Complementi 7 - Le funzioni di tensione

[Ultima revisione: 17 gennaio 2009]

In questo notebook si vogliono studiare le equazioni indefinite dell'equilibrio in assenza di forze di massa:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{1}$$

o, in termini vettoriali:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{S} = 0, \quad S = S^T \tag{2}$$

Si illustreranno alcune possibili forme di soluzioni, in termini di *funzioni di tensione,* intendendo con tale termine un qualsiasi insieme di funzioni **A,** tale che:

$$\begin{aligned} S &= \mathcal{L}(A) \\ \mathrm{div}\,\mathcal{L}(A) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

L'operatore $\mathcal{L}$ e' un generico operatore differenziale, che puo' essere definito attraverso il seguente teorema di Beltrami.

La definizione generale di funzione di tensione

Si puo' dimostrare la seguente:

Prop. - Sia **A** un campo tensoriale simmetrico, e sia $\mathcal{L}$ = curl curl. Con tale scelta dell'operatore, le tensioni **S** = curl curl **A** soddisfano le equazioni di equilibrio in assenza di forze di massa

Dim. - La simmetria delle tensioni e' dimostrabile in base alla terza proprieta' notevole riportata nel Complementi 6 - Richiami di analisi vettoriale:

$$(\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,A)^T = \mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,A^T \tag{4}$$

non appena si introduca l'ipotesi di simmetria su A. La seconda proprieta' notevole e' invece:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{curl}\,T = \mathrm{curl}\,\mathrm{div}\,T^T \tag{5}$$

e quindi:

$$\mathrm{div}\,S = \mathrm{div}\,\mathrm{curl}\,(\mathrm{curl}\,A) = \mathrm{curl}\,\mathrm{div}\,(\mathrm{curl}\,A)^T \tag{6}$$

Ma per la prima proprieta' notevole:

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{curl}\,A)^T = 0 \tag{7}$$

e quindi si e' dimostrato che:

$$\operatorname{div} S = 0 \blacksquare \tag{8}$$

Assegnato quindi un tensore simmetrico **A**, si ottiene immediatamente il campo tensionale:

$$\sigma_{ij} = \epsilon_{imn} \epsilon_{jpq} \frac{\partial^2 A_{mn}}{\partial x_p \partial x_q} \tag{9}$$

che soddisfa le equazioni indefinite dell'equilibrio, in assenza di forze di massa. Alcune scelte particolari per **A** portano a funzioni di tensione classiche:

Le (9) si scrivono esplicitamente, ipotizzando gia' la simmetria di A:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 A_{22}}{\partial x_3 \partial x_3} - 2 \frac{\partial^2 A_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 A_{33}}{\partial x_2 \partial x_2} \tag{10}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial x_3 \partial x_3} - 2 \frac{\partial^2 A_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 A_{33}}{\partial x_1 \partial x_1} \tag{11}$$

$$\sigma_{33} = \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial x_2 \partial x_2} - 2 \frac{\partial^2 A_{21}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 A_{22}}{\partial x_1 \partial x_1} \tag{12}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 A_{12}}{\partial x_3 \partial x_3} + \frac{\partial^2 A_{23}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 A_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 A_{33}}{\partial x_2 \partial x_1} \tag{13}$$

$$\sigma_{13} = \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 A_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 A_{13}}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 A_{23}}{\partial x_2 \partial x_1} \tag{14}$$

$$\sigma_{23} = -\frac{\partial^2 A_{11}}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 A_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 A_{23}}{\partial x_1 \partial x_1} \tag{15}$$

■ La funzione di tensione di Airy

La piu' semplice scelta implica che si possa rappresentare **A** come un singolo scalare:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi \end{pmatrix} \tag{16}$$

ed applicando le (10-15), si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \\ \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Storicamente, questa rappresentazione e' dovuta ad Airy, e permette lo studio degli stati piani. [Airy].

■ La funzione di tensione di Maxwell

Un'altra scelta porta ad una matrice **A** diagonale, quindi definita in termini di tre funzioni scalari:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \tag{18}$$

ed applicando le (10-15), si ha lo stato tensionale:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_2^2} \tag{19}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1^2} \tag{20}$$

$$\sigma_{33} = \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1^2} \tag{21}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 a_3}{\partial x_2 \partial x_1} \tag{22}$$

$$\sigma_{13} = -\frac{\partial^2 a_2}{\partial x_3 \partial x_1} \tag{23}$$

$$\sigma_{23} = -\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_3 \partial x_2} \tag{24}$$

Questa rappresentazione e' un po' piu' recente di quella di Airy, ed e' dovuta a Maxwell. [Maxwell].

■ La funzione di tensione di Morera

La soluzione di Morera e' ancora definita in termini di tre funzioni scalari, ma tali da rendere **A** duale rispetto alla scelta di Maxwell:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

ed applicando le (10-15), si ha lo stato tensionale:

$$\sigma_{11} = -2 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_2 \partial x_3} \tag{26}$$

$$\sigma_{22} = -2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_1 \partial x_3} \tag{27}$$

$$\sigma_{33} = -2 \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{28}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x_3 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2 \partial x_3} \tag{29}$$

$$\sigma_{13} = \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_2 \partial x_1} \tag{30}$$

$$\sigma_{23} = \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_1 \partial x_1} \tag{31}$$

Come detto, questa rappresentazione e' dovuta a Morera [Morera].

Figura 1 - Giacinto Morera

I campi tensionali auto-equilibrati e la completezza della soluzione di Beltrami

Il teorema di Beltrami asserisce che, assegnato un tensore simmetrico **A**, lo stato tensionale **S** = curl curl **A** soddisfa le sei equazioni indefinite di equilibrio in assenza di forze di massa. Sorge naturale allora la domanda: assegnato uno stato tensionale **S** che soddisfi le equazioni di equilibrio in assenza di forze di massa, esiste un tensore simmetrico **A**, tale che **S** = curl curl **A**? La risposta in generale e' negativa, nel senso che esistono stati tensionali che non ammettono la rappresentazione di Beltrami.

Per delucidare ulteriormente la questione, si fornisce la seguente:

Def. - Un stato tensionale **S** sul corpo B e' *auto-equilibrato* se la forza risultante ed il momento risultante si annullano su una generica superficie chiusa Σ:

$$\begin{aligned} &\int_\Sigma \mathbf{Sn}\, dA = 0 \\ &\int_\Sigma \mathbf{x} \times \mathbf{Sn}\, dA = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Ogni stato tensionale auto-equilibrato e' a divergenza nulla, ma non ogni stato tensionale a divergenza nulla e' auto-equilibrato. Piu' precisamente, e' possibile dimostrare la seguente:

Prop - Se la frontiera del corpo B e' costituito da una singola superficie chiusa, allora ogni stato tensionale a divergenza nulla, soddisfacente le equazioni indefinite di equilibrio in assenza di forze di massa, e' anche auto-equilibrato

Per la dimostrazione, si veda ad esempio [Gurtin].

E' anche possibile dimostrare che uno stato tensionale che ammetta la rappresentazione di Beltrami e' necessariamente auto-equilibrato, e che all'inverso ogni stato auto-equilibrato ammette una rappresentazione di Beltrami. In altri termini, la soluzione di Beltrami e' *completa*, limitatamente agli stati tensionali auto-equilibrati. Inoltre, in base alla proposizione precedente, si ha la:

Prop. - Se la frontiera del corpo B e' costituito da una singola superficie chiusa, e se S e' uno stato tensionale a divergenza nulla, allora esiste un tensore A simmetrico tale che S = curl curl A

Note

[Airy] - La rappresentazione di Airy e' contenuta in "On the strains in the interior of beams", Phil. Trans. Roy. Soc. London, 153, 49-80 (1863). L'autobiografia di Airy puo' essere letta sul web, facendo parte del progetto Gutenbrg, al sito www.gutenberg.org [Torna al testo]

[Maxwell] - "On reciprocal diagrams in space, and their relation to Airy's function of stress", Proc. London Math. Soc. (1),2, 58-60, 1863. Il breve lavoro puo' anche leggersi nella sezione Ricerca del sito http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk.[Torna al testo]

[Morera] - "Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo", Atti Accad. Lincei, Rend. 5(1), 137-141 (1892). Una commemorazione di Morera puo' essere letta nella sezione Ricerca del sito http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk.[Torna al testo]

[Gurtin] - In particolare, tutto l'articolo 17 del fondamentale "The Linear Theory of Elasticity", Handbuch der Physik Bd VIa/2 (1968) e' rilevante per questo Complemento. [Torna al testo]

Figura 2 - Morton Gurtin