Complementi 9 - Le soluzioni di De Saint-Venant

[Ultima revisione: 22 gennaio 2009]

In questa lezione si illustra un metodo per ottenere le soluzioni per il problema debole di De Saint-Venant. A tal proposito, si e' visto che solo sei caratteristiche della sollecitazione esterna possono essere arbitrariamente assegnate, ad esempio le tre forze risultanti ed i tre momenti risultanti sulla base di sinistra Σ_1 . Le altre sei c.s.e. sulla base di destra sono automaticamente tratte imponendo che la trave sia in equilibrio. Si puo' quindi che la classe di soluzioni $\mathbf{K}$ del problema debole di De Saint-Venant dipende da sei parametri:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}\left(F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, F_3^{(1)}, \mathcal{M}_1^{(1)}, \mathcal{M}_2^{(1)}, \mathcal{M}_3^{(1)}\right) \tag{1}$$

E' opportuno per cio' che segue distinguere due sottoclassi di soluzioni, la prima caratterizzata dall'assenza delle due forze di taglio $F_1^{(1)}$ e $F_2^{(2)}$, la seconda definita dalla presenza delle sole forze di taglio. Si indichera' allora con $\boldsymbol{K}_1$ la sottoclasse delle soluzioni del *problema di estensione-flessione-torsione*, per cui:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}\left(0, 0, F_3^{(1)}, \mathcal{M}_1^{(1)}, \mathcal{M}_2^{(1)}, \mathcal{M}_3^{(1)}\right) \tag{2}$$

e con $\boldsymbol{K}_2$ la sottoclasse delle soluzioni del *problema di taglio*, per cui:

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}\left(F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, 0, 0, 0, 0\right) \tag{3}$$

Infine, si definisce *campo di spostamento equilibrato* un campo di spostamenti **u** che conduce ad una distribuzione di tensioni equilibrate, ossia soddisfacenti alle equazioni indefinite dell'equilibrio (in presenza di forze di massa nulle):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} = 0 \tag{4}$$

Il teorema di Iesan

Si dimostra preliminarmente il seguente:

Lemma (Gurtin 1972, pag.133) - Se **u** e' una terna di spostamenti che soddisfa le equazioni di Cauchy-Navier in presenza di forze di massa nulle, anche il campo di spostamenti:

$$\mathbf{u}_{,k} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \tag{5}$$

soddisfa le equazioni di Cauchy-Navier.

Dim.- Per ipotesi, la terna di spostamenti soddisfa le equazioni di Cauchy-Navier in presenza di forze di massa nulle, e quindi:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda+\mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \qquad (6)$$

da cui anche:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}\right) + (\lambda+\mu) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \qquad (7)$$

ed infine:

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) + (\lambda+\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) = 0 \qquad (8)$$

Si puo' ora dimostrare un importante risultato dovuto a Dorin Iesan, secondo cui se un campo di spostamenti **u** e' equilibrato e conduce a tensioni nulle sul mantello laterale della trave, allora anche la sua derivata rispetto all'asse x_3 e' un campo di spostamenti equilibrato, che conduce a tensioni nulle sul mantello laterale, e a ben precise caratteristiche della sollecitazione esterna. Si ha cosi' il:

Teorema di D.Iesan (1986) - Sia **u** un campo di spostamenti equilibrato in presenza di forze di massa nulla, e tale che le corrispondenti tensioni si annullino sul mantello laterale:

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{u}) = 0 \qquad (9)$$

su Π. Sia poi $\boldsymbol{u}^*$ il campo di spostamenti ottenuto derivando **u** rispetto ad x_3 :

$$\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Il campo di spostamenti $\boldsymbol{u}^*$ e' equilibrato, le tensioni da esso derivate sono nulle sul mantello:

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{u}^*) = 0 \qquad (11)$$

e le corrispondenti caratteristiche della sollecitazione esterna sono date da:

$$F_1^{(1)}(\mathbf{u}^*) = 0;\ F_2^{(1)}(\mathbf{u}^*) = 0;\ F_3^{(1)}(\mathbf{u}^*) = 0; \qquad (12)$$

$$\mathcal{M}_1^{(1)}(\mathbf{u}^*) = F_2^{(1)}(\mathbf{u});\ \mathcal{M}_2^{(1)}(\mathbf{u}^*) = -F_1^{(1)}(\mathbf{u});\ \mathcal{M}_3^{(1)}(\mathbf{u}^*) = 0; \qquad (13)$$

Dim. - Che il campo di spostamento $\boldsymbol{u}^*$ sia equilibrato segue dal lemma di Gurtin. Inoltre sara':

$$\sigma_{3i}(\mathbf{u}^*) = \frac{\partial \sigma_{3i}(\mathbf{u})}{\partial x_3} \qquad (14)$$

e quindi, per le equazioni indefinite dell'equilibrio:

$$\sigma_{3i}(\mathbf{u}^*) = \frac{\partial \sigma_{3i}(\mathbf{u})}{\partial x_3} = -\frac{\partial \sigma_{1i}(\mathbf{u})}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{2i}(\mathbf{u})}{\partial x_2} \qquad (15)$$

Le (15) della Lezione precedente porgono, per il teorema della divergenza:

$$
\begin{aligned}
&F_1^{(1)}(\mathbf{u}^*) = -\int_{\Sigma_1} \sigma_{13}(\mathbf{u}^*)\, dA = \\
&\quad \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \sigma_{11}(\mathbf{u})}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}(\mathbf{u})}{\partial x_2} \right) dA = \int_{\Gamma} (\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2)\, ds = 0
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_2^{(1)}(\mathbf{u}^*) = -\int_{\Sigma_1} \sigma_{23}(\mathbf{u}^*)\, dA = \\
&\quad \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \sigma_{12}(\mathbf{u})}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}(\mathbf{u})}{\partial x_2} \right) dA = \int_{\Gamma} (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2)\, ds = 0
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_3^{(1)}(\mathbf{u}^*) = -\int_{\Sigma_1} \sigma_{33}(\mathbf{u}^*)\, dA = \\
&\quad \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \sigma_{13}(\mathbf{u})}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}(\mathbf{u})}{\partial x_2} \right) dA = \int_{\Gamma} (\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2)\, ds = 0
\end{aligned} \tag{18}
$$

Sara' poi possibile scrivere:

$$
\begin{aligned}
&x_2\, \sigma_{33}(\mathbf{u}^*) = -x_2 \left(\frac{\partial \sigma_{13}(\mathbf{u})}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}(\mathbf{u})}{\partial x_2} \right) = \\
&\quad -\frac{\partial (x_2\, \sigma_{13}(\mathbf{u}))}{\partial x_1} - \frac{\partial (x_2\, \sigma_{23}(\mathbf{u}))}{\partial x_2} + \sigma_{23}(\mathbf{u})
\end{aligned} \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1\, \sigma_{33}(\mathbf{u}^*) = -x_1 \left(\frac{\partial \sigma_{13}(\mathbf{u})}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}(\mathbf{u})}{\partial x_2} \right) = \\
&\quad -\frac{\partial (x_1\, \sigma_{13}(\mathbf{u}))}{\partial x_1} - \frac{\partial (x_1\, \sigma_{23}(\mathbf{u}))}{\partial x_2} + \sigma_{13}(\mathbf{u})
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1\, \sigma_{32}(\mathbf{u}^*) - x_2\, \sigma_{31}(\mathbf{u}^*) = \\
&\quad -x_1 \left(\frac{\partial \sigma_{12}(\mathbf{u})}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}(\mathbf{u})}{\partial x_2} \right) + x_2 \left(\frac{\partial \sigma_{11}(\mathbf{u})}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}(\mathbf{u})}{\partial x_2} \right) = \\
&\quad -\frac{\partial (x_1\, \sigma_{12}(\mathbf{u}))}{\partial x_1} - \frac{\partial (x_1\, \sigma_{22}(\mathbf{u}))}{\partial x_2} + \sigma_{12}(\mathbf{u}) + \\
&\quad \frac{\partial (x_2\, \sigma_{11}(\mathbf{u}))}{\partial x_1} + \frac{\partial (x_2\, \sigma_{21}(\mathbf{u}))}{\partial x_2} - \sigma_{21}(\mathbf{u})
\end{aligned} \tag{21}
$$

e le (16) della Lezione precedente forniscono, applicando ancora una volta il teorema della divergenza:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_1^{(1)}(\mathbf{u}^*) = -\int_{\Sigma_1} x_2\, \sigma_{33}(\mathbf{u}^*)\, dA = \\
&\quad \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial (x_2\, \sigma_{13}(\mathbf{u}))}{\partial x_1} + \frac{\partial (x_2\, \sigma_{23}(\mathbf{u}))}{\partial x_2} - \sigma_{23}(\mathbf{u}) \right) dA = \\
&\quad \int_{\Gamma} (x_2\, \sigma_{13}(\mathbf{u})\, n_1 + x_2\, \sigma_{23}(\mathbf{u})\, n_2)\, ds - \int_{\Sigma_1} \sigma_{23}(\mathbf{u})\, dA = F_2^{(1)}(\mathbf{u})
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_2^{(1)}(\mathbf{u}^*) = \int_{\Sigma_1} x_1\, \sigma_{33}(\mathbf{u}^*)\, dA = \\
&\quad -\int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial (x_1\, \sigma_{13}(\mathbf{u}))}{\partial x_1} + \frac{\partial (x_1\, \sigma_{23}(\mathbf{u}))}{\partial x_2} - \sigma_{13}(\mathbf{u}) \right) dA = \\
&\quad -\int_{\Gamma} (x_1\, \sigma_{13}(\mathbf{u})\, n_1 + x_1\, \sigma_{23}(\mathbf{u})\, n_2)\, ds + \int_{\Sigma_1} \sigma_{13}(\mathbf{u})\, dA = -F_1^{(1)}(\mathbf{u})
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$\mathcal{M}_3^{(1)}(\mathbf{u}^*) = \int_{\Sigma_1} (x_1\sigma_{32}(\mathbf{u}^*) - x_2\sigma_{31}(\mathbf{u}^*))\, dA =$$
$$\int_{\Sigma_1} \left(-\frac{\partial(x_1\sigma_{12}(\mathbf{u}))}{\partial x_1} - \frac{\partial(x_1\sigma_{22}(\mathbf{u}))}{\partial x_2} + \frac{\partial(x_2\sigma_{11}(\mathbf{u}))}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_2\sigma_{21}(\mathbf{u}))}{\partial x_2}\right) dA =$$
$$\int_{\Gamma} (-x_1\sigma_{12}(\mathbf{u})n_1 - x_1\sigma_{22}(\mathbf{u})n_2 + x_2\sigma_{11}(\mathbf{u})n_1 + x_2\sigma_{21}(\mathbf{u})n_2)\, ds =$$
$$0$$

∎

Il teorema appena dimostrato ha due immediate conseguenze:

Corollario 1 - Se **u** e' soluzione del problema di estensione-flessione-torsione, ossia se $\mathbf{u} \in \boldsymbol{K}_1$, allora $F_1^{(1)} = 0$ e $F_2^{(2)} = 0$. Ne segue, per il teorema di Iesan, che il corrispondente campo $\boldsymbol{u}^* = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_3}$ fornisce caratteristiche della sollecitazione esterna nulle:

$$F_i^{(1)}(\mathbf{u}^*) = 0;\ \mathcal{M}_i^{(1)}(\mathbf{u}^*) = 0; \tag{25}$$

per i = 1,2,3.

Corollario 2 - Se **u** e' soluzione del problema di taglio, ossia se $\mathbf{u} \in \boldsymbol{K}_2$, allora il corrispondente campo $\boldsymbol{u}^* = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_3}$ e' soluzione di un problema di estensione-flessione-torsione in cui $F_3^{(1)}(\boldsymbol{u}^*) = 0$, $\mathcal{M}_1^{(1)}(\mathbf{u}^*) = F_2^{(1)}(\boldsymbol{u})$, $\mathcal{M}_2^{(1)}(\mathbf{u}^*) = -F_2^{(1)}(\boldsymbol{u})$, ed $\mathcal{M}_3^{(1)}(\mathbf{u}^*) = 0$. In simboli:

$$u \in \mathbf{K}_2(F_1^{(1)}, F_2^{(1)}) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_3} \in \mathbf{K}_1(0, F_2^{(1)}, -F_1^{(1)}, 0) \tag{26}$$

Dai due corollari discende anche:

Corollario 3 - Sia **u** un campo di spostamenti equilibrato in presenza di forze di massa nulla, e tale che le corrispondenti tensioni si annullino sul mantello laterale:

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{u}) = 0 \tag{27}$$

su Π. Qualsiasi campo di spostamenti ottenuto derivando **u** rispetto ad x_3 piu' di una volta fornisce caratteristiche della sollecitazione esterna nulle:

$$F_i^{(1)}\left(\frac{\partial^n \mathbf{u}^*}{\partial x_3^n}\right) = 0;\ \mathcal{M}_i^{(1)}\left(\frac{\partial^n \mathbf{u}^*}{\partial x_3^n}\right) = 0; \tag{28}$$

per qualsiasi $n \geq 2$.

La costruzione delle soluzioni relative all'estensione-flessione-torsione

Si inizi a ricercare le soluzioni del problema di estensione-flessione-torsione, ed a tal fine si osservi che qualsiasi moto rigido e' soluzione del problema, e per esso si ottengono caratteristiche della sollecitazione esterna nulle. Inoltre, come indicato dal Corollario 1, se **u** e' soluzione del problema, il campo di spostamento $\boldsymbol{u}^* = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_3}$ conduce anch'esso a c.s.e. nulle. Sembra quindi naturale partire da un campo di spostamenti rigidi $\boldsymbol{u}^*$, e da esso cercare di risalire ad **u**. Si ponga allora:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{c} + \mathbf{d} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \tag{29}$$

con **c** e **d** vettori costanti. In esteso si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= c_1 + d_2\, x_3 - d_3\, x_2; \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= c_2 + d_3\, x_1 - d_1\, x_3; \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= c_3 + d_1\, x_2 - d_2\, x_1; \end{aligned} \tag{30}$$

e quindi, integrando si ottiene, a meno di uno spostamento rigido:

$$u_1 = d_2 \frac{x_3^2}{2} - d_3\, x_2\, x_3 + w_1 (x_1, x_2) \tag{31}$$

$$u_2 = d_3\, x_1\, x_3 - d_1 \frac{x_3^2}{2} + w_2 (x_1, x_2) \tag{32}$$

$$u_3 = c_3\, x_3 + d_1\, x_2\, x_3 - d_2\, x_1\, x_3 + w_3 (x_1, x_2) \tag{33}$$

dove **w** e' un vettore indipendente da x_3. Le deformazioni corrispondenti possono scriversi:

$$e_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1};\; e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right);\; e_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}; \tag{34}$$

$$e_{13} = \frac{1}{2}\left(d_2\, x_3 - d_3\, x_2 - d_2\, x_3 + \frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(-d_3\, x_2 + \frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right) \tag{35}$$

$$e_{23} = \frac{1}{2}\left(d_3\, x_1 - d_1\, x_3 + d_1\, x_3 + \frac{\partial w_3}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(d_3\, x_1 + \frac{\partial w_3}{\partial x_2}\right) \tag{36}$$

$$e_{33} = c_3 + d_1\, x_2 - d_2\, x_1 \tag{37}$$

ed utilizzando le leggi di Hooke si puo' dedurre lo stato tensionale:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\,\mu\, e_{11} + \lambda\,(e_{11} + e_{22} + e_{33}) = \lambda e_{33} + 2\,\mu e_{11} + \lambda\,(e_{11} + e_{22}) = \\ &\lambda\,(c_3 + d_1\, x_2 - d_2\, x_1) + 2\,\mu \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right) \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \lambda e_{33} + 2\,\mu e_{22} + \lambda\,(e_{11} + e_{22}) = \\ &\lambda\,(c_3 + d_1\, x_2 - d_2\, x_1) + 2\,\mu \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \lambda \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right) \end{aligned} \tag{39}$$

$$\sigma_{12} = 2\mu e_{12} = \mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right) \tag{40}$$

$$\sigma_{13} = 2\mu e_{13} = \mu\left(-d_3 x_2 + \frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right) \tag{41}$$

$$\sigma_{23} = 2\mu e_{23} = \mu\left(d_3 x_1 + \frac{\partial w_3}{\partial x_2}\right) \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu)\, e_{33} + \lambda\,(e_{11} + e_{22}) = \\ &(\lambda + 2\mu)\,(c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) + \lambda\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right)\end{aligned} \tag{43}$$

Le equazioni indefinite dell'equilibrio si scrivono ora:

$$(2\mu + \lambda)\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu)\,\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2\,\partial x_1} + \mu\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} - \lambda\, d_2 = 0 \tag{44}$$

$$(2\mu + \lambda)\,\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu)\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2\,\partial x_1} + \mu\,\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1^2} + \lambda\, d_1 = 0 \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_2^2} = 0 \tag{46}$$

con le condizioni al contorno fornite dal teorema di Cauchy-Poisson (con $n_3=0$):

$$\begin{aligned}&\left(2\mu\,\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \lambda\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right)\right) n_1 + \mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right) n_2 = \\ &-\lambda\,(c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1)\, n_1\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}&\mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right) n_1 + \left(2\mu\,\frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \lambda\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right)\right) n_2 = \\ &-\lambda\,(c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1)\, n_2\end{aligned} \tag{48}$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial n} = d_3\,(x_2 n_1 - x_1 n_2) \tag{49}$$

Si puo' osservare che si sono ottenuti due distinti problemi, che e' possibile studiare separatamente.

■ Il problema piano per le componenti w_1 e w_2

Si tratta di calcolare le due componenti w_1 e w_2 soddisfacendo le equazioni differenziali (44-45), definite sulla sezione retta Σ, assieme alle condizioni ai limiti (47-48) assegnate sul contorno Γ. Per snellire la scrittura si ponga ora:

$$T_{11} = 2\mu\,\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \lambda\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right) \tag{50}$$

$$T_{12} = \mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right) \tag{51}$$

$$T_{22} = 2\mu\,\frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \lambda\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right) \tag{52}$$

in modo da poter scrivere le equazioni differenziali come:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} - \lambda d_2 = 0 \tag{53}$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \lambda d_1 = 0 \tag{54}$$

con le corrispondenti condizioni ai limiti:

$$T_{11} n_1 + T_{12} n_2 = -\lambda (c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) n_1 \tag{55}$$

$$T_{12} n_1 + T_{22} n_2 = -\lambda (c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) n_2 \tag{56}$$

Condizioni necessarie e sufficienti per risolvere questo problema e' che sia:

$$\int_\Sigma \lambda d_2 \, dA + \int_\Gamma \lambda (c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) n_1 \, ds = 0 \tag{57}$$

$$\int_\Sigma \lambda d_1 \, dA - \int_\Gamma \lambda (c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) n_2 \, ds = 0 \tag{58}$$

$$\begin{aligned} &\lambda \int_\Sigma (x_1 d_1 + x_2 d_2) \, dA - \\ &\quad \lambda \int_\Gamma (x_1 (c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) n_2 + x_2 (c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) n_1) \, ds = 0 \end{aligned} \tag{59}$$

Per il teorema della divergenza, si ha, ad esempio:

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma \lambda (c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) n_1 \, ds = \\ &\quad \int_\Sigma \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} (c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) \, dA = -\lambda \int_\Sigma d_2 \, dA \end{aligned} \tag{60}$$

e quindi la (54) e' verificata. Analogamente:

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma \lambda (c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) n_2 \, ds = \\ &\quad \int_\Sigma \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} (c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) \, dA = \lambda \int_\Sigma d_1 \, dA \end{aligned} \tag{61}$$

e quindi sono verificate anche le (55-56).

E' evidente che il problema ai limiti puo' essere risolto scegliendo:

$$T_{11} = -\lambda (c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) \tag{62}$$

$$T_{12} = 0 \tag{63}$$

$$T_{22} = -\lambda (c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) \tag{64}$$

ossia, utilizzando le (50-52):

$$2 \mu \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \right) = -\lambda (c_3 + d_1 x_2 - d_2 x_1) \tag{65}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = 0 \tag{66}$$

$$2\,\mu\,\frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \lambda\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right) = -\lambda\,(c_3 + d_1\,x_2 - d_2\,x_1) \tag{67}$$

da cui:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = -\frac{\lambda}{2\,(\lambda+\mu)}\,(c_3 + d_1\,x_2 - d_2\,x_1) = -\nu\,(c_3 + d_1\,x_2 - d_2\,x_1) \tag{68}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = 0 \tag{69}$$

avendo utilizzato la (8) della Lezione 16. Integrando si ha infine, a meno di uno spostamento rigido:

$$w_1 = -\nu\left(\frac{d_2}{2}\,(x_2^2 - x_1^2) + d_1\,x_1\,x_2 + c_3\,x_1\right) \tag{70}$$

$$w_2 = -\nu\left(\frac{d_1}{2}\,(x_2^2 - x_1^2) - d_2\,x_1\,x_2 + c_3\,x_2\right) \tag{71}$$

■ Il problema della determinazione della componente w_3

Occorre determinare la componente w_3 che sia armonica sulla sezione retta Σ:

$$\Delta w_3 = \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_2^2} = 0 \tag{72}$$

con derivata normale assegnata sul contorno Γ, e pari a:

$$\frac{\partial w_3}{\partial n} = d_3\,(x_2\,n_1 - x_1\,n_2) \tag{73}$$

Si potra' allora esprimere la terza, ed ultima, componente di spostamento come:

$$w_3 = d_3\,\Psi\,(x_1,\,x_2) \tag{74}$$

con Ψ funzione armonica su Σ:

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} = 0 \tag{75}$$

e con derivata normale assegnata al contorno Γ:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = x_2\,n_1 - x_1\,n_2 \tag{76}$$

■ Il campo di spostamenti di De Saint-Venant

Gli spostamenti finali, quelli che derivati rispetto ad x_3 forniscono un moto rigido, sono allora forniti da:

$$u_1 = d_2\,\frac{x_3^2}{2} - d_3\,x_2\,x_3 - \nu\left(\frac{d_2}{2}\,(x_2^2 - x_1^2) + d_1\,x_1\,x_2 + c_3\,x_1\right) \tag{77}$$

$$u_2 = d_3\, x_1\, x_3 - d_1 \frac{x_3^2}{2} - \nu \left(\frac{d_1}{2} (x_2^2 - x_1^2) - d_2\, x_1\, x_2 + c_3\, x_2 \right) \tag{78}$$

$$u_3 = c_3\, x_3 + d_1\, x_2\, x_3 - d_2\, x_1\, x_3 + d_3\, \Psi\, (x_1,\, x_2) \tag{79}$$

- **Il problema dell'estensione**

Ponendo $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, si ottiene la prima soluzione di De Saint-Venant:

$$u_1 = -\nu\, c_3\, x_1 \tag{80}$$

$$u_2 = -\nu\, c_3\, x_2 \tag{81}$$

$$u_3 = c_3\, x_3 \tag{82}$$

- **Il problema della flessione nel piano**

Ponendo $d_2 = d_3 = c_3 = 0$, si ottiene la seconda soluzione di De Saint-Venant:

$$u_1 = -\nu\, d_1\, x_1\, x_2 \tag{83}$$

$$u_2 = d_1 \frac{\nu}{2} \left(x_1^2 - x_2^2 - \frac{x_3^2}{\nu} \right) \tag{84}$$

$$u_3 = d_1\, x_2\, x_3 \tag{85}$$

- **Il problema della flessione fuori del piano**

Ponendo $d_1 = d_3 = c_3 = 0$, si ottiene la terza soluzione di De Saint-Venant:

$$u_1 = d_2 \frac{\nu}{2} \left(x_1^2 - x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu} \right) \tag{86}$$

$$u_2 = \nu\, d_2\, x_1\, x_2 \tag{87}$$

$$u_3 = -d_2\, x_1\, x_3 \tag{88}$$

- **Il problema della torsione**

Ponendo infine $d_1 = d_2 = c_3 = 0$, si ottiene la quarta soluzione di De Saint-Venant:

$$u_1 = -d_3\, x_2\, x_3 \tag{89}$$

$$u_2 = d_3\, x_1\, x_3 \tag{90}$$

$$u_3 = d_3\, \Psi\, (x_1,\, x_2) \tag{91}$$

- **La soluzione generale del problema di estensione-flessione-torsione**

Per enfatizzare il carattere della soluzione generale (77-79) come combinazione lineare dei quattro casi elementari di De Saint-Venant e' possibile esprimere sinteticamente la suddetta soluzione generale come:

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{u}^{(1)} + a_2 \mathbf{u}^{(2)} + a_3 \mathbf{u}^{(3)} + a_4 \mathbf{u}^{(4)} = \sum_{i=1}^{4} a_i \mathbf{u}^{(i)} \tag{92}$$

con :

$$a_1 = c_3; \ u_1^{(1)} = -\nu x_1; \ u_2^{(1)} = -\nu x_2; \ u_3^{(1)} = x_3 \tag{93}$$

$$a_2 = d_1; \ u_1^{(2)} = -\nu x_1 x_2; \ u_2^{(2)} = \frac{\nu}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 - \frac{x_3^2}{\nu}\right); \ u_3^{(2)} = x_2 x_3 \tag{94}$$

$$a_3 = d_2; \ u_1^{(3)} = \frac{\nu}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu}\right); \ u_2^{(3)} = \nu x_1 x_2; \ u_3^{(3)} = -x_1 x_3 \tag{95}$$

$$a_4 = d_3; \ u_1^{(4)} = -x_2 x_3; \ u_2^{(4)} = x_1 x_3; \ u_3^{(4)} = \Psi(x_1, x_2) \tag{96}$$

Qualora si voglia mettere in evidenza la dipendenza della soluzione dalle costanti a_i si potra' scrivere **u = u(a)**, dove a e' il vettore di ordine quattro delle costanti della combinazione lineare.

■ Il significato fisico delle costanti a_i

Per dare un significato fisico alle quattro costanti che compaiono nelle (77-79) si puo' ricavare, a partire da esse, deformazioni e tensioni, e poi calcolare le c.s.e. sulla base Σ_1 . Le deformazioni saranno:

$$e_{11} = \nu d_2 x_1 - \nu d_1 x_2 - \nu c_3 \tag{97}$$

$$e_{22} = -\nu d_1 x_2 - \nu d_2 x_1 - \nu c_3 = e_{11} \tag{98}$$

$$e_{33} = d_1 x_2 - d_2 x_1 + c_3 = -\frac{e_{11}}{\nu} \tag{99}$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(-d_3 x_3 - \nu d_2 x_2 - \nu d_1 x_1 + d_3 x_3 + \nu d_2 x_2 + \nu d_1 x_1\right) = 0 \tag{100}$$

$$e_{13} = \frac{d_3}{2}\left(-x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}\right) \tag{101}$$

$$e_{23} = \frac{d_3}{2}\left(x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}\right) \tag{102}$$

Ne segue:

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = \left(2 - \frac{1}{\nu}\right) e_{11} = -\frac{1 - 2\nu}{\nu} e_{11} \tag{103}$$

e quindi le tensioni saranno fornite da:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} e_{11} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(e_{11} + e_{22} + e_{33}) = 0 \tag{104}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1+\nu} e_{22} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(e_{11} + e_{22} + e_{33}) = 0 \tag{105}$$

$$\sigma_{12} = 0 \tag{106}$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)} d_3 \left(-x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}\right) \tag{107}$$

$$\sigma_{23} = \frac{E}{2(1+\nu)} d_3 \left(x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) \tag{108}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} e_{33} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (1-2\nu) e_{33} = \\ &Ee_{33} = E(d_1 x_2 - d_2 x_1 + c_3) \end{aligned} \tag{109}$$

Ne segue che le caratteristiche della sollecitazione esterna sulla sezione Σ_1 saranno fornite da:

$$E \int_{\Sigma_1} (d_1 x_2 - d_2 x_1 + c_3) \, dA = -F_3^{(1)} \tag{110}$$

$$E \int_{\Sigma_1} (d_1 x_2 - d_2 x_1 + c_3) x_2 \, dA = -\mathcal{M}_1^{(1)} \tag{111}$$

$$E \int_{\Sigma_1} (d_1 x_2 - d_2 x_1 + c_3) x_1 \, dA = \mathcal{M}_2^{(1)} \tag{112}$$

$$\mu \, d_3 \int_{\Sigma_1} \left(x_1^2 + x_2^2 + x_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) dA = -\mathcal{M}_3^{(1)} \tag{113}$$

Infine, introducendo i momenti statici:

$$S_2 = \int_{\Sigma_1} x_1 \, dA; \; S_1 = \int_{\Sigma_1} x_2 \, dA; \tag{114}$$

i momenti d'inerzia e centrifugo:

$$I_2 = \int_{\Sigma_1} x_1^2 \, dA; \; I_1 = \int_{\Sigma_1} x_2^2 \, dA; \; I_{12} = \int_{\Sigma_1} x_1 x_2 \, dA; \tag{115}$$

e l'integrale:

$$D = \int_{\Sigma_1} \left(x_1^2 + x_2^2 + x_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) dA \tag{116}$$

le (110-113) divengono un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite c_3, d_1, d_2 e d_3:

$$E(d_1 S_1 - d_2 S_2 + c_3 A) = -F_3^{(1)} \tag{117}$$

$$E(d_1 I_1 - d_2 I_{12} + c_3 S_1) = -\mathcal{M}_1^{(1)} \tag{118}$$

$$E(d_1 I_{12} - d_2 I_2 + c_3 S_2) = \mathcal{M}_2^{(1)} \tag{119}$$

$$\mu \, d_3 D = -\mathcal{M}_3^{(1)} \tag{120}$$

Utilizzando le prime delle (93-96) si potra' anche scrivere, se si vuole evidenziare il ruolo delle costanti:

$$E(a_2 S_1 - a_3 S_2 + a_1 A) = -F_3^{(1)} \tag{121}$$

$$E(a_2 I_1 - a_3 I_{12} + a_1 S_1) = -\mathcal{M}_1^{(1)} \tag{122}$$

$$E(a_2 I_{12} - a_3 I_2 + a_1 S_2) = \mathcal{M}_2^{(1)} \tag{123}$$

$$\mu\, a_4\, D = -\mathcal{M}_3^{(1)} \tag{124}$$

Si noti che scegliendo l'origine degli assi coincidente col baricentro della sezione si vengono ad annullare i momenti statici, e ruotando gli assi x_1 ed x_2 fino a portarli a coincidere con gli assi principali di inerzia si viene ad annullare anche il momento centrifugo, sicche' le quattro equazioni precedenti si disaccoppiano.

La costruzione delle soluzioni relative al taglio

Costruite le soluzioni per i problemi di classe $\mathcal{K}_1$ sembra naturale utilizzarle anche per ottenere un punto di partenza per le soluzioni della classe $\mathcal{K}_2$. Il legame e' fornito dal Corollario 2, e dalla (26) sembra naturale cercare una soluzione del problema del taglio nella forma:

$$\mathbf{v} = \int_0^{x_3} \mathbf{u}\,(\mathbf{b})\, dx_3 + \mathbf{u}\,(\mathbf{c}) + \mathbf{w}\,(x_1,\, x_2) \tag{125}$$

dove **b** e **c** sono due vettori di costanti, di ordine quattro, che andranno determinati, insieme al campo vettoriale **w**, in modo da risolvere il problema del taglio.

Si consideri preliminarmente che, per il corollario 2, **u**(**b**) e' soluzione del problema di estensione-flessione-torsione con caratteristiche $(0,\ F_2^{(1)},\ -F_1^{(1)},\ 0)$, e quindi dovra' essere:

$$E\,(b_2\, S_1 - b_3\, S_2 + b_1\, A) = 0 \tag{126}$$

$$E\,(b_2\, I_1 - b_3\, I_{12} + b_1\, S_1) = -F_2^{(1)} \tag{127}$$

$$E\,(b_2\, I_{12} - b_3\, I_2 + b_1\, S_2) = -F_1^{(1)} \tag{128}$$

$$b_4 = 0 \tag{129}$$

Cio' premesso, la (125) si scrive esplicitamente:

$$\begin{aligned} v_1 = {} & \int_0^{x_3} \left(-b_1\, \nu\, x_1 - b_2\, \nu\, x_1\, x_2 + b_3\, \frac{\nu}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu}\right)\right) dx_3 - c_1\, \nu\, x_1 - \\ & c_2\, \nu\, x_1\, x_2 + c_3\, \frac{\nu}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu}\right) - c_4\, x_2\, x_3 + w_1\,(x_1,\, x_2) \end{aligned} \tag{130}$$

$$\begin{aligned} v_2 = {} & \int_0^{x_3} \left(-b_1\, \nu\, x_2 + b_2\, \frac{\nu}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 - \frac{x_3^2}{\nu}\right) + b_3\, \nu\, x_1\, x_2\right) dx_3 - \\ & c_1\, \nu\, x_2 + c_2\, \frac{\nu}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 - \frac{x_3^2}{\nu}\right) + c_3\, \nu\, x_1\, x_2 + c_4\, x_1\, x_3 + w_2\,(x_1,\, x_2) \end{aligned} \tag{131}$$

$$\begin{aligned} v_3 = {} & \int_0^{x_3} (b_1\, x_3 + b_2\, x_2\, x_3 - b_3\, x_1\, x_3)\, dx_3 + \\ & c_1\, x_3 + c_2\, x_2\, x_3 - c_3\, x_1\, x_3 + c_4\, \Psi\,(x_1,\, x_2) + \phi\,(x_1,\, x_2) \end{aligned} \tag{132}$$

avendo gia' utilizzato $b_4 = 0$, ed avendo posto $\phi = w_3$. Integrando si ha:

$$v_1 = -b_1 \nu x_1 x_3 - b_2 \nu x_1 x_2 x_3 + b_3 \frac{\nu}{2}\left(x_1^2 x_3 - x_2^2 x_3 + \frac{x_3^3}{3\nu}\right) - c_1 \nu x_1 - c_2 \nu x_1 x_2 + c_3 \frac{\nu}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 + \frac{x_3^2}{\nu}\right) - c_4 x_2 x_3 + w_1(x_1, x_2) \tag{133}$$

$$v_2 = -b_1 \nu x_2 x_3 + b_2 \frac{\nu}{2}\left(x_1^2 x_3 - x_2^2 x_3 - \frac{x_3^3}{3\nu}\right) + b_3 \nu x_1 x_2 x_3 - c_1 \nu x_2 + c_2 \frac{\nu}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 - \frac{x_3^2}{\nu}\right) + c_3 \nu x_1 x_2 + c_4 x_1 x_3 + w_2(x_1, x_2) \tag{134}$$

$$v_3 = b_1 \frac{x_3^2}{2} + b_2 x_2 \frac{x_3^2}{2} - b_3 x_1 \frac{x_3^2}{2} + c_1 x_3 + c_2 x_2 x_3 - c_3 x_1 x_3 + c_4 \Psi(x_1, x_2) + \phi(x_1, x_2) \tag{135}$$

Le deformazioni connesse con questa terna di spostamenti sono:

$$e_{11} = -b_1 \nu x_3 - b_2 \nu x_2 x_3 + b_3 \nu x_1 x_3 - c_1 \nu - c_2 \nu x_2 + c_3 \nu x_1 + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \tag{136}$$

$$e_{22} = -b_1 \nu x_3 - b_2 \nu x_2 x_3 + b_3 \nu x_1 x_3 - c_1 \nu - c_2 \nu x_2 + c_3 \nu x_1 + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \tag{137}$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(-b_2 \nu x_1 x_3 - b_3 \nu x_2 x_3 - c_2 \nu x_1 - c_3 \nu x_2 - c_4 x_3 + \frac{\partial w_1}{\partial x_2} + b_2 \nu x_1 x_3 + b_3 \nu x_2 x_3 + c_2 \nu x_1 + c_3 \nu x_2 + c_4 x_3 + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right) \tag{138}$$

$$e_{13} = \frac{1}{2}\left(-b_1 \nu x_1 - b_2 \nu x_1 x_2 + b_3 \frac{\nu}{2}(x_1^2 - x_2^2) - c_4 x_2 + c_4 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) \tag{139}$$

$$e_{23} = \frac{1}{2}\left(-b_1 \nu x_2 + b_2 \frac{\nu}{2}(x_1^2 - x_2^2) + b_3 \nu x_1 x_2 + c_4 x_1 + c_4 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) \tag{140}$$

$$e_{33} = b_1 x_3 + b_2 x_2 x_3 - b_3 x_1 x_3 + c_1 + c_2 x_2 - c_3 x_1 \tag{141}$$

da cui subito:

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = (1 - 2\nu)(b_1 x_3 + b_2 x_2 x_3 - b_3 x_1 x_3 + c_1 + c_2 x_2 - c_3 x_1) + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} \tag{142}$$

e le corrispondenti tensioni sono fornite dalla legge di Hooke:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu}\left(e_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu}(e_{11} + e_{22} + e_{33})\right) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right) \tag{143}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1+\nu}\left(e_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu}(e_{11} + e_{22} + e_{33})\right) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right) = \sigma_{11} \tag{144}$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right) \tag{145}$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \left(-b_1\,\nu\,x_1 - b_2\,\nu\,x_1\,x_2 + b_3\,\frac{\nu}{2}\,(x_1^2 - x_2^2) - c_4\,x_2 + c_4\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) \tag{146}$$

$$\sigma_{23} = \frac{E}{2\,(1+\nu)} \left(-b_1\,\nu\,x_2 + b_2\,\frac{\nu}{2}\,(x_1^2 - x_2^2) + b_3\,\nu\,x_1\,x_2 + c_4\,x_1 + c_4\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right) \tag{147}$$

$$\sigma_{33} = E\,(b_1\,x_3 + b_2\,x_2\,x_3 - b_3\,x_1\,x_3 + c_1 + c_2\,x_2 - c_3\,x_1) + \frac{E\nu}{(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right) \tag{148}$$

Le prime due equazioni indefinite dell'equilibrio si scrivono:

$$\frac{\nu}{1-2\,\nu}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1\,\partial x_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1\,\partial x_2}\right) = 0 \tag{149}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1\,\partial x_2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}\right) = 0 \tag{150}$$

con condizioni al contorno fornite da:

$$\frac{\nu}{1-2\,\nu}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right) n_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right) n_2 = 0 \tag{151}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right) n_1 + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right) n_2 = 0 \tag{152}$$

E' questo un problema elastico piano corrispondente a forze di massa nulle e forze superficiali nulle. Ne segue che la soluzione sara', a meno di un ininfluentre moto rigido:

$$w_1 = 0;\; w_2 = 0 \tag{153}$$

La terza equazione indefinita dell'equilibrio porta invece a scrivere:

$$\frac{E}{2\,(1+\nu)}\left(-b_1\,\nu - b_2\,\nu\,x_2 + b_3\,\nu\,x_1 + c_4\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} - b_1\,\nu - b_2\,\nu\,x_2 + b_3\,\nu\,x_1 + c_4\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}\right) + E\,(b_1 + b_2\,x_2 - b_3\,x_1) = 0 \tag{154}$$

da cui:

$$\Delta\phi = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}\right) = -2\,(b_1 + b_2\,x_2 - b_3\,x_1) \tag{155}$$

con la corrispondente condizione ai limiti:

$$\left(-b_1\,\nu\,x_1 - b_2\,\nu\,x_1\,x_2 + b_3\,\frac{\nu}{2}\,(x_1^2 - x_2^2) - c_4\,x_2 + c_4\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) n_1 + \left(-b_1\,\nu\,x_2 + b_2\,\frac{\nu}{2}\,(x_1^2 - x_2^2) + b_3\,\nu\,x_1\,x_2 + c_4\,x_1 + c_4\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right) n_2 = 0 \tag{156}$$

che si semplifica in:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \left(b_1\,\nu\,x_1 - b_2\,\nu\,x_1\,x_2 - b_3\,\frac{\nu}{2}\,(x_1^2 - x_2^2)\right) n_1 + \left(b_1\,\nu\,x_2 - b_2\,\frac{\nu}{2}\,(x_1^2 - x_2^2) - b_3\,\nu\,x_1\,x_2\right) n_2 \tag{157}$$

Occorre anche imporre che sulla sezione retta Σ_1 le caratteristiche della sollecitazione esterna si riducano ai due sforzi di taglio, e che quindi sia:

$$\int_{\Sigma_1} (c_1 + c_2\,x_2 - c_3\,x_1)\,dA = 0 \tag{158}$$

$$\int_{\Sigma_1} (c_1 + c_2\,x_2 - c_3\,x_1)\,x_1\,dA = 0 \tag{159}$$

$$\int_{\Sigma_1} (c_1 + c_2\,x_2 - c_3\,x_1)\,x_2\,dA = 0 \tag{160}$$

$$\int_{\Sigma_1} \left(x_1\left(b_2\,\frac{\nu}{2}\,(x_1^2 - x_2^2) + b_3\,\nu\,x_1\,x_2 + c_4\,x_1 + c_4\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right) - x_2\left(-b_2\,\nu\,x_1\,x_2 + b_3\,\frac{\nu}{2}\,(x_1^2 - x_2^2) - c_4\,x_2 + c_4\,\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)\right) dA = 0 \tag{161}$$

ossia:

$$c_1\,A + c_2\,S_1 - c_3\,S_2 = 0 \tag{162}$$

$$c_1\,S_2 + c_2\,I_{12} - c_3\,I_2 = 0 \tag{163}$$

$$c_1\,S_1 + c_2\,I_2 - c_3\,I_{12} \tag{164}$$

$$c_4\,D = -\int_{\Sigma_1} \left(x_1\left(b_2\,\frac{\nu}{2}\,(x_1^2 - x_2^2) + b_3\,\nu\,x_1\,x_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right) - x_2\left(-b_2\,\nu\,x_1\,x_2 + b_3\,\frac{\nu}{2}\,(x_1^2 - x_2^2) + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)\right) dA \tag{165}$$

da cui $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, e c_4 calcolabile a partire dalla (165).

In definitiva, allora, la soluzione ricercata sara':

$$v_1 = -b_1\,\nu\,x_1\,x_3 - b_2\,\nu\,x_1\,x_2\,x_3 + b_3\,\frac{\nu}{2}\left(x_1^2\,x_3 - x_2^2\,x_3 + \frac{x_3^3}{3\,\nu}\right) - c_4\,x_2\,x_3 \tag{166}$$

$$v_2 = -b_1\,\nu\,x_2\,x_3 + b_2\,\frac{\nu}{2}\left(x_1^2\,x_3 - x_2^2\,x_3 - \frac{x_3^3}{3\,\nu}\right) + b_3\,\nu\,x_1\,x_2\,x_3 + c_4\,x_1\,x_3 \tag{167}$$

$$v_3 = b_1\,\frac{x_3^2}{2} + b_2\,x_2\,\frac{x_3^2}{2} - b_3\,x_1\,\frac{x_3^2}{2} + c_4\,\Psi\,(x_1, x_2) + \phi\,(x_1, x_2) \tag{168}$$

con b_1, b_2 e b_3 calcolabili a partire dalle (126-128). Come sempre, la soluzione classica di De Saint-Venant si ricava imponendo che gli assi x_1 ed x_2 siano centrali di inerzia. In tal ipotesi si ha:

$$EA\,b_1 = 0 \tag{169}$$

$$EI_1\,b_2 = -F_2^{(1)} \tag{170}$$