Esercitazioni 1 - Analisi della tensione

In questa esercitazione si studiano alcuni stati tensionali, deducendo, per ciascuno di essi, le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali, calcolando le minime e massime tensioni tangenziali, e disegnando i cerchi di Mohr principali. Il primo esempio e' del tutto generico, ed i calcoli vanno svolti con l'ausilio di un computer, gli altri presentano alcune peculiarita' che permettono il calcolo manuale.
Infine, si danno alcune semplici funzioni *Mathematica*, che permettono l'automazione dello studio per qualsiasi stato tensionale.

Esercizio n.1

Si consideri il corpo B, e si ipotizzi che nel punto P la matrice delle tensioni sia data da:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1.5 \end{pmatrix} \text{t cm}^{-2} \tag{1}$$

e si voglia determinare il vettore tensione t_n sul piano definito dalla normale con coseni direttori

$$n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \sqrt{\frac{2}{7}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Soluzione

Basta applicare il teorema di Cauchy-Poisson, ottenendo:

$$\begin{pmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \sqrt{\frac{2}{7}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.60357 \\ -0.935414 \end{pmatrix} \text{t cm}^{-2} \tag{3}$$

Esercizio n.2

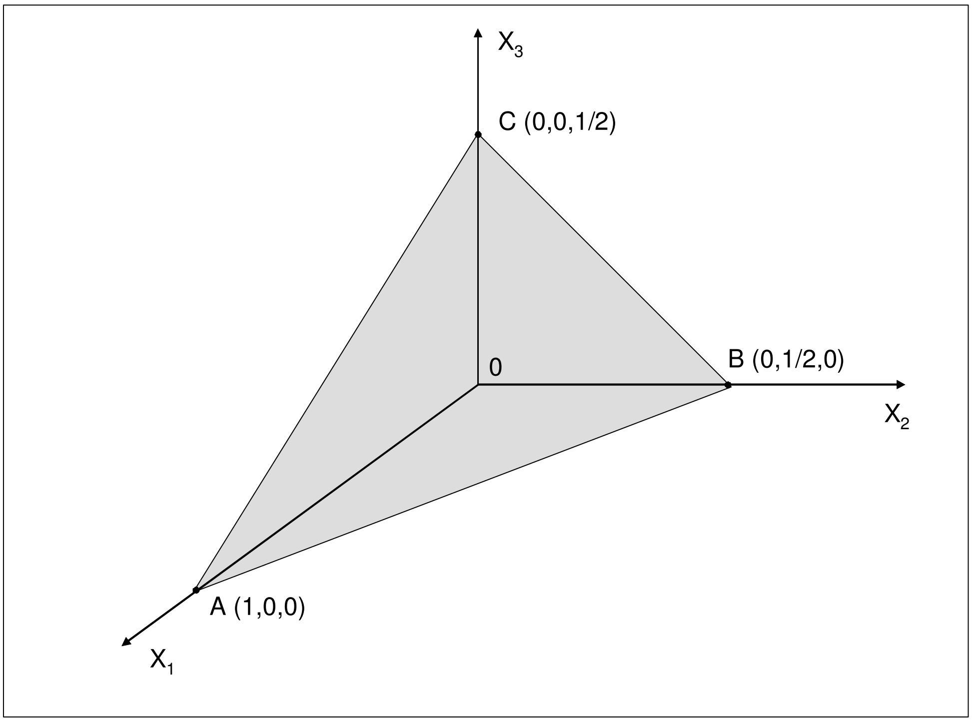
Si consideri il corpo B, e si ipotizzi che nel punto P la matrice delle tensioni sia data da:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1.5 \end{pmatrix} \text{t cm}^{-2} \tag{4}$$

e si voglia determinare il vettore tensione t_n sul piano definito dall'equazione:

$$x_1 + 2\, x_2 + 2\, x_3 - 1 = 0 \tag{5}$$

■ Soluzione



Dato il piano di equazione:

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 + d = 0 \qquad (6)$$

i coseni della normale ad esso sono forniti da:

$$n_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} ;\; n_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} ;\; n_3 = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (7)$$

Nel nostro caso sara' allora:

$$n_1 = \frac{1}{3} ;\; n_2 = \frac{2}{3} ;\; n_3 = \frac{2}{3} ; \qquad (8)$$

e quindi il teorema di Cauchy-Poisson fornisce:

$$\begin{pmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} t\ cm^{-2} \qquad (9)$$

Esercizio n.3

Si consideri il corpo B, e si ipotizzi che nel punto P la matrice delle tensioni sia data da:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} t\ cm^{-2} \qquad (10)$$

e si voglia determinare la tensione tangenziale τ_n agente sul piano di normale con coseni direttori:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{11}$$

■ Soluzione

Si calcolano, nell'ordine, la tensione t_n sul piano in oggetto, la sua componente normale σ_n e l'ampiezza della componente tangenziale τ_n. Infine, si calcolano i coseni direttori della retta di azione di τ_n.
La tensione t_n si ottiene applicando il teorema di Cauchy-Poisson:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{Sn} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{t cm}^{-2} \tag{12}$$

La componente normale σ_n e' la componente di t_n lungo la normale n, e si calcola attraverso un prodotto scalare:

$$\sigma_n = t_n \cdot n = t_{n1} n_1 + t_{n2} n_2 + t_{n3} n_3 = \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{13}{9} \text{ t cm}^{-2} \tag{13}$$

L'ampiezza della tensione tangenziale e' immediatamente deducibile come:

$$\tau_n = \sqrt{t_n^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{t_{n1}^2 + t_{n2}^2 + t_{n3}^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} - \frac{169}{81}} = \frac{2\sqrt{5}}{9} \tag{14}$$

Infine, i coseni direttori della retta di azione di τ_n si ottengono da:

$$n_{\tau 1} = \frac{t_{n1} - \sigma_n n_1}{\tau_n} = 9\,\frac{\frac{1}{3} - \frac{13}{9}\frac{1}{3}}{2\sqrt{5}} = -\frac{2}{3\sqrt{5}} = -0.298142 \tag{15}$$

$$n_{\tau 2} = \frac{t_{n2} - \sigma_n n_2}{\tau_n} = 9\,\frac{\frac{4}{3} - \frac{13}{9}\frac{2}{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0.745356 \tag{16}$$

$$n_{\tau 3} = \frac{t_{n3} - \sigma_n n_3}{\tau_n} = 9\,\frac{\frac{2}{3} - \frac{13}{9}\frac{2}{3}}{2\sqrt{5}} = -\frac{4}{3\sqrt{5}} = -0.596285 \tag{17}$$

Esercizio n. 4

Si consideri il punto P, interno al corpo B, e si assegni in P la seguente matrice delle componenti speciali di tensione:

$$S = \begin{pmatrix} 750 & -400 & 125 \\ -400 & 1000 & 0 \\ 125 & 0 & -500 \end{pmatrix} \text{Kg / cm}^2 \tag{18}$$

Si vuole:

1. disegnare lo stato tensionale
2. calcolare le tensioni principali
3. calcolare le corrispondenti direzioni principali di tensione
4. calcolare le massime e minime tensioni tangenziali
5. identificare i piani su cui agiscono tali tensioni
6. tracciare i cerchi principali di Mohr, confermando i risultati del punto precedente

■ Soluzione

■ Punto 1

Lo stato tensionale e' disegnato in Figura 1. Si osservi che le tensioni sono state riportate col loro segno, e che di conseguenza il loro valore e' stato indicato in assoluto.

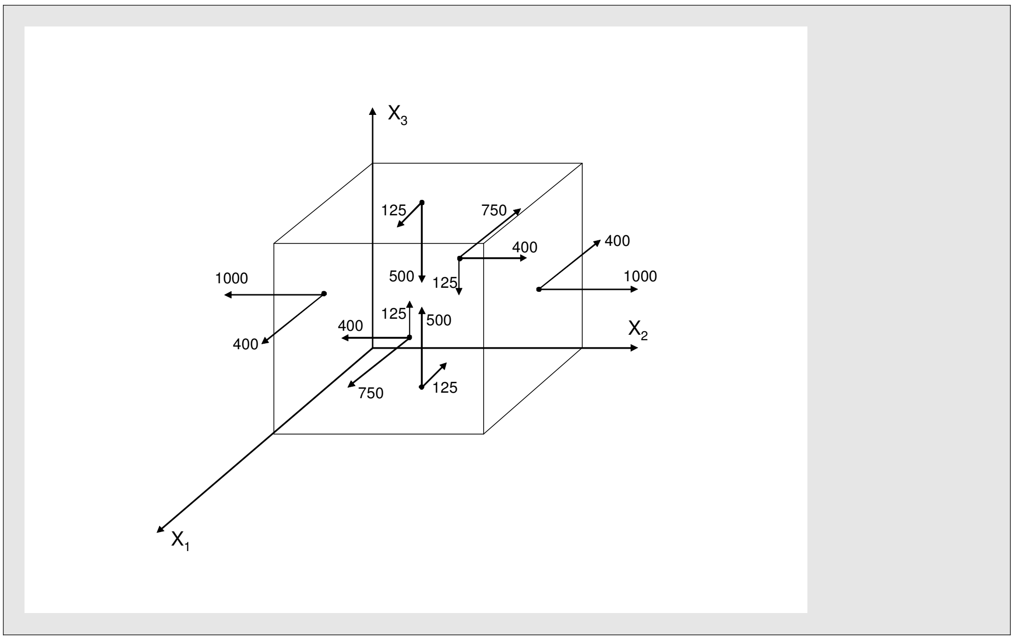
■ Punto 2

Per dedurre le tensioni principali, e' opportuno calcolare i tre invarianti:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 750 + 1000 - 500 = 1250 \tag{19}$$

$$I_2 = \sigma_{11}\,\sigma_{22} + \sigma_{11}\,\sigma_{33} + \sigma_{22}\,\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 = -300625 \tag{20}$$

$$I_3 = \mathrm{Det}\,(S) = -310625000 \tag{21}$$



da cui poi trarre l'equazione secolare:

$$-\sigma^3 + 1250\,\sigma^2 + 300625\,\sigma - 310625000 = 0 \tag{22}$$

Le tre radici, reali, possono essere calcolate con un qualsiasi metodo numerico, ottenendo le tre tensioni principali:

$$\sigma_1 = 1297.15 \quad \sigma_2 = 466.348 \quad \sigma_3 = -513.496 \tag{23}$$

- **Punto 3**

Per calcolare la prima direzione principale occorre risolvere il sistema:

$$(S - \sigma_1 I)\, n = 0 \tag{24}$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} 750 - 1297.15 & -400 & 125 \\ -400 & 1000 - 1297.15 & 0 \\ 125 & 0 & -500 - 1297.15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

omogeneo ed a determinante nullo. Dividendo per n_3 si ottiene, dalle prime due equazioni:

$$-547.15 \left(\frac{n_1}{n_3}\right) - 400 \left(\frac{n_2}{n_3}\right) = -125 \tag{26}$$

$$-400 \left(\frac{n_1}{n_3}\right) - 297.15 \left(\frac{n_2}{n_3}\right) = 0 \tag{27}$$

con soluzione ottenibile con un normale metodo di sostituzione:

$$\frac{n_1}{n_3} = 14.3655 \quad \frac{n_2}{n_3} = -19.3377 \tag{28}$$

Infine, la soluzione puo' essere normalizzata imponendo che sia:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \tag{29}$$

Basta, a tal fine, scrivere:

$$n_1 = \frac{14.3655}{(14.3655^2 + 19.3377^2 + 1)^{1/2}} = 0.59582 \tag{30}$$

$$n_2 = \frac{-19.3377}{(14.3655^2 + 19.3377^2 + 1)^{1/2}} = -0.802046 \tag{31}$$

$$n_3 = \frac{1}{(14.3655^2 + 19.3377^2 + 1)^{1/2}} = 0.0414758 \tag{32}$$

La prima direzione principale e' quindi data da:

$$n^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.59582 \\ -0.802046 \\ 0.0414758 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Per calcolare la seconda direzione principale occorre risolvere il sistema:

$$(S - \sigma_2 I)\, n = 0 \tag{34}$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} 750-466.348 & -400 & 125 \\ -400 & 1000-466.348 & 0 \\ 125 & 0 & -500-466.348 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (35)$$

omogeneo ed a determinante nullo. Dividendo per n_3 si ottiene, dalle prime due equazioni:

$$283.652 \left(\frac{n_1}{n_3}\right) - 400 \left(\frac{n_2}{n_3}\right) = -125 \qquad (36)$$

$$-400 \left(\frac{n_1}{n_3}\right) - 533.652 \left(\frac{n_2}{n_3}\right) = 0 \qquad (37)$$

con soluzione ottenibile con un normale metodo di sostituzione:

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_3} &= 7.73091 \\ \frac{n_2}{n_3} &= 5.79472 \end{aligned} \qquad (38)$$

Infine, la soluzione puo' essere normalizzata imponendo che sia:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \qquad (39)$$

Basta, a tal fine, scrivere:

$$n_1 = \frac{7.73091}{(7.73091^2 + 5.79472^2 + 1)^{1/2}} = 0.79592 \qquad (40)$$

$$n_2 = \frac{5.79472}{(7.73091^2 + 5.79472^2 + 1)^{1/2}} = 0.596584 \qquad (41)$$

$$n_3 = \frac{1}{(7.73091^2 + 5.79472^2 + 1)^{1/2}} = 0.102953 \qquad (42)$$

La seconda direzione principale e' quindi data da:

$$n^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.79592 \\ 0.596584 \\ 0.102953 \end{pmatrix} \qquad (43)$$

Per calcolare la terza direzione principale occorre risolvere il sistema:

$$(S - \sigma_3 I)\, n = 0 \qquad (44)$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} 750+513.496 & -400 & 125 \\ -400 & 1000+513.496 & 0 \\ 125 & 0 & -500+513.496 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (45)$$

omogeneo ed a determinante nullo. Dividendo per n_3 si ottiene, dalle prime due equazioni:

$$1263.5 \left(\frac{n_1}{n_3}\right) - 400 \left(\frac{n_2}{n_3}\right) = -125 \qquad (46)$$

$$-400 \left(\frac{n_1}{n_3}\right) + 1513.496 \left(\frac{n_2}{n_3}\right) = 0 \qquad (47)$$

con soluzione ottenibile con un normale metodo di sostituzione:

$$\frac{n_1}{n_3} = -0.107965 \qquad \frac{n_2}{n_3} = -0.0285339 \tag{48}$$

Infine, la soluzione puo' essere normalizzata imponendo che sia:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \tag{49}$$

Basta, a tal fine, scrivere:

$$n_1 = \frac{-0.107965}{(0.107965^2 + 0.0285339^2 + 1)^{1/2}} = -0.107298 \tag{50}$$

$$n_2 = \frac{-0.0285339}{(0.107965^2 + 0.0285339^2 + 1)^{1/2}} = -0.0283576 \tag{51}$$

$$n_3 = \frac{1}{(0.107965^2 + 0.0285339^2 + 1)^{1/2}} = 0.993822 \tag{52}$$

La terza direzione principale e' quindi data da:

$$n^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.107298 \\ -0.0283576 \\ 0.993822 \end{pmatrix} \tag{53}$$

Si costruisca ora la matrice modale, inserendo le tre direzioni in colonne successive:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0.59582 & 0.79592 & -0.107298 \\ -0.80204612 & 0.596584 & -0.0283576 \\ 0.0414758 & 0.102953 & 0.9938224 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Tale matrice risulta ortogonale, a determinante unitario, segnalando che le direzioni principali sono mutuamente ortogonali. Inoltre, e' facile verificare che:

$$\mathbf{N}^{-1}\,\mathbf{SN} = \mathbf{\Lambda} \tag{55}$$

con $\mathbf{\Lambda}$ matrice diagonale contenente l'iesima tensione principale in posizione i-esima:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1297.15 & 0 & 0 \\ 0 & 466.348 & 0 \\ 0 & 0 & -513.496 \end{pmatrix} \tag{56}$$

- **Punto 4**

Conosciute le tensioni principali, e' immediato concludere che le minime e massime tensioni tangenziali sono fornite da:

1.sui quattro piani di normale $\boldsymbol{n}^T = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\tau = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \pm\frac{466.348 + 513.496}{2} = \pm\, 489.922 \tag{57}$$

con tensione normale, agente sul medesimo piano, pari a:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = \frac{466.348 - 513.496}{2} = -23.574 \tag{58}$$

1.sui quattro piani di normale $\boldsymbol{n}^T = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\tau = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \pm \frac{-513.496 - 1297.15}{2} = \pm 905.323 \tag{59}$$

con tensione normale, agente sul medesimo piano, pari a:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} = \frac{-513.496 + 1297.15}{2} = 391.827 \tag{60}$$

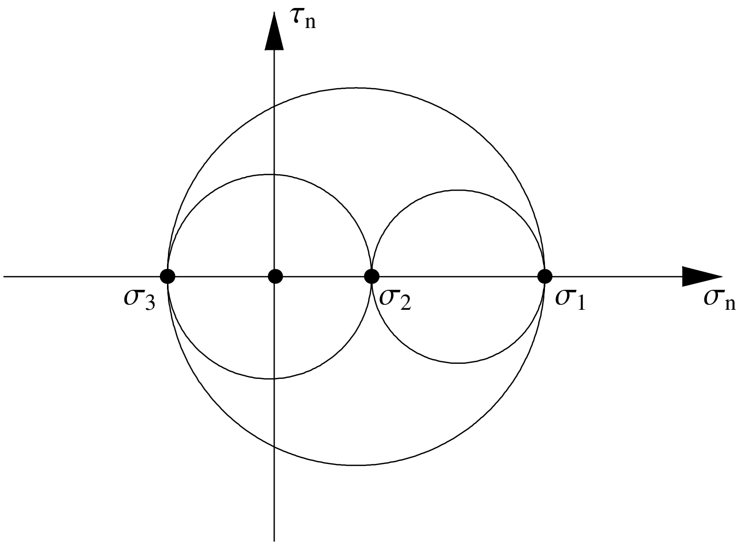
1.sui quattro piani di normale $\boldsymbol{n}^T = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$$\tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \frac{1297.15 - 466.348}{2} = \pm 415.401 \tag{61}$$

con tensione normale, agente sul medesimo piano, pari a:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{1297.15 + 466.348}{2} = 881.749 \tag{62}$$

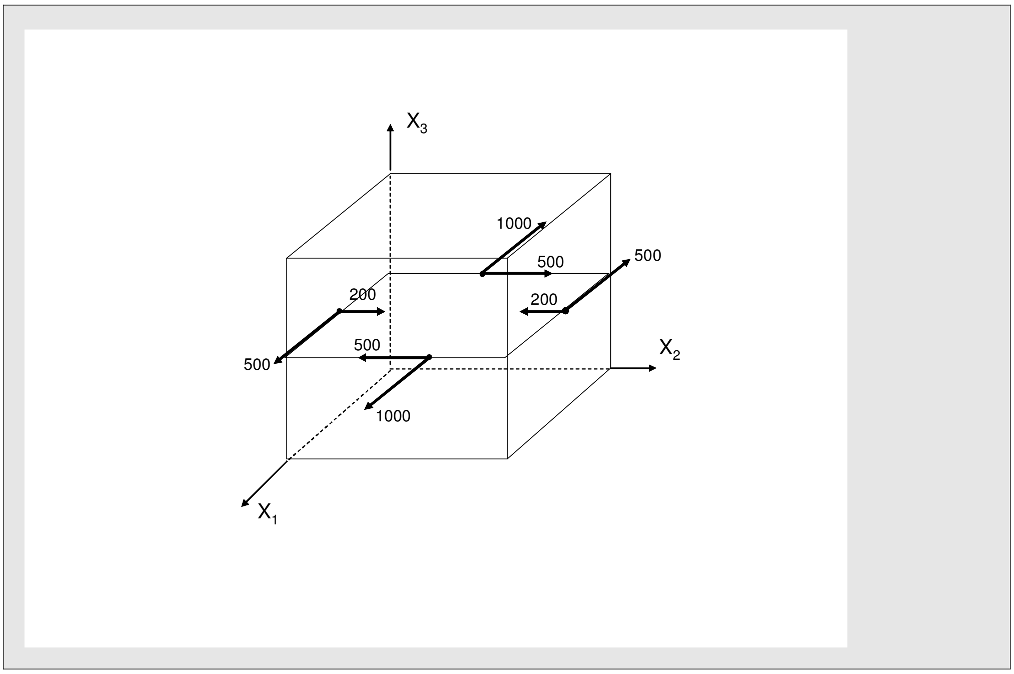
- **Punto 5**



Esercizio n. 5

Si consideri un punto P interno al corpo B, e si assegni in P la seguente matrice delle tensioni:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1000 & 500 & 0 \\ 500 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Kg / cm^2;}$$



Si vuole conoscere le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali di tensione.

■ Soluzione:

Si cominci con l'osservare che la matrice **S** ha una riga (ed una colonna) interamente nulla, e che di conseguenza il suo determinante e' nullo. Questo implica che il termine noto dell'equazione secolare, ossia l'invariante cubico, e' anch'esso nullo. Ne segue che una radice sara' senz'altro nulla, e che l'equazione stessa si riduce ad un'equazione quadratica, di facile soluzione.

L'invariante lineare si calcola immediatamente, come traccia di **S**:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} = 800 \tag{63}$$

ed anche l'invariante quadratico non presenta difficolta':

$$I_2 = \sigma_{11}\,\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = -1000 * 200 - 500^2 = -450000 \tag{64}$$

A questo punto l'equazione secolare si scrive:

$$\sigma\,(450000 + 800\,\sigma - \sigma^2) = 0 \tag{65}$$

con soluzione immediata:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1181.02 \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= -381.025 \end{aligned} \tag{66}$$

Ottenute le radici, esse vanno sostituite, una per volta, nel sistema di equazioni (**S**-σ **I**)**l** = **0**. Ad esempio, per $\sigma = \sigma_1$ si ha:

$$\begin{aligned} -181.02\, n_1 + 500\, n_2 &= 0 \\ 500\, n_1 - 1381.02\, n_2 &= 0 \\ -1181.02\, n_3 &= 0 \end{aligned} \tag{67}$$

La terza equazione fornisce subito $n_{31} = 0$, mentre e' possibile verificare che la seconda equazione si ottiene dalla prima moltiplicata per 2.76213. Cio' significa che, come d'altronde ovvio, non si puo' certo sperare di calcolare un valore univoco e non nullo della coppia di incognite n_1, n_2. E' pero' possibile calcolare il loro rapporto, dividendo, ad esempio, la prima equazione per n_2:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{500}{181.02} \approx 2.76213 \tag{68}$$

Per ottenere i coseni direttori, non resta che normalizzare, scrivendo:

$$n_1 \rightarrow \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{500}{\sqrt{500^2 + 181.02^2}} \approx 0.940275 \tag{69}$$

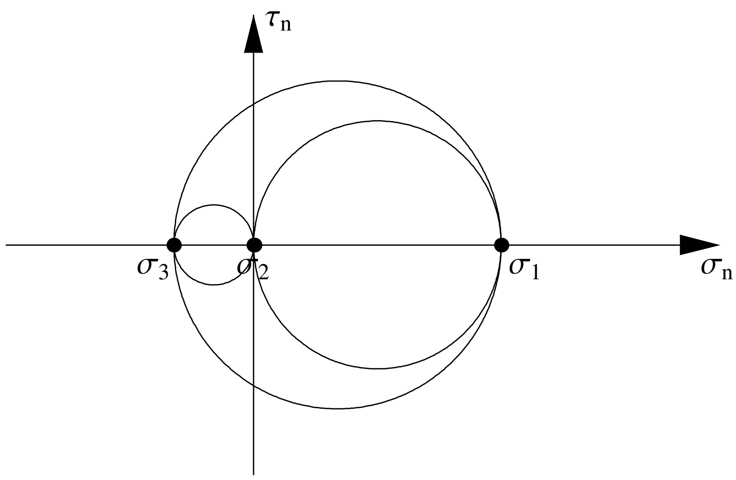
$$n_2 \rightarrow \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{181.02}{\sqrt{500^2 + 181.02^2}} \approx 0.340417 \tag{70}$$

Mentre il calcolo della direzione principale corrispondente a σ_2 = -381.025 non presenta alcuna difficolta', si noti che per la seconda direzione principale occorre risolvere il sistema (per $\sigma_3 = 0$):

$$\begin{aligned} 1000\, n_1 + 500\, n_2 &= 0 \\ 500\, n_1 - 200\, n_2 &= 0 \\ 0\, n_{33} &= 0 \end{aligned} \tag{71}$$

che potrebbe causare qualche perplessita'. Tuttavia e' immediato realizzare che le prime due equazioni sono indipendenti, avendo determinante dei coefficienti diverso da zero, e pertanto ammettono solo la soluzione nulla. Dalla terza scompare ogni traccia di n_3 , che pertanto puo' essere assunta arbitraria. Ne segue, normalizzando, la soluzione (0,0,1).

Nota - Dalla Figura 2 risulta evidente che le tensioni giacciono tutte nel piano $x_1\, x_2$. Cio' e' caratteristico dei cosiddetti *stati piani di tensione*. I cerchi principali di Mohr sono riportati in seguito:



Esercizio n. 6

Si consideri un punto P interno al corpo B, e si assegni in P la seguente matrice delle tensioni:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 10 & 20 & 40 \\ 20 & 40 & 105 \end{pmatrix} \mathbf{Kg/cm^2};$$

Si vuole conoscere le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali di tensione.

■ Soluzione:

Si cominci con l'osservare che la matrice **S** ha due righe chiaramente linearmente dipendenti, poiche' una e' il doppio dell'altra, e che di conseguenza il suo determinante e' nullo. Questo implica che il termine noto dell'equazione secolare, ossia l'invariante cubico, e' anch'esso nullo. Ne segue che una radice sara' senz'altro nulla, e che l'equazione stessa si riduce ad un'equazione quadratica, di facile soluzione.

L'invariante lineare si calcola immediatamente, come traccia di **S**:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 130 \tag{72}$$

ed anche l'invariante quadratico non presenta difficolta':

$$I_2 = \sigma_{11}\,\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = -1000 * 200 - 500^2 = 625 \tag{73}$$

A questo punto l'equazione secolare si scrive:

$$-\sigma^3 + 130\,\sigma^2 - 625\,\sigma = 0 \tag{74}$$

con soluzione immediata:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 125 \\ \sigma_2 &= 5 \\ \sigma_3 &= 0 \end{aligned} \tag{75}$$

Ottenute le radici, esse vanno sostituite, una per volta, nel sistema di equazioni ($\mathbf{S}$-σ $\mathbf{I}$)$\mathbf{l}$ = $\mathbf{0}$. Ad esempio, per $\sigma = \sigma_1$ si ha:

$$\begin{aligned} -120\,n_1 + 10\,n_2 + 20\,n_3 &= 0 \\ 10\,n_1 - 105\,n_2 + 40\,n_3 &= 0 \\ 20\,n_1 + 40\,n_2 - 20\,n_3 &= 0 \end{aligned} \tag{76}$$

e dividendo per n_3 :

$$\begin{aligned} -120\,\frac{n_1}{n_3} + 10\,\frac{n_2}{n_3} &= -20 \\ 10\,\frac{n_1}{n_3} - 105\,\frac{n_2}{n_3} &= -40 \\ 20\,\frac{n_1}{n_3} + 40\,\frac{n_2}{n_3} &= 20 \end{aligned} \tag{77}$$

Le prime due equazioni forniscono, con un metodo di sostituzione,

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{1}{5};\ \frac{n_2}{n_3} = \frac{2}{5} \tag{78}$$

Una soluzione non normalizzata e' quindi $n^T = (1, 2, 5)$. Per ottenere i coseni direttori, non resta che normalizzare, scrivendo:

$$n_1 \to \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx 0.182574 \tag{79}$$

$$n_2 \to \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx 0.365148 \tag{80}$$

$$n_3 \to \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{5}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx 0.912871 \tag{81}$$

La seconda direzione principale, corrispondente alla tensione principale $\sigma_2 = 5$, si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{aligned} &10\, n_2 + 20\, n_3 = 0 \\ &10\, n_1 + 15\, n_2 + 40\, n_3 = 0 \\ &20\, n_1 + 40\, n_2 + 100\, n_3 = 0 \end{aligned} \tag{82}$$

ossia, dividendo per n_3:

$$\begin{aligned} &\frac{n_2}{n_3} = -2 \\ &2\,\frac{n_1}{n_3} + 3\,\frac{n_2}{n_3} = -8 \\ &\frac{n_1}{n_3} + 2\,\frac{n_2}{n_3} = -5 \end{aligned} \tag{83}$$

con soluzione:

$$\frac{n_1}{n_3} = -1; \ \frac{n_2}{n_3} = -2 \tag{84}$$

Una soluzione non normalizzata e' quindi $n^T = (-1, -2, 1)$. Per ottenere i coseni direttori, non resta che normalizzare, scrivendo:

$$n_1 \to \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + 2^2 + 1}} \approx -0.408248 \tag{85}$$

$$n_2 \to \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx -0.816496 \tag{86}$$

$$n_3 \to \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} \approx 0.408248 \tag{87}$$

Infine, la direzione principale corrispondente a $\sigma_3 = 0$ si ottiene dalla soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} &5\, n_1 + 10\, n_2 + 20\, n_3 = 0 \\ &10\, n_1 + 20\, n_2 + 40\, n_3 = 0 \\ &20\, n_1 + 40\, n_2 + 105\, n_3 = 0 \end{aligned} \tag{88}$$

Se si cerca di utilizzare lo stesso approccio delle altre due direzioni principali, so ottiene il sistema:

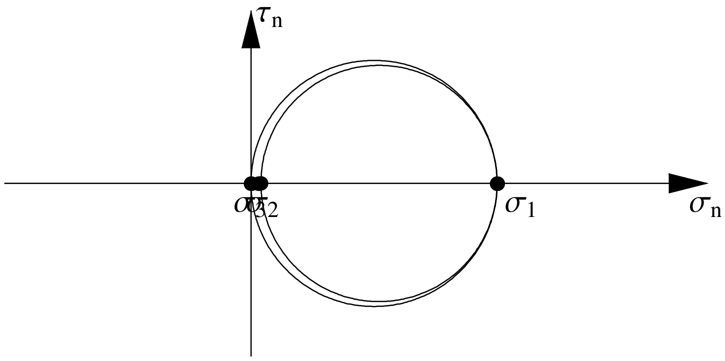
$$\begin{aligned} &\frac{n_1}{n_3} + 2\,\frac{n_2}{n_3} = -4 \\ &\frac{n_1}{n_3} + 2\,\frac{n_2}{n_3} = -\frac{105}{20} \end{aligned} \tag{89}$$

che non ha soluzioni. Ne segue che $n_3 = 0$, e che conseguentemente:

$$\frac{n_1}{n_2} = -2 \qquad (90)$$

Una soluzione non normalizzata, in definitiva, e' $n^T = (-2,1,0)$, la cui normalizzazione si lascia come esercizio.

I cerchi principali di Mohr sono riportati in seguito, anche se il cerchio piu' piccolo e' scarsamente visibile.



Esercizio n. 7

Si consideri un punto P interno al corpo B, e si assegni in P la seguente matrice delle tensioni:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{Kg / cm^2};$$

Si vuole conoscere le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali di tensione.

■ Soluzione:

Si cominci con l'osservare che la matrice **S** ha la prima riga e la prima colonna in cui l'unica entrata non nulla e' sulla diagonale principale. Ne segue che una tensione principale sara' sicuramente pari ad 1, mentre le altre due radici dell'equazione secolare possono ottenersi subito, giungendo alle tre tensioni:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 6 \\ \sigma_2 &= 4 \\ \sigma_3 &= 1 \end{aligned} \qquad (91)$$

Ottenute le radici, esse vanno sostituite, una per volta, nel sistema di equazioni $(\mathbf{S}-\sigma\,\mathbf{I})\mathbf{l} = \mathbf{0}$. Per $\sigma = \sigma_1 = 6$ si ha:

$$\begin{aligned} -5\, n_1 &= 0 \\ -n_2 + n_3 &= 0 \\ n_2 - n_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (92)$$

che ha ovviamente la soluzione $n^T = (0,1,1)$

Per ottenere i coseni direttori, non resta che normalizzare, scrivendo:

$$n_2 \to \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{93}$$

$$n_3 \to \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{94}$$

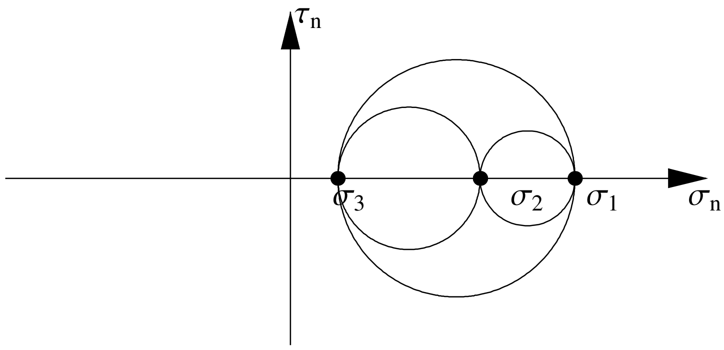
Per la seconda direzione principale occorre risolvere il sistema (per $\sigma_2 = 4$):

$$\begin{aligned} -3\, n_1 &= 0 \\ n_2 + n_3 &= 0 \\ n_2 + n_3 &= 0 \end{aligned} \tag{95}$$

con soluzione $n^T = (0,-1,1)$. Infine,. in corrispondenza della terza radice si ha il sistema:

$$\begin{aligned} 0\, n_1 &= 0 \\ 4\, n_2 + n_3 &= 0 \\ n_2 + 4\, n_3 &= 0 \end{aligned} \tag{96}$$

con soluzione $n^T = (1,0,0)$. Cio' indica che l'asse X_1 era un asse principale. Infne, i cerchi principali di Mohr mostrano l'assenza di stati tensionali puramente tangenziali:



Esercizio n. 8

Si consideri un punto P interno al corpo B, e si assegni in P la seguente matrice delle tensioni:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix};$$

che, come vedremo in seguito, assume importanza fondamentale in teoria della trave.

Si avra':

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{33} \\ I_2 &= -\sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 = -\tau_3^2 \\ I_3 &= 0 \end{aligned} \tag{97}$$

da cui subito puo' notarsi che lo stato tensionale e' piano. L'equazione secolare si scrive:

$$-\sigma \left(\sigma^2 - \sigma_{33}\, \sigma - \tau_3^2\right) = 0 \tag{98}$$

con una radice nulla, e due radici fornite da:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{33} \pm \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right) \tag{99}$$

La direzione principale corrispondente alla tensione $\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right)$ sara' fornita dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\left(\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right) n_{11} + \sigma_{13}\, n_{31} = 0\\
&-\frac{1}{2}\left(\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right) n_{21} + \sigma_{23}\, n_{31} = 0\\
&\left(\sigma_{13} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right)\right) n_{11} + \sigma_{23}\, n_{21} + \sigma_{33}\, n_{31} = 0
\end{aligned} \tag{100}$$

Dividendo le prime due equazioni per n_{31} si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right)\left(\frac{n_{11}}{n_{31}}\right) = \sigma_{13}\\
&\frac{1}{2}\left(\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right)\left(\frac{n_{21}}{n_{31}}\right) = \sigma_{23}
\end{aligned} \tag{101}$$

da cui subito:

$$\begin{aligned}
&\frac{n_{11}}{n_{31}} = \frac{2\,\sigma_{13}}{\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}}\\
&\frac{n_{21}}{n_{31}} = \frac{2\,\sigma_{23}}{\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}}
\end{aligned} \tag{102}$$

Ne segue che la prima direzione principale e' identificata da:

$$n_I = \left(2\,\sigma_{13},\ 2\,\sigma_{23},\ \sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right) \tag{103}$$

da normalizzare nel solito modo.

La direzione principale corrispondente alla tensione $\sigma_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right)$ sara' fornita dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\left(\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right) n_{12} + \sigma_{13}\, n_{32} = 0\\
&-\frac{1}{2}\left(\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right) n_{22} + \sigma_{23}\, n_{32} = 0\\
&\left(\sigma_{13} - \frac{1}{2}\left(\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right)\right) n_{12} + \sigma_{23}\, n_{22} + \sigma_{33}\, n_{32} = 0
\end{aligned} \tag{104}$$

Dividendo le prime due equazioni per n_{31} si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right)\left(\frac{n_{12}}{n_{32}}\right) = \sigma_{13}\\
&\frac{1}{2}\left(\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right)\left(\frac{n_{22}}{n_{32}}\right) = \sigma_{23}
\end{aligned} \tag{105}$$

da cui subito:

$$\begin{aligned}
&\frac{n_{12}}{n_{32}} = \frac{2\,\sigma_{13}}{\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}}\\
&\frac{n_{22}}{n_{32}} = \frac{2\,\sigma_{23}}{\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}}
\end{aligned} \tag{106}$$

Ne segue che la prima direzione principale e' identificata da:

$$n_{II} = \left(2\,\sigma_{13},\ 2\,\sigma_{23},\ \sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4\,\tau_3^2}\right) \qquad (107)$$

da normalizzare nel solito modo.

La direzione principale corrispondente alla tensione $\sigma_3 = 0$ sara' fornita dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{aligned} &\sigma_{13}\,n_{33} = 0 \\ &\sigma_{23}\,n_{33} = 0 \\ &\sigma_{13}\,n_{13} + \sigma_{23}\,n_{23} + \sigma_{33}\,n_{33} = 0 \end{aligned} \qquad (108)$$

Se almeno una delle due tensioni tangenziali e' diversada zero, allora $n_{33} = 0$, e dalla terza equazione:

$$\sigma_{13}\,n_{13} + \sigma_{23}\,n_{23} = 0 \qquad (109)$$

da cui subito:

$$n_{III} = (\sigma_{23},\ -\sigma_{13},\ 0) \qquad (110)$$

da normalizzare nel solito modo. Se invece le due tensioni tangenziali sono ambedue nulle, allora sara', banalmente $n_{III} = (0, 0, 1)$.

Ovviamente, *Mathematica* conferma quanto calcolato:

FullSimplify[Eigensystem[S]]

$$\left\{\left\{0,\ \frac{1}{2}\left(\sigma_{33} - \sqrt{4\,(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) + \sigma_{33}^2}\right),\ \frac{1}{2}\left(\sigma_{33} + \sqrt{4\,(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) + \sigma_{33}^2}\right)\right\},\right.$$
$$\left\{\left\{-\frac{\sigma_{23}}{\sigma_{13}},\ 1,\ 0\right\},\ \left\{\frac{2\,\sigma_{13}}{\sigma_{33} - \sqrt{4\,(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) + \sigma_{33}^2}},\ \frac{2\,\sigma_{23}}{\sigma_{33} - \sqrt{4\,(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) + \sigma_{33}^2}},\ 1\right\},\right.$$
$$\left.\left.\left\{\frac{2\,\sigma_{13}}{\sigma_{33} + \sqrt{4\,(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) + \sigma_{33}^2}},\ \frac{2\,\sigma_{23}}{\sigma_{33} + \sqrt{4\,(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) + \sigma_{33}^2}},\ 1\right\}\right\}\right\}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 7.5 \\ 10 & 7.5 & -13 \end{pmatrix};$$

FullSimplify[Eigensystem[S]]

```
{{-20.589, 7.589, 0.}, {{-0.415171, -0.311378, 0.854796},
  {-0.683837, -0.512878, -0.518964}, {0.6, -0.8, 0.}}}
```

R = %[[2]]

```
{{-0.415171, -0.311378, 0.854796},
 {-0.683837, -0.512878, -0.518964}, {0.6, -0.8, 0.}}
```

R.S.Transpose[R]

```
{{-20.589, 0., 0.}, {0., 7.589, 0.}, {0., 0., 0.}}
```

Esercizio n. 9

Si consideri un punto P interno al corpo B, e si assegni in P la seguente matrice delle tensioni:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 105 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 75 \end{pmatrix} \mathbf{Kg / cm^2};$$

Si vuole conoscere le tensioni principali e le corrispondenti direzioni principali di tensione, utilizzando la teoria dei cerchi di Mohr

■ Soluzione:

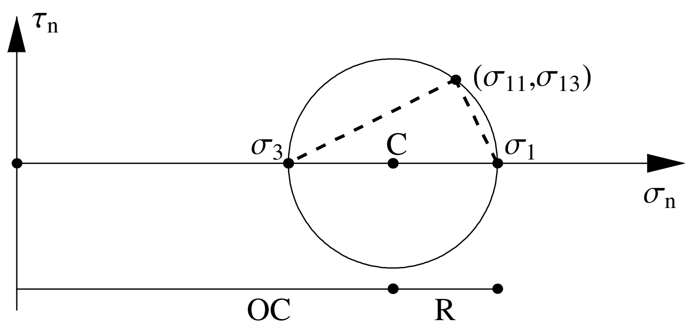
Dall'esame dello stato tensionale risulta evidente che una delle tensioni principali e' $\sigma_2 = 20\text{Kg cm}^{-2}$, e che la corrispondente direzione principale viene a coincidere con l'asse coordinato X_2. E' allora opportuno studiare, con la teoria di Mohr, il fascio di piani che si appoggiano all'asse X_2, poiche' a tale fascio appartengono gli altri due piani principali. Il relativo cerchio di Mohr e' centrato nel punto C = $((\sigma_{11} + \sigma_{33})/2, 0)$ = (90,0), ed ha raggio:

$$R = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2}{4} + \sigma_{13}^2} = \sqrt{\frac{(105 - 75)^2}{4} + 20^2} = 25 \qquad (111)$$

Ne seguono subito, dall'esame del cerchio di Mohr, i valori delle due tensioni principali:

$$\sigma_1 = OC + R = 90 + 25 = 115 \text{ Kg / cm}^2 \qquad (112)$$

$$\sigma_3 = OC - R = 90 - 25 = 65 \text{ Kg / cm}^2 \qquad (113)$$



Funzioni Mathematica

In questa sezione di approfondimento vengono presentate alcune semplici funzioni *Mathematica* per il calcolo dei tre invarianti di tensione, delle tensioni principali, delle direzioni principali di tensione, e per il tracciamento dei cerchi principali di Mohr.
Le prime tre funzioni accettano come argomento la matrice S delle tensioni, e restituiscono i tre invarianti lineare, quadratico e cubico, respettivamente, e sono cosi' semplici da non abbisognare di alcuna spiegazione. La funzione PrincipalStress[S_] fa uso del comando Eigenvalues[S], che calcola gli autovalori della matrice S, poi del comando Sort, che ordina gli autovalori in senso crescente, ed infine del comando Reverse, che ordina gli autovalori in senso decrescente. La funzione PrincipalDirectionsStress[S_], infine, calcola gli autovettori della matrice S attraverso il comando Eigenvectors[S], restituendo la matrice PDirections, che contiene in colonna gli autovettori non normalizzati. Si fornsice poi la routine PrincipalMohr-Circles[σ1_,σ2_,σ3_], che accetta come argomento le tre tensioni principali, e traccia i corrispondenti cerchi di Mohr.

Si ricordi che queste funzioni vanno preventivamente valutate, prima di poter essere utilizzate:

```
<< Graphics`Arrow`;

FirstInvariant[S_] :=
 Module[{I1},
  I1 = S[[1, 1]] + S[[2, 2]] + S[[3, 3]];
  Return[I1]]

SecondInvariant[S_] :=
 Module[{I2},
  I2 = S[[1, 1]] S[[2, 2]] + S[[2, 2]] S[[3, 3]] + S[[1, 1]] S[[3, 3]] -
    S[[1, 2]] S[[1, 2]] - S[[1, 3]] S[[1, 3]] - S[[2, 3]] S[[2, 3]];
  Return[
   I2]]

ThirdInvariant[S_] :=
 Module[{I3},
  I3 = Det[S];
  Return[I3]]

PrincipalStress[S_] :=
 Module[{},
  Spectrum = Reverse[Sort[N[Eigenvalues[S]]]];
  Return[Spectrum]]

PrincipalDirectionsStress[S_] :=
 Module[{},
  PDirections = N[Eigenvectors[S]];
  Return[PDirections]]
```

```
PrincipalMohrCircles[σ1_, σ2_, σ3_] :=
 Module[{r3, C3, r2, C2, r1, C1, σaxis, τaxis, Cerchio1,
   Cerchio2, Cerchio3, LabelσAxis, LabelτAxis, puntos1,
   puntos2, puntos3, Labelσ1, Labelσ2, Labelσ3, Origin},
  $TextStyle = {FontFamily -> "Times", FontSize -> 12};
  r3 = (σ1 - σ2) / 2; C3 = σ2 + r3; r2 = (σ1 - σ3) / 2;
  C2 = σ3 + r2; r1 = (σ2 - σ3) / 2; C1 = σ3 + r1;
  σaxis = Arrow[{- (C3 + r3), 0}, {1.25 (C3 + 2 r3), 0}];
  τaxis = Arrow[{0, -1.4 (σ1 - σ3) / 2}, {0, 1.4 (σ1 - σ3) / 2}];
Cerchio1 = Circle[{C1, 0}, r1, {0, 2 π}];
  Cerchio2 = Circle[{C2, 0}, r2, {0, 2 π}];
  Cerchio3 = Circle[{C3, 0}, r3, {0, 2 π}];
LabelσAxis = Text["σn", {1.25 (C3 + 2 r3), - (C3 + 2 r3) / 20}];
  LabelτAxis = Text["τn", {1.4 (σ1 - σ3) / 18, 1.4 (σ1 - σ3) / 2}];
  puntos1 = Point[{σ1, 0}]; puntos2 = Point[{σ2, 0}];
  puntos3 = Point[{σ3, 0}];
  Labelσ1 = Text["σ1", {1.1 σ1, - (C3 + 2 r3) / 20}];
  Labelσ2 = Text["σ2", {1.25 σ2, - (C3 + 2 r3) / 20}];
  Labelσ3 = Text["σ3", {1.25 σ3, - (C3 + 2 r3) / 20}];
  Origin = Point[{4, 0}];
Show[
   Graphics[{σaxis, τaxis, Cerchio1, Cerchio2, Cerchio3, Labelσ1,
     Labelσ2, Labelσ3, LabelσAxis, LabelτAxis, Thickness[0.005],
     Dashing[{0.02, 0.04}], PointSize[0.02], puntos1, puntos2,
     puntos3, Origin}, AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> All
       ]];
  Return[]]
```

— General::spell1 : Possible spelling error: new symbol name "τaxis" is similar to existing symbol "σaxis". More…

— General::spell1 : Possible spelling error: new symbol name "LabelτAxis" is similar to existing symbol "LabelσAxis". More…

■ L'utilizzo delle funzioni *Mathematica* per lo studio di uno stato tensionale

Si assegna una generica matrice delle tensioni:

$$S = \begin{pmatrix} 75 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 105 \end{pmatrix}$$

```
{{75, 0, 20}, {0, 20, 0}, {20, 0, 105}}
```

Si chiamano le tre funzioni per il calcolo degli invarianti, e la funzione per la deduzione delle tre tensioni principali:

```
FirstInvariant[S]
```

```
130
```

```
SecondInvariant[S]
```

```
2325
```

```
ThirdInvariant[S]
```

```
2500
```

```
PrincipalStress[S]
```

```
{115., 65., 20.}
```

Si estraggono le tre tensioni principali dal vettore Spectrum, che e' stato restituito dalla routine PrincipalStress:

```
σ1 = Spectrum[[1]]; σ2 = Spectrum[[2]]; σ3 = Spectrum[[3]];
```

Si calcolano le direzioni principali:

```
PrincipalDirectionsStress[S]
```

```
{{0.192582, 0., 1.}, {0., 1., 0.}, {-5.19258, 0., 1.}}
```

Si estraggono le tre direzioni principali dalla matrice PDirections, che e' stata restituita dalla routine PrincipalStress:

```
n1 = PDirections[[1]]; n2 = PDirections[[2]]; n3 = PDirections[[3]];
```

Poiche' *Mathematica* non normalizza le soluzione, si provvede ad imporre che la lunghezza delle autosoluzioni sia unitaria:

```
n1 = n1 / Sqrt[Sum[n1[[i]]^2, {i, 1, 3}]];
n2 = n2 / Sqrt[Sum[n2[[i]]^2, {i, 1, 3}]];
n3 = n3 / Sqrt[Sum[n3[[i]]^2, {i, 1, 3}]];
```

Si costruisce la matrice modale:

```
Nn = {n1, n2, n3}
```

```
{{0.189108, 0., 0.981956}, {0., 1., 0.}, {-0.981956, 0., 0.189108}}
```

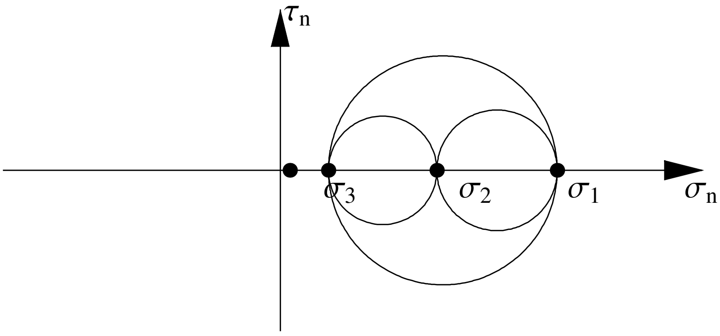
Si controlla che la matrice modale sia ortogonale:

```
Det[Nn]
```

```
1.
```

Infine, si tracciano i tre cerchi principali di Mohr:

```
PrincipalMohrCircles[σ1, σ2, σ3]
```



- **Disegno Mathematica**