Complementi 8 - Ancora su equilibrio e compatibilita'

[Ultima revisione: 22 gennaio 2009]

In questo notebook si vogliono illustare alcune conseguenze del principio dei lavori virtuali, ed alcune proprieta' dei tensori delle tensioni e delle deformazioni.

Il principio dei lavori virtuali e gli spostamenti rigidi

Si consideri un corpo B, soggetto alle forze di massa **X**, alle forze superficiali **p** sulla parte di frontiera ∂B_1 e vincolata in modo perfetto sulla restante parte di frontiera ∂B_2. Il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$\int_B \sigma_{ij}\, e_{ij}\, dV = \int_B X_i\, u_i\, dV + \int_{\partial B_1} p_i\, u_i\, ds \tag{1}$$

per qualsiasi sestupla di σ_{ij} staticamente ammissibile, e per qualsiasi terna u_i geometricamente ammissibile. Le e_{ij} sono le deformazioni generate dagli spostamenti u_i attraverso le ben note regole di derivazione, e corrispondono alla parte simmetrica del gradiente di deformazione.

Per un campo di spostamenti u_i rigidi, le corrispondenti deformazioni si annullano, e quindi il principio dei lavori virtuali si riduce a:

$$\int_B X_i\, u_i\, dV + \int_{\partial B_1} p_i\, u_i\, ds = 0 \tag{2}$$

esprimente l'annullarsi del lavoro virtuale compiuto dalle forze agenti sul corpo. Al riguardo, puo' dimostrarsi la seguente:

Prop. Si consideri un corpo B, soggetto alle forze di massa **X**, alle forze superficiali **p** sulla parte di frontiera ∂B_1 e vincolata in modo perfetto sulla restante parte di frontiera ∂B_2. Sara':

$$\int_B X_i\, u_i\, dV + \int_{\partial B_1} p_i\, u_i\, ds = 0 \tag{3}$$

per qualsiasi spostamento rigido u_i, se e solo se le forze risultanti ed i momenti risultanti sono nulle:

$$\begin{aligned} &\int_B X_i\, dV + \int_{\partial B_1} p_i\, ds = 0 \\ &\int_B r_i \times X_i\, dV + \int_{\partial B_1} r_i \times p_i\, ds = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Dim. Lo spostamento rigido u_i e' somma di una traslazione e di una rotazione rigida:

$$u_i = u_{i0} + \Omega_{ij}\, r_j \tag{5}$$

ed Ω_{ij} antisimmetrica. Dalla (3) si ha allora:

$$\int_B X_i u_{i0}\, dV + \int_{\partial B_1} p_i u_{i0}\, ds + \int_B X_i \Omega_{ij} r_j\, dV + \int_{\partial B_1} p_i \Omega_{ij} r_j\, ds = 0 \qquad (6)$$

ed ancora:

$$u_{i0}\left(\int_B X_i\, dV + \int_{\partial B_1} p_i\, ds\right) + \Omega_{ij}\left(\int_B X_i r_j\, dV + \int_{\partial B_1} p_i r_j\, ds\right) = 0 \qquad (7)$$

Per l'antisimmetria di Ω_{ij}, sara' ancora:

$$u_{i0}\left(\int_B X_i\, dV + \int_{\partial B_1} p_i\, ds\right) + \Omega_{ij}\, \text{skw}\left(\int_B X_i r_j\, dV + \int_{\partial B_1} p_i r_j\, ds\right) = 0 \qquad (8)$$

e per l'arbitrarieta' di u_{i0} e di Ω_{ij} dovra' essere:

$$\begin{aligned} &\int_B X_i\, dV + \int_{\partial B_1} p_i\, ds = 0 \\ &\text{skw}\left(\int_B X_i r_j\, dV + \int_{\partial B_1} p_i r_j\, ds\right) = 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Esplicitando la seconda uguaglianza si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & \int_B (X_1 r_2 - X_2 r_1)\, dV & \int_B (X_1 r_3 - X_3 r_1)\, dV \\ \int_B (X_2 r_1 - X_1 r_2)\, dV & 0 & \int_B (X_2 r_3 - X_3 r_2)\, dV \\ \int_B (X_3 r_1 - X_1 r_3)\, dV & \int_B (X_3 r_2 - X_2 r_3)\, dV & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \int_{\partial B_1} (p_1 r_2 - p_2 r_1)\, ds & \int_{\partial B_1} (p_1 r_3 - p_3 r_1)\, ds \\ \int_{\partial B_1} (p_2 r_1 - p_1 r_2)\, ds & 0 & \int_{\partial B_1} (p_2 r_3 - p_3 r_2)\, ds \\ \int_{\partial B_1} (p_3 r_1 - p_1 r_3)\, ds & \int_{\partial B_1} (p_3 r_2 - p_2 r_3)\, ds & 0 \end{pmatrix} = \qquad (10)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

equivalenti alle tre uguaglianze:

$$\begin{aligned} &\int_B (X_1 r_2 - X_2 r_1)\, dV + \int_{\partial B_1} (p_1 r_2 - p_2 r_1)\, ds = 0 \\ &\int_B (X_1 r_3 - X_3 r_1)\, dV + \int_{\partial B_1} (p_1 r_3 - p_3 r_1)\, ds = 0 \\ &\int_B (X_2 r_3 - X_3 r_2)\, dV + \int_{\partial B_1} (p_2 r_3 - p_3 r_2)\, ds = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

sintetizzabili nelle:

$$\int_B r_i \times X_i\, dV + \int_{\partial B_1} r_i \times p_i\, ds = 0 \; \blacksquare \qquad (12)$$

Nota - Il risultato precedente e' dovuto a Gabrio Piola [Piola]

Figura 1 - La statua di Piola nel cortile di Brera

Una generalizzazione del principio dei lavori virtuali

E' possibile dimostrare la seguente:

Prop. Si consideri un corpo B, soggetto alle forze di massa **X**, alle forze superficiali **p** sulla parte di frontiera ∂B_1 e vincolata in modo perfetto sulla restante parte di frontiera ∂B_2. Sara':

$$\int_B \sigma_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial u_k} dV = \int_B X_i u_j dV + \int_{\partial B_1} p_i u_j ds \tag{13}$$

o, in termini vettoriali:

$$\int_B \mathbf{SH} dV = \int_B \mathbf{u} \otimes \mathbf{X} dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{u} \otimes \mathbf{p} ds \tag{14}$$

per qualsiasi stato tensionale $\mathbf{S} = \sigma_{ij}$ staticamente ammissibile e qualsiasi spostamento **u** geometricamente ammissibili.La matrice **H** e' la matrice del gradiente di spostamento, ed il simbolo $\otimes$ indica il prodotto esterno.

Dim. Per il teorema di Cauchy-Poisson si ha:

$$\int_{\partial B_1} p_i u_j ds = \int_{\partial B_1} \sigma_{ik} n_k u_j ds \tag{15}$$

e per il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial B_1} \sigma_{ik}\, n_k\, u_j\, ds = \int_B \frac{\partial(\sigma_{ik}\, u_j)}{\partial u_k} dV = \int_B \sigma_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial u_k} dV + \int_B u_j \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial u_k} dV \qquad (16)$$

ed infine, per le equazioni indefinite dell'equilibrio:

$$\int_{\partial B_1} p_i\, u_j\, ds = \int_B \sigma_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial u_k} dV - \int_B X_i\, u_j\, dV \blacksquare \qquad (17)$$

Nota - Il precedente teorema, dovuto ad Antonio Signorini [Signorini] e' da considerare una generalizzazione del principio dei lavori virtuali, nel senso che tale principio si ritrova contraendo gli indici i e j nella (13).

Una immediata conseguenza della proposizione precedente si ottiene scegliendo il particolare spostamento **u** = **r**, caratterizzato dall'essere **H** = **I**. Con questa scelta la proposizione precedente diviene:

$$\int_B \mathbf{S} dV = \int_B \mathbf{r} \otimes \mathbf{X} dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} ds \qquad (18)$$

Definendo la *tensione media* nel corpo B, di volume V,:

$$\bar{\mathbf{S}}(B) = \frac{1}{V} \int_B \mathbf{S} dV \qquad (19)$$

si ha subito che la tensione media dipende solo dalle forze applicate:

$$\bar{\mathbf{S}}(B) = \frac{1}{V} \left(\int_B \mathbf{r} \otimes \mathbf{X} dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{r} \otimes \mathbf{p} ds \right) \qquad (20)$$

Una formulazione alternativa delle equazioni di compatibilita'

Utilizzando la rappresentazione tensionale di Beltrami, si puo' dare una utile caratterizzazione degli stati deformativi che soddisfano le condizioni di compatibilita' di De Saint - Venant:

Prop. - Sia **E** = e_{ij} un tensore simmetrico del secondo ordine sul corpo B, e si supponga che sia:

$$\int_B \sigma_{ij}\, e_{ij}\, dV = 0 \qquad (21)$$

per ogni campo tensoriale simmetrico **S** = σ_{ij} che si annulli *vicino* alla frontiera ∂B, [Nota] e che soddisfi le equazioni indefinite dell'equilibrio in assenza di forze di massa, ossia tale che div **S** = 0.
Allora il tensore E soddisfa le equazioni di compatibilita' di De Saint-Venant.

Dim.- Si esprima il tensore simmetrico **S** secondo la rappresentazione di Beltrami:

$$\sigma_{ij} = \epsilon_{imn}\, \epsilon_{jpq} \frac{\partial^2 A_{mp}}{\partial x_n\, \partial x_q} \qquad (22)$$

con **A** = A_{ij} tensore simmetrico del secondo ordine. Utilizzando questa rappresentazione la (21) diviene:

$$\epsilon_{imn}\, \epsilon_{jpq} \int_B \frac{\partial^2 A_{mp}}{\partial x_n\, \partial x_q} e_{ij}\, dV = 0 \qquad (23)$$

Applicando due volte il teorema della divergenza, e sfruttando l'annullarsi di **A** e delle sue derivate sulla frontiera di B, si giunge a scrivere:

$$\in_{imn} \in_{jpq} \int_B \frac{\partial^2 A_{mp}}{\partial x_n \partial x_q} e_{ij}\, dV = \in_{imn} \in_{jpq} \int_B A_{ij} \frac{\partial^2 e_{mp}}{\partial x_n \partial x_q} dV = 0 \qquad (24)$$

da cui, per l'arbitrarieta' di **A**:

$$\in_{imn} \in_{jpq} \frac{\partial^2 e_{mp}}{\partial x_n \partial x_q} = 0 \; \blacksquare \qquad (25)$$

Nota La proposizione precedente e' dovuta a Donati [Donati]

Figura 2 - Luigi Donati

Note

[Piola] - "La meccanica dei corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni", Opusc. Mat. Fis. di Diversi Autori, Giusti, 1, 201-236 (1833). Sulla figura di Gabrio Piola si veda Danilo Capecchi, "Gabrio Piola e la meccanica italiana agli inizi dell'Ottocento", riportata nel sito http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk" alla sezione Ricerche [Torna al testo]

[Signorini] - "Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui", Ann. Scuola Normale Pisa, 2, (2), 231-257 (1933) [Torna al testo]

[Nota] - La definizione formale di funzione f che si annulla vicino alla frontiera ∂B di B prevede l'esistenza di un intorno N di ∂B, su cui f = 0. [Torna al testo]

[Donati] - "Illustrazione al teorema di Menabrea", Mem.Accad.Sci. Bologna, 10(4), 267-274 (1890) [Torna al testo]