico uniformemente distribuito di intensità  $q$ . Trascurando le deformazioni da sforzo assiale, i corrispondenti spostamenti si annullano (telaio a nodi fissi), e si possono definire le linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 + \frac{q x_3^4}{24EI} \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 u_2^{(BE)}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 + d_2 x_3^2 + d_3 x_3^3 \\
 u_2^{(CF)}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3
 \end{aligned} \tag{26.94}$$

imponendo poi le condizioni ai limiti:

— in corrispondenza dell'incastro  $A$  si avranno le condizioni di congruenza dettate dai vincoli:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(0) &= 0 \\
 \phi^{(AB)}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{26.95}$$

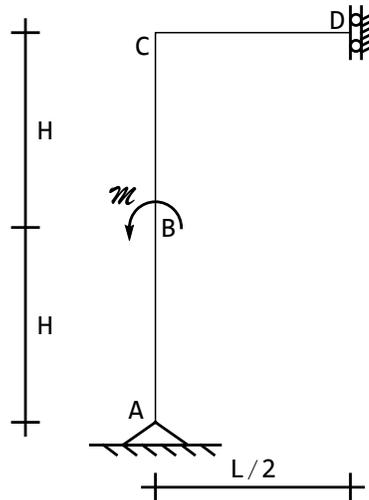


Figura 26.24: Lo schema ridotto per il telaio simmetrico con carico simmetrico

— nel nodo triplo  $B$  si avranno cinque condizioni di congruenza e una di equilibrio. Ed infatti, il nodo non può spostarsi, ma solo ruotare, e quindi lo spostamento trasversale delle tre aste in esso concorrenti deve annullarsi. Inoltre, la rotazione è unica:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(L) &= 0 \\
 u_2^{(BC)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(BE)}(0) &= 0 \\
 \phi^{(AB)}(L) &= \phi^{(BC)}(0) \\
 \phi^{(AB)}(L) &= \phi_{BE}(0)
 \end{aligned}
 \tag{26.96}$$

Corrispondentemente, solo l'equazione di equilibrio alla rotazione fornisce informazioni utili, e per essa occorre scrivere:

$$-m^{(AB)}(L) + m^{(BC)}(0) + m^{(BE)}(0) = 0
 \tag{26.97}$$

in quanto il nodo  $B$  è un nodo di arrivo per l'asta  $BA$ , e di partenza per le aste  $BC$  e  $BE$ .

— in corrispondenza del nodo triplo  $C$  si avranno, analogamente, le cinque

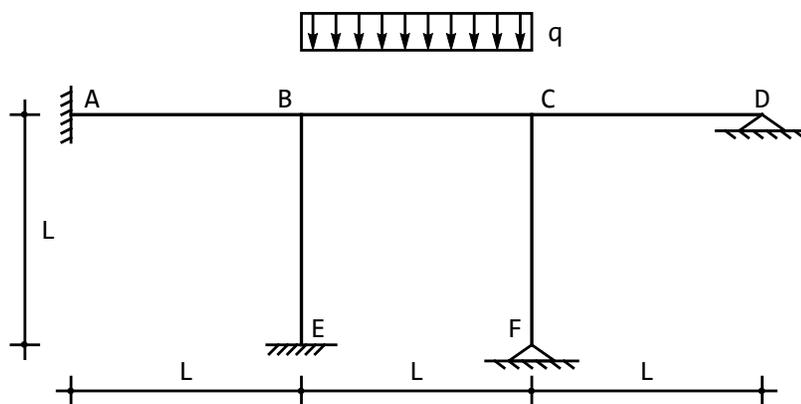


Figura 26.25: Un telaio di esempio a nodi fissi

condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(BC)}(L) &= 0 \\
 u_2^{(CD)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(CE)}(0) &= 0 \\
 \phi^{(BC)}(L) &= \phi^{(CD)}(0) \\
 \phi^{(BC)}(L) &= \phi^{(CE)}(0)
 \end{aligned} \tag{26.98}$$

e la condizione di equilibrio:

$$-m^{(BC)}(L) + m^{(CD)}(0) + m^{(CE)}(0) = 0 \tag{26.99}$$

— in corrispondenza dell'appoggio  $D$  si avrà l'annullarsi di spostamento e momento flettente:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(CD)}(L) &= 0 \\
 M^{(CD)}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{26.100}$$

— in  $E$  l'incastro proibisce sia gli spostamenti che le rotazioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(BE)}(L) &= 0 \\
 \phi_{BE}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{26.101}$$

— in  $F$ , infine, l'appoggio proibisce gli spostamenti ed azzera i momenti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(CF)}(L) &= 0 \\
 m^{(CF)}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{26.102}$$

Le linee elastiche flessionali sono quindi ottenibili come:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)} &= \frac{qL}{EI} \frac{x_3^2(-L+x_3)}{116} \\
 u_2^{(BC)} &= \frac{q}{EI} \frac{x_3(6L^3+24L^2x_3-59Lx_3^2+29x_3^3)}{696} \\
 u_2^{(CD)} &= -\frac{qL}{EI} \frac{7x_3(2L^2-3Lx_3+x_3^2)}{1392} \\
 u_2^{(BE)} &= \frac{qL}{EI} \frac{(L-x_3)^2x_3}{116} \\
 u_2^{(CF)} &= -\frac{qL}{EI} \frac{7x_3(2L^2-3Lx_3+x_3^2)}{1392}
 \end{aligned} \tag{26.103}$$

Si ha quindi la deformata di Figura 26.26. Il momento flettente varia linear-

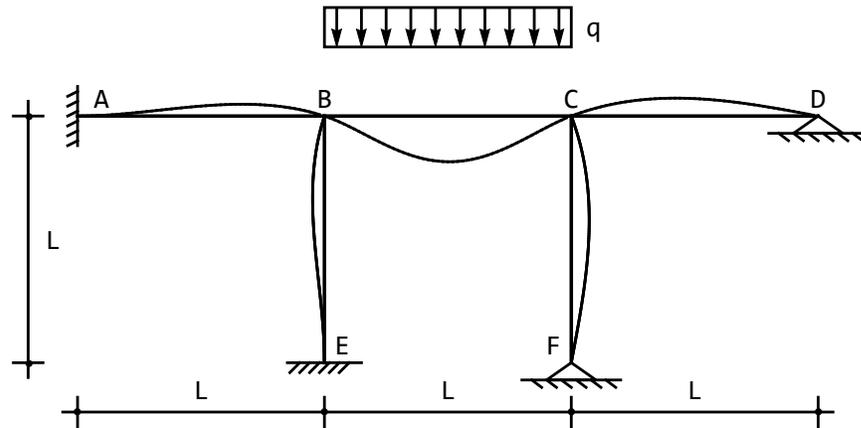


Figura 26.26: Un telaio di esempio a nodi fissi: il diagramma degli spostamenti lungo tutti i tratti, salvo  $BC$ , dove invece varierà con legge quadratica. Si ha:

$$m^{(AB)} = \frac{qL}{58} (L - 3x_3) \tag{26.104}$$

ed ancora:

$$\begin{aligned}
 m^{(BC)} &= -\frac{q}{116} (8L^2 - 59Lx_3 + 58x_3^2) \\
 m^{(CD)} &= -\frac{7qL}{232} (L - x_3) \\
 m^{(BE)} &= \frac{qL}{58} (2L - 3x_3) \\
 m^{(CF)} &= -\frac{7qL}{232} (L - x_3)
 \end{aligned} \tag{26.105}$$

Il diagramma dei momenti si presenta quindi come in Figura 26.27.

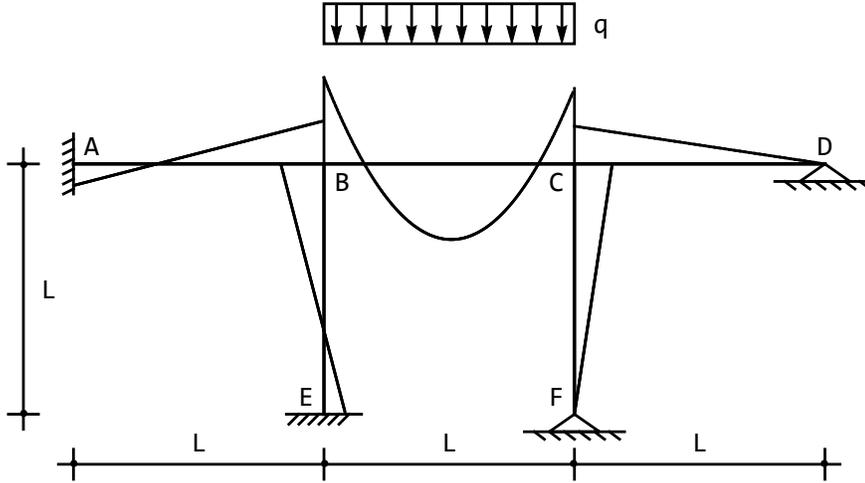


Figura 26.27: Un telaio di esempio a nodi fissi: il diagramma dei momenti

## 26.9 Un telaio “a scala”

Si consideri il telaio di Figura 26.28, vincolato con incastri al piede e soggetto ad una forza concentrata  $P$  in  $C$  ed una forza  $-P$  in  $D$ . Possono definirsi le cinque linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 \\
 u_2^{(DE)}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3 \\
 u_2^{(EF)}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3
 \end{aligned} \tag{26.106}$$

Ipotizzando una rigidità assiale infinita, è facile rendersi conto che le condizioni ai limiti nei due incastri proibiscono gli spostamenti assiali dei due ritti, mentre il traverso subirà uno spostamento assiale  $\delta$ . In questo caso particolare, la simmetria dello schema e del carico implica che questo spostamento sia nullo, ed il telaio rientra nella categoria dei telai a nodi fissi.

Le costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni ai limiti sugli spostamenti trasversali, le rotazioni, i momenti ed i tagli:

— in corrispondenza dell’incastro  $A$  si avranno le condizioni di congruenza dettate dai vincoli, annullando spostamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(0) &= 0 \\
 \phi^{(AB)}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{26.107}$$

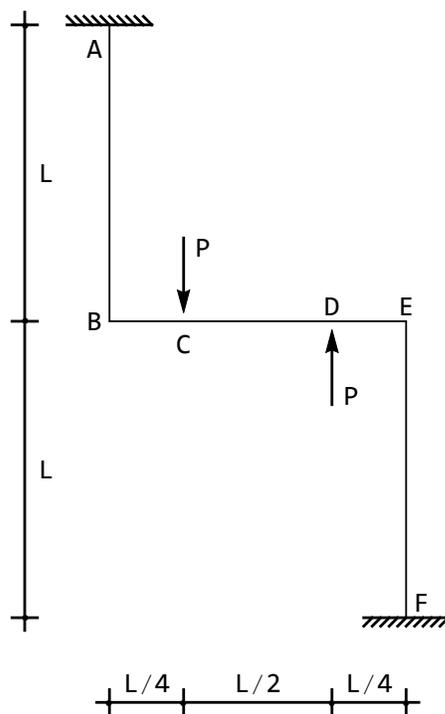


Figura 26.28: Un telaio di esempio

— nel punto  $B$  si avranno tre condizioni di congruenza e una equazioni di equilibrio. Ed infatti, poichè il nodo si limita a ruotare, risulteranno nulli gli abbassamenti trasversali di ambedue le aste in esso concorrenti, e le rotazioni dovranno essere uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(L) &= 0 \\ u_2^{(BC)}(0) &= 0 \\ \phi^{(AB)}(L) &= \phi^{(BC)}(0) \end{aligned} \quad (26.108)$$

L'unica condizione di equilibrio significativa è l'equilibrio dei momenti flettenti:

$$-m^{(BA)}(L) + m^{(BC)}(0) = 0 \quad (26.109)$$

— in corrispondenza del punto  $C$  di applicazione della forza si avranno le condizioni di congruenza che impongono allo spostamento trasversale ed alla rotazione di essere continui:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}\left(\frac{L}{4}\right) &= u_2^{(CD)}(0) \\ \phi^{(BC)}\left(\frac{L}{4}\right) &= \phi^{(CD)}(0) \end{aligned} \quad (26.110)$$

L'equilibrio del concio porta invece a scrivere:

$$\begin{aligned} m^{(BC)}\left(\frac{L}{4}\right) &= m^{(CD)}(0) \\ t^{(BC)}\left(\frac{L}{4}\right) &= t^{(CD)}(0) + P \end{aligned} \quad (26.111)$$

— in corrispondenza del punto  $D$  di applicazione della seconda forza si avranno le analoghe condizioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(CD)}\left(\frac{L}{2}\right) &= u_2^{(DE)}(0) \\ \phi^{(CD)}\left(\frac{L}{2}\right) &= \phi^{(DE)}(0) \\ m^{(CD)}\left(\frac{L}{2}\right) &= m^{(DE)}(0) \\ t^{(CD)}\left(\frac{L}{2}\right) &= t^{(DE)}(0) - P \end{aligned} \quad (26.112)$$

— in  $E$  si avrà, come in  $B$ :

$$\begin{aligned} u_2^{(DE)}\left(\frac{L}{4}\right) &= 0 \\ u_2^{(EF)}(0) &= 0 \\ \phi^{(DE)}\left(\frac{L}{4}\right) &= \phi^{(EF)}(0) \\ -m^{(DE)}\left(\frac{L}{4}\right) + m^{(EF)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (26.113)$$

— infine, nell'incastro in  $F$  si avrà l'annullarsi di spostamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(EF)}(L) &= 0 \\ \phi^{(EF)}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (26.114)$$

Utilizzando le (26.106), insieme alle relative derivate, si giunge ad un sistema di venti equazioni nelle venti costanti di integrazione, che risolto fornisce le linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)} &= \frac{3Px_3^2(-L+x_3)}{320EI} \\ u_2^{(BC)} &= \frac{Px_3(9L^2+18Lx_3-92x_3^2)}{960EI} \\ u_2^{(CD)} &= \frac{P(31L^3+12L^2x_3-816Lx_3^2+1088x_3^3)}{15360EI} \\ u_2^{(DE)} &= \frac{P(-31L^3+12L^2x_3+816Lx_3^2-1472x_3^3)}{15360EI} \\ u_2^{(EF)} &= \frac{3P(L-x_3)^2x_3}{320EI} \end{aligned} \quad (26.115)$$

e la deformata si presenta come in Figura 26.29. I momenti sono distribuiti con

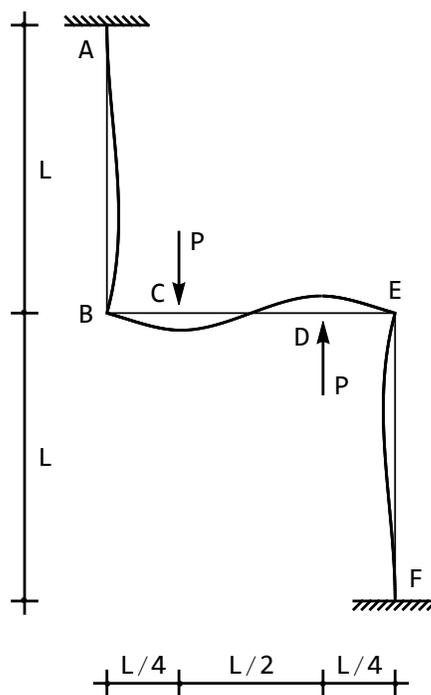


Figura 26.29: La deformata del telaio di Figura 26.28

legge lineare, e valgono:

$$\begin{aligned}
 m^{(AB)} &= \frac{3P}{160} (L - 3x_3) \\
 m^{(BC)} &= -\frac{P}{80} (3L - 46x_3) \\
 m^{(CD)} &= \frac{17P}{160} (L - 4x_3) \\
 m^{(DE)} &= -\frac{P}{160} (17L - 92x_3) \\
 m^{(EF)} &= \frac{3P}{160} (2L - 3x_3)
 \end{aligned}
 \tag{26.116}$$

presentandosi come in Figura 26.30. I tagli sono quindi costanti a tratti, e si

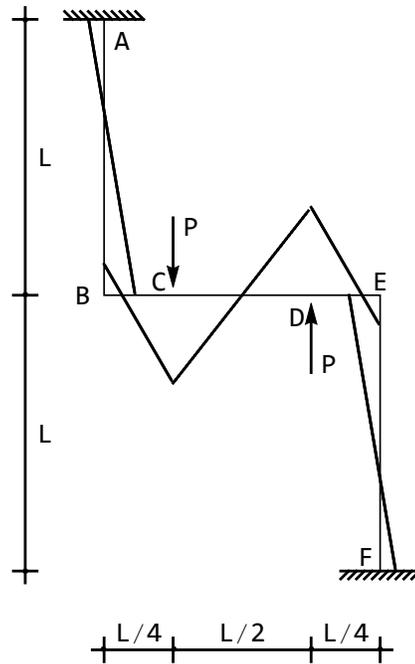


Figura 26.30: Il diagramma dei momenti per il telaio di Figura 26.28

ottiene subito:

$$\begin{aligned}
 t^{(AB)} &= -\frac{9P}{160} \\
 t^{(BC)} &= \frac{23P}{40} \\
 t^{(CD)} &= -\frac{17P}{40} \\
 t^{(DE)} &= \frac{23P}{40} \\
 t^{(EF)} &= -\frac{9P}{160}
 \end{aligned}
 \tag{26.117}$$

Infine, gli sforzi assiali si ottengono tramite considerazioni di equilibrio. Lungo i ritti, infatti, sarà:

$$n^{(AB)} = n^{(EF)} = \frac{23F}{40}
 \tag{26.118}$$

mentre il traverso è soggetto ad uno sforzo normale pari a:

$$n^{(BE)} = \frac{9F}{160}
 \tag{26.119}$$

### Valori notevoli

I massimi spostamenti si ottengono in corrispondenza delle forze, e valgono:

$$u_{2\max} = -u_{2\min} = \frac{31}{15360} \frac{PL^3}{EI} \quad (26.120)$$

La rotazione in mezzera vale invece:

$$\phi_{\max} = -\frac{PL^2}{80EI} \quad (26.121)$$

I momenti notevoli sono calcolabili come:

$$\begin{aligned} m_A &= \frac{3}{160} PL \\ m_B &= -\frac{3}{80} PL \\ m_C &= \frac{17}{160} PL \end{aligned} \quad (26.122)$$

## 26.10 Una mensola con tirante incastrato

Si consideri ora il telaio di Figura 26.31, soggetto ad un carico distribuito  $q$  lungo l'elemento inferiore  $BD$ . L'elemento  $AC$  è incernierato in  $A$ , ed è caratterizzato da un momento di inerzia  $I_1$ , mentre il tratto inferiore  $BD$  ha momento di inerzia  $I$ . In ipotesi di indeformabilità assiale le aste non subiranno sposta-

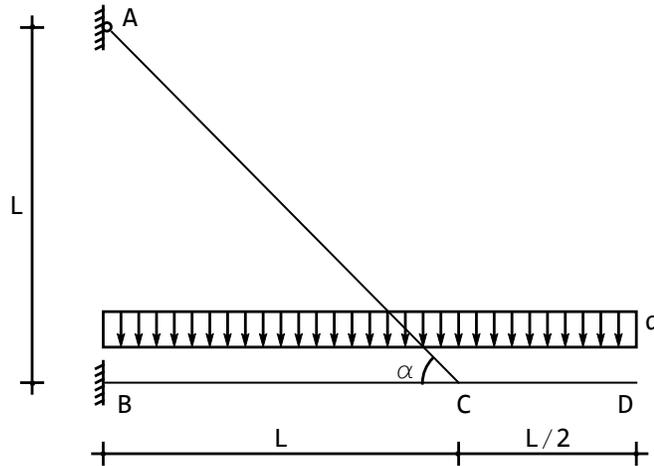


Figura 26.31: Una mensola con tirante

menti assiali, ed il punto  $C$ , in particolare, non subirà spostamento alcuno. Si

definiscono le linee elastiche:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(BC)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + \frac{q x_3^4}{24EI} \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 + \frac{q x_3^4}{24EI} \\
 u_2^{(AC)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3
 \end{aligned}
 \tag{26.123}$$

imponendo poi le condizioni ai limiti:

— in corrispondenza dei vincoli in  $A$  ed in  $B$  si avranno le condizioni di congruenza e di equilibrio dettate dai vincoli, per cui nell'appoggio si annulleranno spostamenti e momenti, mentre nell'incastro saranno nulli spostamenti e rotazioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AC)}(0) &= 0 \\
 m^{(AC)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(BC)}(0) &= 0 \\
 \phi^{(BC)}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{26.124}$$

— nel punto  $C$  si avranno cinque condizioni di congruenza, annullando le componenti trasversali di spostamento del nodo, ed uguagliando le rotazioni subite dai tre tratti in esso concorrenti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(BC)}(L_1) &= 0 \\
 u_2^{(CD)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(AC)}(L_t) &= 0 \\
 \phi^{(BC)}(L_1) &= \phi^{(CD)}(0) \\
 \phi^{(BC)}(L_1) &= \phi^{(AC)}(L_t)
 \end{aligned}
 \tag{26.125}$$

dove  $L_t$  è la lunghezza del tirante  $AB$ :

$$L_t = \frac{L}{\cos(\alpha)}
 \tag{26.126}$$

— in corrispondenza del punto  $C$  si avrà anche la condizione di equilibrio:

$$-m^{(BC)}(L) - m^{(AC)}(L_t) + m^{(CD)}(0) = 0
 \tag{26.127}$$

— infine, nell'estremo libero dovranno essere rispettate le condizioni di equilibrio, annullando le caratteristiche della sollecitazione interna:

$$\begin{aligned}
 m^{(CD)}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\
 t^{(CD)}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{26.128}$$

Le risultanti equazioni si risolvono, a fornire, in ipotesi di inestensibilità assiale:

$$\begin{aligned} u_2^{(AC)} &= \frac{-qLx_3((L^2 - \cos(\phi)^2 x_3^2))}{48(4EI + 3EI_1 \cos(\phi))} \\ u_2^{(BC)} &= \frac{qx_3^2(-L + x_3)(-3L(EI + EI_1 \cos(\phi)) + (4EI + 3EI_1 \cos(\phi))x_3)}{24EI(4EI + 3EI_1 \cos(\phi))} \\ u_2^{(CD)} &= \frac{q}{48}x_3 \left( \frac{2L^3}{4EI + 3EI_1 \cos(\phi)} + \frac{3L^2 x_3}{EI} - \frac{4Lx_3^2}{EI} + \frac{2x_3^3}{EI} \right) \end{aligned} \quad (26.129)$$

e quindi un abbassamento, in corrispondenza dell'estremo libero, pari a:

$$u_{2 \max} = \frac{qL^4}{384EI} \frac{20EI + 9EI_1 \cos(\phi)}{4EI + 3EI_1 \cos(\phi)} \quad (26.130)$$

I momenti flettenti sono forniti da:

$$\begin{aligned} m^{(AC)} &= -\frac{qL}{8} \frac{EI_1 \cos(\phi)^2 x_3}{4EI + 3EI_1 \cos(\phi)} \\ m^{(BC)} &= -q \frac{L^2(EI + EI_1 \cos(\phi)) - L(7EI + 6EI_1 \cos(\phi))x_3 + (8EI + 6EI_1 \cos(\phi))x_3^2}{16EI + 12EI_1 \cos(\phi)} \\ m^{(CD)} &= -\frac{q}{8}(L - 2x_3)^2 \end{aligned} \quad (26.131)$$

ed i tagli da:

$$\begin{aligned} t^{(AC)} &= -\frac{qL}{8} \frac{EI_1 \cos(\phi)^2}{4EI + 3EI_1 \cos(\phi)} \\ t^{(BC)} &= -q \frac{-L(7EI + 6EI_1 \cos(\phi)) + (16EI + 12EI_1 \cos(\phi))x_3}{16EI + 12EI_1 \cos(\phi)} \\ t^{(CD)} &= \frac{q}{2}(L - 2x_3) \end{aligned} \quad (26.132)$$

Gli sforzi normali, infine, sono nulli lungo  $CD$ , e per il resto sono forniti dalle equazioni di equilibrio del nodo  $C$ :

$$\begin{aligned} -n^{(AC)} \cos(\phi) + t^{(AC)} \sin(\phi) - n^{(BC)} &= 0 \\ -n^{(AC)} \sin(\phi) - t^{(AC)} \cos(\phi) - t^{(BC)} + T^{(CD)} &= 0 \end{aligned} \quad (26.133)$$

Si ha quindi che l'asta  $BC$  risulta compressa, mentre il tirante  $AC$  è teso, con sforzi normali dati da:

$$\begin{aligned} n^{(BC)} &= -\frac{qL}{8} \frac{(2EI + EI_1 \cos(\phi)) \cot(\phi)}{4EI + 3EI_1 \cos(\phi)} \\ n^{(AC)} &= \frac{qL}{32} \frac{(8EI + 3EI_1 \cos(\phi) + EI_1 \cos(3\phi)) \csc(\phi)}{4EI + 3EI_1 \cos(\phi)} \end{aligned} \quad (26.134)$$

## 26.11 Una mensola con tirante incernierato

Si consideri ora la stessa mensola con tirante di Figura 26.31, in cui l'elemento  $AC$  è incernierato ai due estremi (ed è quindi un pendolo soggetto a solo sforzo assiale), caratterizzato dalla rigidezza assiale  $EA$ . Viceversa, la rigidezza assiale dell'elemento  $BD$  verrà considerata infinita. (cfr. Figura 26.32). Si definiscono

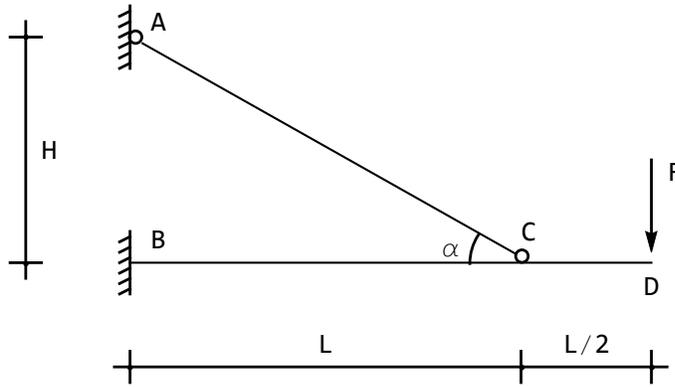


Figura 26.32: Una mensola con pendolo tirante

le linee elastiche:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(BC)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \\
 u_2^{(AC)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 \\
 u_3^{(AC)}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3
 \end{aligned} \tag{26.135}$$

imponendo poi le condizioni ai limiti:

— in corrispondenza degli estremi in  $A$  ed in  $B$  si avranno le condizioni di congruenza dettate dai vincoli, sicchè nell'asta  $AC$  occorre annullare ambedue le componenti di spostamento. L'asta  $BC$  è incastrata in  $B$ , e quindi sono nulli gli spostamenti trasversali e le rotazioni:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AC)}(0) &= 0 \\
 u_3^{(AC)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(BC)}(0) &= 0 \\
 \phi^{(BC)}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{26.136}$$

— nel punto  $C$  si avranno due condizioni di congruenza tra i due tratti orizzontali, secondo cui gli spostamenti trasversali e le rotazioni devono essere

continui:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}(L_1) &= u_2^{(CD)}(0) \\ \phi^{(BC)}(L_1) &= \phi^{(CD)}(0) \end{aligned} \quad (26.137)$$

e due condizioni di congruenza tra il pendolo ed il tratto orizzontale, che possono scriversi uguagliando le componenti orizzontali e le componenti verticali degli spostamenti. Poichè lo spostamento orizzontale del punto  $C$  è nullo, dovrà essere:

$$u_2^{(AC)}(L_t) \sin(\phi) - u_3^{(AC)}(L_t) \cos(\alpha) = 0 \quad (26.138)$$

mentre per le componenti verticali sarà:

$$u_2^{(AC)}(L_t) \cos(\phi) + u_3^{(AC)}(L_t) \sin(\alpha) = u_2^{(BC)}(0) \quad (26.139)$$

In  $C$ , inoltre, devono essere rispettate le due condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} -t^{(BC)}(L_1) + t^{(CD)}(0) - n^{(AC)}(L_t) \sin(\alpha) &= 0 \\ -m^{(BC)}(L_1) + m^{(CD)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (26.140)$$

— infine, nell'estremo libero dovranno essere rispettate le due condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} m^{(CD)}(L_2) &= 0 \\ -t^{(CD)}(L_2) + F &= 0 \end{aligned} \quad (26.141)$$

Le risultanti equazioni possono essere risolte, ipotizzando, come in Figura,  $L_1 = L$  ed  $L_2 = L/2$ , a fornire:

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)} &= \frac{Fx_3^2 (2EI \sec(\phi)^2 (9L - 2x_3) + EAL^2 \sin(\phi) (-L + x_3) \tan(\phi))}{8EI (EAL^2 \sin(\phi) \tan(\phi) + 3EI \sec(\phi)^2)} \\ u_2^{(CD)} &= \frac{F}{24} \left( \frac{x_3 (3L^2 + 6Lx_3 - 4x_3^2)}{EI} + \frac{21L^2 \sec(\phi)^2 (2L + 3x_3)}{EAL^2 \sin(\phi) \tan(\phi) + 3EI \sec(\phi)^2} \right) \\ u_2^{(AC)} &= \frac{7FL^2 x_3}{4EAL^2 \sin(\phi) \tan(\phi) + 12EI \sec(\phi)^2} \\ u_2^{(AC)} &= \frac{7FL^2 x_3 \tan(\alpha)}{4EAL^2 \sin(\phi) \tan(\phi) + 12EI \sec(\phi)^2} \end{aligned} \quad (26.142)$$

e quindi un abbassamento, in corrispondenza della forza, pari a:

$$u_{2 \max} = \frac{FL^3}{48} \left( \frac{5}{EI} + \frac{147}{3EI + L^2 \cos(\phi) EA_1} \right) \quad (26.143)$$

I momenti flettenti sono forniti da:

$$m^{(BC)} = \frac{F}{4} \left( L - 3x_3 - \frac{21EI(L - x_3)}{3EI + EAL^2 \cos(\phi) \sin(\phi)^2} \right) \quad (26.144)$$

$$m^{(CD)} = -\frac{FL}{2} + Fx_3$$

mentre lo sforzo normale nel pendolo è pari a:

$$n^{(AC)} = \frac{7EAF L^2 \tan(\phi)}{4EAL^2 \sin(\phi) \tan(\phi) + 12EI \sec(\phi)^2} \quad (26.145)$$

## 26.12 Una travatura reticolare

Si consideri ora la travatura reticolare di Figura 26.33, costituita da tre aste concorrenti in un punto  $D$ . Poichè si suppone che gli estremi siano incernierati,

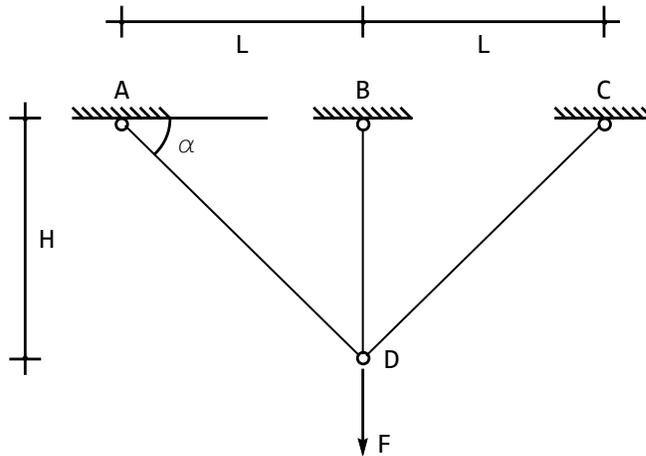


Figura 26.33: Una semplice travatura reticolare

gli elementi sono soggetti al solo sforzo assiale, e le loro linee elastiche flessionali si riducono a funzioni lineari. Ipotizzando poi, almeno in un primo tempo, una deformabilità assiale finita, si potrà porre:

$$\begin{aligned} u_2^{(AD)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 \\ u_3^{(AD)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 \\ u_2^{(BD)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 \\ u_3^{(BD)}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 \\ u_2^{(CD)}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 \\ u_3^{(CD)}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3 \end{aligned} \quad (26.146)$$

Imponendo poi le condizioni ai limiti nei tre estremi  $A$ ,  $B$  e  $C$  si annullano i sei termini costanti. In  $D$ , invece, occorre allora imporre la congruenza degli spostamenti tra l'asta inclinata  $AD$  e l'asta verticale  $BD$ :

$$\begin{aligned} u_3^{(BD)}(H) &= u_3^{(AD)}(S) \sin(\alpha) + u_2^{(AD)}(S) \cos(\alpha) \\ u_2^{(BD)}(H) &= u_3^{(AD)}(S) \cos(\alpha) - u_2^{(AD)}(S) \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (26.147)$$

nonchè la congruenza degli spostamenti tra l'asta inclinata  $CD$  e l'asta verticale  $BD$ :

$$\begin{aligned} u_3^{(BD)}(H) &= u_3^{(CD)}(S) \sin(\alpha) + u_2^{(CD)}(S) \cos(\alpha) \\ u_2^{(BD)}(H) &= -u_3^{(CD)}(S) \cos(\alpha) + u_2^{(CD)}(S) \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (26.148)$$

L'equilibrio del nodo fornisce poi le ultime due equazioni:

$$\begin{aligned} -n^{(AD)}(S) \sin(\alpha) - n^{(CD)}(S) \sin(\alpha) - n^{(BD)}(H) + P &= 0 \\ -n^{(AD)}(S) \cos(\alpha) + n^{(CD)}(S) \cos(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (26.149)$$

con  $S = \frac{H}{\sin(\alpha)}$ .

Si noti che si è rinunciato ad utilizzare considerazioni preliminari sulla simmetria del carico e dello schema.

Le linee elastiche si ottengono facilmente risolvendo le sei precedenti equazioni:

$$\begin{aligned} u_2^{(AD)} &= u_2^{(CD)} = \frac{PH \cos(\alpha)x_3}{EA(H + S - H \cos(2\alpha))} \\ u_2^{(BD)} &= 0 \\ u_3^{(AD)} &= u_3^{(CD)} = \frac{PH \sin(\alpha)x_3}{EA(H + S - H \cos(2\alpha))} \\ u_3^{(BD)} &= \frac{PSx_3}{EA(H + S - H \cos(2\alpha))} \end{aligned} \quad (26.150)$$

Gli sforzi normali nelle tre aste sono quindi:

$$\begin{aligned} n^{(AD)} &= n^{(CD)} = \frac{PH \sin(\phi)}{H + S - H \cos(2\alpha)} \\ n^{(BD)} &= \frac{PS}{H + S - H \cos(2\alpha)} \end{aligned} \quad (26.151)$$

In ipotesi di inestensibilità assiale, gli spostamenti si annullano, gli sforzi normali restano inalterati

## 26.13 Una maglia chiusa esternamente labile

Si considera la maglia chiusa di Figura 26.34, due volte labile esternamente, ma in equilibrio per questa particolare condizione di carico. Internamente, la

presenza di tre sconnessioni garantisce l'isostaticità. Ovviamente, il carrello in  $E$  reagirà con una forza verticale  $R$ , diretta verso il basso, e di valore  $R = qL$ . Eliminando le deformabilità assiali, la simmetria dello schema implica che gli

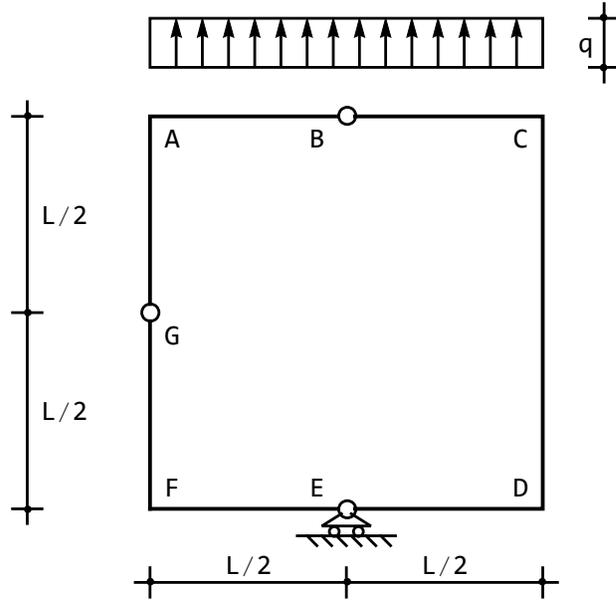


Figura 26.34: Una maglia chiusa in equilibrio per particolari condizioni di carico

spostamenti assiali dei traversi siano nulli, e che gli spostamenti assiali dei tre tratti verticali siano uguali, e pari a  $\delta$ .

Si definiscono le seguenti linee elastiche:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 - \frac{q x_3^4}{24EI} \\
 u_2^{(BC)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 - \frac{q x_3^4}{24EI} \\
 u_2^{(CD)}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \\
 u_2^{(ED)}(x_3) &= d_0 + d_1 x_3 + d_2 x_3^2 + d_3 x_3^3 \\
 u_2^{(FE)}(x_3) &= e_0 + e_1 x_3 + e_2 x_3^2 + e_3 x_3^3 \\
 u_2^{(GF)}(x_3) &= f_0 + f_1 x_3 + f_2 x_3^2 + f_3 x_3^3 \\
 u_2^{(AG)}(x_3) &= g_0 + g_1 x_3 + g_2 x_3^2 + g_3 x_3^3
 \end{aligned} \tag{26.152}$$

e si introducono, quali ulteriori incognite, i sette sforzi normali nei sette tratti, e la reazione  $R_E$  verticale del carrello. L'imposizione delle condizioni ai limiti non pone alcuna difficoltà:

— in corrispondenza del nodo  $A$ , per la congruenza, si annullerà lo spostamento trasversale del tratto  $AG$ , lo spostamento trasversale del tratto  $AB$  sarà pari a  $\delta$ , e le rotazioni dei due tratti dovranno essere uguali:

$$\begin{aligned} u_2^{(AG)}(0) &= 0 \\ u_2^{(AB)}(0) &= \delta \\ \phi^{(AB)}(0) &= \phi^{(AG)}(0) \end{aligned} \quad (26.153)$$

mentre l'equilibrio del nodo impone che sia:

$$\begin{aligned} m^{(AB)}(0) + m^{(AG)}(0) &= 0 \\ n^{(AG)} + t^{(AB)}(0) &= 0 \\ n^{(AB)} - t^{(AG)}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (26.154)$$

— in corrispondenza della cerniera in  $B$  bisognerà garantire l'uguaglianza degli spostamenti (congruenza), l'annullarsi dei momenti e l'uguaglianza dei tagli e degli sforzi normali (equilibrio):

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}\left(\frac{L}{2}\right) &= u_2^{(BC)}(0) \\ m^{(AB)}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\ m^{(BC)}(0) &= 0 \\ -t^{(AB)}\left(\frac{L}{2}\right) + t^{(BC)}(0) &= 0 \\ -n^{(AB)} + n^{(BC)} &= 0 \end{aligned} \quad (26.155)$$

— in corrispondenza del nodo  $C$  si avranno condizioni analoghe alle condizioni in  $A$ :

$$\begin{aligned} u_2^{(BC)}\left(\frac{L}{2}\right) &= \delta \\ u_2^{(CD)}(0) &= 0 \\ \phi^{(BC)}\left(\frac{L}{2}\right) &= \phi^{(CD)}(0) \\ -m^{(BC)}\left(\frac{L}{2}\right) + m^{(CD)}(0) &= 0 \\ -n^{(BC)} - t^{(CD)}(0) &= 0 \\ n^{(CD)} - t^{(BC)}(L/2) &= 0 \end{aligned} \quad (26.156)$$

— nel nodo  $D$ :

$$\begin{aligned}
 u_2^{(CD)}(L) &= 0 \\
 u_2^{(ED)}\left(\frac{L}{2}\right) &= \delta \\
 \phi^{(CD)}(L) &= \phi^{(DE)}(0) \\
 -m^{(CD)}(L) - m^{(ED)}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\
 -n^{(CD)} - t^{(ED)}(L/2) &= 0 \\
 -n^{(ED)} + t^{(CD)}(L) &= 0
 \end{aligned} \tag{26.157}$$

— in corrispondenza del nodo  $E$ , l'appoggio impone che lo spostamento sia nullo, e la cerniera che i momenti siano nulli. La rotazione, invece, sarà discontinua, mentre potranno scriversi le due equazioni di equilibrio alla traslazione:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(ED)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(FE)}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\
 m^{(ED)}(0) &= 0 \\
 m^{(FE)}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\
 -n^{(FE)} + n^{(ED)} &= 0 \\
 -t^{(FE)}\left(\frac{L}{2}\right) + t^{(ED)}(0) + R_{Ev} &= 0
 \end{aligned} \tag{26.158}$$

— in  $F$ , come in  $A$ ,  $C$  e  $D$ :

$$\begin{aligned}
 u_2^{(GF)}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\
 u_2^{(FE)}(0) &= \delta \\
 \phi^{(GF)}\left(\frac{L}{2}\right) &= \phi^{(FE)}(0) \\
 -m^{(GF)}(L) + m^{(FE)}(0) &= 0 \\
 n^{(FE)} + t^{(GF)}(L/2) &= 0 \\
 -n^{(GF)} + t^{(FE)}(0) &= 0
 \end{aligned} \tag{26.159}$$

— infine, in corrispondenza della cerniera in  $G$  si potrà scrivere

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AG)}\left(\frac{L}{2}\right) &= u_2^{(GF)}(0) \\
 m^{(AG)}\left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\
 m^{(GF)}(0) &= 0 \\
 t^{(AG)}\left(\frac{L}{2}\right) - t^{(GF)}(0) &= 0 \\
 n^{(AG)} - n^{(GF)} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{26.160}$$

Il risultante sistema di equazioni si risolve banalmente, a fornire le linee elastiche flessionali:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AB)} &= -\frac{q(13L^4 + 23L^3x_3 - 3L^2x_3^2 - 2Lx_3^3 + 4x_3^4)}{96EI} \\
 u_2^{(BC)} &= -\frac{q(95L^4 - 94L^3x_3 + 24Lx_3^3 + 16x_3^4)}{384EI} \\
 u_2^{(CD)} &= \frac{qLx_3(17L^2 - 15Lx_3 - 2x_3^2)}{96EI} \\
 u_2^{(ED)} &= -\frac{qLx_3(-59L^2 + 28x_3^2)}{192EI} \\
 u_2^{(FE)} &= \frac{qL(-13L^3 + 25L^2x_3 + 3Lx_3^2 - 2x_3^3)}{96EI} \\
 u_2^{(GF)} &= -\frac{qL(-24L^3 + 47L^2x_3 + 4x_3^3)}{192EI} \\
 u_2^{(AG)} &= -\frac{qLx_3(23L^2 + 3Lx_3 - 2x_3^2)}{96EI}
 \end{aligned}
 \tag{26.161}$$

lo spostamento verticale dei due ritti:

$$\delta = -\frac{13}{96} \frac{qL^4}{EI}
 \tag{26.162}$$

gli sforzi normali:

$$\begin{aligned}
 n^{(AB)} = n^{(BC)} &= -\frac{qL}{8} \\
 n^{(ED)} = n^{(FE)} &= \frac{qL}{8} \\
 n^{(GF)} = n^{(AG)} &= \frac{qL}{8} \\
 n^{(CD)} &= \frac{7qL}{8}
 \end{aligned}
 \tag{26.163}$$

e la reazione del carrello:

$$R_{Ev} = qL
 \tag{26.164}$$

Si ha quindi la deformata di Figura 26.35, da cui può dedursi che gli spostamenti massimi si ottengono in corrispondenza delle cerniere in  $B$  ed in  $G$ . Il momento flettente varia linearmente lungo tutti i tratti, salvo che sul traverso superiore, dove invece varierà con legge quadratica. Si ha:

$$\begin{aligned}m^{(AB)} &= -\frac{q}{16} (L^2 + 2Lx_3 - 8x_3^2) \\m^{(BC)} &= \frac{q}{8} x_3 (3L + 4x_3) \\m^{(CD)} &= \frac{qL}{16} (5L + 2x_3) \\m^{(ED)} &= -\frac{7}{8} qLx_3 \\m^{(FE)} &= -\frac{qL}{16} (L - 2x_3) \\m^{(GF)} &= -\frac{qL}{8} x_3 \\m^{(AG)} &= \frac{qL}{16} (L - 2x_3)\end{aligned}\tag{26.165}$$

Il diagramma dei momenti si presenta quindi come in Figura 26.36.

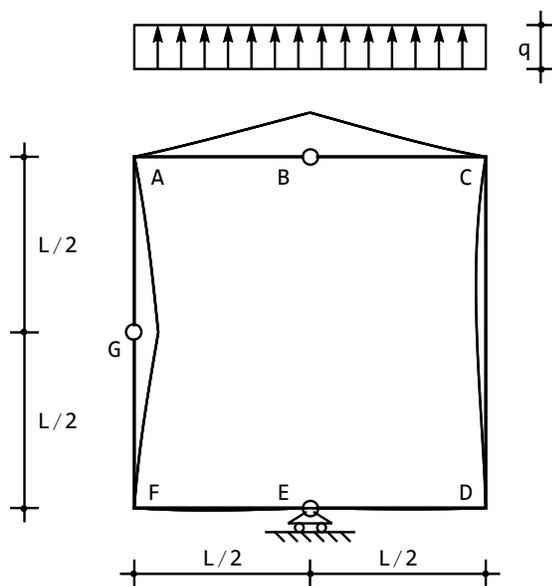


Figura 26.35: Il diagramma degli spostamenti per la maglia chiusa di Figura 26.34

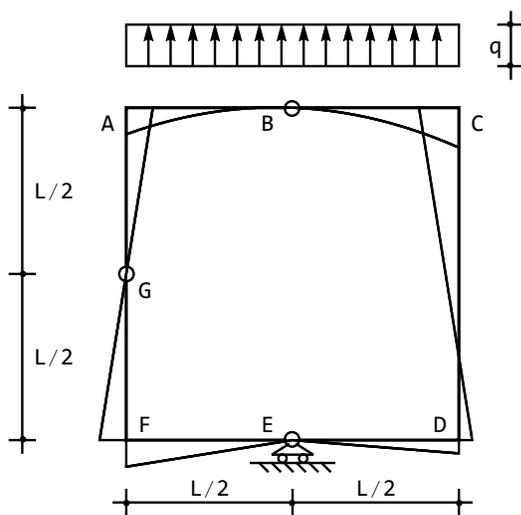


Figura 26.36: Il diagramma dei momenti per la maglia chiusa di Figura 26.34

## Capitolo 27

# Strutture simmetriche ed antisimmetriche

In questo Capitolo si studiano strutture piane che presentano proprietà di simmetria ed antisimmetria sia geometriche che di carico. Spesso è possibile sfruttare queste proprietà per semplificare l'analisi.

Si consideri infatti una struttura  $S$ , che abbia un asse di simmetria geometrico, e si supponga che anche i vincoli siano simmetricamente disposti rispetto a tale asse. Ad esempio, il telaio di Figura 27.1 presenta l'asse di simmetria geometrico  $a-a$ . Per tale tipo di struttura, si prendono in esame due condizioni di carico:

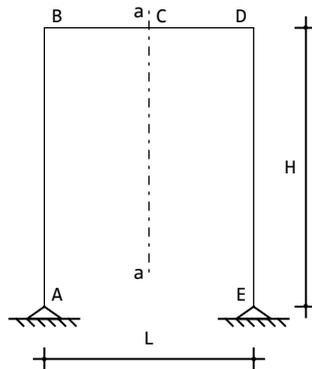


Figura 27.1: Una struttura dotata di un asse di simmetria. Per essa, sono interessanti i carichi simmetrici ed antisimmetrici rispetto allo stesso asse

1. carichi *simmetricamente* disposti rispetto all'asse  $a-a$ . Per essi, gli spostamenti trasversali  $u_2$ , i momenti  $M$  e gli sforzi normali  $N$  sono simmetrici rispetto all'asse  $a-a$ , mentre le rotazioni  $\phi$ , i tagli  $T$  e gli spostamenti assia-

li  $u_3$  sono anti-simmetrici rispetto all'asse  $a - a$ . Ne segue che sull'asse di simmetria la rotazione, il taglio e lo spostamento assiale dovranno annullarsi. Infine, poichè la rotazione è proporzionale alla derivata prima dello spostamento trasversale, sull'asse di simmetria lo spostamento trasversale presenterà un punto di estremo (minimo, massimo o flesso), così come il momento flettente.

2. carichi *anti-simmetricamente* disposti rispetto all'asse  $a - a$ . Per essi, gli spostamenti  $u_2$ , i momenti  $M$  e gli sforzi normali  $N$  sono antisimmetrici rispetto all'asse  $a - a$ , mentre le rotazioni  $\phi$ , i tagli  $T$  e gli spostamenti assiali  $u_3$  sono simmetrici rispetto all'asse  $a - a$ . Ne segue che sull'asse di simmetria lo spostamento trasversale, il momento e lo sforzo normale devono annullarsi. In questo caso, lo spostamento assiale presenterà un punto di estremo.

In ciascun caso, la presenza di particolari simmetrie impone alla struttura ulteriori condizioni di vincolo, che vengono a sommarsi a quelle imposte dai vincoli, generando nuovi schemi, che possono avere un più basso numero di iperstaticità, possono essere già noti per altra via, possono essere più semplici da affrontare. In questo capitolo si illustrano alcuni casi di riduzione, senza però addentrarsi nella soluzione dello schema ridotto.

Infine, si tenga conto che una distribuzione di carico arbitrario agente su una struttura dotata di un asse di simmetria può sempre suddividersi nella somma di un carico simmetrico ed uno antisimmetrico rispetto all'asse di simmetria.

## 27.1 Un portale simmetrico

Iniziando con l'esempio di Figura 27.1, si supponga che esso sia caricato da una stesa di carico verticale  $q$  sul traverso: se  $q$  è una funzione simmetrica rispetto all'asse  $a - a$ , se ad esempio è costante, allora possono applicarsi i risultati appena dedotti. Si potrà quindi dire che il concio situato in mezzeria non subirà rotazioni, nè spostamenti assiali, e lo sforzo di taglio sarà nullo. Quindi in  $C$  dovremo avere:

$$\begin{aligned} u_{3C} &= 0 \\ \phi_C &= 0 \\ T_C &= 0 \end{aligned} \tag{27.1}$$

e queste tre condizioni definiscono un bipendolo con asse di scorrimento verticale. La struttura ridotta è quella di Figura 27.2.

Se invece il carico è antisimmetricamente distribuito rispetto all'asse di simmetria, allora il concio in corrispondenza dell'asse stesso non subirà abbassamenti, e non sarà soggetto a momenti o a sforzi normali. In altri termini, potrà

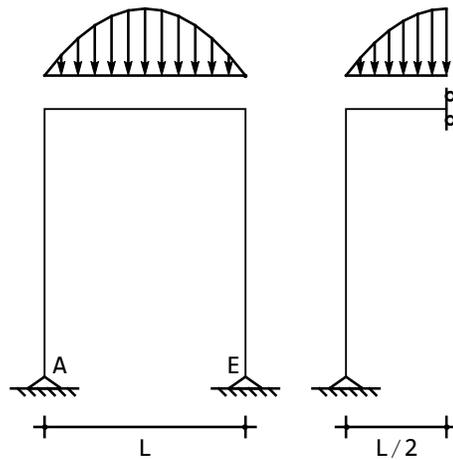


Figura 27.2: Una struttura simmetrica, e simmetricamente caricata. A destra, la struttura ridotta

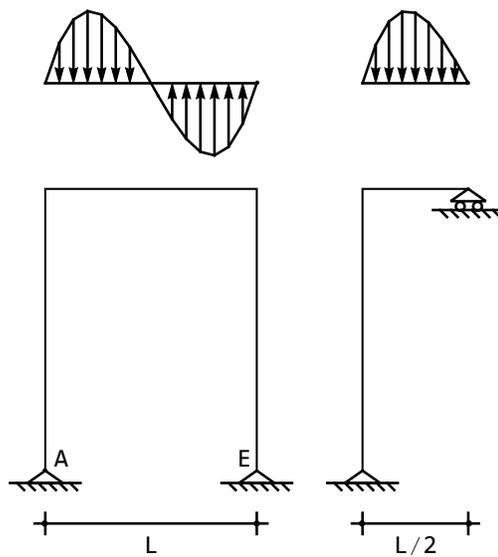


Figura 27.3: Una struttura simmetrica, ed antisimmetricamente caricata. A destra, la struttura ridotta

imporsi:

$$\begin{aligned} u_{2C} &= 0 \\ N_C &= 0 \\ M_C &= 0 \end{aligned} \quad (27.2)$$

e queste tre condizioni definiscono un carrello con asse di scorrimento orizzontale. La struttura ridotta è quella di Figura 27.3, e si noti che la struttura originaria era una volta iperstatica, mentre la struttura ridotta è isostatica.

## 27.2 Trave a tre appoggi con carico simmetrico

La trave continua su tre appoggi di Figura 27.4 possiede un asse di simmetria verticale per il punto  $B$ . In  $B$  l'appoggio detta:

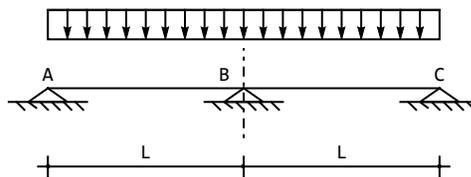


Figura 27.4: Una trave simmetrica, simmetricamente caricata

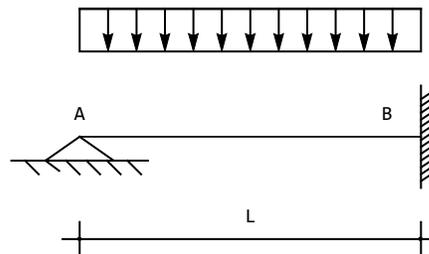


Figura 27.5: La struttura ridotta dello schema di Figura 27.4

$$u_{2B} = 0 \quad (27.3)$$

e poichè la struttura è simmetricamente caricata, in  $B$  sarà anche:

$$\phi_B = 0 \quad (27.4)$$

Ciò basta per comprendere che in mezzeria la trave si comporta come se fosse incastrata, e che quindi ci si può limitare a studiare lo schema di trave appoggiata–incastrata di Figura 27.5

### 27.3 Trave con carico anti-simmetrico

La stessa trave dell'esempio precedente è caricata da una coppia  $\mathcal{M}$  in mezzeria, ossia in corrispondenza dell'asse di simmetria (cfr. Figura 27.6).

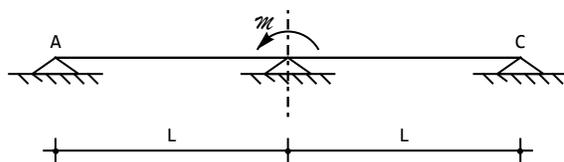


Figura 27.6: Una trave simmetrica, antisimmetricamente caricata

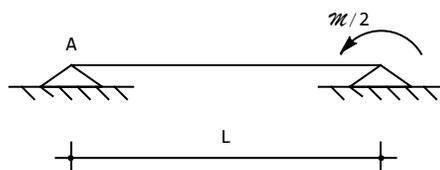


Figura 27.7: La struttura ridotta dello schema di Figura 27.6

Considerando la coppia equamente suddivisa tra la prima e la seconda campata, si ottiene un carico antisimmetrico, per cui la struttura ridotta è una semplice trave appoggiata caricata da una coppia di intensità  $\mathcal{M}/2$  agente sull'estremo di destra, come riportato in Figura 27.7.

### 27.4 Un telaio simmetrico con forza sul traverso

Il telaio simmetrico di Figura 27.8 è caricato da una forza orizzontale  $F$  in corrispondenza del nodo. Se la rigidezza assiale delle aste, come spesso avviene, viene assunta infinita, allora la forza  $F$  può pensarsi equidistribuita tra i nodi  $B$  e  $D$ , dando luogo ad una condizione di carico anti-simmetrica.

In tale ipotesi, il nodo  $C$  non subisce spostamenti verticali, e non è soggetto a momento flettente e sforzo normale. Le condizioni in  $C$  sono quindi le (27.2), ed il sistema ridotto si presenta come in Figura 27.9.

Si noti che in questo caso la struttura ridotta è isostatica.

### 27.5 Una maglia doppiamente simmetrica

La maglia chiusa rettangolare di Figura 27.10 possiede due assi di simmetria, ed è caricata simmetricamente rispetto ad ambedue tali assi. Ne segue che ci si può limitare allo studio di un quarto della maglia, vincolato con bipendoli, come

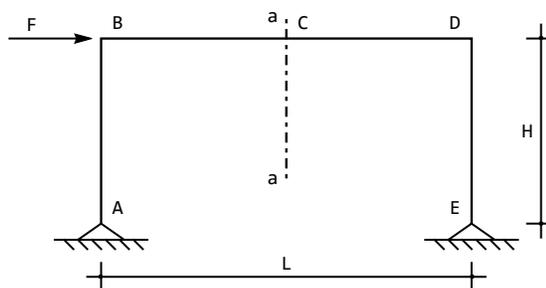


Figura 27.8: Un telaio simmetrico, antisimmetricamente caricato, almeno in ipotesi di infinità rigidezza assiale

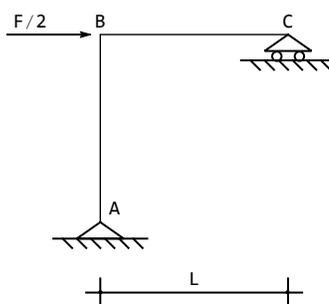


Figura 27.9: La struttura ridotta dello schema di Figura 27.8

illustrato in Figura 27.11, e caricato da forze pari alla metà di quelle agenti sulla maglia originaria.

Se infatti si considera prima l'asse di simmetria orizzontale, le due forze orizzontali devono pensarsi applicate in parti uguali sulla semimaglia superiore e sulla semimaglia inferiore, ed analogo ragionamento va poi svolto per l'asse verticale di simmetria. La struttura ridotta ha un solo grado di iperstaticità

## 27.6 Un telaio chiuso con carico antisimmetrico

Il telaio di Figura 27.12 ha un asse di simmetria geometrica, e la condizione di carico esaminata è antisimmetricamente distribuita rispetto a quest'asse. I due punti A e B del telaio, situati sull'asse di simmetria, non subiranno abbassamenti, e non saranno soggetti a momento flettente o sforzo assiale. La struttura ridotta vedrà quindi due carrelli a piano di scorrimento orizzontale in tali punti, giungendo allo schema di Figura 27.13.

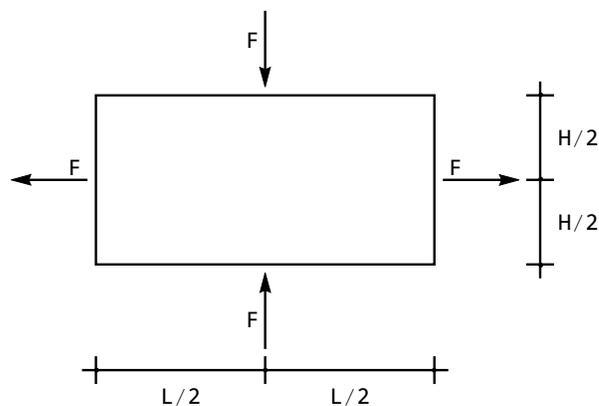


Figura 27.10: Una maglia chiusa con due assi di simmetria

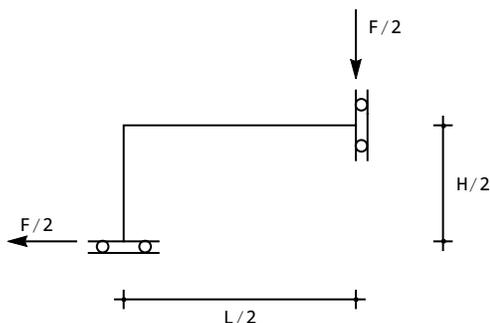


Figura 27.11: La struttura ridotta dello schema di Figura 27.10

## 27.7 Un telaio con un ritto sull'asse di simmetria

Il telaio di Figura 27.14 è lo stesso di Figura 27.12, con l'unica differenza della presenza del ritto  $AB$ , in corrispondenza dell'asse di simmetria.

In simili casi, si può idealmente pensare che il ritto  $AB$  sia in realtà formato da una coppia di ritti adiacenti, appartenenti alla parte di sinistra, ed alla parte di destra rispettivamente, della struttura. Ciascuno di questi due ritti sarà definito da una rigidezza flessionale pari alla metà della rigidezza flessionale originaria.

Con queste premesse, la struttura ridotta sarà quella di Figura 27.15, in cui il ritto di destra è caratterizzato da una rigidezza flessionale pari alla metà della rigidezza flessionale del resto del telaio.

Lo studio di questo telaio è riportato nei Capitoli precedenti

Il telaio di Figura 27.16 possiede un asse di simmetria verticale, su cui è situato il ritto centrale. Tuttavia, la condizione di carico esaminata è simmetrica

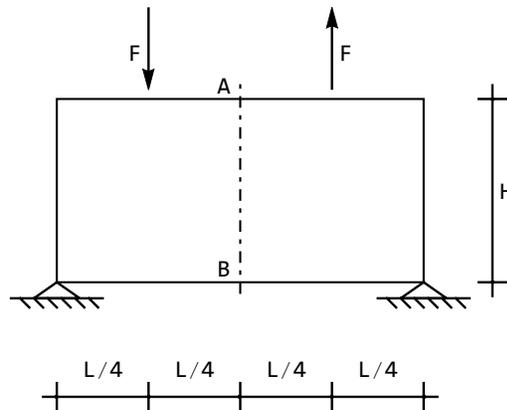


Figura 27.12: Un telaio chiuso rettangolare soggetto a carico antisimmetrico

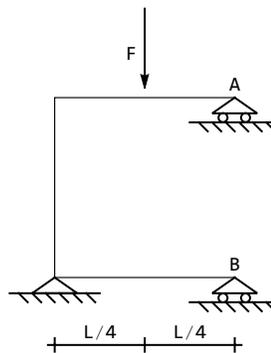


Figura 27.13: La struttura ridotta dello schema di Figura 27.12

rispetto a quest'asse, sicchè il concio  $C$  non può ruotare. Se poi si esclude l'effetto delle deformazioni assiali, esso non potrà subire spostamenti, e quindi il concio  $C$  si presenterà incastrato.

La struttura ridotta si presenta allora come in Figura 27.17, ed è tre volte iperstatica

## 27.8 La scomposizione di un carico

Si voglia ora esaminare il telaio di Figura 27.18, dotato di un asse di simmetria verticale, ma soggetto ad una stesa di carico di intensità  $q$  sulla sola campata di sinistra.

In base a quanto detto nell'introduzione al Capitolo, si può comunque esprimere il carico come somma delle due stese riportate nella Figura 27.19. E'

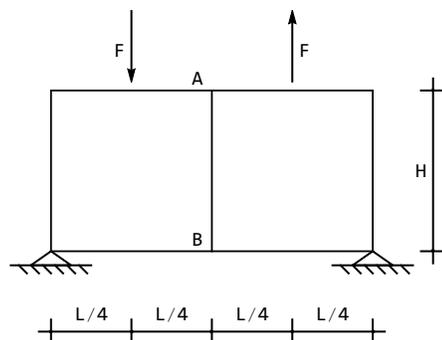


Figura 27.14: Lo stesso telaio dell'esempio precedente, ma con un ritto centrale

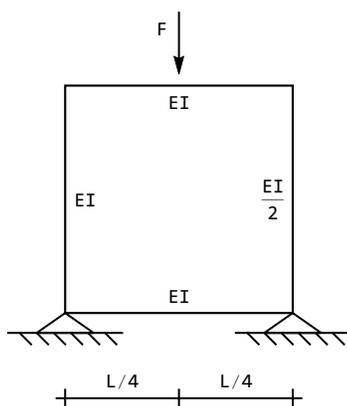


Figura 27.15: La struttura ridotta dello schema di Figura 27.14

immediato realizzare che la prima stesa è simmetrica, la seconda antisimmetrica, e che per il principio di sovrapposizione degli effetti si può studiare il carico originario come somma dei due carichi indicati.

Trascurando le deformazioni assiali, la condizione di carico simmetrica permette di stabilire che il cono in mezzera del traverso si comporta come un incastro perfetto, e quindi la struttura ridotta diviene quella di Figura 27.20a).

La condizione di carico antisimmetrico deve invece essere esaminata suddividendo idealmente in due elementi il piedritto centrale, e riducendosi quindi allo schema di Figura 27.20b).

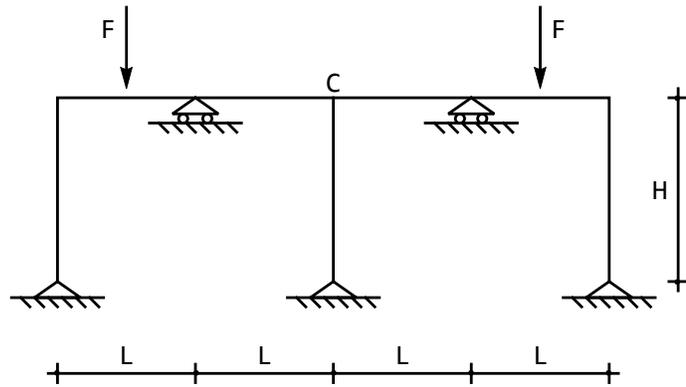


Figura 27.16: Un telaio a due campate con carrelli centrali su ogni campata

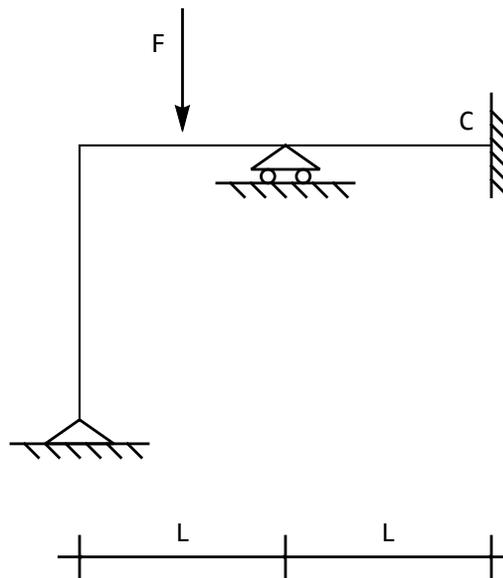


Figura 27.17: La struttura ridotta dello schema di Figura 27.16

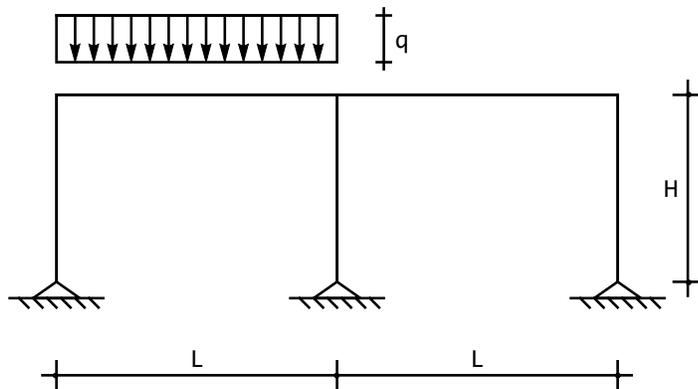


Figura 27.18: Un telaio simmetrico soggetto ad un carico non simmetrico

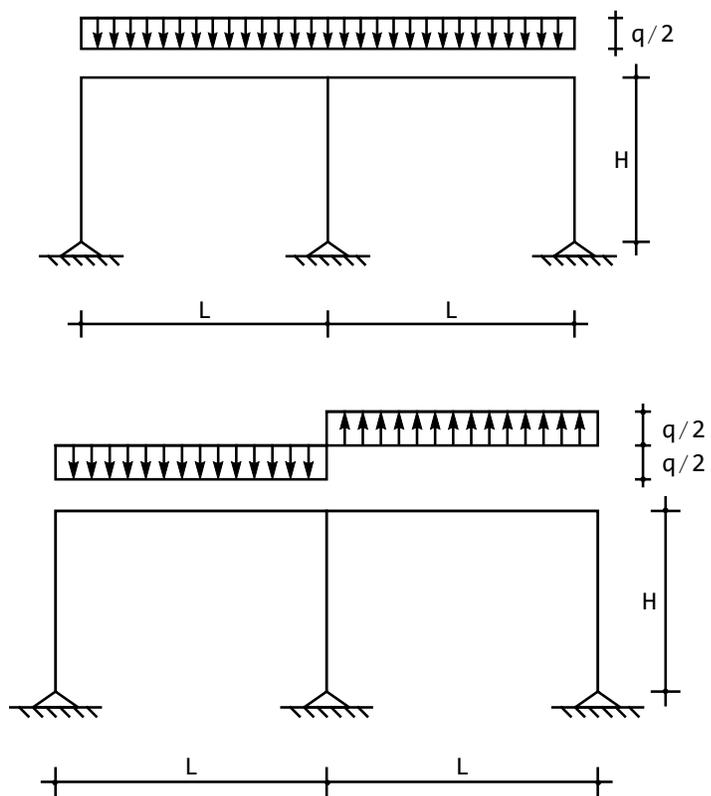


Figura 27.19: La scomposizione del carico originario

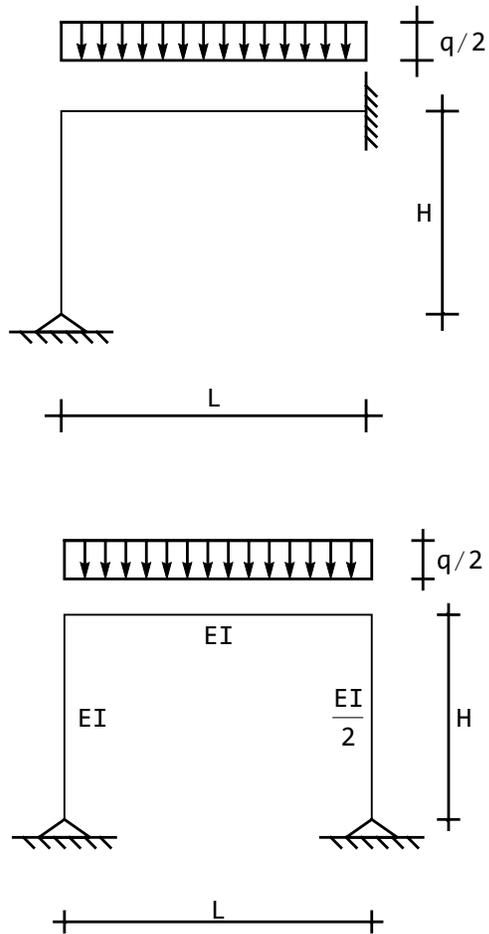


Figura 27.20: Lo schema ridotto del telaio di Figura 27.19

## Capitolo 28

# Le travi di Timoshenko

La teoria di Eulero–Bernoulli, fin qui utilizzata per l’analisi delle travi, e delle strutture a scheletro, è caratterizzata dalla relazione di congruenza:

$$\phi(x_3) = -\frac{du_2(x_3)}{dx_3} \quad (28.1)$$

che esprime la rotazione della generica sezione retta in funzione della derivata prima dell’abbassamento della stessa sezione retta. Ciò equivale a presupporre nulla la deformazione tagliante  $e_{23}$ , e questa assunzione è giustificata nel caso di travi snelle e poco deformabili a taglio.

Se invece la trave si presenta tozza, oppure se il materiale di cui è costituita è caratterizzato da un basso valore del modulo  $G$  di resistenza a taglio, è opportuno rinunciare all’ipotesi (28.1), ed adottare la teoria di Timoshenko. Secondo tale teoria, la (28.1) va sostituita con la relazione:

$$\phi(x_3) = -\frac{du_2(x_3)}{dx_3} + \psi(x_3) \quad (28.2)$$

dove  $\psi(x_3)$  è una rotazione aggiuntiva dovuta al taglio, e rappresenta lo scorrimento angolare  $\gamma_{23}$ . Utilizzando la (28.2), le caratteristiche momento e taglio si scriveranno come:

$$\begin{aligned} M &= EI \frac{d\phi}{dx_3} \\ T &= GA_s \left( \phi + \frac{du_2(x_3)}{dx_3} \right) \end{aligned} \quad (28.3)$$

dove  $A_s = \kappa A$  è l’area resistente a taglio. Utilizzando le ben note relazioni di equilibrio tra carico applicato, taglio e momento flettente:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx_3} &= -q \\ \frac{dM}{dx_3} &= T \end{aligned} \quad (28.4)$$

si ottengono subito le due equazioni differenziali accoppiate nelle due incognite  $\phi$  ed  $u_2$ :

$$\begin{aligned} GA_s (\phi' + u_2'') &= -q \\ EI\phi'' &= GA_s (\phi + u_2') \end{aligned} \quad (28.5)$$

dove — come usuale — l'operazione di derivazione rispetto ad  $x_3$  è stata indicata con l'apice.

## 28.1 Il metodo della funzione ausiliaria

La soluzione delle (28.5), insieme alle opportune condizioni ai limiti, non presenta usualmente difficoltà, come peraltro si è visto negli esempi contenuti nelle Lezioni. Tuttavia, è talvolta conveniente ricondursi ad un problema ai limiti simile al problema del quarto ordine di Eulero–Bernoulli: a tal fine basta introdurre la funzione ausiliaria  $\eta(x_3)$  tale da poter scrivere:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \eta - \frac{EI}{GA_s} \eta'' \\ \phi(x_3) &= -\eta' \end{aligned} \quad (28.6)$$

e quindi le caratteristiche si esprimeranno come:

$$\begin{aligned} M &= -EI\eta'' \\ T &= -EI\eta''' \end{aligned} \quad (28.7)$$

Utilizzando le (28.6) si soddisfa identicamente la seconda equazione differenziale, mentre la prima diviene:

$$EI\eta'''' = q \quad (28.8)$$

Le condizioni ai limiti devono essere convenientemente espresse in termini della funzione ausiliaria  $\eta$ . Si ha quindi, per le più usuali condizioni di vincolo:

— in corrispondenza di un incastro, spostamenti e rotazioni si annullano, e di conseguenza, utilizzando la 28.6 si dovrà imporre:

$$\begin{aligned} \eta - \frac{EI}{GA_s} \eta'' &= 0 \\ \eta' &= 0 \end{aligned} \quad (28.9)$$

— su di un appoggio si annullano spostamenti e momenti flettenti. Ciò implica, in base alle (28.7), che la derivata seconda della funzione ausiliaria sia nulla, e quindi che anche la funzione ausiliaria stessa si annulli:

$$\begin{aligned} \eta &= 0 \\ \eta'' &= 0 \end{aligned} \quad (28.10)$$

— in un bipendolo si annullano rotazioni e tagli. Ciò implica immediatamente che siano nulle la derivata prima e la derivata terza della funzione ausiliaria:

$$\begin{aligned}\eta' &= 0 \\ \eta''' &= 0\end{aligned}\quad (28.11)$$

— in un estremo libero si annullano momenti e tagli, e quindi saranno nulle le derivate seconde e terze della funzione ausiliaria:

$$\begin{aligned}\eta'' &= 0 \\ \eta''' &= 0\end{aligned}\quad (28.12)$$

## 28.2 Trave a mensola

Come primo esempio, si riconsideri la trave a mensola di Figura 28.1, già risolta nelle Lezioni, utilizzando un altro approccio. La funzione  $\eta$  si esprime come:



Figura 28.1: Trave a mensola di Timoshenko

$$\eta(x_3) = a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \quad (28.13)$$

e le quattro condizioni ai limiti divengono:

$$\begin{aligned}\eta(0) - \frac{EI}{GA_s}\eta''(0) &= 0 \\ \eta'(0) &= 0 \\ \eta''(L) &= 0 \\ -EI\eta'''(L) &= F\end{aligned}\quad (28.14)$$

ossia:

$$\begin{aligned}a_0 - 2\frac{EI}{GA_s}a_2 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ 2a_2 + 6a_3L &= 0 \\ -6EIa_3 &= F\end{aligned}\quad (28.15)$$

e risolvendo il sistema di quattro equazioni si ha:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{F}{6EI} \\ a_2 &= \frac{FL}{2EI} \\ a_0 &= \frac{FL}{GA_s} \end{aligned} \quad (28.16)$$

La funzione ausiliaria si scrive quindi:

$$\eta(x_3) = \frac{FL}{GA_s} + \frac{FL}{2EI}x_3^2 - \frac{F}{6EI}x_3^3 \quad (28.17)$$

e da essa possono ricavarsi spostamenti, rotazioni, momenti e tagli:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= \frac{F}{GA_s}x_3 + \frac{FL}{2EI}x_3^2 - \frac{F}{6EI}x_3^3 \\ \phi(x_3) &= -\frac{FL}{EI}x_3 + \frac{F}{2EI}x_3^2 \\ M(x_3) &= -FL + Fx_3 \\ T(x_3) &= F \end{aligned} \quad (28.18)$$

confermando i risultati delle Lezioni.

### 28.3 Trave doppiamente incastrata

Si consideri la trave doppiamente incastrata di Figura 28.2, soggetta ad un carico concentrato in mezzeria. Si vuol conoscere l'effetto delle deformazioni da taglio sullo spostamento in corrispondenza della forza.

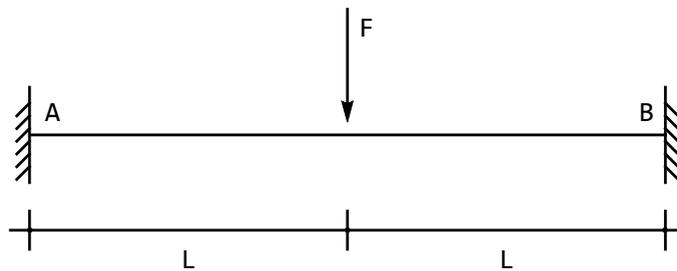


Figura 28.2: Trave doppiamente incastrata di Timoshenko

Introducendo le due funzioni ausiliarie  $\eta^{(AF)}$  ed  $\eta^{(FB)}$ , a valori nella prima e nella seconda campata, rispettivamente, si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} \eta^{(AF)}(x_3) &= a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 \\ \eta^{(FB)}(x_3) &= b_0 + b_1x_3 + b_2x_3^2 + b_3x_3^3 \end{aligned} \quad (28.19)$$

e le otto costanti di integrazione si calcolano imponendo le condizioni ai limiti:

$$\begin{aligned}
 \eta^{(AF)}(0) - \beta L^2 \eta^{(AF'')}(0) &= 0 \\
 \eta^{(AF)'}(0) &= 0 \\
 \eta^{(AF)}(L_1) - \beta L^2 \eta^{(AF'')}(L_1) &= \eta^{(FB)}(0) - \beta L^2 \eta^{(FB'')}(0) \\
 \eta^{(AF)'}(L_1) &= \eta^{(FB)'}(0) \\
 \eta^{(AF'')}(L_1) &= \eta^{(FB'')}(0) \\
 -EI \eta^{(AF''')}(L_1) + EI \eta^{(FB''')}(0) + F &= 0 \\
 \eta^{(FB)}(L_2) - \beta L^2 \eta^{(FB'')}(L_2) &= 0 \\
 \eta^{(FB)'}(L_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{28.20}$$

Si noti che — al fine di semplificare le formule — si è introdotto il coefficiente adimensionale:

$$\beta = \frac{EI}{GA_s L^2} \tag{28.21}$$

e che per  $\beta = 0$  si ritrova il problema ai limiti di Eulero–Bernoulli.

Il risultante sistema di otto equazioni si risolve facilmente, a fornire le due funzioni ausiliarie:

$$\begin{aligned}
 \eta^{(AF)}(x_3) &= \frac{FL^3 \beta}{4EI} + \frac{FLx_3^2}{8EI} - \frac{Fx_3^3}{12EI} \\
 \eta^{(FB)}(x_3) &= \frac{FL^3(1+6\beta)}{24EI} - \frac{FLx_3^2}{8EI} + \frac{Fx_3^3}{12EI}
 \end{aligned} \tag{28.22}$$

e da esse possono ricavarsi gli abbassamenti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(AF)}(x_3) &= \frac{Fx_3^2}{24EI} (3L - 2x_3) - \frac{FL^2}{2EI} (L - 3x_3) \beta \\
 u_2^{(FB)}(x_3) &= \frac{F(L-x_3)^2}{24EI} (L + 2x_3) + \frac{FL^2}{2EI} (2L - 3x_3) \beta
 \end{aligned} \tag{28.23}$$

Ne segue che in mezzeria si ha l'abbassamento:

$$u_{2 \max} = \frac{FL^3}{EI} \left( \frac{1}{24} + \beta \right) \tag{28.24}$$

ed è chiaramente individuabile la componente aggiuntiva dovuta al taglio. Si noti anche che le rotazioni, i momenti ed i tagli non sono influenzati dalla deformabilità tagliante.

## 28.4 Trave a due campate caricata parzialmente

Si prende ora in esame la trave di Figura 28.3, già studiata con il principio dei lavori virtuali in una precedente esercitazione. Si vuole ora utilizzare la teoria

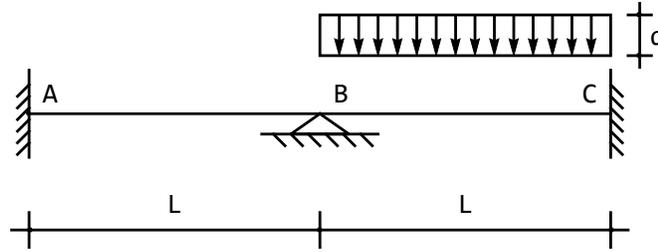


Figura 28.3: Una trave di Timoshenko a due campate

di Timoshenko per ricavare la distribuzione di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli.

Introducendo le due funzioni ausiliarie  $\eta^{(AB)}$  ed  $\eta^{(BC)}$ , a valori in  $AB$  e  $BC$ , rispettivamente, si potrà scrivere:

$$\begin{aligned}\eta^{(AB)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ \eta^{(BC)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 + \frac{q x_3^4}{24EI}\end{aligned}\quad (28.25)$$

Le condizioni ai limiti in  $A$ ,  $B$  e  $C$  si scriveranno:

$$\begin{aligned}\eta^{(AB)}(0) - \beta L^2 \eta^{(AB)''}(0) &= 0 \\ \eta^{(AB)'}(0) &= 0 \\ \eta^{(AB)}(L) - \beta L^2 \eta^{(AB)''}(L) &= 0 \\ \eta^{(BC)}(0) - \beta L^2 \eta^{(BC)''}(0) &= 0 \\ \eta^{(AB)'}(L) &= \eta^{(BC)'}(0) \\ \eta^{(AB)''}(L) &= \eta^{(BC)''}(0) \\ \eta^{(BC)}(L) - \beta L^2 \eta^{(BC)''}(L) &= 0 \\ \eta^{(BC)'}(L) &= 0\end{aligned}\quad (28.26)$$

e quindi si giunge ad un sistema di otto equazioni nelle otto costanti di integrazione. Risolvendolo, si definiscono le due funzioni ausiliarie:

$$\begin{aligned}\eta^{(AB)}(x_3) &= \frac{qL^4}{48EI} \frac{\beta(6\beta - 1)}{(1 + 3\beta)} - \frac{qL^2 x_3^2}{96EI} \frac{(1 - 6\beta)}{1 + 3\beta} + \frac{qL x_3^3}{96EI} \frac{1}{(1 + 3\beta)} \\ \eta^{(BC)}(x_3) &= \frac{qL^4}{24EI} \beta + \frac{qL^3 x_3}{96EI} \frac{1 + 12\beta}{1 + 3\beta} + \frac{qL^2 x_3^2}{48EI} - \frac{qL x_3^3}{96EI} \frac{7 + 24\beta}{1 + 3\beta} + \frac{q x_3^4}{24EI}\end{aligned}\quad (28.27)$$

Lo spostamento è quindi fornito da:

$$\begin{aligned} u_2^{(AB)}(x_3) &= \frac{qL}{96EI} \frac{x_3(x_3 - L)(x_3 + 6L\beta)}{1 + 3\beta} \\ u_2^{(BC)}(x_3) &= \frac{q(x_3(L - x_3)(-4x_3^2(1 + 3\beta) + 3Lx_3(1 + 4\beta) + L^2(1 + 18\beta(3 + 8\beta))))}{96EI(1 + 3\beta)} \end{aligned} \quad (28.28)$$

mentre rotazioni, momenti e tagli si ottengono derivando opportunamente le due funzioni ausiliarie:

$$\begin{aligned} \phi^{(AB)}(x_3) &= \frac{qL}{16EI} \left( \frac{L(1 - 6\beta)}{3(1 + 3\beta)} x_3 - \frac{x_3^2}{2(1 + 3\beta)} \right) \\ \phi^{(BC)}(x_3) &= -\frac{qL^3}{96EI} \frac{1 + 12\beta}{1 + 3\beta} - \frac{qL^2}{24EI} x_3 + \frac{qL}{32EI} \frac{7 + 24\beta}{1 + 3\beta} x_3^2 - \frac{q}{6EI} x_3^3 \end{aligned} \quad (28.29)$$

$$\begin{aligned} m^{(AB)}(x_3) &= \frac{qL}{16} \left( \frac{L(1 - 6\beta)}{3(1 + 3\beta)} - \frac{x_3}{(1 + 3\beta)} \right) \\ m^{(BC)}(x_3) &= -\frac{qL^2}{24} + \frac{qL}{16} \frac{7 + 24\beta}{1 + 3\beta} x_3 - \frac{qx_3^2}{2} \end{aligned} \quad (28.30)$$

$$\begin{aligned} t^{(AB)}(x_3) &= \frac{qL}{16(1 + 3\beta)} \\ t^{(BC)}(x_3) &= -qx_3 + \frac{qL}{16} \frac{7 + 24\beta}{1 + 3\beta} \end{aligned} \quad (28.31)$$

Si noti che in questo caso l'influenza delle deformazioni taglianti si risente anche sulle caratteristiche.

In Figura 28.4 e 28.5 è riportato l'andamento dell'abbassamento e del momento per quattro diversi valori del parametro  $\beta$ , compreso il valore nullo, che corrisponde alla teoria di Eulero-Bernoulli.

## 28.5 La matrice di rigidezza di una trave di Timoshenko

Si vuole ora dedurre la *matrice di rigidezza* di un elemento strutturale secondo la teoria di Timoshenko. Si definiscono il vettore  $\mathbf{d}$  dei possibili spostamenti degli estremi della trave:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} u_{2A} \\ \phi_A \\ u_{2B} \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad (28.32)$$

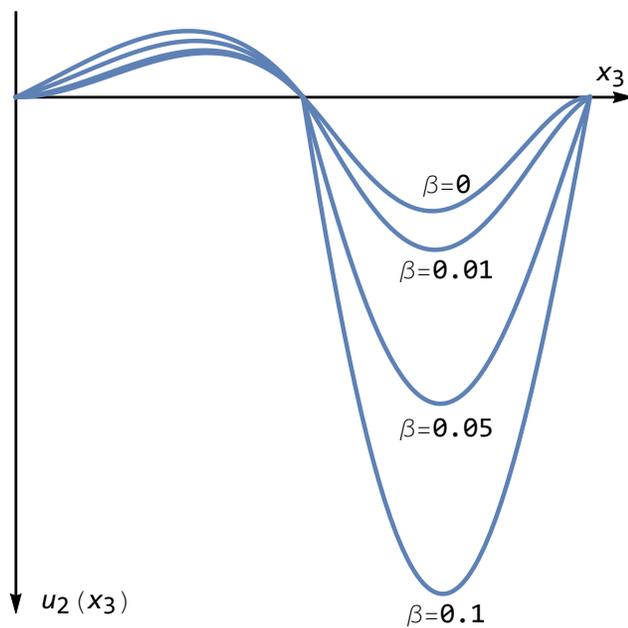


Figura 28.4: L'influenza delle deformazioni da taglio sul diagramma degli abbassamenti

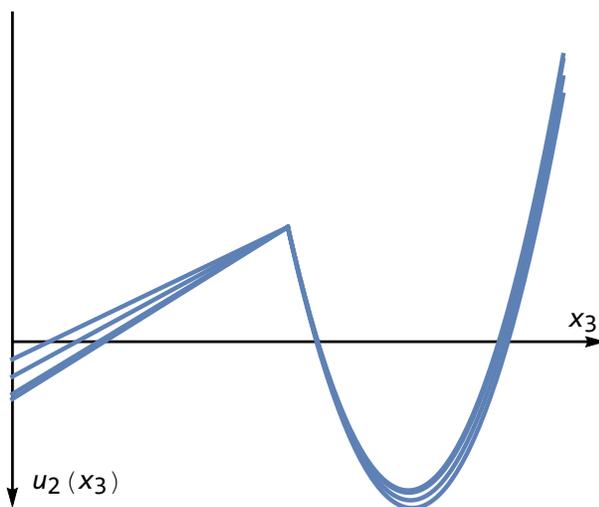


Figura 28.5: L'influenza delle deformazioni da taglio sul diagramma dei momenti

ed il vettore  $\mathbf{F}$  delle forze agenti agli estremi:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_A \\ \mathcal{M}_A \\ F_B \\ \mathcal{M}_B \end{pmatrix} \quad (28.33)$$

Potrà scriversi la relazione lineare

$$\begin{pmatrix} F_A \\ \mathcal{M}_A \\ F_B \\ \mathcal{M}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2A} \\ \phi_A \\ u_{2B} \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad (28.34)$$

che lega ciascuna forza ai quattro possibili spostamenti. Si calcola la funzione ausiliaria  $\eta(x_3)$  per una trave soggetta ai cedimenti anelastici agli estremi:

$$\begin{aligned} u_2(x_3 = 0) &= u_{2A} \\ \phi(x_3 = 0) &= \phi_A \\ u_2(x_3 = L) &= u_{2B} \\ \phi(x_3 = L) &= \phi_B \end{aligned} \quad (28.35)$$

si deduce la distribuzione di momenti e tagli:

$$\begin{aligned} M(x_3) &= -EI\eta''(x_3) \\ T(x_3) &= -EI\eta'''(x_3) \end{aligned} \quad (28.36)$$

ed infine si deducono le forze nodali:

$$\begin{aligned} F_A &= -T(0) \\ \mathcal{M}_A &= -M(0) \\ F_B &= T(L) \\ \mathcal{M}_B &= M(L) \end{aligned} \quad (28.37)$$

da cui è immediato riempire la matrice di rigidezza

### Passo 1 e 2 - Deduzione di momenti e tagli

In assenza di forze distribuite, la funzione ausiliaria  $\eta(x_3)$  della trave sarà esprimibile come una equazione cubica:

$$\eta(x_3) = c_0 + c_1x_3 + c_2x_3^2 + c_3x_3^3 \quad (28.38)$$

e le quattro costanti di integrazione si determinano soddisfacendo le condizioni:

$$\begin{aligned} \eta(0) - \beta L^2 \eta''(0) &= u_{2A} \\ \eta'(0) &= -\phi_A \\ \eta(L) - \beta L^2 \eta''(L) &= u_{2B} \\ \eta'(L) &= -\phi_B \end{aligned} \quad (28.39)$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1+6\beta}{1+12\beta}u_{2A} + \frac{4\alpha L+12\beta^2 L}{1+12\beta}\phi_A + \frac{6\beta}{1+12\beta}u_{2B} + \frac{2\beta L-12\beta^2 L}{1+12\beta}\phi_B \\
 c_1 &= -\phi_A \\
 c_2 &= -\frac{3}{L^2(1+12\beta)}u_{2A} + \frac{2+6\beta}{L(1+12\beta)}\phi_A + \frac{3}{L^2(1+12\beta)}u_{2B} + \frac{1-6\beta}{L(1+12\beta)}\phi_B \\
 c_3 &= \frac{2}{L^3(1+12\beta)}u_{2A} - \frac{1}{L^2(1+12\beta)}\phi_A - \frac{2}{L^3(1+12\beta)}u_{2B} - \frac{1}{L^2(1+12\beta)}\phi_B
 \end{aligned} \tag{28.40}$$

e quindi i momenti e i tagli sono esprimibili come:

$$\begin{aligned}
 M(x_3) &= -EI \left( \frac{6x_3(2u_{2A} - 2u_{2B} - L(\phi_A + \phi_B))}{L^3(1+12\beta)} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{2(-3u_{2A} + 3u_{2B} + L(2\phi_A + 6\beta\phi_A + \phi_B - 6\beta\phi_B))}{L^2(1+12\beta)} \right)
 \end{aligned} \tag{28.41}$$

$$T(x_3) = -\frac{6EI(2u_{2A} - 2u_{2B} - L(\phi_A + \phi_B))}{L^3(1+12\beta)} \tag{28.42}$$

### Passo 3 – Deduzione di forze nodali e matrice di rigidezza

In base alle (28.37) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 F_A &= \frac{6EI(2u_{2A} - 2u_{2B} - L(\phi_A + \phi_B))}{L^3(1+12\beta)} \\
 \mathcal{M}_A &= EI \left( \frac{2(-3u_{2A} + 3u_{2B} + L(2\phi_A + 6\beta\phi_A + \phi_B - 6\beta\phi_B))}{L^2(1+12\beta)} \right) \\
 F_B &= -\frac{6EI(2u_{2A} - 2u_{2B} - L(\phi_A + \phi_B))}{L^3(1+12\beta)} \\
 \mathcal{M}_B &= -\frac{2EI(3u_{2A} - 3u_{2B} - L((1-6\beta)\phi_A + 2(1+3\beta)\phi_B))}{L^2(1+12\beta)}
 \end{aligned} \tag{28.43}$$

e quindi la matrice di rigidezza si scriverà:

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{1+12\beta} \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4(1+3\beta)}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2(1-6\beta)}{L} \\ \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2(1-6\beta)}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4(1+3\beta)}{L} \end{pmatrix} \tag{28.44}$$

## Capitolo 29

# La ricerca dei carichi critici

In questo Capitolo si studiano le travi soggette a carico assiale di compressione  $F$ , nell'ipotesi che gli effetti flessionali indotti dal carico non siano trascurabili. L'equazione differenziale che regge il problema è

$$u_2''''(x_3) + \alpha^2 u_2''(x_3) = 0 \quad (29.1)$$

con:

$$\alpha^2 = \frac{F}{EI} \quad (29.2)$$

La soluzione della (29.1) può scriversi come:

$$u_2(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 \cos(\alpha x_3) + a_3 \sin(\alpha x_3) \quad (29.3)$$

e le quattro costanti di integrazione devono essere calcolate imponendo le opportune condizioni ai limiti. L'estensione alle travi a più campate è immediata.

### 29.1 Una trave a due campate

Si consideri la trave di Figura 29.1, costituita da due tratti di lunghezza  $L_1$  ed  $L_2$ , rispettivamente, connessi da una cerniera intermedia. Occorre introdurre due sistemi di riferimento, con origine nei nodi  $A$  e  $B$ , rispettivamente, e due linee elastiche,  $u_2(x_3)$  e  $v_2(x_3)$ . In base alla (29.1) potrà scriversi:

$$u_2''''(x_3) + \alpha^2 u_2''(x_3) = 0 \quad (29.4)$$

$$v_2''''(x_3) + \alpha^2 v_2''(x_3) = 0 \quad (29.5)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 \cos(\alpha x_3) + a_3 \sin(\alpha x_3) \\ v_2(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 \cos(\alpha x_3) + b_3 \sin(\alpha x_3) \end{aligned} \quad (29.6)$$

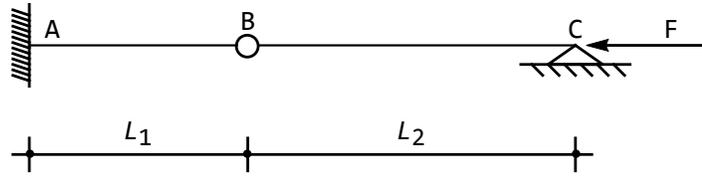


Figura 29.1: Un primo esempio per il calcolo del carico critico

### Le condizioni ai limiti

Le condizioni ai limiti in corrispondenza della cerniera devono essere attentamente considerate, in quanto l'equilibrio della cerniera va garantito nella sua configurazione deformata, a somiglianza di quanto detto per l'estremo libero della trave a mensola. Utilizzando un approccio variazionale, la trave di Figura 29.1 avrà una energia potenziale totale la cui variazione prima potrà scriversi:

$$\begin{aligned} \delta_1 E_t = EI \int_0^{L_1} u_2'' \delta u_2'' dx_3 + EI \int_0^{L_2} v_2'' \delta v_2'' dx_3 - F \int_0^{L_1} u_2' \delta u_2' dx_3 - \\ F \int_0^{L_2} v_2' \delta v_2' dx_3 = 0 \end{aligned} \quad (29.7)$$

ed integrando opportunamente per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} (EIu_2'' \delta u_2')_0^{L_1} - (EIu_2''' \delta u_2)_0^{L_1} + EI \int_0^{L_1} u_2'''' \delta u_2 dx_3 + (EIv_2'' \delta v_2')_0^{L_2} - \\ (EIv_2''' \delta v_2)_0^{L_2} + EI \int_0^{L_2} v_2'''' \delta v_2 dx_3 - (Fu_2' \delta u_2)_0^{L_1} + F \int_0^{L_1} u_2'' \delta u_2 dx_3 - \\ (Fv_2' \delta v_2)_0^{L_1} + F \int_0^{L_2} v_2'' \delta v_2 dx_3 = 0 \end{aligned} \quad (29.8)$$

Annullando gli integrali si ottengono le due equazioni differenziali (29.4–29.5), ed annullando le parti finite possono leggersi le condizioni ai limiti. In corrispondenza della cerniera sarà:

$$EIu_2''(L_1) \delta u_2'(L_1) - EIv_2''(0) \delta v_2'(0) = 0 \quad (29.9)$$

$$(-EIu_2'''(L_1) - Fu_2'(L_1)) \delta u_2(L_1) + (EIv_2'''(0) + Fv_2'(0)) \delta v_2(0) = 0 \quad (29.10)$$

La cerniera impone che sia  $\delta u_2(L_1) = \delta v_2(0)$ , mentre le rotazioni possono essere diverse. Ne segue la condizione di congruenza:

$$u_2(L_1) = v_2(0) \quad (29.11)$$

mentre la (29.9), data la discontinuità delle rotazioni, implica le due condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} u_2''(L_1) &= 0 \\ v_2''(0) &= 0 \end{aligned} \quad (29.12)$$

Infine, la (29.10) — poichè  $\delta u_2(L_1) = \delta v_2(0)$  — implica la relazione di equilibrio:

$$-EIu_2'''(L_1) - Fu_2'(L_1) = -EIV_2'''(0) - Fv_2'(0) \quad (29.13)$$

Nei due estremi, invece, vanno imposte le usuali condizioni:

$$\begin{aligned} u_2(0) &= 0 \\ u_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (29.14)$$

nell'incastro di sinistra, e:

$$\begin{aligned} v_2(L_2) &= 0 \\ v_2''(L_2) &= 0 \end{aligned} \quad (29.15)$$

nell'appoggio di destra.

## Il sistema di equazioni

Derivando opportunamente, e valutando agli estremi, le otto condizioni ai limiti si tramutano in otto equazioni lineari ed omogenee nelle otto costanti di integrazione, che matricialmente possono scriversi come:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \quad (29.16)$$

con la matrice dei coefficienti  $\mathbf{A}$  pari a:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L_1 & \cos(\alpha L_1) & \sin(\alpha L_1) & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha L_1) & \sin(\alpha L_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_2 & \cos(\alpha L_2) & \sin(\alpha L_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha L_2) & \sin(\alpha L_2) \end{pmatrix} \quad (29.17)$$

Per ottenere soluzioni non banali, ossia spostamenti diversi da zero, occorrerà annullare il determinante, giungendo all'equazione trascendente in  $\alpha$ :

$$\alpha^8 \sin(\alpha L_2) (-\sin(\alpha L_1) + \alpha \cos(\alpha L_1) (L_1 + L_2)) = 0 \quad (29.18)$$

Ne segue che potrà essere:

$$\sin(\alpha L_2) = 0 \quad (29.19)$$

oppure:

$$\tan(\alpha L_1) = \alpha (L_1 + L_2) \quad (29.20)$$

La (29.19) condurrà alle soluzioni:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L_2} \quad (29.21)$$

mentre la (29.20) dovrà essere risolta numericamente. E' però fisicamente evidente che per  $L_2 \gg L_1$  la trave si comporterà come una trave semplicemente appoggiata agli estremi, mentre per  $L_1 \gg L_2$  la trave si comporterà come una trave incastrata a sinistra ed appoggiata a destra. Nel primo caso il carico critico sarà dettato dalla (29.19), nel secondo caso dalla (29.20).

Più in dettaglio, è possibile calcolare numericamente che per  $L_1/L_2 \approx 0.4303$  la (29.19) e la (29.20) portano ad un carico critico coincidente, e quindi:

- per  $L_1 < 0.4303 L_2$ , sarà  $\alpha_{cr} = \pi/L_2$ ,
- per  $L_1 > 0.4303 L_2$ , il carico critico andrà calcolato numericamente dalla (29.20)

### La deformata nel caso $L_1 < 0.4303 L_2$

Come detto, in questo caso il carico critico è fornito da:

$$\alpha_{cr} = \frac{\pi}{L_2} \quad (29.22)$$

e la deformata, sinusoidale, interessa la sola campata di destra, come illustrato in Figura 29.2.

$$u_2(x_3) = 0 \quad (29.23)$$

$$v_2(x_3) = C \sin\left(\pi \frac{x_3}{L_2}\right) \quad (29.24)$$

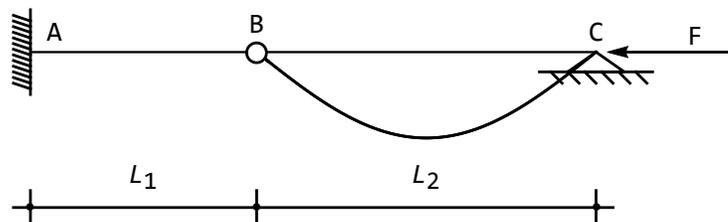


Figura 29.2: La deformata in corrispondenza del carico critico per  $L_1 < 0.4303L_2$

**La deformata nel caso  $L_1 > 0.4303 L_2$**

Si assuma ora  $L_1 = L_2$ , per cui il carico critico deve essere calcolato a partire dalla (29.20). La prima radice dell'equazione:

$$\tan(\alpha L_1) = 2\alpha L_1 \tag{29.25}$$

è fornita da  $\alpha L_1 = 1.16556$ , e ad essa corrisponde la deformata di Figura 29.3.

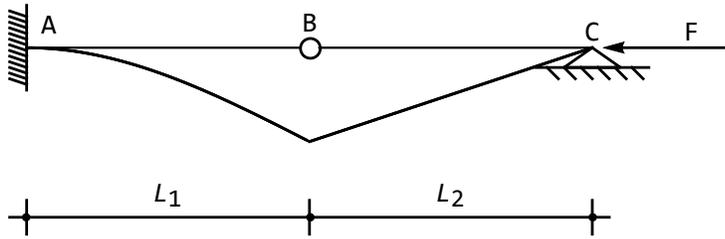


Figura 29.3: La deformata in corrispondenza del carico critico per  $L_1 = L_2$

**29.2 Trave a due campate con sbalzo**

Si considera ora la trave a due campate con sbalzo di Figura 29.4, soggetta ad un carico assiale di compressione nell'estremo libero.

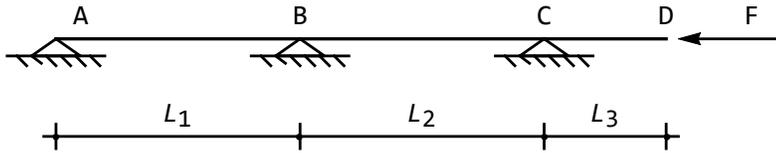


Figura 29.4: Una trave continua su tre appoggi, con sbalzo

Occorre introdurre tre differenti linee elastiche:

$$\begin{aligned} u_2''''(x_3) + \alpha^2 u_2''(x_3) &= 0 \\ v_2''''(x_3) + \alpha^2 v_2''(x_3) &= 0 \\ w_2''''(x_3) + \alpha^2 w_2''(x_3) &= 0 \end{aligned} \tag{29.26}$$

a valori in  $[AB]$ ,  $[BC]$  e  $[CD]$ , rispettivamente, e con soluzione:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 \cos(\alpha x_3) + a_3 \sin(\alpha x_3) \\ v_2(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 \cos(\alpha x_3) + b_3 \sin(\alpha x_3) \\ w_2(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 \cos(\alpha x_3) + c_3 \sin(\alpha x_3) \end{aligned} \tag{29.27}$$

Le dodici condizioni ai limiti non presentano particolari difficoltà:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 u_2''(0) &= 0 \\
 u_2(L_1) &= 0 \\
 v_2(0) &= 0 \\
 u_2'(L_1) &= v_2'(0) \\
 u_2''(L_1) &= v_2''(0) \\
 v_2(L_2) &= 0 \\
 w_2(0) &= 0 \\
 v_2'(L_2) &= w_2'(0) \\
 v_2''(L_2) &= w_2''(0) \\
 u_2''(L_3) &= 0 \\
 u_2'''(L_3) + \alpha^2 u_2'(L_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{29.28}$$

e portano ad un sistema omogeneo di dodici equazioni in dodici incognite, retto dalla matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & L_1 & C_1 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -\alpha S_1 & \alpha C_1 & 0 & -1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & C_1 & S_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_2 & C_2 & S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha S_2 & \alpha C_2 & 0 & -1 & 0 & -\alpha \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 & S_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 & S_3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \tag{29.29}$$

dove, per semplicità, si è posto ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned}
 C_i &= \cos(\alpha L_i) \\
 S_i &= \sin(\alpha L_i)
 \end{aligned} \tag{29.30}$$

Imponendo che il determinante di  $\mathbf{A}$  sia nullo, e semplificando, si giunge alla seguente equazione in  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 &\sin(\alpha L_1) (-\sin(\alpha L_2) \sin(\alpha L_3) + \alpha L_2 \sin(\alpha (L_2 + L_3))) + \alpha L_1 \\
 &(2(-1 + \cos(\alpha L_2)) \sin(\alpha L_1) \sin(\alpha L_3) + \sin(\alpha L_2) \sin(\alpha (L_1 + L_3)) - \\
 &\alpha L_2 \sin(\alpha (L_1 + L_2 + L_3))) = 0
 \end{aligned} \tag{29.31}$$

la cui soluzione può essere ricercata numericamente, una volta assegnate le tre luci  $L_1$ ,  $L_2$  ed  $L_3$ . Per  $L_1 = L_2 = L$  ed  $L_3 = L/2$ , l'equazione diviene:

$$\sin\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \left(-1 - 2\alpha^2 L^2 + \cos[2\alpha L] + 2\alpha L(-2\alpha L(\cos(\alpha L) + \cos(2\alpha L)) + 3 \sin(2\alpha L))\right) = 0 \quad (29.32)$$

Una prima soluzione si ottiene soddisfacendo la:

$$\sin\left(\frac{\alpha L}{2}\right) = 0 \quad (29.33)$$

e quindi  $\alpha L = 2\pi$ , mentre una seconda possibile soluzione si ha in corrispondenza di:

$$-1 - 2\alpha^2 L^2 + \cos(2\alpha L) + 2\alpha L(-2\alpha L(\cos(\alpha L) + \cos[2\alpha L]) + 3 \sin(2\alpha L)) = 0 \quad (29.34)$$

ed è pari a  $\alpha L = 1.90678$ . Il carico critico, quindi, è riferibile a quest'ultimo valore, ed è esprimibile come:

$$F_{cr} = 3.6358 \frac{EI}{L^2} \quad (29.35)$$

La corrispondente deformata può ottenersi risolvendo le equazioni (29.28) in

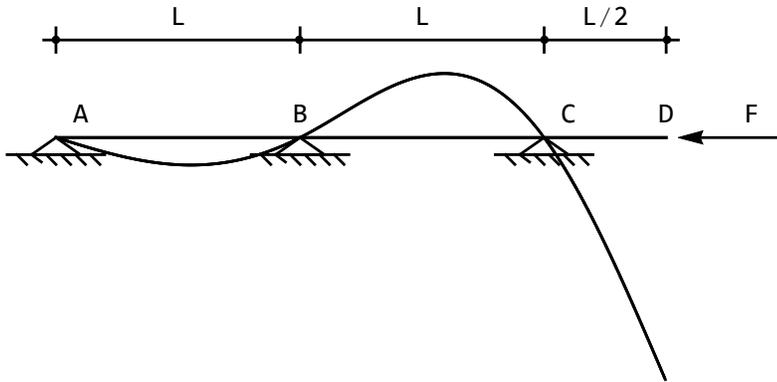


Figura 29.5: La deformata per la trave continua in corrispondenza del carico critico

funzione della costante  $c_0$ :

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= c_0 \left(-0.306x_3 + 0.324 \sin\left(1.907 \frac{x_3}{L}\right)\right) \\ v_2(x_3) &= c_0 \left(-0.306 + 1.306x_3 + 0.306 \cos\left(1.907 \frac{x_3}{L}\right) - 0.952 \sin\left(1.907 \frac{x_3}{L}\right)\right) \\ w_2(x_3) &= c_0 \left(1 - \cos\left(1.907 \frac{x_3}{L}\right) + 0.71 \sin\left(1.907 \frac{x_3}{L}\right)\right) \end{aligned} \quad (29.36)$$

La deformata si presenta come in Figura 29.5

### 29.3 La frontiera di stabilità

Un ulteriore esempio è riportato in Figura 29.6: si tratta di una trave appoggiata a sinistra ed incastrata a destra con un incastro assialmente scorrevole, ulteriormente vincolata in una sezione intermedia tramite un bipendolo esterno. La trave è soggetta ad un carico assiale di compressione di valore  $F_1$  nella sezione di destra, e ad un ulteriore forza assiale, di valore  $F_2$ , agente in corrispondenza del bipendolo.

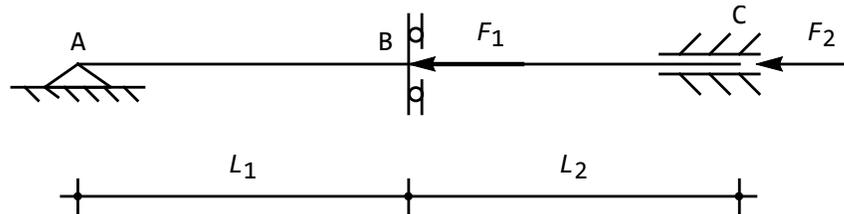


Figura 29.6: Una trave soggetta a due forze assiali

Conseguentemente, lo sforzo normale nel tratto  $AB$  sarà pari ad  $F_1 + F_2$ , mentre nella restante parte  $BC$  lo sforzo normale sarà dovuto alla sola forza  $F_2$ . Le due equazioni differenziali per i due tratti si scrivono quindi:

$$\begin{aligned} u_2''''(x_3) + \alpha_1^2 u_2''(x_3) &= 0 \\ v_2''''(x_3) + \alpha_2^2 v_2''(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (29.37)$$

avendo definito le due quantità:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{F_1 + F_2}{EI} \\ \alpha_2^2 &= \frac{F_2}{EI} \end{aligned} \quad (29.38)$$

La soluzione delle equazioni differenziali delle linee elastiche si scrive come:

$$\begin{aligned} u_2(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 \cos(\alpha_1 x_3) + a_3 \sin(\alpha_1 x_3) \\ v_2(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 \cos(\alpha_2 x_3) + b_3 \sin(\alpha_2 x_3) \end{aligned} \quad (29.39)$$

Le otto condizioni ai limiti sono ovvie:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) &= 0 \\
 u_2''(0) &= 0 \\
 u_2(L_1) &= v_2(0) \\
 u_2'(L_1) &= 0 \\
 v_2'(0) &= 0 \\
 u_2'''(L_1) &= v_2'''(0) \\
 u_2(L_2) &= 0 \\
 u_2'(L_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{29.40}$$

e portano ad un sistema omogeneo di otto equazioni, con matrice dei coefficienti pari a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L_1 & C_1 & S_1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -S_1\alpha_1 & C_1\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & S_1\alpha_1^3 & -C_1\alpha_1^3 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L_2 & C_2 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -S_2\alpha_2 & C_2\alpha_2 \end{pmatrix} \tag{29.41}$$

dove ora, per semplicità, si è posto ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned}
 C_i &= \cos(\alpha_i L_i) \\
 S_i &= \sin(\alpha_i L_i)
 \end{aligned} \tag{29.42}$$

Imponendo che il determinante di  $\mathbf{A}$  sia nullo, si giunge ad una equazione in  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$ :

$$\begin{aligned}
 &-\sin(\alpha_1 L_1) \sin(\alpha_2 L_2) \alpha_2^3 + \cos(\alpha_1 L_1) \sin(\alpha_2 L_2) L_1 \alpha_1 \alpha_2^3 + \\
 &\cos(\alpha_1 L_1) \alpha_1^3 (-2 + 2 \cos(\alpha_2 L_2) + \alpha_2 L_2 \sin(\alpha_2 L_2)) = 0
 \end{aligned} \tag{29.43}$$

che definisce, nel piano  $\alpha_1 - \alpha_2$ , una *frontiera di stabilità*. Se, ad esempio,  $F_2 = F$  ed  $F_1 = 2F$ , allora  $\alpha_1 = \sqrt{3}\alpha_2$ , e l'equazione precedente diviene, nell'ulteriore ipotesi di luci uguali  $L_1 = L_2 = L$ :

$$-\sin(\alpha_2 L) \sin(\sqrt{3}\alpha_2 L) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}\alpha_2 L) (-6 + 6 \cos(\alpha_2 L) + 4\alpha_2 L \sin(\alpha_2 L)) = 0 \tag{29.44}$$

la cui prima radice è:

$$\alpha_2 L = 1.7213 \tag{29.45}$$

cui corrispondono le forze assiali critiche:

$$\begin{aligned}
 F_{2cr} &= 2.963 \frac{EI}{L^2} \\
 F_{1cr} &= 5.926 \frac{EI}{L^2}
 \end{aligned} \tag{29.46}$$

La corrispondente deformata può ottenersi risolvendo le equazioni ai limiti in funzione della costante  $b_3$ :

$$u_2(x_3) = b_3 \left( -0.573767x_3 - 0.194947 \sin(2.98 \frac{x_3}{L}) \right) \quad (29.47)$$

$$v_2(x_3) = b_3 \left( 0.558216 - 1.7213x_3 - 1.16308 \cos(1.7213 \frac{x_3}{L}) + \sin(1.7213 \frac{x_3}{L}) \right) \quad (29.48)$$

La deformata si presenta come in Figura 29.7, e si nota che la presenza del bipendolo esterno impone alla deformata di avere una tangenza orizzontale in mezzeria.

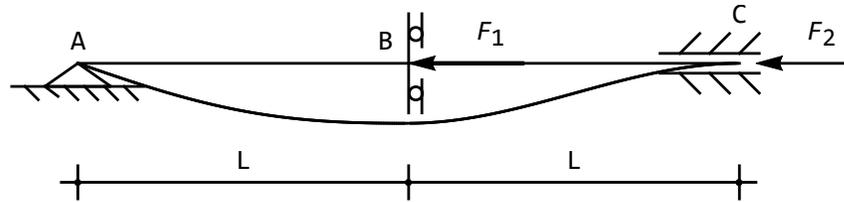


Figura 29.7: La deformata per la trave di Figura 29.6 in corrispondenza del carico critico

## 29.4 Il caso della perturbazione

Un valido criterio alternativo per il calcolo del carico critico è il cosiddetto “criterio delle perturbazioni”, secondo cui la struttura da studiare è caricata dai carichi assiali di cui si vuol conoscere il valore critico, e da una stesa di carico trasversale. In assenza di carico assiale, la struttura subisce gli spostamenti dovuti al solo carico trasversale, e man mano che l’intensità del carico assiale aumenta, tali spostamenti si amplificano — fino a divergere in corrispondenza del valore critico del carico.

A titolo di illustrazione, si consideri la mensola di Figura 29.8, soggetta alla forza assiale  $F$ . Per conoscere il valore critico della forza  $F$ , si ipotizza agente sulla trave un carico trasversale, come ad esempio la stesa di carico uniformemente distribuita su tutta la luce, di intensità  $q$ . L’equazione differenziale della linea elastica si scriverà:

$$u_2''''(x_3) + \alpha^2 u_2''(x_3) = \frac{q}{EI} \quad (29.49)$$

con soluzione:

$$u_2(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 \cos(\alpha x_3) + a_3 \sin(\alpha x_3) + \frac{q x_3^2}{2EI\alpha^2} \quad (29.50)$$

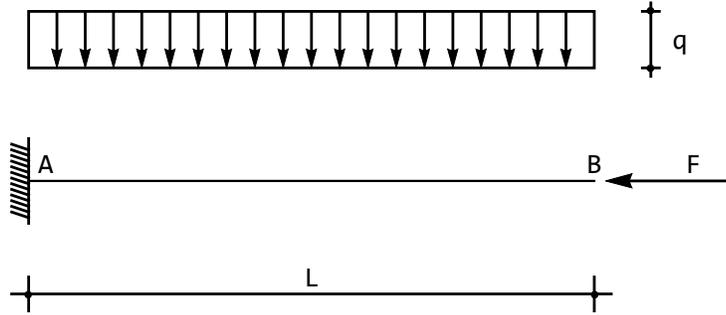


Figura 29.8: Una trave a mensola soggetta al carico assiale  $F$  e ad una perturbazione  $q$

Imponendo le condizioni ai limiti caratteristiche della trave a mensola si ha il sistema lineare non omogeneo:

$$\begin{aligned}
 u_2(0) = 0 &\longrightarrow a_0 + a_2 = 0 \\
 u_2'(0) = 0 &\longrightarrow a_1 + \alpha a_3 = 0 \\
 u_2''(L) = 0 &\longrightarrow -\alpha^2 a_2 \cos(L\alpha) - \alpha^2 a_3 \sin(L\alpha) + \frac{q}{EI\alpha^2} = 0 \\
 u_2'''(L) + \alpha^2 u_2'(L) = 0 &\longrightarrow \alpha^2 a_1 + \frac{qL}{EI} = 0
 \end{aligned} \tag{29.51}$$

la cui soluzione è:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -\frac{q(1 - L\alpha \sin(L\alpha))}{\cos(L\alpha)EI\alpha^4} \\
 a_1 &= -\frac{qL}{EI\alpha^2} \\
 a_2 &= \frac{q(1 - L\alpha \sin(L\alpha))}{\cos(L\alpha)EI\alpha^4} \\
 a_3 &= \frac{qL}{EI\alpha^3}
 \end{aligned} \tag{29.52}$$

Gli spostamenti sono quindi esprimibili come:

$$\begin{aligned}
 u_2(x_3) &= \frac{q}{2EI\alpha^4} (x_3(x_3 - 2L)\alpha^2 + 2\sec(\alpha L) \\
 &\quad (-1 + \cos(\alpha x_3) + L\alpha(\sin(\alpha L) - \sin(\alpha(L - x_3))))
 \end{aligned} \tag{29.53}$$

ed in particolare, all'estremo libero:

$$u_2(L) = \frac{q}{2EI\alpha^4} (-\alpha^2 L^2 + 2\sec(\alpha L)(-1 + \cos(\alpha L) + \alpha L \sin(\alpha L))) \tag{29.54}$$

e per  $\alpha L$  che tende a  $\pi/2$  lo spostamento tende ad infinito, come conferma il grafico di Figura 29.9.

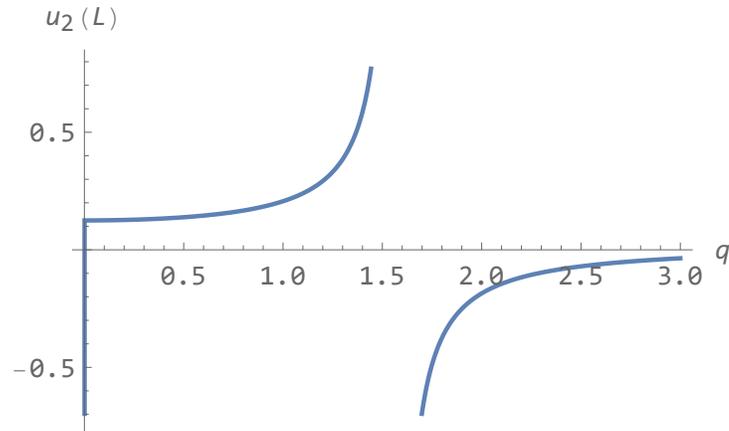


Figura 29.9: L'effetto della perturbazione sullo spostamento in sommità della mensola

Il vantaggio di questo metodo risiede nella possibilità di evitare il calcolo del determinante, e la soluzione della conseguente equazione trascendente, la sua limitazione nel non fornire indicazioni sul modo di inflettersi della trave.

## 29.5 Un semplice telaio zoppo

Si consideri il semplice telaio di Figura 29.10, costituito da un traverso di luce  $L$ , ed un ritto di altezza  $H$ , soggetto ad una forza verticale  $F$  concentrata nel nodo  $B$ . In ipotesi di rigidezza assiale infinita, si vuole calcolare il valore critico del carico.

A tal fine, si definiscono le linee elastiche  $u_2^{(BA)}(x_3)$ , relativamente al ritto, e  $u_2^{(BC)}(x_3)$  relativamente al traverso, scegliendo le origini in  $B$ . Ipotizzando poi che il ritto abbia rigidezza flessionale  $EI_1$  ed il traverso rigidezza flessionale  $EI_2$ , potranno scriversi le equazioni differenziali della linea elastica:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)''''}(x_3) + \alpha^2 u_2^{(BA)''}(x_3) &= 0 \\ u_2^{(BC)''''}(x_3) &= 0 \end{aligned} \quad (29.55)$$

con:

$$\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI_1}} \quad (29.56)$$

Le soluzioni delle equazioni differenziali possono scriversi come:

$$\begin{aligned} u_2^{(BA)}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 \cos(\alpha x_3) + a_3 \sin(\alpha x_3) \\ u_2^{(BC)}(x_3) &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (29.57)$$

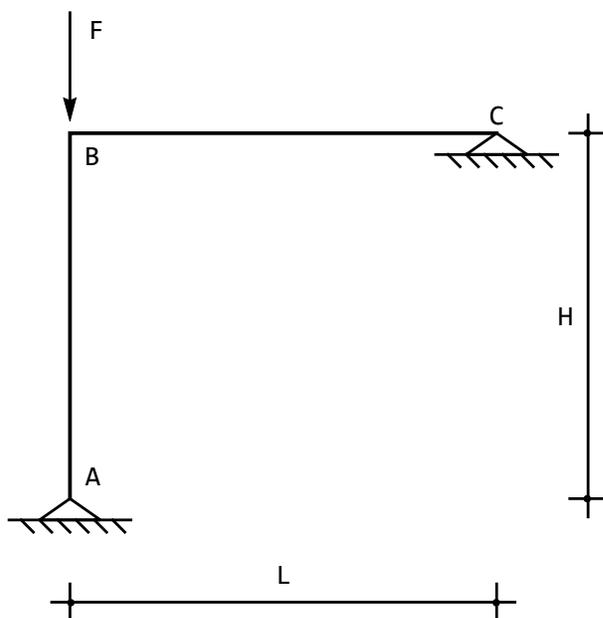


Figura 29.10: Un semplice telaio zoppo

Si sono quindi introdotte otto costanti di integrazione, che dovranno essere definite attraverso l'imposizione di opportune condizioni ai limiti. Nella fattispecie, si avrà:

— in  $A$  ed in  $C$  la presenza di appoggi impedisce gli spostamenti ed annulla i momenti flettenti:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(BA)}(H) &= 0 \\
 u_2^{(BA)''}(H) &= 0 \\
 u_2^{(BC)}(L) &= 0 \\
 u_2^{(BC)''}(L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{29.58}$$

— in  $B$ , attesa l'ineestensibilità assiale delle aste, gli spostamenti sono nulli. Inoltre, le rotazioni sono uguali, e — per l'equilibrio — i momenti flettenti sono uguali e contrari:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(BA)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(BC)}(0) &= 0 \\
 u_2^{(BA)'}(0) &= u_2^{(BC)'}(0) \\
 -EI_1 u_2^{(BA)'}(0) - EI_2 u_2^{(BC)'}(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{29.59}$$

## La soluzione del sistema di equazioni

Le otto condizioni ai limiti si scrivono:

$$\begin{aligned}
 a_0 + a_1 H + a_2 \cos(\alpha H) + a_3 \sin(\alpha H) &= 0 \\
 -a_2 \cos(\alpha H) \alpha_1^2 - a_3 \sin(\alpha H) \alpha_1^2 &= 0 \\
 a_0 + a_2 &= 0 \\
 b_0 &= 0 \\
 a_1 - b_1 + a_3 \alpha_1 &= 0 \\
 -2b_2 EI_2 + a_2 EI_1 \alpha_1^2 &= 0 \\
 b_0 + b_1 L + b_2 L^2 + b_3 L^3 &= 0 \\
 b_2 + 3b_3 L &= 0
 \end{aligned} \tag{29.60}$$

con matrice dei coefficienti pari a:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & H & \cos(\alpha H) & \sin(\alpha H) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\alpha H) \alpha^2 & -\sin(\alpha H) \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_1 \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & -2EI_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3L \end{pmatrix} \tag{29.61}$$

L'equazione secolare può quindi scriversi, annullando il determinante della matrice  $\mathbf{A}$ :

$$-3H \cos(\alpha H) EI_2 \alpha + \sin(\alpha H) (3EI_2 + HLEI_1 \alpha^2) = 0 \tag{29.62}$$

ossia ancora:

$$\tan(\alpha H) = \frac{3HI_2 \alpha}{3I_2 + HLI_1 \alpha^2} \tag{29.63}$$

da risolvere numericamente. Se ad esempio si ipotizza  $L = H$  ed  $I_2 = I_1$ , l'equazione secolare diviene:

$$\tan(\alpha H) = \frac{3\alpha H}{3 + \alpha^2 H^2} \tag{29.64}$$

la cui prima soluzione diversa da zero è

$$\alpha H \approx 3.73 \tag{29.65}$$

corrispondente ad un carico critico pari a:

$$F_{cr} \approx 13.9 \frac{EI_1}{H^2} \tag{29.66}$$

# Indice analitico

- allungamenti percentuali, 201
- allungamento percentuale, 207
- analisi dimensionale, 343
- analogia di Mohr, *vedi* corollari di Mohr
- arco, *vedi* trave ad asse parabolico
- area resistente a taglio, 663
- asse di sollecitazione, 225
- asse neutro, 231
- assi centrali d'inerzia, 228
- assi principali di inerzia, 216
  
- baricentro, 226
- Benvenuto E., 479
  
- carichi critici, 673–686
  - metodo della perturbazione, 682
  - per trave a due campate, 673
  - telaio zoppo, 684
  - trave a mensola, 682
- Carpinteri A., 469
- carrello inclinato, 4
- catene cinematiche
  - teoremi sulle, 22
- Cavallina T., 244
- cedimenti anelastici, 369, 477
- centri di rotazione
  - regole pratiche, 22
- centro assoluto di rotazione, 21
- centro di taglio, 259
- centro relativo di rotazione, 21
- cerchi di Mohr, 199
  - principali, 188
- cerniera multipla, 105
- cinematismi, 2, 64
- coefficiente di dilatazione termica, 475
- coefficienti fondamentali, 343–352
  
- condizioni di equilibrio per un tratto rigido
  - soggetto a due forze, 85
  - soggetto a due forze ed una coppia, 85
  - soggetto a quattro forze, 85
  - soggetto a tre forze, 85
  - soggetto a tre forze ed una coppia, 85
- coppie distribuite, 294
- corollari di Mohr, 327–341
  - carico fittizio, 327
  - condizioni di vincolo, 328
  - in presenza di distorsioni, 482
  - momento fittizio, 328
  - taglio fittizio, 328
  - trave ausiliaria, 328
  
- D'Anna E., 244
- deformazioni principali, 201–212
- diagramma del momento flettente
  - indicazioni pratiche, 127
- diagramma del taglio
  - indicazioni pratiche, 127
- diagramma dello sforzo normale
  - indicazioni pratiche, 127
- distorsioni alla Navier, 285
- distorsioni flessionali, 285
- doppia capriata
  - analisi cinematica, 44
  
- energia potenziale totale
  - nelle travi soggette a carico trasversale, 277
  - per travi soggette a forze di trazione, 262
- equazione dei tre momenti, 393

- equazione di Clapeyron, *vedi* equazione dei tre momenti  
 equazione secolare, 183, 203  
 equazioni di compatibilità, 209  
 equazioni di congruenza  
     l'utilizzo del p.l.v., 413–467  
     scrittura diretta, 385–412  
 equilibrio, matrice di, 64
- fattore di taglio, 258  
 flessione deviata, 225  
 forca, *vedi* telaio zoppo  
 formula binomia, 231  
 formula di Jourawsky, 233–260  
 formula di Kharlab, 251, 254  
 Franciosi Vincenzo, 73, 75, 295  
 frontiera di stabilità, 680
- Galileo, 479  
 gradiente di spostamento, 206
- invarianti di deformazione, 203  
 invarianti di tensione, 183  
 iperstaticità, 64, 101–107  
 ipotesi di rigidità assiale, 547, 603–649  
 isostaticità, 64, 101–107
- labilità, 101–107  
 labilità, grado di, 64  
 Lacidogna G., 469  
 Lagrange  
     procedimento di, 109–126, 470  
 legge di Hooke, 261, 276  
 linea elastica  
     in presenza di distorsioni, 483  
     per telai iperstatici, 541–602  
     per telai isostatici, 495  
     per travi soggette a compressione, 673
- Macaulay W.H., 309  
 maglia chiusa  
     analisi cinematica, 37, 50, 53, 58  
     analisi statica, 534  
     assialmente rigida, 645  
     con carico anti-simmetrico, 656  
     diagramma del momento, 165  
     doppiamente simmetrica, 655  
     metodo della doppia integrazione, 529  
     metodo della linea elastica, 576  
     triangolare, 450, 587–602  
 maglia chiusa a due bipendoli e cerniera  
     analisi statica, 97  
 maglia chiusa a quattro cerniere e pendolo  
     analisi statica, 91  
 maglia chiusa a tre cerniere  
     analisi statica, 93  
     metodo della doppia integrazione, 504  
 Mathematica, 272  
 matrice di rigidità  
     per travi di Eulero–Bernoulli, 479  
     per travi di Timoshenko, 669  
 metodo della doppia integrazione, 309–325  
     per i telai, 363, 495–539  
 metodo di Lagrange, *vedi* Lagrange  
 metodo di Saviotti, 329  
 metodo misto, 458, 469–474  
 momenti d'inerzia, 213–223, 227  
     principali, 216  
     proprietà distributiva, 213  
 momento centrifugo, 213–223  
 momento statico, 213–223  
     proprietà distributiva, 213
- normalizzazione, 185
- polo, 1, 63  
 portale a due cerniere e bipendolo interno  
     analisi statica, 86  
     metodo della doppia integrazione, 376  
     principio dei lavori virtuali, 370  
 portale a due cerniere e carrello  
     analisi cinematica, 23  
 portale a tre cerniere  
     analisi cinematica, 23  
     analisi statica, 68

- portale a tre cerniere e bipendolo  
 analisi cinematica, 32
- portale a tre tratti  
 analisi statica, 79
- portale con bipendolo e cerniera, con  
 bipendolo interno  
 analisi statica, 87
- portale con cerniera e carrello  
 procedimento di Lagrange, 121
- portale con cerniera e due bipendoli  
 analisi statica, 77
- portale con doppio bipendolo  
 analisi cinematica, 28
- portale con pendolo inclinato  
 diagramma delle c.s.i., 157
- portale con pendolo inefficace, 102
- portale con pendolo interno  
 analisi cinematica, 27
- portale labile ed iperstatico, 102
- portale sospeso, 435
- principio dei lavori virtuali  
 per i corpi rigidi, 109–126  
 in presenza di variazioni termiche,  
 490  
 per i corpi rigidi, 472  
 per il calcolo degli spostamenti, 363–  
 383  
 per le equazioni di congruenza, 427–  
 467  
 per solidi deformabili, 363–383
- profilato a T, 236  
 baricentro, 236  
 tensione nell'ala, 236  
 tensione nell'anima, 238
- proprietà di simmetria, 651–659
- quadrato sollecitato lungo la diagona-  
 le, 244
- reazioni vincolari  
 regole pratiche, 83
- relazione momenti–curvatura, 276
- rigidezza flessionale, 276
- rotazione rigida, 1
- rotazioni rigide, 206
- Saviotti Carlo, 309
- semicerchio  
 baricentro, 222  
 momenti di inerzia, 223
- sezione a C  
 centro di taglio, 259  
 fattore di taglio, 259  
 tensioni tangenziali, 254
- sezione a T  
 baricentro, 234  
 momento d'inerzia, 234  
 tensioni tangenziali, 235
- sezione ad L, 216  
 baricentro, 218  
 momenti centrali di inerzia, 218  
 momenti d'inerzia, 218
- sistema isostatico equivalente, 385
- stato piano di spostamento, 205
- stato piano di tensione, 181, 188
- stato tensionale di De Saint–Venant,  
 195
- struttura spingente, 447
- strutture iperstatiche, *vedi* iperstaticità
- strutture isostatiche, *vedi* isostaticità
- strutture labili, *vedi* labilità
- Surace C., 469
- telai a nodi fissi, 604
- telai a nodi spostabili, 607
- telaio a due campate  
 analisi cinematica, 8  
 analisi statica, 70  
 diagramma delle c.s.i., 143
- telaio a due piani  
 metodo della linea elastica, 558
- telaio a mensola  
 diagrammi delle c.s.i., 133
- telaio a quattro cerniere  
 analisi cinematica, 29
- telaio a quattro cerniere con pendolo  
 analisi statica, 73  
 diagramma delle c.s.i., 150  
 metodo della linea elastica, 582  
 procedimento di Lagrange, 125
- telaio a scala, 633
- telaio a tre campate, 629
- telaio a tre cerniere con sbalzo

- diagramma delle c.s.i., 137  
 metodo della doppia integrazione, 524  
 telaio a tre cerniere e pendolo interno  
   con variazione termica, 492  
 telaio con nodo quadruplo  
   metodo della linea elastica, 551  
 telaio con nodo triplo  
   metodo della linea elastica, 548  
 telaio simmetrico, 651–659  
   con carico antisimmetrico, 621  
   con carico simmetrico, 625  
   con carico sul trasverso, 655  
 telaio zoppo  
   analisi cinematica, 2  
   analisi statica, 65, 66  
   appoggiato, 427  
   assialmente rigido, 611  
   carichi critici, 684  
   composizione degli spostamenti, 360  
   con cedimento anelastico, 434  
   iperstatico, 397  
   metodo della doppia integrazione, 514  
   metodo della linea elastica, 542  
 telaio zoppo con incastro e carrello  
   metodo della linea elastica, 567  
   metodo misto, 470  
 telaio zoppo tre volte iperstatico  
   metodo della congruenza, 416  
   metodo della linea elastica, 562  
 tensioni principali, 199  
 tensioni tangenziali da torsione, 260  
 tensore di Green–Lagrange, 206  
 teorema di Cauchy–Poisson, 178, 179  
 teorema di Huyghens, 215, 227  
 teoria di Eulero per i carichi critici,  
   *vedi* carichi critici  
 traslazione, 1  
 travature reticolari, 102  
   computo dei vincoli, 106  
 trave a mensola  
   carichi critici, 682  
   coefficienti fondamentali, 344–348  
   composizione degli spostamenti, 353  
   con carico parziale, 338, 354  
   con tirante, 638  
   di Timoshenko, 665  
   diagramma di taglio e momento, 128  
 trave a sezione variabile, 304  
   mensola, 305  
 trave a tre campate  
   analisi cinematica, 11  
 trave ad asse parabolico  
   analisi cinematica, 16, 46, 48  
   analisi statica, 89  
   procedimento di Lagrange, 114, 117  
 trave appoggiata, 309–316, 329–334  
   coefficienti fondamentali, 348–352  
   composizione degli spostamenti, 356  
   con carico parziale, 356  
   con variazione termica, 366  
   con vincoli cedevoli, 367  
   principio dei lavori virtuali, 364  
 trave appoggiata con sbalzo  
   procedimento di Lagrange, 123  
 trave bipendolo–appoggio con sbalzo,  
   317, 334  
 trave con bipendolo interno  
   analisi cinematica, 13  
 trave continua, 288, 386  
   in presenza di variazioni termiche,  
   484  
 trave doppia  
   metodo della linea elastica, 571  
   metodo misto, 472  
   principio dei lavori virtuali, 458  
 trave doppiamente incastrata con ap-  
   poggio, 443  
 trave Gerber, 321–325, 335  
   procedimento di Lagrange, 112  
 trave simmetrica  
   con carico anti–simmetrico, 655  
   con carico simmetrico, 654  
 travi a due campate, 281–286  
 travi a più campate, 340  
 travi a più campate, 288–308  
 travi ad una campata, 278–280  
   doppiamente incastrata, 391  
   di Timoshenko, 666  
   doppiamente incastrate, 278

- incastrata–appoggiata, 282, 386
- travi di Timoshenko, 663–672
  - matrice di rigidezza, 669
  - metodo della funzione ausiliaria, 664
- travi soggette a forze di trazione
  - a sezione variabile, 272
  - ad estremi fissi, 272
  - bloccate–libere, 263
  - con vincoli cedevoli, 266
  - energia potenziale, 262
  - il caso del dente, 269
- triangolo isoscele
  - baricentro, 220
  - momenti di inerzia, 221
  - tensioni tangenziali, 248
- variazione angolare, 207
- variazioni termiche, 294
  - uniformi, 475, 496
- variazioni termiche alla Navier, *vedi* variazioni termiche flessionali
- variazioni termiche flessionali, 301–304, 366, 475
- vincoli cedevoli, 266, 367
- vincoli inefficaci, 101
- vincoli mal disposti, 103
- vincoli multipli, 101