Esercitazioni 2 - Analisi della deformazione

In questa esercitazione si studiano alcuni stati deformativi
Infine, si danno alcune semplici funzioni *Mathematica*, che permettono l'automazione dello studio per qualsiasi stato deformativo

Esercizio n.1

Si supponga di voler conoscere sperimentalmente lo stato di deformazione in un punto M di un solido. A tal fine, si immagini di poter piazzare sei dispositivi sperimentali (6 strain-gauges) capaci di rilevare direttamente gli allungamenti percentuali secondo sei direzioni prefissate, come illustrato in Figura 2.3.

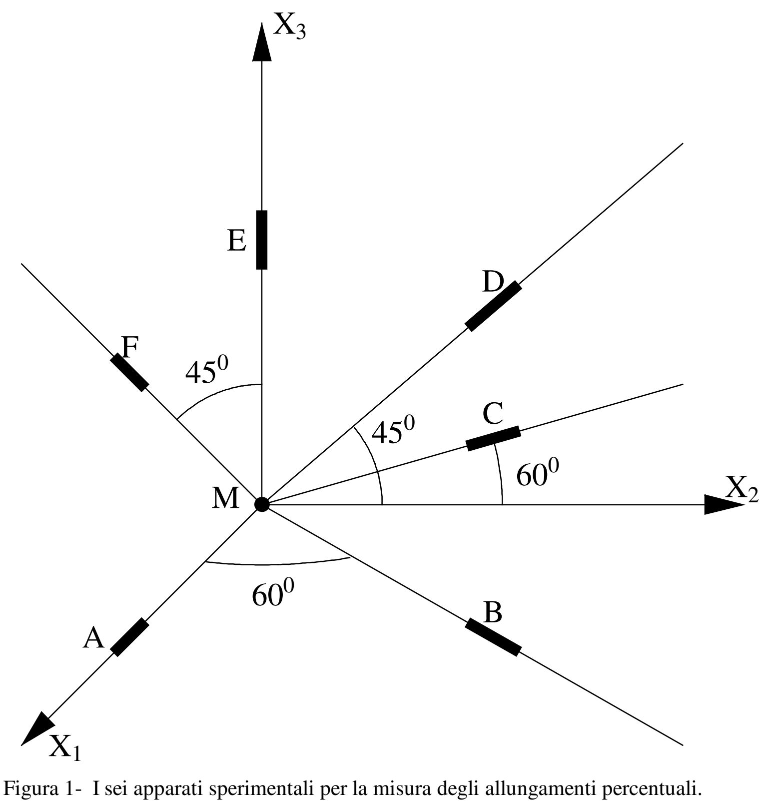


Figura 1- I sei apparati sperimentali per la misura degli allungamenti percentuali.

Siano E_a, E_b, E_c, E_d, E_e ed E_f gli allungamenti percentuali segnalati dai sei strain-gauges, con:

$$E_a = 6\ 10^{-3}$$
$$E_b = 4.5\ 10^{-3}$$
$$E_c = 3\ 10^{-3} \qquad (1)$$

$$E_d = 1.5\ 10^{-3}$$
$$E_e = 0$$
$$E_f = 3\ 10^{-3}$$

lungo le rette definite dai coseni direttori:

$$a \equiv X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix};\ c = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix};\ e \equiv X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ f = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Si deducano:
1. la matrice delle deformazioni lineari in M.
2. le deformazioni principali

■ Soluzione

Punto 1 - L'allungamento percentuale E_{MN} e' fornito da:

$$E_{MN} = e_{ij}\, l_i\, l_j = e_{11}\, l_1^2 + e_{22}\, l_2^2 + e_{33}\, l_3^2 + 2\, e_{12}\, l_1\, l_2 + 2\, e_{13}\, l_1\, l_3 + 2\, e_{23}\, l_3\, l_3 \tag{3}$$

Conoscendo quindi gli allungamenti percentuali lungo sei rette, si potra' scrivere il sistema di sei equazioni nelle sei incognite e_{ij} :

$$\begin{aligned}
6\ 10^{-3} &= e_{11} \\
4.5\ 10^{-3} &= \frac{1}{4} e_{11} + \frac{3}{4} e_{22} + \frac{\sqrt{3}}{2} e_{12} \\
3\ 10^{-3} &= \frac{3}{4} e_{11} + \frac{1}{4} e_{22} - \frac{\sqrt{3}}{2} e_{12} \\
1.5\ 10^{-3} &= \frac{1}{2} e_{22} + \frac{1}{2} e_{33} + e_{23} \\
0 &= e_{33} \\
3\ 10^{-3} &= \frac{1}{2} e_{11} + \frac{1}{2} e_{33} + e_{13}
\end{aligned} \tag{4}$$

o, matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4.5 \\ 3 \\ 1.5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} 10^{-3} \tag{5}$$

con soluzione:

$$e_{11} = 6\ 10^{-3}$$
$$e_{22} = 1.5\ 10^{-3}$$
$$e_{33} = 0$$
$$e_{12} = 2.165\ 10^{-3}$$
$$e_{23} = 0.75\ 10^{-3}$$
$$e_{13} = 0$$

Punto 2 - Per dedurre le deformazioni prncipali, si scriva l'equazione secolare, calcolando gli invarianti di deformazione:

$$\begin{aligned} I_1 &= e_{11} + e_{22} + e_{33} = 7.5\ 10^{-3} \\ I_2 &= e_{11}\, e_{22} + e_{11}\, e_{33} + e_{22}\, e_{33} - e_{12}^2 - e_{13}^2 - e_{23}^2 = 3.75\ 10^{-6} \\ I_3 &= \mathrm{Det}\,(E) = -3.375\ 10^{-9} \end{aligned} \tag{7}$$

L'equazione secolare si scrive allora:

$$-e^3 + 7.5\ 10^{-3}\ e^2 - 3.75\ 10^{-6}\ e\ - 3.375\ 10^{-9} = 0 \tag{8}$$

ed ha soluzioni:

$$\begin{aligned} e_1 &= 6.88\ 10^{-3} \\ e_2 &= 1.07\ 10^{-3} \\ e_3 &= -0.45\ 10^{-3} \end{aligned} \tag{9}$$

Esercizio n.2

Si consideri un corpo B, ed in particolare un punto P, di coordinate (x_1, x_2, x_3). Per effetto delle forze applicate, P subisca gli spostamenti:

$$\mathbf{u}\,(P) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ 10^{-3}\ x_1 - 10^{-3}\ x_2 \\ 3\ 10^{-3}\ x_1 - 2\ 10^{-3}\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Si vuole:

1. determinare e studiare lo stato di deformazione e di rotazione. In particolare:

   a. calcolare la matrice **H** del gradiente di spostamento
   b. calcolare le matrici **E** ed **Ω**
   c. calcolare la matrice **D** di Green-Lagrange
   d. calcolare lo spostamento di un segmento **dx** steso lungo l'asse x_1
   e. calcolare l'allungamento percentuale del suddetto segmento, utilizzando teoria completa e semplificata

2. ricercare le deformazioni principali e le corrispondenti direzioni principali, in ipotesi di deformazioni lineari

3. dedurre le rotazioni cui andra' sottoposto il sistema di riferimento (x_1, x_2, x_3) per portarlo a coincidere con il sistema principale

■ Soluzione

Punto 1 - La matrice **H** dei gradientri di spostamento si ottiene attraverso elementari operazioni di derivazione:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \tag{11}$$

la sua parte simmetrica e' quindi fornita da:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \tag{12}$$

mentre la parte antisimmetrica e' calcolabile come:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \tag{13}$$

La matrice **D** del tensore di Green-Lagrange e' data dalla formula:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \frac{1}{2}\mathbf{H}^{T}\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-6} \tag{14}$$

Si noti, prima di operare il prodotto matriciale, che la correzione nonlineare e' pari a qualche millesimo della parte lineare. In definitiva e':

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} + \begin{pmatrix} 13 & -8 & 0 \\ -8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-6} \tag{15}$$

Assegnato il segmento **dx** steso lungo l'asse x_1 si puo' calcolare la sua deformazione e la sua rotazione rigida attraverso la decomposizione:

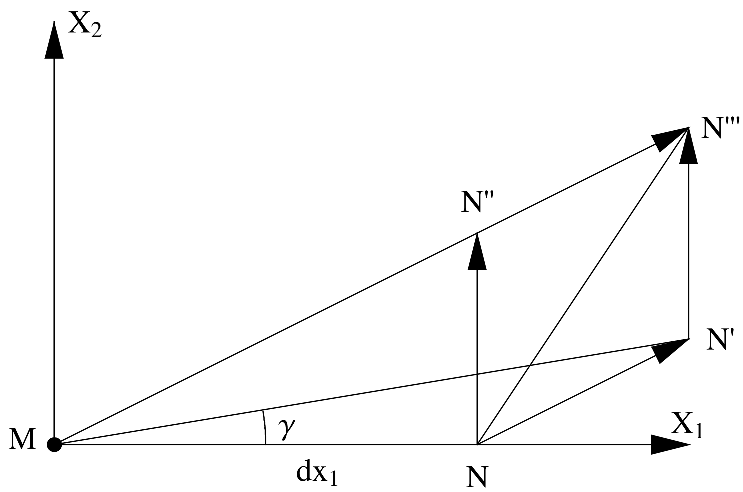
$$\mathbf{du} = \mathbf{du}_e + \mathbf{du}_r = \mathbf{Edx} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{dx} \tag{16}$$

Gli spostamenti da deformazione pura saranno quindi pari a:

$$\mathbf{du}_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \begin{pmatrix} dx_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,dx_1 \\ dx_1 \\ 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \tag{17}$$

mentre le rotazioni rigide sono fornite da:

$$\mathbf{du}_r = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \begin{pmatrix} dx_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,dx_1 \\ 0 \end{pmatrix} 10^{-3} \tag{18}$$



Il segmento $\overrightarrow{MN}$ = **dx** ruota rigidamente, portandosi in $\overrightarrow{MN''}$, poi si deforma portandosi in $\overrightarrow{MN'''}$. La parte di deformazione pura e' quella che porta $\overrightarrow{MN}$ in $\overrightarrow{MN'}$, definita dall'allungamento percentuale:

$$E_{MN} = \frac{|MN'| - |MN|}{|MN|} = e_{11} = 2\,10^{-3} \tag{19}$$

e dalla variazione angolare:

$$\gamma = e_{12} = 10^{-3} \tag{20}$$

Punto 2 - Per ottenere le deformazioni principali si calcolano gli invarianti di deformazione:

$$\begin{aligned} I_{1e} &= 0 \\ I_{2e} &= -5\,10^{-6} \\ I_{36} &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

e quindi l'equazione secolare si scrive:

$$-e^3 + 5\,10^{-6}\,e = 0 \tag{22}$$

con soluzioni:

$$\begin{aligned} e_1 &= \sqrt{5}\,10^{-3} \\ e_2 &= 0 \\ e_3 &= -\sqrt{5}\,10^{-3} \end{aligned} \tag{23}$$

Per calcolare la prima direzione principale occorre risolvere il sistema di equazioni:

$$(\mathbf{E} - e_1\,\mathbf{I})\,n = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 1 & -2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

con soluzione:

$$n_3 = 0, \quad \frac{n_1}{n_2} = 2 + \sqrt{5} \tag{25}$$

Normalizzando in modo da ottenere un vettore a lunghezza unitaria, si ha:

$$n_1 = \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{1+\left(2+\sqrt{5}\right)^2}} = 0.973 \tag{26}$$

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(2+\sqrt{5}\right)^2}} = 0.23 \tag{27}$$

Per calcolare la seconda direzione principale occorre risolvere il sistema di equazioni:

$$(\mathbf{E} - e_2\,\mathbf{I})\,n = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

con soluzione $n_{\mathrm{II}} = (0, 0, 1)$. Infine, la terza direzione si ottiene risolvendo il sistema:

$$(\mathbf{E} - e_3\,\mathbf{I})\,n = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 1 & -2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

con soluzione:

$$n_3 = 0, \quad \frac{n_1}{n_2} = -\frac{1}{2+\sqrt{5}} \tag{30}$$

Normalizzando in modo da ottenere un vettore a lunghezza unitaria, si ha:

$$n_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(2+\sqrt{5}\right)^2}} = -0.23 \tag{31}$$

$$n_2 = \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{1+\left(2+\sqrt{5}\right)^2}} = 0.973 \tag{32}$$

La matrice **L** dei coseni direttori e', in definitiva:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}} & \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

ed e' immediato controllare l'ortogonalita' delle sue colonne. Si ha inoltre che il triplo prodotto matriciale L^T EL fornisce la matrice diagonale con le deformazioni principali lungo la diagonale:

$$\begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}} & \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}} & \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{1+(2+\sqrt{5})^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Grafici